Софийски Университет „Св. Климент Охридски“

Автореферат

Точни Решения в Холографски Модели

Автор:
Иво Николаев Илиев

Научен Ръководител:
проф. дфзн. Радослав Христов Рашков

Катедра „Теоретична Физика“

26 април 2021 г.

Благодарности

На първо място искам да благодаря на моят научен ръководител, проф. дфзн. Радослав Христов Рашков, който още от студентските ми години положи значителни усилия да ме въведе като негов дипломант и после докторант в тази изключително интересна научна сфера. Неговата вещина при използването на тежкия математически апарат на струнната теория и непоклатима физическа интуиция винаги са били безкраен кладенец на мотивация, от който да черпя. Тази дисертация би била немислима без неговите навременни напътствия.

На второ място трябва да спомена останалите членове на групата по теория на струните – доц. д-р Христо Димов, д-р Цветан Вецов и моят колега докторант Мирослав Радомиров. Работата с тях винаги е била динамична, изпълнена както с дълбоки дискусии по научни теми, така и с много хумор и житейски обсъждания. Късните следобеди и вечери прекарани в тежки пресмятания в кабинета на Цветан Вецов завинаги ще останат запечатани в паметта ми. Поединично няма как да не изразя благодарност на доц д-р Христо Димов, че още в студентските ми години положи усилия да ме насочи и въведе в групата; на гл. ас. д-р Цветан Вецов за разговорите не само за наука, но и за преподавателска дейност и за софтуерния пакет *Mathematica*; и на Мирослав Радомиров, с който като другари-докторанти имахме възможност да се посмеем над невежеството си, но и да си задаваме един на друг научните въпроси, които биха звучали „глупави“ за по-напреднал учен. Ако тази малка колегия не съществуваше, тази дисертацията щеше да бъде немислима.

Не искам да забравям доц. д-р Кирил Христов, който в началото на докторантурата ми положи усилия да ме запознае с модерни техники в областта на полевите теории. Макар все още работата ни заедно да е увенчана с пълен успех, знанията, които получих, се оказаха незаменими.

Искам да изразя благодарност и към моите приятели-докторанти Чавдар Дуцов, Любен Петров и Васил Тодоринов с които макар и да не споделяйки напълно еднакви физични интереси, винаги сме намирали общ език, критикували сме се взаимно и сме участвали активно в академичния живот.

Благодаря и на проф. дфзн. Ана Пройкова, както и на д-р Стоян Писов, които подкрепиха професионалната ми реализация отвъд науката, съобразявайки се с моите задължения като докторант. Без тяхна помощ, едва ли щях да мога да имам възможността да завърша редовна докторантура в рамките на определения срок.

Не на последно място бих искал да благодаря на моето семейство – Николай Илиев, Виктория Илиева и брат ми, Светослав Илиев, които винаги са ме подкрепяли и са се старали да мога да осъществя мечтите си. Без тях, аз като личност, не бих съществувал.

За финал, моля за прошка всички които не са упоменати изрично тук - всички мои приятели, състуденти, ученици и учители, които са допринесли за изграждането ми като физик, учен и личност.

Благодаря ви!

Съдържание

1 Въведение

Физиката още от своето зараждане си поставя за цел да намира и описва периодичностите и закономерностите в заобикалящият ни свят. Тези зависимости, които наричаме физични *закони*, трябва да са едновременно достатъчно точни и максимално фундаментални. На този етап от човешкото разбиране изглежда, че всички процеси, които могат да настъпят във Вселената и оттам, че всички експериментални резултати, които могат да бъдат получени, са резултат от взаимодействия между определени фундаментални градивни обекти. Тези взаимовръзки приемат една от четири разновидности, наречени *фундаментални взаимодействия*, а именно

- гравитационното взаимодействие
- електромагнитното взаимодействие
- слабото (ядрено) взаимодействие
- и силното (ядрено) взаимодействие.

Началото на миналия век донася на човечеството две смени на научни парадигми – геометричната теория на Айнащайн и квантовата революция. Специалната теория на относителността е феноменален пример за *концептуално обединение* – за първи път в историята на физиката и философията времето и пространството са поставени на едно равнище и разпознати като един обект, наречен пространство-време. Гравитацията вече не се описва като мистична нютонова сила, която привлича обектите независимо от разстоянието между тях, а е проявление на кривината на пространство-времето. По този начин Айнщайн *обединява* гравитацията с идеите на Фарадей за теорията на полето. По същото време се развива и квантовата революция, която задава друга смяна на парадигмите. С редица открития Планк, дьо Бройл, Бор, Шрьодингер, Хайзенберг, Паули и Дирак показват, че света не се подчинява на законите, наложени му от физиците на XIX-ти век. Светът изглежда не е изграден от метафорични корпускули, истинската природа на градивните частици съдържа ниво на неопределеност и определен тип вълнов характер.

Пълното обединение на принципите на квантовата механика, специалната теория на относителността и идеята на Фарадей за физичните полета идва с развиването на формализма на *квантовата теория на полето* (КТП). В края на 60-те години на миналият век Глашоу, Вайнберг и Салам показват, че електромагнитното взаимодействие и слабото взаимодействие са нискоенергетични проявления на истинската природа на нещата - *електрослабото* взаимодействие. На този етап, електрослабото и силното взаимодействие се описват от така нареченият *стандартен модел на елементарните частици*. Макар тази теория да има невероятни постижения и често да е наричана „експериментално най-добре потвърдената теория на всички времена“, тя не е лишена от проблеми със силно концептуален характер.

Основен кандидат за теория на всичко - тоест теория на четирите фундаментални взаимодействия, е *теория на струните*. В основата си, струнната теория прави само едно ново предположение, неприсъстващо в общата теория на относителността и квантовата теория на полето, а именно

Фундаменталните градивни частици на Вселената не са безразмерни точки, а са едномерни обекти.

През 1974 година разглеждайки квантовия спектър на релативистична затворена струна, Шварц и Шерк и независимо от тях Йонега забелязват наличието на калибровъчния бозон на гравитационното взаимодействие - гравитонът. Тоест, предполагайки струни наместо частици *автоматично* получаваме вариант на квантова гравитация.

Постулирането на струни води до няколко интересни „усложнения“. Първо, необходимо е да предположим съществуването на нов тип симетрия в природата - така наречената *суперсиметрия*, свързваща бозонните и фермионните степени на свобода. Второ, за разлика от точковите частици, релативистичните (супер)струни са „добре дефинирани“ в десет-мерно пространство-време. Нужна е смислена процедура, по която теорията да бъде проектирана в четири-мерният свят, който наблюдаваме експериментално. Друг невероятен резултат, вдъхновен от струнната теория, е предложеното от Малдасена AdS/CFT съответствие. В работата[1] си от 1997-ма година, той показва, че съществува определен вид еквивалентност между десет-мерна суперструнна теория, живееща върху пространството $AdS_5 \times S^5$ и четири-мерна $\mathcal{N} = 4$ суперсиметрична калибровъчна теория на Янг-Милс. Резултатите на Малдасена са реализация на *холографския принцип* въведен от т' Хофт, тъй като те свързват две теории с различна размерност. В най-общи термини изглежда, че цялата информация за динамиката на една теория живееща в дадено пространство може да се разглежда като закодирана върху *границата* на това пространство. Това само по себе си е удивително, но AdS/CFT съответствието е дори по-забележително. То е дуалност между теории с голяма и малка константа на връзката. Ако гравитационната теория е силно свързана, то дуалната ѝ калибровъчна теория е слабо свързана и обратно.

