Мирослав Владимиров Радомиров

КОНСТРУКЦИЯ И СВОЙСТВА НА ХОЛОГРАФСКИ МОДЕЛИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация
за придобиване на научно-образователна степен „доктор“

Научен ръководител:
проф. дфзн Радослав Христов Рашков

СУ „Св. Климент Охридски“
Катедра „Теоретична физика“
Физически факултет

София, 2021 г.

Благодарности

Бих искал да изразя своята дълбока благодарност и признателност към своя научен ръководител проф. дфзн Радослав Рашков, чиято помощ, напътствия и съвети бяха от съществено значение за осъществяването на този дисертационен труд. Изразявам искрена благодарност и към доц. д-р Христо Димов и д-р Цветан Вецов, които активно участваха в процеса на разработване и получаване на основните научни резултати. Признателен съм и на докторант Иво Илиев за полезните беседи по широки въпроси от теоретичната и математическа физика.

Съдържание

Глава 1

Актуалност на тематиката

В съвременната физика съществуват два големи научни подхода за описание на възникващите процеси и явления в природата. От една страна това е квантовата физика, описваща света на атомите и субатомните частици, а от друга страна стои общата теория на относителността (ОТО), описваща гравитационните взаимодействия между космическите обекти. Въпреки, че предвижданията и на двете теории се съгласуват удивително точно с експеримента, то тяхното непротиворечиво обединение в обща математическа рамка все още не е осъществено на практика. Проблемът тук е, че квантовата теория разглежда взаимодействията между обектите чрез обмен на точкови частици, а ОТО описва силата между тях като класическа геометрична кривина на пространство-времето.

За да се съгласуват тези два мирогледа на физиката е необходимо въвеждането на принципно нови научни парадигми. В отговор на това, още от края на 60-те години на миналия век, на сцената на физиката се появява теорията на струните, която има потенциала да осъществи това обединение. Същественото тук е замяната на точкови частици с едномерни струни, чиито квантови моди определят характеристиките на познатите ни частици. В този случай, причинно-следствената връзка на теорията определя броя на измеренията на пространство-времето, а формата на самата струна съществено влияе на вида на взаимодействията, включвайки и гравитона в своя спектър. По този начин гравитацията възниква естествено в теорията.

С течението на времето, освен струни, са открити и други по-високо мерни солитонни обекти, наречени D-брани. Поради своята непертурбативна природа последните играят ключова роля в разкриването на нови и мощни примери за дуалност между на пръв поглед различни теории. От една страна, имаме струнна (гравитационна) теория, живееща в обемащото пространство-време, а от друга страна, на асимптотичната граница на това пространство се намира чисто квантова теория на полето. Връзката между двете системи се определя от речника на т. нар. принцип на холографското съответствие, според който силно-свързана квантова теория на полето е еквивалентна на слабо-свързана гравитационна (струнна) теория и обратно.

Оригиналното съответствие между струни и калибровъчни теории е предложено от Малдасена през 1997 година и е известно още като AdS/CFT съответствие [1, 2, 3]. В тази реализация на съответствието калибровъчната теория се намира на асимптотичната граница на максимално симетрично пространство с отрицателна космологична константа, наречено пространство на анти-де Ситер (AdS). Проблемът тук е наличието на твърде много симетрии, които ни отдалечават от описания на теории като тази на квантовата хромодинамика. Поради тази причина, оригиналното съответствие е обобщено до други типове пространства, които съдържат по-малко симетрии, като по този начин все-повече се доближаваме до реалистична формулировка на теорията.

Едно такова обобщение, което представляват особен интерес за нас, е направено за модели на струни в пространство на Шрьодингер, които притежават нерелативистка група на симетрия [4, 5, 6]. Оказва се, че за такива струнни конфигурации съществуват дуални кондензирани полеви системи като например фермионни модели на Садчев-Йе-Китаев и свръх охладени атоми [7, 8, 9]. Това което ни мотивира да разглеждаме такива модели е именно факта, че в повечето случаи дуалните калибровъчни теории са при силна константа на връзката, която не позволява аналитично да бъдат изследвани много от техните характеристики. От друга страна, техният гравитационен аналог от струнни конфигурации е при слаба константа на връзката, което позволява пертурбативни изчисления, които можем да прехвърлим по дуалност към калибровъчните теории. Последното ни дава възможност да надникнем в непертурбативните свойства на тези полеви модели на кондензирани среди.

Въпреки, че конструкцията на такива системи изглежда ясна, обобщението на холографското съответствие за нерелативисткия сектор е изключително нетривиална задача. Основната цел на дисертационния труд е да се изследват различни струнни конфигурации в пространство-време на Шрьодингер, които ще ни помогнат да разкрием нови черти и свойства на теориите от двете страни на холографското съответствие.

Този дисертационен труд съдържа общо 9 глави изложени в 120 страници. Първите 6 глави са обзорни, имащи за цел да ни въведат в характера на тематиката. Следващите 2 глави (седма и осма) съдържат оригиналните резултати, свързани с изследванията на докторанта по темата на дисертацията. В последната девета глава е направено кратко обобщение на разглежданията в дисертацията и са изложени научните приноси.

Стремейки се към достатъчна строгост и пълнота на изложението в първите две глави сме представили най-основните аспекти на абелевите и неабелевите калибровъчни теории, конформната симетрия, суперсиметрията и тяхното значение за физиката.

В трета глава накратко са разгледани динамиката и спектрите на бозонните струни и суперструни. Въведени са T и S-дуалностите между различните струнни теории.

Четвърта глава е посветена на AdS/CFT съответствието. Разгледани са D-браните, които притежават две взаимно допълващи се описания: като хиперповърхнини със закачени върху тях струни, или като масивни обекти изкривяващи пространството. Показана е връзката между степените на свобода в AdS и в дуалната теория. Разгледано е скаларно поле в обемащото пространство и са получени мащабните размерности на дуалните оператори.

В пета глава е представен експлицитния вид на групата и алгебрата на Шрьодингер. Групата на Шрьодингер представлява нерелативистката конформна група на силно свързани калибровъчни теории. Също така са описани и различните видове TsT трансформации и съответните им дуални теории. Направена е експлицитна TsT трансформация на пространството $AdS_5 \times S^5$ и по този начин е получено пространството на $Schr_5 \times S^5$, чиято дуална теория е инвариантна спрямо групата на Шрьодингер.

В шеста глава е разгледан метод на квазикласическо квантуване на пулсиращи струни в $AdS_5 \times S^5$ пространство. С помощта на този метод са получени конформната и аномалната размерност на операторите от дуалната полева теория.

В седма и осма глава са представени оригиналните резултати, получени от докторанта по темата на дисертационния труд. Тук са разгледани съответно пулсиращи струни в $Schr_5 \times S^5$ и $Schr_5 \times T^{1,1}$. С подходящ избора на анзац за конфигурацията от пулсиращи струни са решени класическите уравнения за движение, след което е приложено квазикласическо квантуване на модела. Последното се свежда до намирането на вълновата функция и енергетичния спектър на частица, движеща се в обемащото пространство. По теория на пертурбациите е получена поправката към енергията, на която съответства аномалната размерност на операторите от дуалната калибровъчна теория.

В последната глава са представени научните приноси на докторанта.

Глава 2

Основни понятия от теория на струните

В тази глава ще направим кратък обзор на струнната теория [10, 11, 12], като първо ще разгледаме класическата релативистка струна, след което ще квантуваме теорията.

2.1 Динамика и спектър на класическа релативистка струна

При движението си в пространство-времето струната замита двумерна повърхнина, наречена мирови лист. Последната се параметризира с един параметър по времето τ и един параметър σ по направление на дължината на струната. Динамичното влагане на тази повърхнина в D-мерно пространство-време може да бъде осъществено чрез действието на Поляков, което има вида

$$S_p = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau\, d\sigma\, \sqrt{-h}\, h^{ab}\, \partial_a X^\mu\, \partial_b X^\nu\, G_{\mu\nu}\,, \tag{2.1}$$

където α' е размерен параметър на Реджи, h_{ab} е индуцираната метрика върху мировия лист, $G_{\mu\nu}(X)$ е метриката на обемащото пространство, а $X^\mu(\tau,\sigma)$ са влагащите функции на струната, които изпълняват уравненията за движение

$$\partial_a\left(\sqrt{-h}\, h^{ab}\, \partial_b X_\mu\right) = 0, \tag{2.2}$$

заедно с условията на Вирасоро

$$G_{\mu\nu}\left(\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu + X'^\mu X'^\nu\right) = 0, \qquad G_{\mu\nu}\,\dot{X}^\mu X'^\nu = 0. \tag{2.3}$$

Тук $\dot{X} = \partial_\tau X$, а $X' = \partial_\sigma X$. В плоско пространство на Минковски $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ и уравненията за движение (2.2) се свеждат до вълновото уравнение

$$\partial_\sigma^2 X^\mu - \partial_\tau^2 X^\mu = 0, \tag{2.4}$$

чиито решения зависят от налагането на съответни гранични условия за краищата на отворени струни и периодични условия за затворени струни. Например, решението при условия на Нойман за отворена струна има вида

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\,\alpha_0^\mu\,\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n}\,e^{-i\,n\,\tau}\cos(n\,\sigma)\,, \tag{2.5}$$

а решението за затворена струна изглежда по следния начин

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + 2\alpha'\,p^\mu\,\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^\mu\,e^{-i\,n\,(\tau+\sigma)} + \bar{\alpha}_n^\mu\,e^{-i\,n\,(\tau-\sigma)}\right). \tag{2.6}$$

В рамките на хамилтоновия формализъм лесно можем да получим класическия спектър на една релативистка струна в термини на осцилаторите

$$\begin{aligned} \text{отворена струна:} \quad & M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \,, \\ \text{затворена струна:} \quad & M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \bar{\alpha}_{-n} \cdot \bar{\alpha}_n) \,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

с наложени стандартни скобки на Поасон

$$\{\alpha^\mu_m, \, \alpha^\nu_n\} = \{\bar{\alpha}^\mu_m, \, \bar{\alpha}^\nu_n\} = i \, m \, \delta_{m+n,0} \, \eta^{\mu\nu} \,, \quad \{\alpha^\mu_m, \, \bar{\alpha}^\nu_n\} = 0, \quad \{x^\nu, \, p^\mu\} = \eta^{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Забелязваме, че квадратът на масата M^2 на струната е положителен и следователно $M = \sqrt{M^2}$ е реално число. Това не се запазва в квантовия случай, в който основното състояние на бозонната струна е тахионно $M^2 < 0$.

2.2 Квантуване на отворена и затворена релативистка струна

Следвайки стандартната рецепта за канонично квантуване, скобките на Поасон стават комутатори, т.е. $[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] = [\bar{\alpha}^\mu_m, \bar{\alpha}^\nu_n] = m \, \delta_{m+n,0} \, \eta^{\mu\nu}$ и $[x^\mu, p^\nu] = i \, \eta^{\mu\nu}$, където осцилаторите са ермитови оператори. Поради нормалното подреждане на операторите в квантовия случай алгебрата на Уит се разширява до алгебра на Вирасоро с централен заряд

$$[L_m, L_n] = (m-n) \, L_{m+n} + \frac{c}{12} \, m \, (m^2 - 1) \, \delta_{m+n, \, 0} \,, \tag{2.9}$$

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n) \, \bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12} \, m \, (m^2 - 1) \, \delta_{m+n, \, 0} \,, \tag{2.10}$$

където $c = D$, а L_m и $\bar{L}_m$ са коефициентите от реда на Лоран за тензора на енергията и импулса. Квантовият спектър за струната има вида

$$M^2_{open} = \frac{1}{\alpha'} \, (N-1) \,, \qquad M^2_{closed} = \frac{4}{\alpha'} \, (N-1) \,, \tag{2.11}$$

където $N = \sum \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \sum n \, N_n$ е операторът на броя на състоянията. Веднага забелязваме, че основното състояние и за двете бозонни струни е тахионно. Този проблем се решава след въвеждането на суперсиметрията и суперструните, в чиито спектри вече не се съдържат тахионни състояния.

2.3 Дуалности в теория на струните

Едно от съществените различия между теория на струните и модел с точкови частици е, че струните позволяват дефинирането на допълнителни симетрии на дуалност, които са следствие от нейната ненулевата дължина. Такива са например S- и T-дуалността, които свързват петте реализации на теорията на струните (тип I, тип IIA, тип IIB, SO(32) и $E_8 \times E_8$ хетеротична теория).

При T-дуалност имаме теория, компактифицирана върху окръжност с радиус R, която е дуална на теория валидна при $1/R$. Такива са суперструните тип IIA и тип IIB, а също и $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$ хетеротичните.