Към настоящият момент AdS/CFT дуалността вече се е доказала като ефективен инструмент за описване на релативистични конформни теории при голяма константа на връзката, като например във физиката на кварк-глуонната плазма. За нещастие, малко такива примери са достъпни за експеримента, което прави потвърждаването на резултатите неясен проблем. Въпреки това, съществуват голям брой *нерелативстични* конформни полеви теории, които описват поведението на реални физични системи. Примери за това има във физиката на кондензираната материя, атомната физика и физиката на ядрото [2—4]. Това мотивира интерес към изследване на гравитационни теории, дуални на нерелативстични конформни полеви теории[5—7]. Това може да бъде постигнато като разгледаме алгебрата на генераторите на нерелативистичната конформна група. Търси се струнно решение, чиято асимптотична група на симетрии (тоест, групата на симетрии на теорията живееща на границата на пространството) не е групата на Поанкаре́, а групата на Галилей. Допълнително, ние искаме (нерелативистична) мащабна инвариантност и, ако е възможно, запазване на специалните конформни трансформации.

Съществуват различни начини за реализиране на мащабна инвариантност в нерелативистични теории. Един от тях реализирам определена нерелативистична алгебра, известна като алгебра на Шроьдингер. Това име не е случайно, групата съответстваща на тази алгебра е максималната група на симетрии на най-фундаменталното и основно уравнение в квантовата механика - уравнението на Шрьодингер. Изследването на нерелативистични варианти на AdS/CFT съответствието наричаме *нерелативистична холография*. Това ще е и основната тематика дисертационният труд.

Организация на съдържанието

Изложението на текста в дисертационния труд е организирано както следва:

В глава 2 правим бързо педагогическо изложение на теория на струните. В глава 3 правим кратко въведение в геометрията на пространството на анти-де Ситер, след което излагаме основните положения на AdS/CFT съответствието. Кратко запознаване с групата, алгебрата и пространството на Шрьодингер е дадено в глава 4. Глави 5, 6 и 7 са посветени на допълнителни понятия, които ще бъдат необходими за анализ на нерелативстичната холография.

Глава 8 съдържа оригиналните резултати в работата. В нея разглеждаме гигантски магнони и шиповидни струни като струнни профили живеещи върху прякото произведение на пет-мерното многообразие на Шрьодигнер и компактното многообразие $T^{1,1}$. Написали сме лагранжиана в явен вид и след подходящ анзац сме намерили уравненията за движение на струните. Този анзац е съгласуван с предположението - с наложените от нас връзки върху константите, той наистина дава решения тип гигантски магнони и единични шиповидни струни. Допълнително сме изследвали дисперсионните съотношения, за да анализираме квантовото поведение на квази-класическите решения. Тъй като изчисленията ни са валидни при общи стойности на параметрите, то сме сравнили нашите резултати, получени върху $Schr_5 \times T^{1,1}$ с известните от литературата гранични случаи, а именно $Schr_5 \times S^5$ и $AdS_5 \times T^{1,1}$.

Глава 9 е заключителната глава, в която обобщаваме основните приноси, като в последствие даваме индикации за последващи изследвания. Допълнително, с цел яснота, сме събрали полезна информация в две приложения, поставени на края на работата, след основният текст.

2 Кратко въведение в струнната теория и холографското съответствие

На тема теория на струните са написани множество учебници и педагогически материали [8—13]. Важно е да отбележим, че ще използваме естествени единици $\hbar = c = 1$; сигнатура на метриката $\mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$; както и следната конвенция за инвариантната дължина на линейния елемент на метриката $ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$.

2.1 Класическа теория

Движейки се в d-мерно пространство на Минковски, $\mathbb{R}^{1,d-1}$, една точкова частица описва траектория, която се нарича *мирова линия*. Динамиката на такава частица се описва от действието на *Намбу-Гото*

$$S_{NG} = -m \int_\gamma d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} \equiv \int_\gamma d\tau L(\tau). \tag{2.1}$$

Проблемът с (2.1) е, че нямаме добре дефинирано действие за безмасови частици За да се справим с този проблем, въвеждаме ново действие, *действието на Поляков*,

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \sqrt{\det g_{\tau\tau}} \left(g^{\tau\tau} \dot{X}^2 - m^2 \right), \tag{2.2}$$

където $g_{\tau\tau} \equiv e^2$ е индуцираната метрика върху мировата линия.

За да опишем класическа *стуна* е нужно е да съобразим, че тя е едномерен обект, параметризирайки я с някаква пространствена координата, $\sigma, 0 \leq \sigma \leq \ell$, където ℓ е дължината на струната. Второ, съществуват два типа струни - затворени и отворени - съответстващи на двете възможни топологии на едномерните обекти. Движейки се през пространство-времето, струната замита повърхнина, наречена *мирови лист*, Σ, параметризиран от променливите σ и τ. Той може да бъде мислен като влагане на струнните координати в обемащото пространство

$$\Sigma \quad : \quad (\tau, \sigma) \mapsto X^\mu(\tau, \sigma) \in \mathbb{R}^{1,d-1}. \tag{2.3}$$

Подобно на случаят с точкова частица въвеждаме действието на Намбу-Гото

$$S_{NG} = -T \int_\Sigma dA. \tag{2.4}$$

Разликата е, че в (2.4), вместо линейния елемент ds, стои елементарната площ dA. Метриката на обемащото пространство, $\eta_{\mu\nu}$, индуцира метрика върху мировия лист Σ, която обикновено се отбелязва с G_{ab},

$$G_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b} \eta_{\mu\nu}. \tag{2.5}$$

Замествайки в (2.4) получаваме нов израз за струнното действие

$$S_{NG} = -T \int_\Sigma \sqrt{-\det G_{ab}} d^2\xi. \tag{2.6}$$

Аналогично на релативисткага частица е по-удобно да елиминираме коренът в S_{NG}. Това може да бъде постигнато посредством въвеждане на спомагателно поле - метриката върху мировия лист $h_{ab}(\xi^a)$. Дефинираме действието на *Поляков*

$$S_P = -\frac{T}{2} \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{-\det h} h^{ab} G_{ab}. \tag{2.7}$$

Може да се покаже, че скаларът на Ричи локално е нула. В две измерения, това означава, че тензора на Риман е нула, тоест, метриката върху мировия лист е плоска, $h_{ab} = \eta_{ab}$.

Разбира се, можем да запишем h_{ab} и като $h_{ab} = \Lambda^2(\sigma,\tau)\eta_{ab}$. Това се нарича *конформна калибровка*, а записването и като метрика на Минковски $h_{ab} = \eta_{ab}$ се нарича *плоска калибровка*. За плоска калибровка (2.7) приема вида

$$S_P = \frac{T}{2}\int_\Sigma d\tau d\sigma \left((\partial_\tau X)^2 - (\partial_\sigma X)^2\right). \tag{2.8}$$

Много често използван и удобен набор от координати са *координатите на светлинен конус*

$$x^+ = \tau + \sigma, \quad x^- = \tau - \sigma. \tag{2.9}$$

Лесно е да се покаже, че действието на Поляков, в калибровка на светлинен конус, е просто

$$S_P = T\int d^2x^\pm \partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu \eta_{\mu\nu}. \tag{2.10}$$

Допълнително, в координати (2.9) имаме следните условия върху тензора на енергията и импулса (наречени връзки на Вирасоро):

$$T_{++} = T_{--} = 0, \tag{2.11}$$

които трябва да бъдат наложени независимо от уравненията на движение.