От друга страна, S-дуалността свързва теории с различни режими на константа на връзката. Например, SO(32) хетеротичната суперструна и тип I теорията са S-дуални в 10-мерие, т.е. силно свързана SO(32) хетеротична теория отговаря на слабосвързана тип I струнна теория и обратно, а IIB теорията е самодуална на себе си. Мрежата от подобни симетрии от S- и T-дуалности е показател за съществуването на единна теория, наречена M-теория, включваща в себе си споменатите пет реализации на теория на струните.

Поради значимостта на T-дуалността за нашите научни изследвания, то нека да разгледаме някои от основните ѝ черти. Например, в плоско пространство-време, в което едно от измеренията е компактифицирано под формата на окръжност с радиус R, затворената струна може да се намотава по това измерение и следователно може да се покаже, че квантовият спектър на струната приема вида

$$\alpha' \, M^2 = \alpha' \left(\frac{k}{R} + \left(\frac{w \, R}{\alpha'} \right)^2 \right) + 2 \, N_L + 2 \, N_R - 4 \,, \tag{2.12}$$

където с $w \in \mathbb{Z}$ сме отбелязали броя на намотките, а $N_L = N_R = wk$ са левите и десните моди върху струната. Според свойствата на T-дуалността съществува теория, описваща същата физика, но компактното измерение е с радиус α'/R. Наистина, виждаме че спектърът (2.12) е симетричен при следната размяна

$$k \leftrightarrow w, \quad R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R} \,. \tag{2.13}$$

С други думи, затворената бозонна струна, намотана върху компактно измерение, има еднакъв масов спектър при трансформацията (2.13).

В общия случай на изкривен фон с полета $G_{\mu\nu}(X)$, $B_{\mu\nu}(X)$ и $\Phi(X)$ трябва да се отчете и съответната промяна по направление на измерението по което се извършва T-дуалността. Нека това направление е y, тогава имаме следните преобразувания на T-дуалност, наречени правила на Бушер:

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \frac{1}{2} \, \log G_{yy} \,, \tag{2.14}$$

$$\tilde{B}_{y\mu} = \frac{G_{y\mu}}{G_{yy}}, \quad \tilde{B}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \frac{G_{y\mu} \, B_{y\nu} - B_{y\mu} \, G_{y\nu}}{G_{yy}} \,, \tag{2.15}$$

$$\tilde{G}_{yy} = \frac{1}{G_{yy}}, \quad \tilde{G}_{y\mu} = \frac{B_{y\mu}}{G_{yy}}, \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{B_{y\mu} \, B_{y\nu} - G_{y\mu} \, G_{y\nu}}{G_{yy}} \,. \tag{2.16}$$

Тези правила са валидни само за бозонния сектор на струната, като подобни, но по-сложни изрази могат да се получат и за фермионните Рамон-Рамон полета върху D-браните.

Глава 3

Принцип на холографското съответствие

Едно от най-впечатляващите постижения в теория на струните е откритието на холографското съответствие. В оригиналната си формулировка то представлява дуалност между тип IIB струнна теория в пространство на анти-де Ситер (AdS) и калибровъчна $\mathcal{N} = 4$ суперсиметрична конформна теория на Янг-Милс (CFT) [1, 2, 3]. В тази глава ще направим кратък обзор на съответствието и реализацията му в теорията на струните [13, 14].

3.1 D-брани

Дуалността между калибровъчни и гравитационни теории [1] се дължи на двете взаимно допълващи се описания на D-браните. От една страна, те представляват хиперповърхнини, върху които краищата на отворените струни могат да се закрепват, генерирайки по този начин суперсиметрични теории на Янг-Милс върху браните. Във второто описание, D-браните представляват тежки солитонни решения, които изкривяват фоновата геометрия във форма на AdS пространство, а динамиката им се описва от ефективно действие на Дирак-Борн-Инфелд [13]. С помощта на AdS/CFT съответствието можем да изучаваме силно-свързани калибровъчни теории като анализираме дуалните им слабо-свързани решения в гравитационната теория.

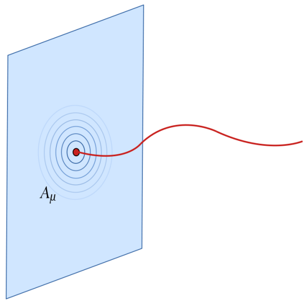
3.1.1 Ефективно действие на Дирак-Борн-Инфелд

D_p-браните се простират в $p+1$ измерения (p-пространствени + време) и представляват динамични хиперповърхнини. Те могат да имат два вида възбуждане. Първият вид представляват движения и деформации на тяхната форма. Тези степени на свобода се параметризират с $9-p$ координати ϕ^i ($i = 1, ..., 9-p$), които са напречни на браната. Вторият вид възбуждания са вътрешни, генерирани от динамиката на краищата на отворените струни, закрепени за тях. С други думи те са източници на заряди, които генерират калибровъчни полета, A_μ, ($\mu = 0, ..., p$), живеещи в мировия обем на браната (фигура 3.1). Действието, което описва динамиката на релативистка заредена мембрана, се нарича действие на Дирак-Борн-Инфелд и е обощение на струнното действие на Намбу-Гото в $(p+1)$-измерения

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}x \sqrt{-\det\left(\mathcal{G} + \mathcal{B}_{(2)} + 2\pi l_s^2 F_{(2)}\right)}\,, \tag{3.1}$$

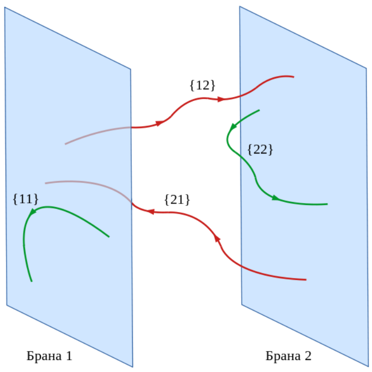
където $\mathcal{G}$ и $\mathcal{B}_{(2)}$ са проекциите върху мировия обем съответно на фоновата метрика $G_{\mu\nu}$ и полето на Калб-Рамон $B_{(2)}$, $F_{(2)}$ е тензорът на Максуел за полетата A_μ, а T_p е опънът на D_p-браната. Нека сега да развием квадратния корен в (3.1) по степените на $F_{\mu\nu}$ и $\partial_\mu\phi^i$. Квадратичният член в това развитие може да се напише като

$$\mathcal{L}_{DBI} \approx -\frac{1}{g_{YM}^2}\left(\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi^i\,\partial^\mu\phi^i\right), \tag{3.2}$$



Фигура 3.1: D-браните са хиперповърхнини, върху които отворените струни могат да закрепват краищата си. Точката на закрепване е източник на калибровъчно поле A_μ, живеещо в мировия обем на D-браната.

което представлява лагранжиан на калибровъчна теория с калибровъчно поле A_μ и $9-p$ скаларни полета ϕ^i, живеещи върху мировия обем на мембраната. Ако сега разгледаме стек от N на брой успоредни D_p-брани, тогава калибровъчната група е $U(N)$. В този случай полетата A_μ и ϕ^i са матрици, трансформиращи се по присъединеното представяне на групата $U(N)$. Недиагоналните елементи на тези матрици съответстват на възбуждания, свързващи две различни брани, а диагоналните представляват възбуждания, свързващи една брана със себе си.



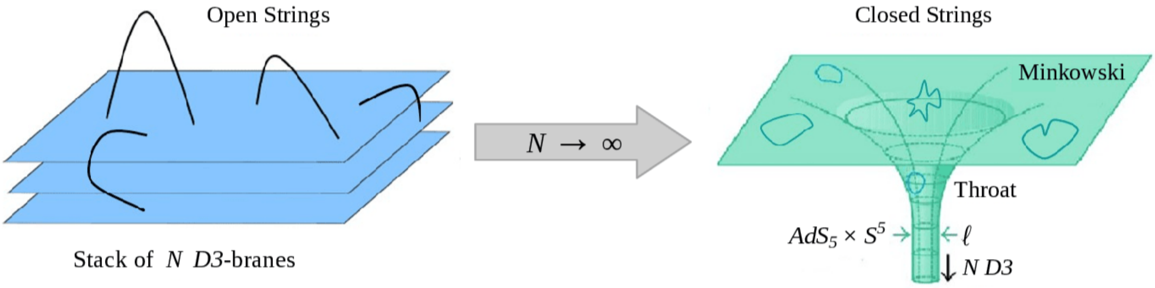
Фигура 3.2: Краищата на отворените сруните се закрепват върху D-браните.

Частният случай на D_3-брани е от специално значени. При него имаме $3+1$-мерен миров обем и $9-3=6$ скаларни полета. Съответната 4-мерна $SU(N)$ калибровъчна теория представлява суперконформна теория на Янг-Милс с четири заряда на суперсиметрия ($\mathcal{N}=4\,\mathrm{SYM}$) и представлява първият известен пример за реализация на AdS/CFT съответствието.

3.1.2 Граница на декуплиране

В теорията на струните имаме граница, при която отворените и затворените струни не си взаимодействат, т.е. имаме две независими описания на D-браните. Тази граница се получава като държим фиксирани константата на взаимодействие g_s и броят на D-браните, а дължината на струната клони към нула ($l_s \to 0$).

Описанието на система състояща се от N на брой успоредни D3-брани в термини на отворени и затворени струни е показано на фигура 3.3. От една страна, краищата на отворените струни генерират $\mathcal{N} = 4$ суперконформна, теория на Янг-Милс, живееща върху 3+1 мерния мирови обем на D3-браните.



Фигура 3.3: AdS/CFT съответствие: лявата фигура представлява стек от D3-брани (описание чрез теории на Янг-Милс); дясната фигура показва геометрията на обемащото пространство.

От друга страна, когато D3-браните станат достъчно много (голямо N), тяхната маса започва съществено да изкривява пространство-времето, като в границата на декуплиране тяхната метрика се свежда до $AdS_5 \times S^5$. Последното представлява максимално симетрично пространство, образувано от прякото произведение на 5-мерен анти-де Ситер и 5-мерна сфера. За да покажем това, ще запишем метриката на N на брой успоредни брани в следния вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\ell^4}{r^4}\right)^{-1/2} \eta_{ij}\, dx^i\, dx^j + \left(1 + \frac{\ell^4}{r^4}\right)^{1/2} \left(dr^2 + r^2\, d\Omega_5^2\right), \tag{3.3}$$

където $i, j = 0, \ldots, 4$, а ℓ е радиусът на обемащото пространство. Забелязваме два гранични случая:

• $r \gg \ell$. Тогава $H = 1 + \frac{\ell^4}{r^4} \to 1$, при което получаваме метриката на Минковски. Това означава, че далеч от стека D3-брани пространство-времето е асимптотически плоско

$$ds^2 = \eta_{ij}\, dx^i\, dx^j + dr^2 + r^2\, d\Omega_5^2. \tag{3.4}$$

• $r \ll \ell$. В този случай се намираме близо до стека от брани, разположен в гърлото на геометрията показана на фигура 3.3. След смяна на променливите $z = \ell^2/r$, получаваме метриката на $AdS_5 \times S^5$ във вида

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2} \left(\eta_{ij}\, dx^i\, dx^j + dz^2\right) + \ell^2 d\Omega_5^2\,. \tag{3.5}$$

Тъй като все още не можем да квантуваме теорията на струните върху изкривен фон, то разглеждаме граница на голям брой D-брани ($N \to \infty$), но така че константата на 'т Хофт, $\lambda = 4\pi g_s N$, да остава фиксирана. Тя трябва да бъде голяма за да имаме голям радиус на обемащото пространство $\ell^4 = \lambda\, \alpha'^2$, което води до малка гравитационна кривина. По този начин можем да разглеждаме класическа супергравитация в $AdS_5 \times S^5$, вместо пълната квантова теория на струните.

3.2 Пространство на Анти-де Ситер

3.2.1 Геометрия на AdS

Метриката на (d+1)-мерното пространство на AdS има вида

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2\right), \tag{3.6}$$

където z е холографската координата, $\vec{x} = (x^1, x^2, ..., x^{d-1})$, а ℓ е радиусът на пространството. Асимптотически плоската граница на AdS пространството е разположена при $z = 0$, където живее конформната полева теория, дуална на струнната теория живееща в обема на AdS_{d+1}.