2.2 Осцилаторно разложение

Следващата стъпка в разглеждането на струните е анализирането на класическите уравнения за движение за полетата $X^\mu(\tau,\sigma)$. Варирайки (2.8) получаваме

$$\delta S_P = -T\int d\tau d\sigma \left[\left(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2\right) X\cdot\delta X\right] + T\int d\sigma \partial_\tau X\cdot\delta X\Big|_{\tau=-\infty}^{\infty} - T\int d\tau \partial_\sigma X\cdot\delta X\Big|_{\sigma=-\ell}^{\ell}. \tag{2.12}$$

Стандартното допускане, че вариацията на полетата е нула на безкрайност елиминира втория член. Ако предположим, че граничния член по σ също се занулява, то получаваме просто вълновото уравнение:

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^\mu = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_+\partial_- X^\mu = 0. \tag{2.13}$$

Съществуват няколко възможности за граничните условия при различните типове струни:

- **Затворени струни** По дефиниция за затворената струна са в сила периодични гранични условия, следователно граничните членове се съкращават.
- **Отворени струни** В този случай двата края на струната са независими. Имаме три възможни комбинации на гранични условия - Нойман-Нойман (НН), Дирихле-Дирихле (ДД) или Нойман-Дирихле (смесени, НД).

2.2.1 Разложение за затворени струни

Нека разгледаме затворена струна, тоест гранични периодични условия. Търсим решение на вълновото уравнение (2.13). То може да се представи като сума от ляво- и дясно-движещи се вълни върху струната,

$$X^\mu = X_L^\mu(x^+) + X_R^\mu(x^-), \tag{2.14}$$

където имплицитно предполагаме отъждествяване в точката $\sigma = 0 = \ell$. Най-общото възможно решение се дава след разлагане в ред на Фурие

$$X_R^\mu(\tau\pm\sigma) = \frac{1}{2}(x^\mu \mp c^\mu) + \frac{1}{2}\frac{2\pi\alpha'}{\ell}p^\mu(\tau\pm\sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{I\mu}e^{-\frac{2\pi}{\ell}in(\tau\pm\sigma)}, \tag{2.15}$$

където $\alpha_n^{I\mu} = \alpha_n^\mu$ или $\tilde{\alpha}_n^\mu$, играят ролята на независими ляво- и дясно-движещи се моди на Фурие. За удобство ще положим $c^\mu = 0$. Тогава x^μ и p^μ имат смисъл на позиция и импулс на струната в система център на масите. Условието за реалност на полетата X_L^μ и X_R^μ води до реалност на x^μ и p^μ както и до следното твърдение за спрегнатите моди

$$(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu \tag{2.16}$$

и аналогично условие за $\tilde{\alpha}_n^\mu$.

Полагайки удобната конвенция $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2}p^\mu$ можем да включим и нулевия индекс в сумата и да получим следния израз за производните на полетата

$$\partial_- X^\mu = \dot{X}_L^\mu = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-\frac{2\pi}{l}in(\tau-\sigma)} \tag{2.17}$$

и съответния израз за $\partial_+ X^\mu$.

2.2.2 Отворени струни

Както вече споменахме, за отворени струни съществуват три различни възможности за гранични условия - НН, ДД и смесени.

При гранични условия на Нойман-Нойман например, получаваме следното общо решение

$$\text{(НН)}\ X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + \frac{2\pi\alpha'}{\ell}p^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-i\frac{\pi}{\ell}n\tau} \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{\ell}\right). \tag{2.18}$$

Отбелязваме, че тези гранични условия елиминират разликата между ляво- и дясно-движещи се моди, $\alpha_n \equiv \tilde{\alpha}_n$. Полагайки $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\mu$ получаваме

$$\partial_\pm X^\mu = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-i\frac{\pi}{\ell}n(\tau\pm\sigma)}. \tag{2.19}$$

2.2.3 Алгебра на Вирасоро

Нека дефинираме *операторите на Вирасоро* като модите на Фурие за тензора на енергията и импулса. За затворена струна имаме

$$L_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma T_{--}e^{im(\tau-\sigma)}, \quad \tilde{L}_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma T_{++}e^{im(\sigma+\tau)}. \tag{2.20}$$

Може да се покаже, че тези оператори образуват алгебра, наречена алгебра на Вит (или класическа алгебра на Вирасоро)

$$\Big\{L_m, L_n\Big\}_{P.B.} = -i(m-n)L_{m+n}, \quad \Big\{\tilde{L}_m, \tilde{L}_n\Big\}_{P.B.} = -i(m-n)\tilde{L}_{m+n}. \tag{2.21}$$

Специално място заемат операторите L_0 и $\tilde{L}_0$ тъй като те са свързани с хамилтониана на струната

$$H = \frac{2\pi}{\ell}\left(L_0 + \tilde{L}_0\right). \tag{2.22}$$

Можем да забележим, че $\tilde{L}_0 - L_0$ действа като генератор на транслации по σ. Тъй като върху затворените струни няма привилегировани точки, това условие може да бъде записано като

$$\tilde{L}_0 - L_0 = 0. \tag{2.23}$$

Налагайки връзките на Вирасоро и (2.11) имаме

$$L_m, \tilde{L}_m = 0, \quad \forall m. \tag{2.24}$$

Изразът (2.24) представлява набор рестрикции върху възможните осцилаторни моди $\alpha, \tilde{\alpha}$ изграждащи струнното решение. Това води до нулев хамилтониан, $H = 0$. В сила е следният израз за масовият спектър на струната

$$M^2 = -p^2 \stackrel{H=0}{=\!=} \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n\right) \tag{2.25}$$

За отворени струни пресмятанията са аналогични с разликата, че T_{--} и T_{++} не са независими в следствие на граничните условия.

2.3 Квантуване на бозонна струна

Както знаем от квантовата механика и полевите теории, при канонично квантуване повишаваме класическите полета и техните спрегнати импулси от обикновени функции до оператори и съответно скобките на Поасон се заменят с комутатори. От тук следва, че след квантуване осцилаторните моди α и $\tilde{\alpha}$ също трябва да са оператори (с цел яснота на записа, че изпускаме шапките за тях). Ненулевите комутационни съотношения за тях са следните:

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu} = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu]\,, \tag{2.26}$$

като също е в сила, че

$$\alpha_m^\mu = \left(\alpha_{-m}^\mu\right)^\dagger. \tag{2.27}$$

Подобно на квантовата теория на полето, тази процедура е невинаги добре дефинирана, което се дължи на факта, че не съществува *a priori* подредба за некомутиращите оператори. По подобие на полевите теории дефинираме *нормална подредба*, $:\alpha_m^\mu \alpha_n^\nu:$ и след внимателно разглеждане на комутационните съотношения забелязваме, че операторите L образуват, така наречената (квантова) *алгебра на Вирасоро*

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m\left(m^2 - 1\right)\delta_{m+n,0} \equiv (m-n)L_{m+n} + \Delta(m,n). \tag{2.28}$$

На този етап е нужно да направим няколко коментара, които отличават тази алгебра от класическата алгебра на Вит. Първо, параметърът c се нарича *централен заряд*. Може да се покаже, че той е равен на броя на време-пространствените измерения, тоест на броя на скаларни полета X^μ

$$c = \eta_\mu^\mu = d. \tag{2.29}$$

Фактът, че имаме ненулев централен заряд е квантова аномалия - в този смисъл квантовата теория на струните е структурно много по-богата от класическата теория.

Второ, след определени технически препятствия се доказва, че ако параметърът на подреждане a е равен на единица и броят пространствени измерения, d, е равен на 26, всяко физическо състояние в теорията има вида

$$|\phi\rangle = |\phi_T\rangle + |s\rangle \tag{2.30}$$

като нормата $\langle\phi_T|\phi_T\rangle > 0$ и $|s\rangle$ не е участва в никои физични процеси. Това води до идеята за *критична струна*, зададена от $a = 1,\ d = 26$. Макар за $a = 1$ вакумното състояние да е тахионно, това е артефакт идващ от факта, че разглеждаме само бозонния сектор. След въвеждане на фермионни състояния (посредством суперсиметрия), теорията не съдържа тахиони.