Метриката на AdS пространството (3.6) е решение на полевите уравнения на Айнщайн

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\, g_{\mu\nu} = -\Lambda\, g_{\mu\nu}, \tag{3.7}$$

получаващи се от действието на Айнщайн-Хилберт с космологичен член Λ

$$I = \frac{1}{16\pi G_N}\int d^{d+1}x\ \sqrt{-g}\,(-2\Lambda + R)\,. \tag{3.8}$$

Тук G_N е гравитационната константа в $(d+1)$-мерие, $g = \det(g_{\mu\nu})$ е детерминантата на метричния тензор, R е скалараната кривина. Решенията на (3.7) се наричат пространства на Айнщайн и имат тензор на Ричи пропорционален на метричния тензор. Използвайки експлицитния вид на метриката (3.6) може да получим, че скалара на кривината е отрицателен и зависи от радиуса и размерността на AdS_{d+1} по следния начин

$$R = -\frac{d(d+1)}{\ell^2}. \tag{3.9}$$

Ние се интересуваме най-вече от калибровъчни теории с 3+1 измерения, което съответства на $d = 4$. Дуалната геометрия в този случай ще бъде AdS_5, което е случаят разгледан от Малдасена [1]. На асимптотичната граница на това пространство се намира суперконформна теория на Янг-Милс с четири суперзаряда $\mathcal{N} = 4$ SYM.

3.3 Масивно скаларно поле в AdS

Динамиката на полетата $\phi_i(x, z)$ в обемащото пространство се определя от гравитационната теория. На тези полета съответстват източници в квантовата теория, живееща на границата. Поради това тензорната структура на полетата ϕ_i трябва да съвпада с тази на операторите $\mathcal{O}^i$ от калибровъчната теория, за да може резултатът $\phi_i\,\mathcal{O}^i$ да бъде скалар. От това следва, че всяко скаларно поле ще бъде дуално на даден скаларен оператор. Векторно поле A_μ ще бъде дуално на ток J^μ, а поле със спин равен на две $g_{\mu\nu}$ (съответстващо на метричния тензор) ще бъде дуално на тензора на енергията и импулса $T^{\mu\nu}$ от полевата теория. Холографското съответствие ни позволява да изучаваме дуалните оператори като анализираме динамиката на полетата в обемащата гравитационна теория.

3.3.1 Скаларно поле в AdS_{d+1}

В тази точка ще разгледаме най-простия случай на скаларно поле. Нека започнем с метриката на AdS_{d+1} в евклидова сигнатура

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2}\left(\delta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu + dz^2\right). \tag{3.10}$$

Действието на скаларното поле ϕ има вида

$$S = -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\,\sqrt{g}\left(g^{MN}\partial_M\phi\,\partial_N\phi + m^2\phi^2\right). \tag{3.11}$$

Варирайки действието, можем да получим уравненията за движение за полето ϕ, чието асимптотично решение близо до границата $z \to 0$ се дава от

$$\phi(x,z) \approx A(x)\, z^{d-\Delta} + B(x)\, z^{\Delta}. \tag{3.12}$$

където Δ се нарича конформна размерност и се определя от израза

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \ell^2\, m^2}. \tag{3.13}$$

Налагаме условието Δ да бъде реално число, което води до $d - \Delta \leq \Delta$. Тогава първия член ($z^{d-\Delta}$) в (3.12) е доминантният, при $z \to 0$. Нека вземем срез $z = \epsilon$ в близост до границата $z = 0$ и пренебрегнем втория член

$$\phi(x,\epsilon) \approx \epsilon^{d-\Delta}A(x). \tag{3.14}$$

Когато $m^2 > 0$, степенния показател $d - \Delta$ става отрицателен и горният израз е разходящ при $z \to 0$. За да определим източника $\varphi(x)$, живеещ в QFT, от стойността на полето $\phi(x,z)$ на границата, трябва да отстраним разходимостта. Това ще стане като идентифицираме източника $\varphi(x)$ с $A(x)$

$$\phi(x,z) = z^{d-\Delta}\varphi(x), \tag{3.15}$$

което ни гарантира, че $\varphi(x)$ е винаги крайно. За да определим значението на Δ за дуалната теория, нека разгледаме действието на границата

$$S_b \sim \int d^dx\,\sqrt{\gamma_\epsilon}\;\phi(x,\epsilon)\,\mathcal{O}(x,\epsilon), \tag{3.16}$$

където операторът $\mathcal{O}$ е дуален на полето ϕ, а $\gamma_\epsilon = \left(\frac{\ell}{\epsilon}\right)^{2d}$ е детерминантата на индуцираната метрика върху границата $z = \epsilon$. Замествайки (3.15) в действието, получаваме

$$S_b \sim \ell^d \int d^dx\;\varphi(x)\,\epsilon^{-\Delta}\,\mathcal{O}(x,\epsilon). \tag{3.17}$$

За да направим S_b крайно и независещо от ϵ при $\epsilon \to 0$, трябва да наложим

$$\mathcal{O}(x,\epsilon) = \epsilon^{\Delta}\,\mathcal{O}(x). \tag{3.18}$$

Преминаването от $z = 0$ към $z = \epsilon$ е мащабна трансформация в QFT. Поради това Δ се интерпретира като мащабна (конформна) размерност на дуалния оператор $\mathcal{O}$. Тя е от значение за теорията, тъй като определя вида на двуточковата корелационна функция

$$\langle \mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(0) \rangle = \frac{2\eta\, \ell^{d-1}\, \nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + \nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{1}{|x|^{2\Delta}}. \tag{3.19}$$

Поведението $\langle \mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(0) \rangle \sim |x|^{-2\Delta}$ потвърждава, че Δ наистина е мащабната размерността на оператора $\mathcal{O}(x)$.

Когато $m^2 \geq -\left(\frac{d}{2\ell}\right)^2$, съответната мащабна размерност е реална. Разглеждаме три различни случая, зависещи от стойността на масата m. Първият е когато масата е положителна $m^2 > 0$. При него имаме $\Delta > d$ и съответния оператор $\mathcal{O}$ се нарича нерелевантен оператор. Деформирайки CFT теорията с $\mathcal{O}$, ще имаме следния член в действието

$$\Delta S = \int d^d x \ (mass)^{d-\Delta}\, \mathcal{O}, \tag{3.20}$$

където степенния показател е отрицателно число $d - \Delta < 0$. Като пресметнем амплитудата на взаимодействието получаваме, че тя зависи от $\left(\frac{Energy}{mass}\right)^{\alpha}$, за някакво $\alpha > 0$. Ефекта от това взаимодействие може да бъде пренебрегнат при ниски енергии. С други думи взаимодействието изчезва напълно при инфрачервената граница IR, но е от съществено значение в ултравиолетовата точка UV на RG потока.

Когато $m^2 = 0$, тогава $\Delta = d$ и съответния оператор $\mathcal{O}$ се нарича маргинален. И накрая когато $m^2 < 0$, дуалният оператор $\mathcal{O}$ се нарича релевантен. В този случай $\Delta < d$, което води до съществен принос в инфрачервената граница IR на теорията.

3.3.2 Размерност на дуалните оператори

Сега ще приложим формула (3.13), като отчетем, че $d = 4$

$$\Delta = 2 + \sqrt{4 + \ell^2\, m^2}. \tag{3.21}$$

Първо $m = 0$, което води до $\Delta = 4$. Дуалният CFT оператор трябва да бъде скаларен оператор с размерност 4, който в $\mathcal{N} = 4$ SYM теорията има вида

$$\mathcal{O} = \mathrm{Tr}\, [F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}], \tag{3.22}$$

Масите на останалите моди в спектъра се дават от $\ell^2\, m^2 = l(l + 4)$. От тук получаваме следната проста зависимост между размерността и квантовото число l, което представлява орбитално квантово число

$$\Delta = 2 + \sqrt{4 + l(l + 4)} = 4 + l. \tag{3.23}$$

В този случай дуалният оператор трябва да се трансформира спрямо съответното представяне на $SO(6)$ (симетричен тензор с l индекси). Може да конструираме такъв тензор като умножим скаларните полета ϕ_i, които се трансформират като вектори в $SO(6)$. Тогава дуалният оператор се представя във вида

$$\mathcal{O}_{i_1,\ldots,i_l} = \mathrm{Tr}\, [\phi_{(i_1,\ldots,i_l)} F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}], \tag{3.24}$$

където $\phi_{(i_1,\ldots,i_l)}$ представлява тензор конструиран от скаларните полета ϕ_i на $\mathcal{N}=4$ SYM теорията. Тъй като $\dim[\phi]=1$, лесно се проверява, че размерността на оператора $\mathcal{O}_{i_1,\ldots,i_l}$ наистина е $4+l$.

Резултатите, които получихме за скаларно поле могат да бъдат обобщени и за друго поле, представящо се с антисиметричен тензор с p на брой индекси $A_{\mu_1,\ldots,\mu_p}$. За такова поле мащабната размерност Δ на дуалния полеви оператор се дава от

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d-2p}{2}\right)^2 + \ell^2 m^2}. \tag{3.25}$$

За масивно векторно поле A_μ ($p=1$), горната формула ни дава

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d-2}{2}\right)^2 + \ell^2 m^2}\,. \tag{3.26}$$

Взимайки $m=0$ получаваме $\Delta = d-1$, което представлява размерността на запазващия се ток j^μ в d измерения.

Глава 4

Холографски модели с нерелативистка симетрия на Шрьодингер

Една от мотивациите ни да изследваме нерелативистки системи в контекста на холографията е, че те обикновено се реализират при голяма константа на връзката, докато тяхната дуална гравитационна теория е в режим на слаба свързаност и следователно може да бъде анализирана по теория на пертурбациите. В този ред на мисли, първо ще покажем какво представляват групата и алгебрата на Шрьодингер, които позволяват реализирането на модели с нерелативистка конформна симетрия. След което ще се фокусираме над това да получим пространството на Шрьодингер, прилагайки TsT деформации.

4.1 Алгебра и група на Шрьодингер

Групата на Шрьодингер е максималната кинетична група на симетрии на уравнението на Шрьодингер. В $d+1$ пространствено-времеви измерения тя включва следните трансформации

$$\vec{x} \to \vec{x}\,' = \frac{\hat{R}.\vec{x} + \vec{v}\,t + \vec{a}}{\gamma t + \delta}, \quad t \to t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{4.1}$$

където имаме пространствени ротации $\hat{R}$, галилееви бустове със скорост $\vec{v}$, транслации в пространството с вектор $\vec{a}$, дилатации $(t, \vec{x}) \to (\lambda^2 t, \lambda\vec{x})$ и специални конформни трансформации

$$t \to \frac{t}{1+\lambda t}, \quad \vec{x} \to \frac{\vec{x}}{1+\lambda t}. \tag{4.2}$$

Известно е, че групата на Шрьодингер представлява нерелативистка граница на конформната група $SO(d+2, 2)$ [15]. Това означава, че можем да намерим и нейната алгебра, чийто вид се дава от следните комутатори

$$\begin{aligned}
&[M_{ij}, M_{kl}] = i\left(\delta_{ik}M_{jl} - \delta_{jk}M_{il} + \delta_{il}M_{kj} - \delta_{jl}M_{ki}\right), && \\
&[M_{ij}, P_k] = i\left(\delta_{ik}P_j - \delta_{jk}P_i\right), && [D, P_i] = iP_i, \\
&[M_{ij}, K_k] = i\left(\delta_{ik}K_j - \delta_{jk}K_i\right), && [D, H] = 2iH, \\
&[K_i, P_j] = i\delta_{ij}N, && [C, P_i] = iK_i, \\
&[K_i, H] = iP_i, && [C, H] = iD. \\
&[K_i, D] = iK_i, && [C, D] = 2iC,
\end{aligned}$$

където M_{ij} са генераторите на подалгебрата на ротациите $so(d)$, P_i са генераторите на абелевата подалгебра на транслациите, K_i са галилеевите бустове, H е хамилтонианът (генераторът на транслации по времето), D е генераторът на дилатации, а C е генераторът на конформните трансформации.

4.2 TsT трансформации и генериране на пространства на Шрьодингер

Разширението на холографското съответствие до теории с по-малко на брой симетрии се оказва интересна задача от гледна точка на физиката. Деформирайки геометрията на обемащото пространство, ние нарушаваме суперконформната симетрия в дуалната калибровъчна теория, живееща на границата, като по този начин получаваме теории близки до тези, които наблюдаваме експериментално.

Сравнително проста процедура за деформиране на високо-симетрични пространства е показана в [16]. Тя ни позволява да генерираме нови гравитационни решения, базирайки се на глобалните симетрии, лежащи в основата на недеформираната теория. Тази процедура се оказва особено ефективна, ако глобалните симетрии на пространство-времето включват в себе си подсиметрия от тип $SL(2,\mathbb{R})$. В зависимост от това в кое направление са взети тези деформации можем да получим различни комутативни или некомутативни калибровъчни теории на границата. В частен случай на TsT трансформация, която води до пространство на Шрьодингер, се предполага, че дуалните калибровъчни теории са нелокални диполни системи при силна константа на връзката. Такива модели са например фермионен модел на Садчев-Йе-Китаев [17], суперохладени уловени атоми [4], унитарен газ на Ферми [18], $\mathcal{N}=1$ цветно-заредени теории в контекста на D-браните [19] и др.

Идеята на метода, представен в [16], е да получим нови гравитационни решения, чиито дуални теории имат деформирани калибровъчни групи или редуциран брой суперсиметрии. Нека недеформираното гравитационно решение притежава две $U(1)$ изометрии. Последните може да считаме за двумерен тор потопен в обемащото пространство и параметризиран с ъглите ϕ_1 и ϕ_2. В този случай, TsT трансформацията се състои от следните три стъпки:

1. Правим трансформация на T-дуалност по направление на ϕ_1.
2. Прилагаме транслация $\phi_2 \to \phi_2 + \hat{\mu}\phi_1$, където $\hat{\mu}$ е константен параметър.
3. Отново правим T-дуалност по ϕ_1.

Съществуват три различни класа деформации, които се определят от положението на двете изометрии участващи в TsT трансформацията.

1. При първия клас двете изометрии са по направление на стека от D-брани. В този случай, произведението на полетата в калибравъчната теория е некомутативно произведение на Моял и има вида

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= e^{-i\pi\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)} f(x)g(y)\Big|_{x=y} \\ &= f(x)g(x) - i\pi\gamma\left(\partial_1 f(x)\partial_2 g(x) - \partial_2 f(x)\partial_1 g(x)\right) + \ldots \end{aligned} \tag{4.3}$$

   Това прави калибровъчната теория нелокална и нарушава лоренцовата инвариантност и каузалност.

2. Следващият клас от деформации се получава когато едната $U(1)$ изометрия е по направление на D-браните а другата е ортогонална на тях. Можем да асоциираме заряди Q^i на двете изометрии. Единия от тях представлява импулса, докато другия вече не може да се интерпретира като импулс. В този случай, произведението

между полетата се записва като

$$(f * g)(x) = e^{\pi\gamma\left(Q^g \frac{\partial}{\partial x} - Q^f \frac{\partial}{\partial y}\right)} = f(x + \pi\gamma Q^g)\, g(x - \pi\gamma Q^f). \tag{4.4}$$

Тази трансформация се нарича диполна, и е нелокална по едното направление, но все още живее в комутативно пространство-време.

3. При последния клас от деформации двете изометрии са ортогонални на стека от D-брани. Дуалната калибровъчна теория вече е различна защото двата заряда не действат като производни. Поради това произведението между полетата придобива вида
$$(f * g)(x) = e^{i\pi\gamma\left(Q_1^f Q_2^g - Q_2^f Q_1^g\right)} fg. \tag{4.5}$$
В този случай, теорията е комутативна и локална, защото единственият принос към деформираното произведение е представен като фаза във взаимодействието. Суперконформните теории, породени от такъв тип трансформации, се наричат β-деформирани теории и са класифицирани в [20]. Тези деформации редуцират броя на суперсиметриите. По този начин TsT трансформацията може да се разглежда като метод за нарушаване на суперсиметрията.

4.3 TsT трансформация на $AdS_5 \times S^5$

В тази точка експлицитно ще покажем как работи процедурата за TsT трансформация върху супергравитационното решение $AdS_5 \times S^5$ без B-поле ($B_{MN} = 0$) с метрика

$$ds^2 = ds^2_{AdS_5} + ds^2_{S^5}\,, \tag{4.6}$$

където метриката на AdS_5 в координати на светлинен конус се дава от

$$ds^2_{AdS_5} = \frac{\ell^2}{z^2}\left(2dx^+dx^- + dx^i dx_i + dz^2\right). \tag{4.7}$$

Удобно е да запишем 5-мерната сфера като $U(1)$ разслоение над комплексното проективно пространство $\mathbb{CP}^2$,

$$ds^2_{S^5} = \ell^2\left(d\chi + P\right)^2 + ds^2_{\mathbb{CP}^2}\,, \tag{4.8}$$

където

$$P = \frac{1}{2}\sin^2\eta\left(d\alpha + \cos\theta\, d\phi\right). \tag{4.9}$$

Първата трансформация, която прилагаме, е Т-дуалност спрямо $U(1)$ изометрията χ върху сферата. Втората трансформация е транслация спрямо x^- координатата по направление на светлинния конус

$$x^- \to x^- + \hat{\mu}\,\chi, \tag{4.10}$$

където $\hat{\mu}$ е параметър на деформацията. Последната трансформация е отново Т-дуалност спрямо χ. Следвайки тези стъпки, лесно намираме новата метрика

$$ds^2 = ds^2_{Schr_5} + ds^2_{S^5}\,, \tag{4.11}$$

където

$$ds^2_{Schr_5} = \ell^2\left(-\frac{\hat{\mu}^2(dx^+)^2}{z^4} + \frac{2dx^+dx^- + dx^i dx_i + dz^2}{z^2}\right), \tag{4.12}$$

представлява метриката на 5-мерното пространство на Шрьодингер, а

$$\frac{ds^2_{S^5}}{\ell^2} = d\chi^2 + d\eta^2 + \frac{1}{4}\sin^2\eta\left(d\alpha^2 + d\theta^2 + d\phi^2\right) + \sin^2\eta\, d\chi\, d\alpha + \sin^2\eta\cos\theta\, d\chi\, d\phi + \frac{\sin^2\eta\cos\theta}{2}\, d\alpha\, d\phi. \tag{4.13}$$

е метриката върху 5-мерната сфера представена като $U(1)$ разслоение над $\mathbb{CP}^2$. Деформираното пространство придобива и не нулево B-поле

$$B = \ell^2\,\frac{\hat{\mu}\, dx^+}{z^2} \wedge (d\chi + P)\,. \tag{4.14}$$

Новото пространство (4.11), което получихме след TsT трансформацията, е 5-мерен Шрьодингер по 5-мерна сфера. Дуалната калибровъчна теория е нерелативистка конформна теория с $\mathcal{N} = 4$ на брой суперсиметрии.

4.4 Дуални оператори

В тази точка ще направим кратък коментар върху операторите в дуалната теория, която представлява диполна полева теория. Симетриите на калибровъчната теория са свързани с изометриите на обемащото пространство. Например, когато имаме $AdS_5 \times S^5$ геометрия, състоянията на струната върху S^5 се характеризират със запазващи се заряди (J_1, J_2, J_3), които представляват R-зарядите на теорията. Те съответстват на скаларните оператори в SYM-теорията, които се характеризират с най-големите тегла (J_1, J_2, J_3) на $SO(6)$ представянето с индекси на Динкин $[J_2 + J_3, J_1 - J_2, J_2 - J_3]$. Най-простите оператори в теорията на Янг-Милс имат вида $\mathrm{Tr}(X^{J_1} Y^{J_2} Z^{J_3})$, където X, Y и Z са стандартните комплексни скалари на $\mathcal{N} = 4$ супермултиплета

$$X = 1/\sqrt{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad Y = 1/\sqrt{2}(\varphi_3 + \varphi_4), \quad Z = 1/\sqrt{2}(\varphi_5 + \varphi_6). \tag{4.15}$$

От друга страна TsT-трансформацията води до произведение със звезда в полевата теория. Когато направленията, по които правим TsT, са напречни на стека от брани, това води до туист в полевата теория с обикновено комутативно произведение. Ако едно от направленията обаче е по направление на браните, тогава имаме произведение със звезда и теорията се превръща в некомутативна диполна теория

$$(\Phi_1 \star \Phi_2)(x) = \Phi_1(x + L_1)\,\Phi_2(x + L_2), \tag{4.16}$$

където $L = L_1 + L_2$ е диполната дължина, асоциирана с R-зарядите. Голямото преимущество на $Schr_5 \times S^5$ холографския модел е, че той е интегрируем. Доказвайки това, авторите на [6] представиха съставните оператори като верижка от спинове. За да дефинираме коректно полевата теория трябва да заместим обикновеното комутативно произведение със звезда

$$\mathcal{O} = \mathrm{Tr}(\Phi_1 \star \Phi_2 \star \ldots). \tag{4.17}$$

Нека сега разгледаме $AdS_5 \times T^{1,1}$ където суперсиметрията е редуцирана от $\mathcal{N} = 4$ до $\mathcal{N} = 1$. Тази геометрия възниква при голям брой D3-брани с прикрепено шест-мерно конично многообразие M^6, което има следната метрика

$$ds^2_{M^6} = dr^2 + r^2 ds^2_{M^5_{SE}}. \tag{4.18}$$

Тук M^5_{SE} представлява 5-мерно многообразие на Сасаки-Айнщайн с положителна кривина. То е получено като $U(1)$ разслояване над 4-мерно многообразие на Келер-Айнщайн M^4_{KE}. Дуалната на $AdS_5 \times T^{1,1}$ полева теория е $\mathcal{N} = 1$ суперконформна калибровъчна теория, позната като теория на Клебанов-Уитън и е описана за първи път в [21]. Тя притежава ароматна симетрия $SU(2) \times SU(2)$. Степените на свобода са обозначени с полетата A и B, които са дублети на групата $SU(2) \times SU(2)$ и имат аномална размерност $\Delta_{A,B} = 3/4$. Калибровъчната група е $SU(N) \times SU(N)$, а двата кирални мултиплета A и B, принадлежат съответно на представянията $(N, \tilde{N})$ и $(\tilde{N}, N)$. Суперпотенциалът в теорията има вида

$$W = \frac{\lambda}{2} \epsilon^{ij} \epsilon^{kl} \, \mathrm{Tr}[A_i B_k A_j B_l]. \tag{4.19}$$

Киралните оператори са аналог на (X, Y, Z) операторите в $\mathcal{N} = 4$ SYM. Те се задават чрез $\mathrm{Tr}(AB)^k$ в $(\frac{k}{2}, \frac{k}{2})$ представянето на ароматната група $SU(2) \times SU(2)$, където k е R-заряда. За разлика от $AdS_5 \times S^5$, тази теория притежава хаотично поведение [22]. Въпреки, че има области на интегрируемост, теорията не е интегрируема изцяло.

Преминавайки към $Schr_5 \times T^{1,1}$ пространство-време, можем да повторим аргументите от [6] и да заменим произведението между операторите със звезда. Един недостатък е, че теорията не е напълно интегрируема и не е известно как може да се сведе до верижка от спинове. Поради тази причина ние ще анализираме модела чрез квазикласическо квантуване на струни в обемащото пространство и по дуалност ще прехвълим резултатите в калибровъчната теория. До този момент можем да кажем, че изучаването на конкретни подсектори от теорията търпи активно развитие.

Глава 5

Общ преглед на пулсиращи струни в $AdS_5 \times S^5$

Пулсиращите струни са разгледани за първи път в [23], а в последствие са обобщени в [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]. В тази глава ще направим кратък обзор на метода на квазикласическото квантуване на пулсиращи струни, следвайки основно [23].

5.1 Пулсираща струна в $AdS_5 \times S^5$

Нека разгледаме затворена струна, която пулсира в S^5 като се свива и разширява. В този случай, метриката на $AdS_5 \times S^5$ се дава от

$$ds^2_{AdS_5} = \ell^2 \left(-\cosh^2\!\rho\, dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\!\rho\, d\Omega_3^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 + \cos^2\theta\, d\tilde{\Omega}_3^2\right). \tag{5.1}$$

Ще получим прости решения като наложим анзац, при който струната се намотава по ϕ, а центърът на тежестта и се движи по ρ и θ, т. е.

$$t = \tau, \qquad \rho = \rho(\tau), \qquad \theta = \theta(\tau), \qquad \phi = m\sigma, \tag{5.2}$$

където с m е означено числото на намотаване (броя на намотките). Върху тримерните сфери струната няма динамика, поради което метриката придобива вида

$$ds^2 = \ell^2\left(-\cosh^2\!\rho\, dt^2 + d\rho^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \tag{5.3}$$

Действието на Намбу-Гото, след като интегрираме по σ от 0 до $2\pi m$, се редуцира до

$$S = -m\sqrt{\lambda}\int d\tau\, \sin\theta\, \sqrt{\cosh^2\!\theta - \dot{\rho}^2 - \dot{\theta}^2}. \tag{5.4}$$

За да получим спектъра на струната ще преминем към хамилтонов формализъм. За целта намираме каноничните импулси

$$\Pi_\rho = \frac{m\sqrt{\lambda}\,\sin\theta\,\dot{\rho}}{\sqrt{\cosh^2\!\theta - \dot{\rho}^2 - \dot{\theta}^2}}, \qquad \Pi_\theta = \frac{m\sqrt{\lambda}\,\sin\theta\,\dot{\theta}}{\sqrt{\cosh^2\!\theta - \dot{\rho}^2 - \dot{\theta}^2}} \tag{5.5}$$

Съответният хамилтониан придобива вида

$$H = \cosh\!\rho\,\sqrt{\Pi_\rho^2 + \Pi_\theta^2 + m^2\lambda\sin^2\theta}. \tag{5.6}$$

Ако поставим струната при ($\rho = 0$) забелязваме, че квадрата на хамилтониана има вид подобен на точкова частица. Пренебрегваме потенциала $m^2\lambda\sin^2\theta$, защото представлява малка пертурбация. На кинетичния член съпоставяме оператора на Лаплас-Белтрами и по този начин получаваме уравнение на Шрьодингер за вълновата функция $\psi(\rho,\theta)$ на точкова частица в горната геометрия (5.3)

$$-\frac{\cosh\!\rho}{\sinh^3\!\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cosh\!\rho\,\sinh^3\!\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}\psi\right) - \frac{\cosh^2\!\rho}{\sin\theta\,\cos^3\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cos^3\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\psi\right) = E^2\,\psi. \tag{5.7}$$

Пълното решение на това уравнение е в термини на полиноми на Якоби и има вида

$$\Psi_{2n}(\rho,\theta) = (\cosh\rho)^{-2n-4}\, P_{2n}(\cos\theta), \tag{5.8}$$

а спектърът от енергии се дава от

$$E = 2n + 4. \tag{5.9}$$

С това задачата все още не е завършена. Тъй като третираме пертурбативно конфигурацията от пулсиращи струни, то можем да потърсим и квантови поправки към този спектър, което следва да направим.