2.4 Струнни модели върху групови многообразия

Започваме изследването на изкривени обемащи пространства посредством позната конструкция,

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{h} h^{ab} \partial_a X^\mu(\xi) \partial_b(\xi) X^\nu(\xi) G_{\mu\nu}(X(\xi)). \tag{2.31}$$

Изкривената метрика $G_{\mu\nu}$ може да бъде мислена като кохерентно състояние на гравитони, описващи флуктуации около плоската метрика $\eta_{\mu\nu}$. Имайки това предвид е естествено да включим и другите възможни безмасови полета. За затворена струна това са B-полето на Калб–Рамон, $B_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]}$, и дилатона Φ.

Теорията се описва от обобщението на действието на Поляков - действието на така наречения (затворен) σ-*модел* и съдържа всички безмасови полета

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{h} \left\{ \left(h^{ab} G_{\mu\nu}(X) + i\epsilon^{ab} B_{\mu\nu} \right) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' R^{(2)} \Phi(X) \right\}. \tag{2.32}$$

2.5 T-дуалност

Нека разгледаме компактификация на пространствено измерение до кръг с радиус R и нека координатата, съответстваща на това измерение да е X. Тогава

$$X \sim X + 2\pi R \tag{2.33}$$

Спрегнатият импулс по компактифицираното направление се квантува, $p = \frac{n}{R}; n \in Z$, и допълнително е в сила

$$\pi\sqrt{2\alpha'}\left(a_0 - \tilde{a_0}\right) = 2\pi\omega R; \quad \omega \in Z, \tag{2.34}$$

където ω отговаря на броят навивки на затворената струна около компактното измерение. Това автоматично ни дава вида на нулевите моди в осцилаторното разложение, а именно

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\frac{n}{R} + \frac{\omega R}{\alpha'} \right) \quad \text{и} \quad \tilde{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\frac{n}{R} - \frac{\omega R}{\alpha'} \right). \tag{2.35}$$

Нулевите оператори на Вирасоро, L_0 и $\tilde{L}_0$, приемат вида

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{\alpha'}{4}\hat{p}^2 + \frac{\alpha'}{4} \left(\frac{n}{R} + \frac{\omega R}{\alpha'} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \tag{2.36}$$

и

$$\tilde{L}_0 = \frac{\alpha'}{4}\hat{p}^2 + \frac{\alpha'}{4} \left(\frac{n}{R} - \frac{\omega R}{\alpha'} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n. \tag{2.37}$$

Оператора на масата приема вида

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha_n} - 2 \right] + \left(\frac{n}{R} \right)^2 + \left(\frac{\omega R}{\alpha'} \right)^2. \tag{2.38}$$

Виждаме, че в този спектър присъства нов тип възбуждане - така наречените *моди на навиване*.

От (2.38) става ясно, че спектърът на теорията е инвариантен спрямо размяната на К-К модите с модите на навиване, *заедно* с взимане на реципрочен радиус на компактификация.

$$\omega \leftrightarrow n; \quad R \leftrightarrow \hat{R} \equiv \frac{\alpha'}{R} \tag{2.39}$$

Тази операция се нарича трансформация на *Т-дуалност*, а $\hat{R}$ е радиуса на компактификация на Т-дуалната теория.

2.5.1 Т-дуалност приложена към струнни координати

Нека запишем струнната координата като сума от ляво- и дясно-движещи се моди (2.14). Може да се забележи, че струнната координата трябва да удовлетворява условията

$$\partial_\tau X \to \partial\tau \hat{X} = -\partial_\sigma X \quad ; \quad \partial_\sigma X \to \partial_\sigma \hat{X} = -\partial_\tau X. \tag{2.40}$$

Те биха били удовлетворени, ако Т-дуалната координата е равна на

$$\hat{X} = \frac{1}{2}\left(X_- - X_+\right). \tag{2.41}$$

Т-дуалността действа на дясно-движещия се сектор като оператор на четност, оставяйки ляво-движещите се непроменени.

Нека разгледаме теория с отворени и затворени струни, живееща в d-мерно пространство-време. Нека също $d-p-1$ от тези измерения да са компактифицирани върху окръжности с радиуси R^m и разгледаме границата

$$R^m \to 0 \quad \forall \quad \text{компактни направления} \tag{2.42}$$

Ефективно, отворената струна е „загубила“ $d-p-1$ направления. Тоест, отворената струна „живее“ в $(p+1)$-мерно подпространство на цялото d-мерно обемащо пространство. Това обаче няма да се отнася за затворените струни - те могат да осцилират в пълното d-мерно пространство. Това критично несъответствие може да бъде разрешено, ако наложим условието в Т-дуалната картина отворените струни да могат да осцилират в цялото d-мерно пространство, а техните краища да са фиксирани върху $(p+1)$-мерна хиперповърхнина, която наричаме Dp-брана.

Нека разширим дефиницията на Т-дуална координата за отворени струни. Имаме

$$\hat{X}^\mu = \frac{1}{2}\left(X_-^\mu - X_+^\mu\right), \tag{2.43}$$

където вече X_- и X_+ съдържат същият набор от осцилатори

$$X_-^\mu = q^\mu + c^\mu + \sqrt{2\alpha'}\,(\tau - \sigma)\,\alpha_-\mu + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n}e^{-in(\tau-\sigma)} \tag{2.44}$$

и

$$X_+^\mu = q^\mu + c^\mu + \sqrt{2\alpha'}\,(\tau + \sigma)\,\alpha_-^\mu + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n}e^{-in(\tau+\sigma)} \tag{2.45}$$

Вижда се, че Т-дуалността трансформира струнна координата удовлетворяваща гранични условия на Нойман в Т-дуална такава, удовлетворяваща гранични условия на Дирихле.

Ако имаме изкривен фон и наличие на дилатон и B-поле, то при T-дуалност трябва да отчетем и тяхното изменение по компактифицираното направление. Ако означим компактното направление с y, то *правилата на Бушер* ни казват, че са в сила следните тъждества

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \frac{1}{2}\log G_{yy} \tag{2.46}$$

$$\hat{B}_{y\mu} = \frac{G_{y\mu}}{G_{yy}}, \quad \tilde{B}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \frac{G_{y\mu}B_{y\nu} - B_{y\mu}G_{y\nu}}{G_{yy}} \tag{2.47}$$

$$\tilde{G}_{yy} = \frac{1}{G_{yy}}, \quad \tilde{G}_{y\mu} = \frac{B_{y\mu}}{G_{yy}}, \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{B_{y\mu}B_{y\nu} - G_{y\mu}G_{y\nu}}{G_{yy}}. \tag{2.48}$$

Още от тук забелязваме, че след трансформация на T-дуалност, една теория може да придобие ненулево B-поле. Това ще е съществено в разглежданията ни в последващите глави.

3 Въведение в AdS/CFT съответствието

AdS/CFT съответствието е определен тип дуалност между квантово-полеви теории и гравитационни такива. По-точно, съответствието свързва квантовото описание на силно-свързани много-частични системи в d измерения с класическа гравитационна динамика в $d+1$ измерения. Това прави AdS/CFT съответствието пример за *холографско съответствие*. Оригиналната хипотеза [1, 14, 15] свързва четири-мерна конформна полева теория с пространство на анти-де Ситер в пет измерения. Макар дуалността да е забелязана първо в контекста на струнната теория, където реализирането на (калибровъчни) полеви теории върху хиперповърхнини вложени в по-високо-мерно пространство-време е естествена конструкция, в последствие тя е разширена до голям брой теоретични направления - черни дупки и квантова гравитация [16—18], релативистична хидродинамика [19, 20], холографски свръхпроводници [21] и прочее.