5.2 Поправки към енергията и аномални размерности

За силно възбудени състояния ($n \gg 1$) виждаме, че вълновата функция (5.8) е концентрирана главно около $\rho = 0$. Затова фиксираме $\rho = 0$ и използваме асимптотиката на сферичните хармоники за голямо n

$$P_{2n}(\cos\theta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\cos(2n\theta). \tag{5.10}$$

Първата поправка по теория на пертурбациите към енергията се дава от израза

$$\delta E^2 = \int_0^{\pi/2} d\theta\;\Psi^*_{2n}(0,\theta)\; m^2\lambda\sin^2\theta\;\Psi_{2n}(0,\theta) = \frac{m^2\lambda}{2}. \tag{5.11}$$

Добавяйки още няколко члена от по-висок ред получаваме следното

$$\delta E^2 = \frac{m^2\lambda}{2} + \frac{m^4\lambda^2}{32(2n)^2} + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right). \tag{5.12}$$

В коригираната енергия $\tilde{E} = \sqrt{E^2 + \delta E^2}$, първият член е много по-голям от поправката $E \gg \delta E$, което ни позволява да развием до първи порядък

$$\tilde{E} \approx E\left(1 + \frac{\delta E^2}{2E^2}\right). \tag{5.13}$$

При големи стойности на квантовото число n, енергията (5.9) има вида $E \approx 2n$. Заместваме този резултат и поправката (5.12) в (5.13) и намираме

$$\tilde{E} = 2n\left(1 + \frac{1}{4}\frac{m^2\lambda}{(2n)^2} + \frac{1}{64}\left(\frac{m^2\lambda}{(2n)^2}\right)^2 + \cdots\right). \tag{5.14}$$

Горният израз за енергия ни дава размерността на операторите от дуалната полева теория. Вижда се, че параметъра, по който правим развитие в ред е пропорционален на λ/n^2. Въпреки, че константата на 'т Хофт λ е голяма, при високи енергии ($n \gg 1$) параметърът λ/n^2 е малък. Поправката към енергията представлява аномалната размерност на операторите от дуалната теория

$$\Delta = 2n\left(\frac{1}{4}\frac{m^2\lambda}{(2n)^2} + \frac{1}{64}\left(\frac{m^2\lambda}{(2n)^2}\right)^2 + \ldots\right). \tag{5.15}$$

Глава 6

Пулсиращи струни в $Schr_5 \times S^5$

В тази глава ще приложим описания по-горе метод за квазикласическо квантуване на пулсиращи струни в генерираното от нас пространство на Шрьодингер. Резултатите, които ще представим тук, са нови и съставляват първата оригинална глава от дисертационния труд.

6.1 Анзац и класически уравнения за движение

Динамиката на пулсиращи струни в пространство на Шрьодингер се определя от уравненията за движение, получени при вариране на действието на Поляков. За да получим тези уравнения експлицитно, първо трябва да дефинираме линейния елемент на $Schr_5 \times S^5$, чийто явен вид е (виж приложение А),

$$\frac{ds^2_{Schr_5}}{\ell^2} = -\left(1 + \frac{\hat{\mu}^2}{Z^4} + \frac{\vec{X}^2}{Z^2}\right) dT^2 + \frac{2dTdV + d\vec{X}^2 + dZ^2}{Z^2}, \tag{6.1}$$

което отговаря на пространството на Шрьодингер, а

$$\begin{aligned}\frac{ds^2_{S^5}}{\ell^2} = &\ d\chi^2 + d\eta^2 + \frac{1}{4}\sin^2\eta \left(d\theta^2 + d\alpha^2 + d\phi^2\right) \\ &+ \sin^2\eta \, d\chi \, d\alpha + \sin^2\eta \cos\theta \, d\chi \, d\phi + \frac{\sin^2\eta\cos\theta}{2} \, d\alpha \, d\phi \end{aligned} \tag{6.2}$$

задава метриката върху 5-сферата. Както показвахме в Глава 4 след TsT трансформацията новата теория придобива различно от нула B-поле

$$B = \ell^2 \frac{\hat{\mu}}{Z^2} \, dT \wedge \left(d\chi + \frac{\sin^2\eta}{2} d\alpha + \frac{\sin^2\eta\cos\theta}{2} d\phi\right). \tag{6.3}$$

Поляковското струнно действие в конформна калибровка $\alpha, \beta = 0, 1$ и $M, N = 0, \ldots, 9$ изглежда по следния начин

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \left(\sqrt{-h}\, h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N G_{MN} - \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N B_{MN}\right), \tag{6.4}$$

където $h^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1)$ и $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$. Отчитайки (6.1)-(6.3) може да напишем явния вид на лагранжиана

$$\begin{aligned}-4\pi\alpha'\mathcal{L} = &\ G_{TT}(T'^2 - \dot{T}^2) + G_{\vec{X}\vec{X}}(\vec{X}'^2 - \dot{\vec{X}}^2) + G_{ZZ}(Z'^2 - \dot{Z}^2) \\ &+ 2G_{TV}(T'V' - \dot{T}\dot{V}) + (\chi'^2 - \dot{\chi}^2) + (\eta'^2 - \dot{\eta}^2) \\ &+ G_{\theta\theta}(\theta'^2 - \dot{\theta}^2) + G_{\alpha\alpha}(\alpha'^2 - \dot{\alpha}^2) + G_{\phi\phi}(\phi'^2 - \dot{\phi}^2) \\ &+ 2G_{\chi\alpha}(\chi'\alpha' - \dot{\chi}\dot{\alpha}) + 2G_{\chi\phi}(\chi'\phi' - \dot{\chi}\dot{\phi}) + 2G_{\alpha\phi}(\alpha'\phi' - \dot{\alpha}\dot{\phi})\end{aligned}$$

$$+ 2B_{T\chi}(T'\dot{\chi} - \dot{T}\chi') + 2B_{T\alpha}(T'\dot{\alpha} - \dot{T}\alpha') + 2B_{T\phi}(T'\dot{\phi} - \dot{T}\phi'), \tag{6.5}$$

където сме използвали означенията $\dot{X} = \partial_\tau X$ и $X' = \partial_\sigma X$. Уравненията за движение имат вида

$$\partial_\tau \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^M} + \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^M} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^M} = 0. \tag{6.6}$$

Намирането на общо решение, което да удовлетворява и уравненията за движение и ограниченията на Вирасоро

$$\mathrm{Vir}_1 : \quad G_{MN}\left(\dot{X}^M \dot{X}^N + X'^M X'^N\right) = 0, \tag{6.7}$$

$$\mathrm{Vir}_2 : \quad G_{MN}\, \dot{X}^M X'^N = 0. \tag{6.8}$$

е изключително нетривиална задача. Поради това ние ще разгледаме само пулсиращи решения, налагайки следния анзац за затворена струна

$$\begin{aligned} &T = \kappa\tau,\ \kappa > 0, \quad Z = const \neq 0, \quad \vec{X} = \vec{0}, \quad V = 0, \\ &\eta = \eta(\tau), \quad \theta = \theta(\tau), \quad \chi = n_1\sigma, \quad \alpha = n_2\sigma, \quad \phi = n_3\sigma. \end{aligned} \tag{6.9}$$

В този анзац сме избрали центъра на масата на струната да се движи по T, η и θ, а самата струната да се намотава по χ, α и ϕ, където n_1, n_2 и n_3 представляват числата на намотаване по съответните координати. Второто уравнение на Вирасоро (6.8) се удовлетворява тривиално, а от първото (6.7) получаваме следния израз

$$\dot{\eta}^2 + \frac{1}{4}\sin^2\eta\left(\dot{\theta}^2 + n_2^2 + n_3^2 + 4n_1(n_2 + n_3\cos\theta) + 2n_2 n_3\cos\theta\right) - \left(1 + \frac{\hat{\mu}^2}{Z^4}\right)\kappa^2 + n_1^2 = 0. \tag{6.10}$$

Уравненията за V, $\vec{X}$, χ, α и ϕ са тривиално изпълнени, а останалите уравнения за T, Z, θ и η изискват допълнителен анализ. Уравнението за T има вида

$$\sin^2\eta\,(n_2 + n_3\cos\theta) = A = const, \tag{6.11}$$

което се нарича пулсиращо условие. За Z имаме следното решение

$$Z^2 = \frac{2\hat{\mu}\,\kappa}{2n_1 + A}, \tag{6.12}$$

което показва, че Z е константа, както се очакваше от анзаца (6.9). Уравнението за θ е

$$\frac{d}{d\tau}\left(\sin^2\eta\,\dot{\theta}\right) - n_3\sin^2\eta\,\sin\theta\left(2n_1 + n_2 - \frac{2\hat{\mu}\kappa}{Z^2}\right) = 0. \tag{6.13}$$

Накрая за η имаме

$$\ddot{\eta} + \frac{1}{4}\sin\eta\cos\eta\left(n_2^2 + n_3^2 - \dot{\theta}^2 + 2n_2 n_3\cos\theta + 4\left(n_1 - \frac{\hat{\mu}\kappa}{Z^2}\right)(n_2 + n_3\cos\theta)\right) = 0. \tag{6.14}$$

Интегрирайки тези уравнения ще получим решенията за $\theta(\tau)$ и за $\eta(\tau)$:

$$\cos\theta(\tau) = \frac{1 - \dfrac{2|u_1|}{|u_1| - 1}\,\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{2^{-1}Cn_3^2\,(|u_1| - 1)(1 + |u_2|)}\,\tau,\, r\right)}{1 + \dfrac{2}{|u_1| - 1}\,\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{2^{-1}Cn_3^2\,(|u_1| - 1)(1 + |u_2|)}\,\tau,\, r\right)}, \tag{6.15}$$

$$\sin\eta(\tau) = \sqrt{\frac{A}{n_2 + n_3\cos\theta(\tau)}}. \tag{6.16}$$

Както забелязваме, решенията са елиптични функции на Якоби и прости тригонометрични функци.

6.2 Поправки към енергията и аномални размерности

За да намерим поправките към енергията нека да запишем метриката и B-полето върху мировия лист по следния начин

$$\frac{ds^2_{ws}}{\ell^2} = \left(-\left|G_{00}\right|\kappa^2 + \sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}(\eta,\theta)\,\dot{x}^i\dot{x}^j \right) d\tau^2 + \left(\sum_{k,h=1}^{3} \hat{G}_{kh}(\eta,\theta)\,n_k n_h \right) d\sigma^2, \tag{6.17а}$$

$$B_{\tau\sigma} = -B_{\sigma\tau} = \frac{\hat{\mu}\kappa}{2Z^2}\left(n_1 + n_2\frac{\sin^2\eta}{2} + n_3\frac{\sin^2\eta\cos\theta}{2} \right). \tag{6.17б}$$

където сме използвали следните означения $\eta(\tau) = x^1(\tau),\ \theta(\tau) = x^2(\tau),\ \left|G_{00}\right| = 1 + \dfrac{\hat{\mu}^2}{Z^4}$,

$$(G_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sin^2\eta}{4} \end{pmatrix}, \qquad \left(\hat{G}_{kh}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sin^2\eta}{2} & \dfrac{\sin^2\eta\cos\theta}{2} \\ \dfrac{\sin^2\eta}{2} & \dfrac{\sin^2\eta}{4} & \dfrac{\sin^2\eta\cos\theta}{4} \\ \dfrac{\sin^2\eta\cos\theta}{2} & \dfrac{\sin^2\eta\cos\theta}{4} & \dfrac{\sin^2\eta}{4} \end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

Сега ще се възползваме от действието на Намбу-Гото, което придобива следния вид

$$S_{NG} = -\frac{\ell^2}{\alpha'}\int d\tau \sqrt{\left\|\vec{n}\right\|^2 \left(\left|G_{00}\right|\kappa^2 - \sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}(\eta,\theta)\,\dot{x}^i\dot{x}^j \right) - B^2_{\tau\sigma}(\eta,\theta)}\,, \tag{6.19}$$

където $\dfrac{\ell^2}{\alpha'} = \sqrt{\lambda}$ е константата на връзката на 'т Хофт, а $\left\|\vec{n}\right\|^2 = \sum\limits_{k,h=1}^{3} \hat{G}_{kh}(\eta,\theta)\,n_k n_h$. Въвеждаме каноничните импулси $\Pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}$, след което за квадрата на хамилтонияна $H = \Pi_k\,\dot{x}^k - L$ получаваме

$$H^2 = \frac{\left|G_{00}\right|\kappa^2\left\|\vec{n}\right\|^2 - B^2_{\tau\sigma}}{\left\|\vec{n}\right\|^2} \sum_{i,j=1}^{2} G^{ij}\Pi_i\Pi_j + \lambda\left(\left\|\vec{n}\right\|^2 \left|G_{00}\right|\kappa^2 - B^2_{\tau\sigma} \right). \tag{6.20}$$

И тук, както във всички останали случаи, свързани с пулсиращи струни, H^2 има вида на хамилтониан за точкова частица, в който последният член играе ролята на потенциал

$$U(\eta,\theta) = \left\|\vec{n}\right\|^2 \left|G_{00}\right|\kappa^2 - B^2_{\tau\sigma}. \tag{6.21}$$

На кинетичния член на хамилтониана (6.20) съпоставяме двумерен оператор на Лаплас-Белтрами

$$\sum_{i,j=1}^{2} G^{ij}(\eta,\theta)\,\Pi_i\Pi_j \;\longrightarrow\; \Delta = \frac{1}{\sqrt{\det(G_{ij})}}\,\partial_i\left(\sqrt{\det(G_{ij})}\; G^{ij}\,\partial_j \right). \tag{6.22}$$

В нашия случай този оператор има вида

$$\Delta = \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \frac{4}{\sin^2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{6.23}$$

Той определя собствените стойности на хамилтониана. Замествайки сумата от импулсите с лапласиана получаваме уравнение на Шрьодингер за вълновата функция

$$\left(\frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\,\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \frac{4}{\sin^2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Psi(\eta,\theta) = -\frac{E^2\left(a_1 + a_2\sin^2\eta\right)}{\kappa^2\left(A_1 + A_2\sin^2\eta\right)}\Psi(\eta,\theta), \tag{6.24}$$

където a_1, a_2, A_1 и A_2 са следните константи

$$\begin{aligned} a_1 &= 4n_1^2 + 2(2n_1 + n_2)A\,, & a_2 &= n_3^2 - n_2^2, \\ A_1 &= a_1|G_{TT}| - b^2, & A_2 &= a_2|G_{TT}|. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Решавайки уравнението на Шрьодингер получаваме вълновата функция в термини на полиноми на Лежандър

$$\Psi_{n,l}(z,\theta) = \sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}}\,e^{il\theta}P_n(z), \tag{6.26}$$

където $z = \cos\eta$. Спектърът на енергията е следния

$$E^2 = n(n+1)|G_{00}|\kappa^2 = n\,(n+1)\,\kappa\left(\kappa + \frac{b}{2}\right), \tag{6.27}$$

където $b = \frac{(A+2n_1)^2}{2\kappa}$. Сега може да продължим с намирането на поправките към енергията. За да направим това ще напишем потенциала (6.21) в термини на новата променлива $z = \cos\eta$

$$U(z) = \frac{\kappa^2 b^2 n(n+1)}{16\,l^2}\,(1 - z^2). \tag{6.28}$$

В теория на пертурбациите първата поправка към енергията се дава от израза

$$\delta E^2 = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{z=0}^{z=1}\int\limits_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left|\Psi_{n,l}(z,\theta)\right|^2\,U(z)\,dz\,d\theta. \tag{6.29}$$

Оттук за първата квантова поправка намираме

$$\delta E^2 = \lambda\,\frac{\kappa^2 b^2}{8\,l^2}\,\frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{(2n-1)(2n+3)}. \tag{6.30}$$

От горния израз и (6.27) намираме коригираната енергия $\tilde{E} = \sqrt{E^2 + \delta E^2}$

$$\tilde{E} = \sqrt{n\,(n+1)\,\kappa}\left(\kappa + \frac{b}{2} + \frac{\kappa b^2}{8l^2}\frac{(n^2+n-1)}{(2n-1)(2n+3)}\lambda\right)^{1/2}. \tag{6.31}$$

Развивайки корена до първи порядък по λ получаваме

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\sqrt{2\kappa n(n+1)(b+2\kappa)}\left(1 + \frac{b^2\kappa\lambda\,(n^2+n-1)}{8l^2(4n(n+1)-3)(b+2\kappa)}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{6.32}$$

Следователно аномалната размерност на операторите от дуалната теория е

$$\Delta = \frac{b^2\kappa\lambda\,(n^2+n-1)\,\sqrt{2\kappa n(n+1)(b+2\kappa)}}{16l^2(4n(n+1)-3)(b+2\kappa)}. \tag{6.33}$$

Глава 7

Пулсиращи струни в $Schr_5 \times T^{1,1}$

Интересно обобщение на холографското съответствие представлява супергравитационното решение $Schr_5 \times T^{1,1}$, което се получава след прилагане на TsT-трансформация върху $AdS_5 \times T^{1,1}$. Тук 5-мерното многообразие $T^{1,1}$ е косет пространството $SU(2) \times SU(2)/U(1)$, с група на изометриите $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$. Оказва се, че дуалната теория е 4-мерна нерелативиска суперконформна теория на Янг-Милс, в която броят на суперзарядите е редуциран до $\mathcal{N} = 1$. Научните изследвания в тази глава представляват втора част от оригиналните резултати в настоящия дисертационен труд.

7.1 Анзац и класически уравнения за движение

В тази подточка ще получим класическите уравненията за движение на затворена, пулсираща струна в $Schr_5 \times T^{1,1}$. Избирайки подходящ анзац ще решим тези уравнения в термини на косинуси на Якоби.

Нека започнем с метриката в глобални координати. Шрьодингер частта има вида (6.1) докато метриката на $T^{1,1}$ се дава от израза

$$ds^2_{T^{1,1}} = \ell^2 \frac{b}{4} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(d\theta_i^2 + \sin^2\theta_i \, d\phi_i^2 \right) + b \left(d\psi - \sum_{i=1}^{2} \cos\theta_i \, d\phi_i \right)^2 \right]. \tag{7.1}$$

Тук координатите заемат стойности в интервала $0 \leq \psi < 4\pi,\ 0 \leq \theta_i \leq \pi,\ 0 \leq \phi_i < 2\pi$, а параметърът $b = 2/3$.В следствие на TsT трансформацията възниква и нетривиално B-поле, което в глобални координати има вида

$$B = \ell^2 \frac{b\hat{\mu}}{2Z^2} \, dT \wedge \left(d\psi - \sum_{i=1}^{2} \cos\theta_i \, d\phi_i \right). \tag{7.2}$$

От действието на Поляков в конформана калибровка (6.4) получаваме явния вид на лагранжиана за релативистка струна, движеща се в $Schr_5 \times T^{1,1}$

$$\begin{aligned}
-4\pi\alpha' \mathcal{L} = {} & G_{TT}(T'^2 - \dot{T}^2) + G_{\vec{X}\vec{X}}(\vec{X}'^2 - \dot{\vec{X}}^2) + G_{ZZ}(Z'^2 - \dot{Z}^2) \\
& + 2G_{TV}(T'V' - \dot{T}\dot{V}) + G_{\theta_1\theta_1}(\theta_1'^2 - \dot{\theta}_1^2) + G_{\theta_2\theta_2}(\theta_2'^2 - \dot{\theta}_2^2) \\
& + G_{\phi_1\phi_1}(\phi_1'^2 - \dot{\phi}_1^2) + G_{\phi_2\phi_2}(\phi_2'^2 - \dot{\phi}_2^2) + G_{\psi\psi}(\psi'^2 - \dot{\psi}^2) \\
& + 2G_{\phi_1\phi_2}(\phi_1'\phi_2' - \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2) + 2G_{\phi_1\psi}(\phi_1'\psi' - \dot{\phi}_1\dot{\psi}) + 2G_{\phi_2\psi}(\phi_2'\psi' - \dot{\phi}_2\dot{\psi}) \\
& + 2B_{T\phi_1}(T'\dot{\phi}_1 - \dot{T}\phi_1') + 2B_{T\phi_2}(T'\dot{\phi}_2 - \dot{T}\phi_2') + 2B_{T\psi}(T'\dot{\psi} - \dot{T}\psi').
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Оттук лесно можем да намерим и уравненията за движение, които в общия случай са сложни нелинейни уравнения. За да ги решим ще разглеждаме следния анзац

$$T = \kappa\tau, \quad V = 0, \quad \vec{X} = \vec{0}, \quad Z = const \neq 0,$$

$$\theta_1 = \theta_1(\tau), \quad \theta_2 = \theta_2(\tau), \quad \phi_1 = m_1\sigma, \quad \phi_2 = m_2\sigma, \quad \psi = \phi_3 = m_3\sigma, \tag{7.4}$$

в който сме избрали центъра на масата на струната да се движи по направление на T, θ_1 и θ_2, а самата струна да се намотава по ϕ_1, ϕ_2 и ψ. Уравненията за V, $\vec{X}$, ϕ_1, ϕ_2 и ψ, са тривиално изпълнени, докато уравненията за T, Z, θ_1 и θ_2 изискват допълнителен анализ. Уравнението по T може да се запише в следния вид,

$$m_1 \cos\theta_1(\tau) + m_2 \cos\theta_2(\tau) = A = const, \qquad m_{1,2} \neq 0, \tag{7.5}$$

което е известно още като условие за пулсиране. Уравнението за Z се дава от

$$Z^2 = \frac{2\hat{\mu}\kappa}{b(m_3 - A)}, \tag{7.6}$$

докато уравненията по θ_i, $i = 1, 2$, се свеждат до

$$\dot{\theta}_i^{\,2}(\tau) + m_i^2 \sin^2\theta_i(\tau) = K_i > 0\,. \tag{7.7}$$

Освен уравненията за движение, трябва да удовлетворим и ограниченията на Вирасоро. Първото (6.7) има вида

$$\dot{\theta}_1^{\,2}(\tau) + \dot{\theta}_2^{\,2}(\tau) + m_1^2 \sin^2\theta_1(\tau) + m_2^2 \sin^2\theta_2(\tau) - \frac{4\kappa^2}{b} = 0, \tag{7.8}$$

а второто уравнение на Вирасоро е тривиално изпълнено. Комбинирайки (7.7) и (7.8), намираме връзка между константите $K_1 + K_2 = 4\kappa^2/b$. Интегрираме уравнение (7.7) и получаваме решенията в термини на елиптични косинуси на Якоби

$$\cos\theta_1(\tau) = \mathrm{cn}\left(\sqrt{K_1}\,\tau, \frac{|m_1|}{\sqrt{K_1}}\right), \qquad \cos\theta_2(\tau) = \mathrm{cn}\left(\sqrt{K_2}\,\tau, \frac{|m_2|}{\sqrt{K_2}}\right). \tag{7.9}$$

Може да запишем пулсиращото условие (7.5) във вида

$$m_1\, \mathrm{cn}\left(\sqrt{K_1}\,\tau, \frac{|m_1|}{\sqrt{K_1}}\right) + m_2\, \mathrm{cn}\left(\sqrt{K_2}\,\tau, \frac{|m_2|}{\sqrt{K_2}}\right) = A. \tag{7.10}$$

То трябва да бъде изпълнено за всяка стойност на времето τ. При $\tau = 0$, получаваме константата $A = m_1 + m_2$. Когато енергията на струната е много голяма ($\kappa \gg 1$), получаваме големи стойности на интеграционните константи K_i. Това от своя страна води до много кратък период на решенията (7.9). С други, думи при високи енергии струната пулсира много бързо по направление на θ_1 и θ_2.

7.2 Поправки към енергията и аномални размерности

Следва да направим квазикласическо квантуване на пулсиращата струна. За целта ще намерим вида на вълновата функция, условията за квантуване на енергията и поправката към нея, която съответстват на аномалната размерност на дуалните оператори. Ще се придържаме най-вече към изложението представено в [32, 33, 37, 38, 39].