3.1 Действие на Дирак-Борн-Инфелд

Дискутираните в предходната глава D-брани са динамични обекти и тяхната динамика съдържа два типа възбуждания - вътрешни и такива породени от струните, закачащи се върху тях. Една отворена струна, закачена върху брана, действа като източник на абелево калибровъчно поле, живеещо в мировия обем на браната. Можем да опишем заедно двата типа бранни възбуждания посредством действието на Дирак-Борн-Инфелд (DBI)

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}x \sqrt{-\det\left(\mathcal{G} + \mathcal{B}_{(2)} + 2\pi\ell_s^2 F_{(2)}\right)}, \tag{3.1}$$

където $\mathcal{G}$ и $\mathcal{B}$ са проекциите на фоновата метрика и полето на Калб-Рамон върху мировия лист, $F_{(2)}$ е калибровъчното поле върху мировия обем, а T_p се нарича *опън на браната* и има вида

$$T_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_s \ell_s^{p+1}}. \tag{3.2}$$

Разглеждайки D-р брани в плоско пространство и развивайки (3.1) до квадратичен член, виждаме, че лагранжиана на теорията има вида

$$\mathcal{L}_{DBI} = -\frac{1}{g_{YM}^2}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^i\right), \tag{3.3}$$

което е точно лагранжиан на калибровъчна теория с едно калибровъчно поле и $9-p$ скаларни полета. Константата на връзката на Янг-Милс се изразява посредством струнните константи,

$$g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2}\ell_s^{p-3} g_s. \tag{3.4}$$

Ако разгледаме единствена D-р брана, то трябва да изследваме калибровъчна теория с калибровъчна група $U(1)$. От друга страна, на конструкция от N на брой успоредни брани ще отговаря $U(N)$ калибровъчна теория. Оказва се, че $U(1)$ компонентата може да бъде отделена - тогава набора брани ще реализират $SU(N)$ калибровъчна теория в $(p+1)$-мерно пространство-време.

От съществено значение е разглеждането на набор от успоредни D_3 брани. В този случай мировият обем е четири-мерен и в теорията ни участват шест скаларни полета. Сътоветната калибровъчна теория е $\mathcal{N}=4$ суперконформна теория на Янг-Милс. Тази теория е и първия директен пример на AdS/CFT съответствието.

3.2 Холографски речник

Нека фиксираме броят брани и струнната константа на взаимодействие и разгледаме границата, при която дължината на струните клони към нула, $\ell \to 0$[1]. Оказва се, че при този режим

[1] Това се нарича също граница на Малдасена

отворените и затворените струни спират да си взаимодействат. Имаме дуално описание на една и съща теория - веднъж в термини на отворени струни и втори път в термини за затворени струни. Най-общо, AdS/CFT съответствието постулира *дуалност* между двете описания. Нека се върнем към предходната конструкция от D_3 брани. В ниско-енергетичната граница, модите на отворените струни пораждат ефективна теория на Янг-Милс. В границата на Малдасена, метриката на тези брани пък се свежда до метриката на $AdS_5 \times S^5$.

Към този момент е неясно как да квантуваме струнна теория върху изкривено многообразие. Поради това прилагаме следната процедура, въведена от 'т Хофт,

$$N \to \infty, \quad \lambda = 4\pi g_s N = fixed. \tag{3.5}$$

Ако предположим, че $\lambda >> 1$, то радиусът на AdS пространството също става голям, което води до малка кривина. Теорията се свежда до класическа тип IIB супергравитация върху $AdS_5 \times S^5$.

По този начин AdS/CFT съответствието свързва пертурбативен режим в супергравитацията с непертурбативен такъв в калибровъчната теория и обратно. Това го прави изключително мощен инструмент за изучаване на режими с голяма константа на връзката. За нас ще е важен така нареченият *холографски речник* (подробно ревю може да бъде намерено в [22, 23]), свързващ различни величини от двете страни на дуалността.

Съответствието налага биективно изображение между състоянията от двете страни. От AdS страната, тъй като развиваме в ред по параметъра L_p/L, можем да преброим състоянията при слаба константа на връзката. От страната на конформната теория съществува обичайният изоморфизъм между състояния и оператори. В този смисъл, AdS/CFT съотношението е дуалност между типовете частици в AdS_{D+1} и киралните главни оператори в конформната теория на полето. Едно от основните твърдения е, че поле, чието гранично поведение е от вида z^Δ се изобразява в оператор с размерност Δ, тоест, че премащабираната граница на оператора в обемащото пространство е съответния оператор в конформната полева теория

$$\mathcal{O}(x) = C_{\mathcal{O}} \lim_{z\to 0} z^{-\Delta}\phi(x,z). \tag{3.6}$$

Вижда се, че при премащабиране в обемащото пространство, $\phi(z,x) \to \phi(\zeta z, \zeta x)$, за съответния оператор получаваме

$$\mathcal{O}(x) \to C_{\mathcal{O}} \lim_{z\to 0} z^{-\Delta}\phi(\zeta x, \zeta z) = C_{\mathcal{O}} \lim_{z\to 0} (z/\zeta)^{-\Delta}\phi(\zeta x, z) = \zeta^\Delta \mathcal{O}(\zeta x), \tag{3.7}$$

което е точно операция на премащабиране за $\mathcal{O}$. Подобни взаимоотношения се реализират и за вектрони и тензорни полета. Ако конформната теория има някакви запазващи се заряди, то те се изобразяват в калибровъчни полета в обемащото пространство. Размерността на запазващите се заряди е $D-1$, тоест $A_{\hat{\mu}} \sim az^{D-1} + bz$ и $A_\mu \sim az^{D-2} + b$. Константният член може да бъде разпознат като фоновото калибровъчно поле в конформната теория. Наистина, теорията върху $AdS_5 \times S^5$ е инвариантна под глобални трансформации принадлежащи на групата $SO(6)$ и съответно са налични $SO(6)$ калибровъчни полета на Калуца-Клайн идващи от компактното многообразие S^5.

Нужно е да правим разлика между състояния, които са безмасови в десет-мерие, но придобиват маса в $D = 5$ поради ефекти от кривината, и състояния, които са изначално масивни в $D = 10$. Първите имат маси от порядък $1/L$, тоест имат размерност единица. При $D = 4, \mathcal{N} = 4$ може да се покаже, че тези размерности не зависят от константата на връзката. От друга странна, възбудените струнни състояния имат маси от порядъка на $\alpha'^{1/2}$ и следователно размерности при силна константа на връзката от порядъка на $\lambda^{1/4}$. Това е интересно предсказание на AdS/CFT съответствието. Възможно е аномалните размерности да стават големи при силна константа на връзката, но към този момент няма прост аналитичен аргумент, който да обяснява това поведение.

Подобни големи размерности са от съществено значение за супергравитационната граница, тъй като там максималния спин е две и всеки по-високо мерен оператор трябва да получава голяма аномална размерност.

Интересно е да се разгледат следите на произведения от скалари, $\mathrm{Tr}\,(Z_1 Z_2 Z_3 \cdots Z_n)$. Линейните комбинации без следа по индексите от $SO(6)$ се изобразяват в флуктуации на формата

Супергравитационна тип IIB теория	$\mathcal{N}=4$ **теория на Янг-Милс**
Супергравитационни моди 1/2 BPS, спин ≤ 2	Главни кирални $\mathcal{O}_2 = \mathrm{Tr}\,(X^{(i}X^{j)})$
Супергравитационни КК моди 1/2 BPS, спин ≤ 2	Главни кирални $\mathcal{O}_2 = \mathrm{Tr}\,(X^{[i}X^{j]})$
Суперструнни масивни моди Некирални дълги мултиплети	Некирални оператори, $[\mathcal{O}] = \lambda^{1/4}$ Оператори на Кониши $\mathrm{Tr}\,(X^iX^i)$
Многочастични състояния	Произведения на оператори (различни точки) $\mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{\Delta_n}(x_n)$
Свързани състояния	Произведения на оператори (една точка) $\mathcal{O}_{\Delta_1}(x)\cdots\mathcal{O}_{\Delta_n}(x)$

Таблица 3.1: Съответствие на супергравитационните състояния и операторите на SYM теорията. Латинските индекси са от фундаменталното представяне на $SO(6)_R$

на компактната част, S^5. Оператор, съставен от n скалара има размерност точно n. Модите, които имат следа, като например оператора на Кониши, $\mathrm{Tr}\,(A_mA_m)$, задължително трябва да се изобразяват във възбудени струнни състояния.