Базирайки се на [32], може да използваме по-общ анзац от (7.4), а именно

$$T = \kappa\tau, \quad V = 0, \quad \vec{X} = \vec{0}, \quad Z = const \neq 0, \quad \theta_1 = \theta_1(\tau)\,, \quad \theta_2 = \theta_2(\tau)\,, \tag{7.11}$$

$$\phi_1 = m_1\sigma + h_1(\tau)\,, \quad \phi_2 = m_2\sigma + h_2(\tau)\,, \quad \psi = \phi_3 = m_3\sigma + h_3(\tau). \tag{7.12}$$

Индуцираната метрика и B-полето върху мировия лист имат вида

$$\frac{ds^2_{ws}}{\ell^2} = \left(-|G_{00}|\kappa^2 + G_{ij}\,\dot\theta^i\dot\theta^j + \hat G_{pq}\,\dot h^p\dot h^q\right)d\tau^2 + \hat G_{pq}\,m^p m^q\,d\sigma^2 + 2\hat G_{pq}\,m^p\dot h^q\,d\tau d\sigma, \tag{7.13}$$

$$B_{\tau\sigma} = -B_{\sigma\tau} = \frac{b\hat\mu\kappa}{2Z^2}\left(m_3 - m_1\cos\theta_1 - m_2\cos\theta_2\right), \tag{7.14}$$

където сме въвели следните означения: $|G_{00}| = 1 + \dfrac{\hat\mu^2}{Z^4}$, $(G_{ij}) = \dfrac{b}{4}\,\mathrm{diag}(1,1)$ и

$$\left(\hat G_{kh}\right) = \frac{b}{4}\begin{pmatrix} b\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 & b\cos\theta_1\cos\theta_2 & -b\cos\theta_1 \\ b\cos\theta_1\cos\theta_2 & b\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 & -b\cos\theta_2 \\ -b\cos\theta_1 & -b\cos\theta_2 & b \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

За да квантуваме струната ще използваме действието на Намбу-Гото

$$S_{NG} = -\frac{\ell^2}{\alpha'}\int d\tau\,\sqrt{\|\vec m\|^2\left(|G_{00}|\kappa^2 - G_{ij}\,\dot\theta^i\dot\theta^j - \hat G_{pq}\,\dot h^p\dot h^q\right) + \left(\hat G_{pq}\,m^p\dot h^q\right)^2 - B^2_{\tau\sigma}}\,, \tag{7.16}$$

където $\ell^2/\alpha' = \sqrt{\lambda}$ е константата на връзката на 'т Хофт, а $\|\vec m\|^2 = \sum\limits_{k,h=1}^{3}\hat G_{kh}\,m^k m^h$. Ще използваме хамилтоновия формализъм, при който каноничните импулси са $\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta^i}$ и $\hat\Pi_p = \frac{\partial L}{\partial\dot h^p}$. Забелязваме, че има връзка между $\hat\Pi_p$ и числата на намотаване

$$m_1\hat\Pi_1 + m_2\hat\Pi_2 + m_3\hat\Pi_3 = 0, \tag{7.17}$$

която на по-късен етап ще доведе до връзка между квантовите числа. Използвайки трансформацията на Лежандър $L = \Pi_k\,\dot\theta^k - H$, получаваме квадрата на хамилтониана

$$H^2 = \frac{\|\vec m\|^2\,|G_{00}|\,\kappa^2 - B^2_{\tau\sigma}}{\|\vec m\|^2}\left(\sum_{i,j=1}^{2}G^{ij}\,\Pi_i\Pi_j + \sum_{p,q=1}^{3}\hat G^{pq}\,\hat\Pi_p\hat\Pi_q\right) + \lambda\left(\|\vec m\|^2\,|G_{00}|\kappa^2 - B^2_{\tau\sigma}\right). \tag{7.18}$$

Както очаквахме H^2 има вида на хамилтониан на точкова частица. Нашите разглеждания са валидни за високи енергии, затова третираме потенциала λU като малка пертурбация. От друга страна на кинетичния член ще съпоставим 5-мерния оператор на Лаплас-Белстрами в $T^{1,1}$. По този начин получаваме уравнение на Шрьодингер от вида

$$\frac{\|\vec m\|^2\,|G_{00}|\kappa^2 - B^2_{\tau\sigma}}{\|\vec m\|^2}\,\Delta_{T^{1,1}}\,\Psi \;=\; -\,E^2\,\Psi. \tag{7.19}$$

Коефициентът пред оператора на Лаплас-Белтрами е функция на θ_1 и θ_2. Тъй като се интересуваме от квазикласическо приближение, може да разделим флуктуациите на бавни и бързи. Вълновата функция ще усеща само бавните флуктуации, докато бързите влизат във вълновото уравнение с техните средни стойности. В нашия случай, бързи флуктуации са тези, които са по ъглите θ_1 и θ_2, следователно, за вълновата функция ще бъдат от значение само средните стойности на $\cos\theta_i$ и $\sin\theta_i$. Поради това можем да апроксимираме резултата и ще получим следния вид на уравнението на Шрьодингер

$$\Delta_{T^{1,1}}\,\Psi \;=\; -M^2\,\frac{E^2}{\kappa^2}\;\Psi\,, \tag{7.20}$$

където

$$M^2 \;=\; \frac{Z^4\;[2b\,m_3^2+(1+b)(m_1^2+m_2^2)]}{Z^4\,[2b\,m_3^2+(1+b)(m_1^2+m_2^2)]+\hat{\mu}^2\,(m_1^2+m_2^2)}\,. \tag{7.21}$$

Ще отбележим, че $M^2 \approx 1$, защото $Z^4 \gg \hat{\mu}^2$. Използвайки линейния елемент (7.1) на $T^{1,1}$ и стандартната дефиниция за оператора на Лаплас-Белтрами, намираме

$$\begin{aligned}\Delta_{T^{1,1}} = \frac{4}{b^2}\Bigg\{&b\left[\frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_1}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_1}+\cos\theta_1\frac{\partial}{\partial\psi}\right)^2\right]\\ &+b\left[\frac{1}{\sin\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta_2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_2}+\cos\theta_2\frac{\partial}{\partial\psi}\right)^2\right]+\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{7.22}$$

След разделяне на променливите, решението на (7.20) има вида

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{16\pi^3}}\,e^{il_1\phi_1}\,e^{il_2\phi_2}\,e^{il_3\psi}\;\Psi_{n_1}^{\alpha_1,\beta_1}(z_1)\,\Psi_{n_2}^{\alpha_2,\beta_2}(z_2), \tag{7.23}$$

където $\Psi_{n_i}^{\alpha_i,\beta_i}(z_i)$ се дава в термини на полиноми на Якоби

$$\Psi_{n_i}^{\alpha_i,\beta_i}(z_i) = \sqrt{\frac{(\alpha_i+\beta_i+1+2n_i)\,n_i!\,\Gamma(\alpha_i+\beta_i+1+n_i)}{2^{\alpha_i+\beta_i+1}\,\Gamma(\alpha_i+1+n_i)\,\Gamma(\beta_i+1+n_i)}}(1-z_i)^{\alpha_i/2}\,(1+z_i)^{\beta_i/2}P_{n_i}^{(\alpha_i,\beta_i)}(z_i). \tag{7.24}$$

Тук $z_i = \cos\theta_i$, а $\alpha_i \equiv |\,l_i - l_3\,|$ и $\beta_i \equiv |\,l_i + l_3\,|$. Ограничението (7.17) за каноничните импулси, води до следната връзка между квантовите числа l_i и намотките m_i

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 = 0. \tag{7.25}$$

Енергията на струната се дава от

$$E^2 = \frac{4\kappa^2}{b^2 M^2}\left(\frac{b}{4}\sum_{i=1}^{2}(2n_i+\alpha_i+\beta_i+1)^2-\left(2b-\frac{M^2}{\kappa^2}\right)l_3^2-\frac{b}{2}\right), \tag{7.26}$$

която при големите квантови числа $n_{1,2} \gg l_{1,2,3} \gg 1$ е положителна $E^2 > 0$. Ако вземем $\hat{\mu} \to 0$ ($Schr_5 \times T^{1,1} \to AdS_5 \times T^{1,1}$), получаваме пълно съответствие с резултатите за енергията и вълновата функция, дадени в [32].

Следва да намерим поправката към енергията, дължаща се на пертурбацията от потенциала, който в термини на новата променлива z_i има вида

$$\begin{aligned}U(z_1,z_2) = \frac{b\kappa^2}{4}\,&\left\{b\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2\right)+(|G_{00}|-b)\left[m_1^2\left(1-z_1^2\right)+m_2^2\left(1-z_2^2\right)\right]\right.\\ &\left.+\,2b\,m_1 m_2\,z_1 z_2 - 2b m_3\,(m_1 z_1 + m_2 z_2)\right\}.\end{aligned} \tag{7.27}$$

Първата поправка към енергията се дава от следния израз

$$\delta E^2 = \lambda \frac{b^3}{32} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left|\Psi_{n_1}^{\alpha_1,\beta_1}(z_1)\right|^2 \left|\Psi_{n_2}^{\alpha_2,\beta_2}(z_2)\right|^2 U(z_1,z_2)\, dz_1\, dz_2. \tag{7.28}$$

Решението му може да се запише по следния начин

$$\delta E^2 = \lambda \frac{b^5\kappa^2}{128} \left\{ \left(\frac{|G_{00}|}{b} - 1\right)\left(m_1^2 I_1 + m_2^2 I_2\right) + 2m_1 m_2 \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 - 2m_3\left(m_1\tilde{I}_1 + m_2\tilde{I}_2\right) + \sum_{j=1}^{3} m_j^2 \right\}, \tag{7.29}$$

където решенията на представените интеграли сме развили до втори порядък по n_i

$$I_i = \int_{-1}^{1} (1 - z_i^2) \left|\Psi_{n_i}^{\alpha_i,\beta_i}(z_i)\right|^2 dz_i \approx \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(l_i^2 + l_3^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{n_i^2},$$

$$\tilde{I}_i = \int_{-1}^{1} z_i \left|\Psi_{n_i}^{\alpha_i,\beta_i}(z_i)\right|^2 dz_i \approx 1 + \frac{l_i l_3}{n_i^2}. \tag{7.30}$$

Както се очакваше, изразът за поправката (7.29) се свежда до израза за $AdS_5 \times T^{1,1}$, получен в [32], когато $\hat{\mu} \to 0$. За да получим аномалната размерност на полевите оператори, ще развием поправената енергия $\tilde{E} = \sqrt{E^2 + \delta E^2}$ до първи порядък по $\delta E^2/E^2 \ll 1$

$$\tilde{E} = E\left(1 + \frac{\delta E^2}{2E^2}\right), \tag{7.31}$$

което води до следния израз

$$\tilde{E} = \frac{2\kappa}{bM}\sqrt{\frac{b}{4}\sum_{i=1}^{2}(2n_i + \alpha_i + \beta_i + 1)^2 - \left(2b - \frac{M^2}{\kappa^2}\right)l_3^2 - \frac{b}{2}} + \Delta\,. \tag{7.32}$$

Тук Δ е аномалната размерност на операторите от дуалната калибровъчна теория

$$\Delta = \frac{b^6\kappa\, MY}{512\sqrt{\frac{b}{4}\sum\limits_{i=1}^{2}(2n_i + \alpha_i + \beta_i + 1)^2 - \left(2b - \frac{M^2}{\kappa^2}\right)l_3^2 - \frac{b}{2}}}\lambda. \tag{7.33}$$

В горния израз с Y сме означили

$$Y = \left(\frac{|G_{00}|}{b} - 1\right)\left(m_1^2 I_1 + m_2^2 I_2\right) + 2m_1 m_2 \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 - 2m_3\left(m_1\tilde{I}_1 + m_2\tilde{I}_2\right) + \sum_{j=1}^{3} m_j^2. \tag{7.34}$$

Асимптотиката на (7.33) при големи стойности на n_i има вида

$$\Delta \approx \frac{\kappa M b^{\frac{11}{2}}\left(\left(\frac{|G_{00}|}{b} + 7\right)(m_1^2 + m_2^2) + 8m_3^2 - 16m_3(m_1 + m_2) + 16m_1 m_2\right)}{4096\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}\lambda. \tag{7.35}$$

Глава 8

Заключение и основни научни приноси

Изследванията в този дисертационен труд са мотивирани от бурното развитие на хипотезата за дуалност между струнни и калибровъчни теории. Получените оригинални резултати са свързани с обобщението на холографското съответствие за нерелативистки конформни модели, които са интересни от физична гледна точка, защото се реализират при по-ниски енергии.

Текстът на дисертацията е структуриран по следния начин. Първите 6 глави са обзорни, като в тях е направено кратко въведение в теория на струните и AdS/CFT съответствието. В следващите две глави са представени оригиналните научни изследвания свързани с темата на дисертацията, като в 7-ма глава сме се фокусирали върху изследване на пулсиращи струни в $Schr_5 \times S^5$, а в 8-ма глава е направен аналогичен анализ и на струни в $Schr_5 \times T^{1,1}$.

Основните научни приноси към 7-ма глава са следните:

1. Получен е общият вид на класическите уравнения за движение на затворена бозонна струна в пространството $Schr_5 \times S^5$.

2. С подходящо избран пулсиращ анзац са намерени решенията на класическите уравнения, които се изразяват със специални функции на Якоби. Направен е анализ на решенията при различен избор на параметрите на теорията.

3. Приложен е метода на квазикласическо квантуване на получената пулсираща струна, при който е получено уравнението на Шрьодингер.

4. С подходящо разделяне на променливите намираме явния вид на вълновата функция на уравнението на Шрьодингер заедно с условията за квантуване, от които следва директно спектъра по енергии на струната.

5. По теория на пертурбациите са намерени квантовите поправки към енергията в аналитичен вид.

6. Идентифицирали сме поправките с аномалната размерност на операторите от дуалната полева теория.

Основните приноси към 7-ма глава са следните:

1. Получен е общият вид на класическите уравнения за движение на затворена бозонна струна в пространството $Schr_5 \times T^{1,1}$.

2. Избирайки анзац тип пулсираща струна сме получили решенията на класическите уравнения, които отново се изразяват със специални функции на Якоби.

3. По метода на квазикласическо квантуване е получено уравнението на Шрьодингер за вълновата функция.

4. С подходящо разделяне на променливите намираме явния вид на тази функция заедно с условията за квантуване, от които следва директно спектъра по енергии

на струната.

5. По теория на пертурбациите е намерена първата поправка към енергията в аналитичен вид, с която идентифицираме и аномалната размерност на дуланите полеви оператори.
6. Получените ресултати са проверени за определени гранични случаи и е показано, че те съвпадат с известните резултати от литературата.
7. В апендикса е показана нетривиалната смяна на променливите, с помощта на която получаваме пространството на Шрьодингер в глобални координати.

Приложение A

Пространство на Шрьодингер в глобални координати

Ще започнем с метриката на Шрьодингер и B-полето записани в локални координати (4.12)

$$ds^2_{Schr_5} = -\,\ell^2 \frac{\hat{\mu}^2 (dx^+)^2}{z^4} \,+\, ds^2_{AdS_5}, \tag{A.1}$$

$$B = \ell^2 \,\frac{\hat{\mu}\, dx^+}{z^2} \wedge (d\chi + P)\,, \tag{A.2}$$

където $ds^2_{AdS_5}$ е метриката на AdS_5 в координати на светлинен конус

$$ds^2_{AdS_5} = \frac{\ell^2}{z^2}\left(2dx^+dx^- + d\vec{x}^{\,2} + dz^2\right). \tag{A.3}$$

За да получим метриката в глобални координати, трябва да направим следната смяна на променливите

$$x^+ = \tan T, \qquad x^- = V - \frac{1}{2}\left(Z^2 + \vec{X}^2\right)\tan T, \qquad z = \frac{Z}{\cos T}, \qquad \vec{x} = \frac{\vec{X}}{\cos T}. \tag{A.4}$$

Заместваме горните изрази в (A.3) и получаваме метриката на AdS_5 в глобални координати

$$\frac{ds^2_{AdS_5}}{\ell^2} = -\left(1 + \frac{\vec{X}^2}{Z^2}\right) dT^2 \,+\, \frac{2dTdV + d\vec{X}^2 + dZ^2}{Z^2}. \tag{A.5}$$

Първия член от (A.1) има вида

$$\frac{\hat{\mu}^2 (dx^+)^2}{z^4} = \frac{\hat{\mu}^2 dT^2}{Z^4}. \tag{A.6}$$

Събирайки горните резултати, получаваме метриката на пространството на Шродингер и B-полето в глобални координати

$$\frac{ds^2_{Schr_5}}{\ell^2} = -\left(1 + \frac{\hat{\mu}^2}{Z^4} + \frac{\vec{X}^2}{Z^2}\right) dT^2 \,+\, \frac{2dTdV + d\vec{X}^2 + dZ^2}{Z^2}, \tag{A.7}$$

$$B = \ell^2 \,\frac{\hat{\mu}}{Z^2}\, dT \wedge \left(d\chi + \frac{1}{2}\sin^2\eta\,(d\alpha + \cos\theta\, d\phi)\right). \tag{A.8}$$

Библиография

[1] J. M. Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2(231), 1998. [hep-th/9711200].

[2] E. Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.

[3] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov, and Alexander M. Polyakov. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Phys. Lett.*, pages 105–114, 1998.

[4] D.T. Son. Toward an AdS/cold atoms correspondence: A Geometric realization of the Schrodinger symmetry. *Phys. Rev. D*, 78:046003, 2008.

[5] Koushik Balasubramanian and John McGreevy. Gravity duals for non-relativistic CFTs. *Phys. Rev. Lett.*, 101:061601, 2008.

[6] Monica Guica, Fedor Levkovich-Maslyuk, and Konstantin Zarembo. Integrability in dipole-deformed $\boldsymbol{\mathcal{N} = 4}$ super Yang–Mills. *J. Phys. A*, 50(39):39, 2017.

[7] Allan Adams, Koushik Balasubramanian, and John McGreevy. Hot Spacetimes for Cold Atoms. *JHEP*, 11:059, 2008.

[8] Subir Sachdev and Jinwu Ye. Gapless spin-fluid ground state in a random quantum heisenberg magnet. *Phys. Rev. Lett.*, 70:3339–3342, May 1993.

[9] Yong-il Shin, Christian H. Schunck, AndrГҚ Schirotzek, and Wolfgang Ketterle. Phase diagram of a two-component fermi gas with resonant interactions. *Nature*, 451(7179):689вЂ"693, Feb 2008.

[10] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory.* CUP, 2nd edition, 2009.

[11] J. Polchinski. *String Theory: Vol. 1 and 2.* Cambridge, 2nd edition, 2005.

[12] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten. *Superstring Theory: Volume 1 and 2.* Cambridge University Press, 1988.

[13] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, (323):183–386, 2000. [hep-th/9905111].

[14] E. D'Hoker and D. Z. Freedman. Supersymmetric gauge theories and the AdS/CFT correspondence. 2002. [hep-th/0201253].

[15] V. K. Dobrev. Non-Relativistic Holography - A Group-Theoretical Perspective. *Int. J. Mod. Phys. A*, 29:1430001, 2014.

[16] Oleg Lunin and Juan Martin Maldacena. Deforming field theories with U(1) x U(1) global symmetry and their gravity duals. *JHEP*, 05:033, 2005.

[17] Subir Sachdev and Jinwu Ye. Gapless spin fluid ground state in a random, quantum Heisenberg magnet. *Phys. Rev. Lett.*, 70:3339, 1993.

[18] Yong Il Shin, Christian H. Schunck, André Schirotzek, and Wolfgang Ketterle. Phase diagram of a two-component Fermi gas with resonant interactions. *Nature*, 451(7179):689–693, 2008.

[19] Umut Gursoy and Carlos Nunez. Dipole deformations of N=1 SYM and supergravity backgrounds with U(1) x U(1) global symmetry. *Nucl. Phys. B*, 725:45–92, 2005.

[20] R. Leigh and M. Strassler. Exactly Marginal Operators and Duality in Four Dimensional $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetric Gauge Theory. *Nucl. Phys. B*, 447:95–136, 1995. [arXiv:hep-th/9503121].

[21] Igor R. Klebanov and Edward Witten. Superconformal field theory on three-branes at a Calabi-Yau singularity. *Nucl. Phys. B*, 536:199–218, 1998.

[22] Pallab Basu and Leopoldo A. Pando Zayas. Chaos rules out integrability of strings on $AdS_5 \times T^{1,1}$. *Physics Letters B*, 700(3):243 – 248, 2011.

[23] Joseph A. Minahan. Circular semiclassical string solutions on AdS(5) x S(5). *Nucl. Phys. B*, 648:203–214, 2003.

[24] J. Engquist, J.A. Minahan, and K. Zarembo. Yang-Mills duals for semiclassical strings on AdS(5) x S(5). *JHEP*, 11:063, 2003.

[25] H. Dimov and R.C. Rashkov. Generalized pulsating strings. *JHEP*, 05:068, 2004.

[26] M. Smedback. Pulsating strings on AdS(5) x S**5. *JHEP*, 07:004, 2004.

[27] A. Khan and A.L. Larsen. Spinning pulsating string solitons in AdS(5) x S**5. *Phys. Rev. D*, 69:026001, 2004.

[28] N.P. Bobev, H. Dimov, and R.C. Rashkov. Pulsating strings in warped AdS(6) x S**4 geometry. 10 2004.

[29] H.J. de Vega, A.L. Larsen, and Norma G. Sanchez. Semiclassical quantization of circular strings in de Sitter and anti-de Sitter space-times. *Phys. Rev. D*, 51:6917–6928, 1995.

[30] Bin Chen and Jun-Bao Wu. Semi-classical strings in AdS(4) x CP**3. *JHEP*, 09:096, 2008.

[31] H. Dimov and R.C. Rashkov. On the pulsating strings in AdS(4) x CP**3. *Adv. High Energy Phys.*, 2009:953987, 2009.

[32] D. Arnaudov, H. Dimov, and R.C. Rashkov. On the pulsating strings in $AdS_5 \times T^{1,1}$. *J. Phys. A*, 44:495401, 2011.

[33] D. Arnaudov, H. Dimov, and R.C. Rashkov. On the pulsating strings in Sasaki-Einstein spaces. *AIP Conf. Proc.*, 1301(1):51–58, 2010.

[34] M. Beccaria, G.V. Dunne, G. Macorini, A. Tirziu, and A.A. Tseytlin. Exact computation of one-loop correction to energy of pulsating strings in $AdS_5 x S^5$. *J. Phys. A*, 44:015404, 2011.

[35] Sergio Giardino and Victor O. Rivelles. Pulsating Strings in Lunin-Maldacena Backgrounds. *JHEP*, 07:057, 2011.

[36] Pabitra M. Pradhan and Kamal L. Panigrahi. Pulsating Strings With Angular Momenta. *Phys. Rev. D*, 88(8):086005, 2013.

[37] Joseph A Minahan. Circular semiclassical string solutions on ads5ГЧs5. *Nuclear Physics B*, 648(1-2):203вЃЇ214, Jan 2003.

[38] Johan Engquist, Joseph A Minahan, and Konstantin Zarembo. Yang-mills duals for semiclassical strings onads5ГЧs5. *Journal of High Energy Physics*, 2003(11):063вЃЇ063, Nov 2003.

[39] H Dimov and R.C Rashkov. Generalized pulsating strings. *Journal of High Energy Physics*, 2004(05):068вЃЇ068, May 2004.

Публикации свързани с разработването на дисертацията

1. H. Dimov, M. Radomirov, R. C. Rashkov and T. Vetsov, ”On pulsating strings in Schrödinger backgrounds”, JHEP, 10:094, 2019, [arXiv:1903.07444v5 [hep-th]].

2. H. Dimov, R. Rashkov, M. Radomirov and T. Vetsov, “Some Classical Solutions of the Pulsating String in Schrödinger Spacetime”, Journal of Physics and Technology, Volume 3 (2019) Issue1, pp. 43-47

3. H. Dimov, M. Radomirov, R. Rashkov and T. Vetsov, ”Quasi-classical Quantization of Pulsating Strings in Schrödinger spacetime”, Journal of Physics and Technology, Volume 3 (2019) Issue 2, pp. 7-13.

4. A. Golubtsova, H. Dimov, I. Iliev, M. Radomirov, R. C. Rashkov and T. Vetsov, ”Pulsating strings in $Schr_5 \times T^{1,1}$ background”, $Journal\ of\ Physics\ A: Mathematical\ and\ Theoretical$, 54(3):035401, dec 2020, [arXiv:2007.01665v2 [hep-th]].

Участие на конференции

1. Участие с доклад на тема „Пулсиращи струни в пространствовреме на Шрьодингер”, Национална научна конференция по физика, град Пловдив, ноември 2018.

2. Участие с доклад на тема „Квази-класическо квантуване на пулсиращи струни в $Schr_5 \times T^{1,1}$”, Национална студентска научна конференция по физика и инженерни технологии с международно участие, град Пловдив, ноември 2019.

3. Участие в CERN-SEENET-MTP School ”High Energy and Particle Physics: Theory and Phenomenology”, 3-10 June 2018, Niš (Serbia).

4. Участие в CERN-SEENET-MTP School ”High Energy and Particle Physics: Theory and Phenomenology”, 3-9 June 2019, Ioannina (Greece).

5. Участие в CERN-SEENET-MTP School ”Computational Methods in Theoretical Physics”, 24-27 September 2020, Craiova (Romania).