За крайно N следите с повече от N оператора не са независими, тоест трябва да съществува граница на импулса успореден на S^5. Това ще е съществено при нашите последващи разглеждания. Оказва се, че можем да разглеждаме състояния до ред $N^{3/4}/L_P$, тоест до импулси далеч над планковата скала.

Последно, нека разгледаме явният пример за скаларно поле с маса m, движещо се в AdS_{D+1}. Решенията на класическите уравнения за движение на такова поле са

$$\phi(u,x) = \left(\frac{1}{u}\right)^{4-d}\phi_0(x) + \left(\frac{1}{u}\right)^{\Delta}\langle\mathcal{O}(x)\rangle, \tag{3.8}$$

където u е *холографската радиална променлива*, задаваща енергетичната скала в дуалната калибровъчна теория. Конформната размерност на операторите се определя от израза

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^4}{4} + R^2m^2}. \tag{3.9}$$

От вида на (3.8) се вижда, че ϕ_0 и $\langle\mathcal{O}(x)\rangle$ имат конформни размерности съответно $4-\Delta$ и Δ.

3.3 Обобщаване на съответствието

Естествено е да се зададе въпросът дали и как изложените тук разглеждания могат да се приложат към квантовата хромодинамика, която е теория на Янг-Милс, но не е нито суперсиметрична, нито конформна.

Нарушаването на симетриите се постига посредством деформации на оригиналната $AdS_5\times S^5$ геометрия. Една възможност, която е директно свързана с нашите изследвания, е да заменим пет-мерната сфера с друго многообразие на Айнщайн. Деформациите на фоновата геометрия, понякога нарушават и киралната симетрия [24, 25], което може да доведе до образуване на кварков кондензат и определен тип „конфайнмънт“. Струнното описание изглежда се доближава все повече до реалистично описание на квантовата хромодинамика. Основната тематика на дисертационния труд е свързана именно с обобщаване на холографската дуалност в нерелативистичния сектор.

4 Пространство-време на Шрьодингер и TsT трансформация

4.1 Група и алгебра на Шрьодингер

Явният вид на групата на Шрьодингер, спомената в увода, се задава от следният набор трансформации:

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \frac{\mathcal{R}\vec{r} + \vec{v}t + \vec{a}}{\gamma t + \delta}, \quad t \to t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{4.1}$$

Тук $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \vec{v}, \vec{a}$ са реални параметри и $\mathcal{R}$ е матрица на въртения в d пространствени измерения. Видно е, че групата на Шрьодингер може да бъде получена ако изхождайки от групата на Галилей разширим транслациите по времето до пълната група на Мьобиус $Sl(2,R)$ за дробни реални линейни трансформации. Показва се, че тази група е максималната кинетична група, която трансформира решенията на свободното уравнение на Шрьодингер в други решения, посредством $(\vec{r}, t) \mapsto g(\vec{r}, t), \psi \to T_g\psi$

$$(T_g\psi)(\vec{r}, t) = f_g\left(g^{-1}(\vec{r}, t)\right)\psi\left(g^{-1}(\vec{r}, t)\right), \tag{4.2}$$

където сме въвели спомагателна функция

$$f_g\left(\vec{r}, t\right) = (\gamma t + \delta)^{-d/2} \exp\left[-\frac{im}{2}\frac{\gamma\vec{r}^2 + 2\mathcal{R}\vec{r}\cdot(\gamma\vec{a} - \delta\vec{v}) + \gamma\vec{a}^2 - \delta t\vec{v}^2 + 2\gamma\vec{a}\vec{v}}{\gamma t + \delta}\right]. \tag{4.3}$$

Нека разгледаме малко по-подробно алгебрата на Шрьодингер (подробно и достъпно ревю може да се намери в [26] и източниците вътре). В най-пълният ѝ вид (без да налагаме $z = 2$), имаме:

$$\begin{aligned}
&[M_{ij}, N] = [M_{ij}, D] = 0, && [P_i, P_j] = [K_i, K_j] = 0,\\
&[M_{ij}, P_k] = i(\delta_{ik}P_j - \delta_{jk}P_i), && [K_i, P_j] = i\delta_{ij}N,\\
&[M_{ij}, K_k] = i(\delta_{ik}K_j - \delta_{jk}K_i), && [D, P_i] = iP_i,\\
&[M_{ij}, M_{kl}] = i(\delta_{ij}M_{jk} - \delta_{jk}M_{il} + \delta_{il}M_{kj} - \delta_{jl}M_{ki}), && [D, K_i] = (1-z)iK_i,\\
\\
&[H, N] = [H, P_i] = [H, M_{ij}] = 0, && [D, H] = ziH,\\
&[H, K_i] = -iP_i, && [D, N] = i(2-z)N,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

където K_i са така наречените галилеви бустове, N е запазваща се маса в покой (еквивалентно - брой частици) и D е оператора на дилатации. Налагайки условието $z = 2$ забелязваме наличието на нов генератор на специални конформни трансформации, C:

$$[M_{ij}, C] = 0, \quad [K_i, C] = 0, \quad [D, C] = -2iC, \quad [H, C] = -iD. \tag{4.5}$$

4.1.1 Линеен елемент в пространството на Шрьодингер

Метод за получаване на пространство-време с тези изометрии е представен в [27]. Започвайки от антидеситерово пространство, което е инвариантно под пълната конформна група и извършвайки определени деформации, може да редуцираме симетрията до групата на Шрьодингер.

Първата стъпка е да намерим влагане на алгебрата на Шрьодингер в d измерения в релативистичната конформна алгебра в $d+2$ измерения, $(d+2, 2)$. Пълната конформна група в $d+2$

измерения[1] има вида

$$[\tilde{M}^{\mu\nu}, \tilde{M}^{\alpha\beta}] = i(\eta^{\mu\alpha}\tilde{M}^{\nu\beta} + \eta^{\nu\beta}\tilde{M}^{\mu\alpha} - \eta^{\mu\beta}\tilde{M}^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha}\tilde{M}^{\mu\beta}), \tag{4.6}$$

$$[\tilde{M}^{\mu\nu}, \tilde{P}^{\alpha}] = i(\eta^{\mu\alpha}\tilde{P}^{\nu} - \eta^{\nu\alpha}\tilde{P}^{\mu}) \tag{4.7}$$

$$[\tilde{D}, \tilde{P}^{\mu}] = -i\tilde{P}^{\mu}, \quad [\tilde{D}, \tilde{K}^{\mu}] = i\tilde{K}^{\mu}, \quad [\tilde{P}^{\mu}, \tilde{K}^{\nu}] = -2i(\eta^{\mu\nu}\tilde{D} + \tilde{M}^{\mu\nu}) \tag{4.8}$$

Можем да идентифицираме светлинно-конусовият импулс

$$\tilde{P}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{P}^{0} + \tilde{P}^{d+1}\right) \tag{4.9}$$

с оператора на масата в нерелативистичната теория. Забелязваме, че всички оператори от конформната алгебра, които комутират с този импулс формират затворена подалгебра. Директна проверка показва, че това е точно алгебрата на Шрьодингер в d пространствени измерения.

Нека сега разгледаме пространството AdS в координати на Поанкаре́

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}\left(\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} + dz^2\right). \tag{4.10}$$

Генераторите на конформната група отговарят на следните инфинитезимални трансформации оставящи метриката непроменена:

$$P^{\mu} : x^{\mu} \to x^{\mu} + a^{\mu} \tag{4.11}$$

$$D : x^{\mu} \to (1-a)x^{\mu}, \quad z \to (1-a)z \tag{4.12}$$

$$K^{\mu} : x^{\mu} \to x^{\mu} + a^{\mu}\left(z^2 + x \cdot x\right) - 2x^{\mu}(a \cdot x). \tag{4.13}$$

Искаме метриката да е инвариантна под оператора на дилатации $D = \tilde{D} + \tilde{M}^{+-}$, който е линейна комбинация от буст по направлението x^{d+1} ($\tilde{M}^{+-}$) и премащабиране $\tilde{D}$, но да не е инвариантна под всеки от двата оператори поотделно. Следната метрика удовлетворява това условие:

$$ds^2 = -\frac{2(dx^{+})^2}{z^4} + \frac{-2dx^{+}dx^{-} + dx^{i}dx^{i} + dz^2}{z^2} \tag{4.14}$$

Директна проверка показва, че метриката (4.14) наистина проявява симетрия на Шрьодингер.

Възстановявайки размерната величина ℓ, която интерпретираме като радиуса на пространството и правейки някои координатни преименувания (за да достигнем до форма, която ще използваме занапред) можем да запишем (4.14) като:

$$ds^2 = \ell^2\left(-\frac{dT^2}{r^4} + \frac{d\vec{X}^2 + 2dVdT}{r^2} + \frac{dr^2}{r^2}\right). \tag{4.15}$$

4.2 Деформации тип TsT

TsT трансформациите са определен клас от процедури, които генерират супергравитационни решения от вече известни такива. Тези трансформации се състоят от няколко стъпки:

- Първо, идентифицираме две изометрични направления, които може да мислим като 2-тор. Параметризираме този тор ($S^1 \times S^1$) с два параметъра които отговарят на ъглите по всяка от окръжностите – (ϕ_1, ϕ_2).
- Прилагаме трансформация на Т-дуалност по ϕ_1
- Правим транслация по ϕ_2, $\phi_2 \to \phi_2 + \gamma\phi_1$
- Прилагаме още една Т-дуалност по ϕ_1.

[1] С тилди ще означаваме релативистични оператори, а без тилди нерелативистичните такива

Съществуват три типово различни вида TsT деформации[2], категоризирани от това къде „живеят“, направленията на изометрия. И трите типа са частен случай на така наречения туист[3] на Дринфелд-Решетихин.

Процедурата за генериране на решения, която ще следваме, се състои от следните стъпки

1. Изхождайки от решение от тип IIA/IIB струнна фонова геометрия, определяме кои транслационно инвариантни направления са компактни. Нека с $(\partial/\partial y)^a$ означим вектора на Килинг към едно от тях.
2. Извършваме буст с параметър γ по направлението y. Ефективно, това отговаря на изменение на началното решение с импулсен заряд. Ако началната ни точка е била теория със $SO(1,1)$ симетрия, то можем да комбинираме килинговия вектор $(\partial/\partial y)^a$ със времеподобния такъв $(\partial/\partial t)^a$, при което не се добавя допълнителен заряд към решението.
3. Извършваме T-дуалност по y. Това води до IIB/IIA супергравитационно решение за фоновата геометрия.
4. За да породим туиста, можем да разгледаме набор допълнителни S^1 или транслационни изометрии. Нека едно-формата, асоциирана с допълнителната изометрия е σ. Извършваме туист с параметър α.
$$\sigma \to \sigma + 2\alpha dy \tag{4.16}$$
5. Извършваме още една T-дуалност по y за да върнем геометрията обратно към IIA/IIB. Процедурата туист плюс T-дуалност, е в някакъв смисъл недиагонална T-дуалност.
6. Извършваме буст по y с параметър $-\gamma$ за да неутрализираме първоначалния буст.
7. За да „разплетем“, теорията, взимаме границата в която произведението $\alpha \times e^\gamma$ е крайно число:
$$\beta = \frac{1}{2}\alpha e^\gamma = \text{fixed}. \tag{4.17}$$

Горереказаната процедура е известна също и като туист на Мелвин. Важен въпрос, когато говорим за холография и деформации, е въпросът за интегрируемостта на теорията. Нека разгледаме фоновата геометрия $AdS_5 \times X^5$ и нека метриката върху X^5 да е $g_{\alpha\beta}$. Нека вземем един килингов вектор от пространството X^5, да го наречем $\mathcal{K}$, и да извършим нулев туист на Мелвин[4] по него. Резултата би бил ново десет мерно пространство с линеен елемент

$$ds^2_{10} = ds^2_{\text{Schr}_5} + ds^2_{X^5}, \tag{4.18}$$

където метриката идваща от пространството на Шрьодингер, $ds^2_{\text{Schr}_5}$ се дава от:

$$ds^2_{\text{Schr}_5} = -\frac{\Omega}{z^4} + \frac{1}{z^2}\left(-2dvdu + d\vec{x}^2\right), \quad \Omega = ||\mathcal{K}||^2 = g_{\alpha\beta}\mathcal{K}^a\mathcal{K}^b. \tag{4.19}$$

Веднага се вижда, че Ω е неотрицателно число, тъй като е квадрат на дължината на вектор на Килинг. Показва се, че тази процедура генерира B-поле

$$B_{(2)} = \frac{1}{z^2}\mathcal{K} \wedge du. \tag{4.20}$$

За нашите по-нататъшни разглеждания, ще е нужно да наложим две условия:

1. Импулсът по компактното измерение да се квантува в мерни единици на обратен радиус r_v^{-1}.
2. Една от координатите на светлинния конус, да кажем v, да е периодична $v \sim v + 2\pi r_v$

[2] По-подробно описание е дадено в дисертацията

[3] Съществува директен превод на думата twist на български език – това е думата „усукване“. С цел яснота, ние приемаме жаргонния кирилизиран термин „туист“, като по този начин оставаме близо до англоезичната версия.

[4] тоест, по направление на светлнинно-подобен вектор

4.3 TsT трансформация на $AdS_5 \times S^5$

В тази секция ще приложим гореописаната процедура, започвайки от $AdS_5 \times S^5$ и ще получим експлицитно метриката на пространството на Шрьодингер (умножено по някакво компактно многообразие). Началната ни метрика е просто

$$ds^2 = ds^2_{AdS_5} + ds^2_{S^5}, \tag{4.21}$$

където сме записали метриката на пет мерното пространство на анти-де Ситер в термини на координати светлинен конус, както следва

$$ds^2_{AdS_5} = \ell^2 \left(\frac{2dx^+dx^- + dx^i dx_i + dz^2}{z^2}, \right), \tag{4.22}$$

където ℓ е радиуса на пространството на анти-де Ситер. Метриката на сферата е записана като разслоение на Хопф над $\mathbb{CP}^2$.

$$ds^2 = ds^2_{\mathbb{CP}^2} + (e^5)^2. \tag{4.23}$$

Въвеждаме координатата χ за слоевете в разслоението и използваме локален ортонормиран базис (индексът m се изменя от 1 до 4)

$$e^m, e^5 = d\chi + P. \tag{4.24}$$

Тетрадите e^m са от базата $\mathbb{CP}^2$, а P е диференциал върху нея, чиито експлицитен вид е

$$P = \frac{1}{2}\sin^2\mu(d\alpha + \cos\theta d\phi). \tag{4.25}$$

Външната производна на този диференциал е пропорционална на келеровата форма $I_{\mathbb{CP}^2}$ върху $\mathbb{CP}^2$,

$$dP = -\frac{2}{r}I_{\mathbb{CP}^2} = -\frac{1}{r}I_{mn}e^m \wedge e^n = \frac{2}{r}\left(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4\right). \tag{4.26}$$

След тези уточнения стигаме до вид на метриката който е удобен за прилагане на TsT процедурата

$$\frac{ds^2}{\ell^2} = \frac{2dx^+dx^- + dx^i dx_i + dz^2}{z^2} + (d\chi + P)^2 + ds^2_{\mathbb{CP}^2} \tag{4.27}$$

Експлицитният вид на програмата, която ще следваме за разглеждания от нас случай е следния:

1. Извършваме Т-дуалност по χ, $\chi \to \tilde{\chi}$
2. Правим преместване $x^- \to x^- + \hat{\mu}\tilde{\chi}$
3. Извършваме Т-дуалност по $\tilde{\chi}$

Елементите на новата метрика (както и на B-полето) след една T-дуалност се получават от старата, посредством правилата на Бушер (2.48). Следвайки тази програма достигаме до нова метрика:

$$\frac{ds^2}{\ell^2} = -\frac{\hat{\mu}^2(dx^+)^2}{z^4} + \frac{2dx^+dx^- + dx^i dx_i + dz^2}{z^2} + ds^2_{S^5} \tag{4.28}$$

Макар, че изначало теорията е без B-поле след TsT процедурата се поражда ненулево такова:

$$\alpha' B_{(2)} = \frac{\ell^2\hat{\mu}dx^+}{z^2} \wedge (d\hat{\chi} + P) \tag{4.29}$$

Задача в последващите глави ще е да запишем метриката в глобални координати.

5 Гигантски Магнони и Шиповидни Струни

Исторически, първият изследван *разрешируем остров* в теория на суперструните е плосковълновата граница в $AdS_5 \times S^5$. Оказва се, че в такъв тип геометрия (супер)струнната теория може да бъде точно квантувана в калибровка светлинен конус [28, 29]. Допълнително, оказва се, че плоските вълни се пораждат като граница на Пенроуз за $AdS_5 \times S^5$. В следствие на AdS/CFT съответствието, трябва да съществува съответстваща граница от страната на калибровъчната дуална теория. Интересното е, че въпреки че дуалността е между теории с голяма и малка константа на връзката, в тази граница има режим при който имаме застъпване – тоест, режим в който можем да достъпваме пертурбативно и двете страни на съответствието. Основната идея на тази конструкция е следната:

- Разглеждаме струна ускорена до светлинно-подобен импулс[1] в някое направление. Такава нулева траектория води до състояние с голям момент на импулса $J \to \infty$.
- В координати светлинен конус нулевата траектория $\phi = t$ може да бъде записана като $x^- = 0$. Премащабираме координатите, така че да приближим зрителното си поле към геометрията каквато я вижда въртящият се обект

$$x^+ \to x^+, \quad x^- \to \frac{x^-}{\ell^2} \tag{5.1}$$

- Получаваме известната pp-wave геометрия с точност до $\mathcal{O}(1/\ell^2)$

$$ds^2 = 4dx^+dx^- - (z^2 + y^2)dx^{+^2} + dz^2 + dy^2 + \mathcal{O}(1/\ell^2). \tag{5.2}$$

- Ако бъдат разгледани запазващите се заряди, тоест импулсите $i\partial_{x^+}$ и $i\partial_{x^-}$, то може да се съобрази, че те могат да са крайни величини при $J \to \infty$ само ако разглеждаме състояния със $E \sim J$ и $J \sim \ell^2 \sim \lambda^{1/2}$. Това е еквивалетно на $p^+ = -\frac{J}{\ell^2}$.
- След фиксиране на калибровката ($x^+ = p^+\tau$) и налагане на връзките на Вирасоро достигаме до действие на свободна масивна теория

$$S \propto \int d\sigma d\tau \left((\partial_\tau x^i)^2 - (\partial_\sigma x^i)^2 - (x^i)^2 \right). \tag{5.3}$$

  Налагайки периодични гранични условия, достигаме до осцилаторно разложение, където вълновите вектори и честотата са свързани с константата на т' Хофт и момента на импулса

$$k_n = -\frac{\sqrt{\lambda}}{J} n, \quad \omega_n = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{J^2} n^2} \tag{5.4}$$

  За да получим крайни стойности на честотите в нашата граница на големи моменти на импулса, то е нужно да наложим условието $J \sim \lambda^{1/2}$.
- Посредством осцилатроните оператори извършваме канонично квантуване и изразяваме хамилтониана в калибровка светлинен конус[2] за pp-wave геометрията:

$$H^{l.c.}_{pp-wave} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \sum_{I=1}^{8} a^i_n a^{\dagger i}_n + \text{const.} = E - J \tag{5.5}$$

  При пълно разглеждане на теорията[3] може да се покаже, че безкрайните константи се съкращават [30].

[1] По-точно е да кажем, че импулсът е нулев вектор $p^\mu p_\mu = 0$
[2] „light-cone“ – l.c.
[3] тоест, заедно с фермионната ѝ част, след налагане на определен тип суперсиметрия

- Състоянията, които разглеждаме отговарят на BMN границата в калибровъчната теория [31]. Следвайки конструкциите на Малдасена, Беренщайн и Настасе, получаваме следното за дисперсионните съотношения

$$\Delta - J = \sum_{k=1}^{M} \sqrt{1 + \frac{\lambda}{J^2} n^2}, \tag{5.6}$$

  което точно съвпада с енергията идваща от струнните осцилатори (5.4).
- Този резултат потвърждава, че можем да съпоставим енергиите на струните от струнна теория без взаимодействие на мащабните размерности на равнинна $\mathcal{N} = 4$ суперсиметрична теория на Янг-Милс – резултат, постулиран от общото AdS/CFT съответствие [32].

Трябва да се отбележи, че съществуват разширения на тези разсъждения - разглеждания, в които зачитаме големи, но крайни ℓ, тоест отрязваме метриката до $\mathcal{O}(1/\ell^2)$.[33]

5.1 Гигантски магнони

Нека разглеждаме калибровъчната страна на дуалността и по-точно нейната BMN граница [34–36]. Както и преди, интересуваме се от състояния, за които $E - J$ е крайна величина. Оказва се, че състоянието при което се реализира равенството $E - J = 0$ отговаря на дълга верижка (тоест, *струна*) от Z-тове, или по-точно на оператора $\mathrm{Tr}\, Z^J$. Разглеждаме също произволен (но краен) брой други полета, нека ги наречем W, пропагиращи по направлението на тази верижка. С други думи, ние разглеждаме съставни оператори, които схематично имат вида:

$$\mathcal{O} \sim \sum_q e^{iqp} \left(\dots ZZZWZZZ \cdots \right), \tag{5.7}$$

където индекса q отговаря на позицията на която е вмъкнат оператора W във верижката. Разглеждайки ситуацията в термини на спин-верижки [37], полетата W могат да се разглеждат като вид „примеси“. Тяхното поведение е подобно на „магнони“ движещи се по верижката. Допълнително, за големи стойности на λ, тези магнони следват дисперсионното съотношение:

$$E(p) - J \overset{\lambda >> 1}{=} \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left| \sin\left(\frac{p}{2}\right) \right|. \tag{5.8}$$

Ако разгледаме границата

$$J \to \infty, \quad \lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N = \mathrm{fixed}, \quad p = \mathrm{fixed}, \quad E - J = \mathrm{fixed}, \tag{5.9}$$

може да идентифицираме холографски дуалният обект на магнона в калибровъчната теория – оказва се, че това е едносолитонно решение в дуалната (класическа) струнна теория, живееща върху $\mathbb{R} \times S^2$. Избирайки подпространство $\mathbb{R} \times S^2$, параметризирано от $t \in AdS_5$, $\phi, y_1 \in S^5$,

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{1 - y_1^2/4}{1 + y_1^2/4} d\phi^2 \right) + \frac{dy_1^2}{1 - y_1^2/4}, \tag{5.10}$$

и полагайки $y_1 = \frac{z}{1+\frac{z^2}{4}}$ получаваме

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dz^2}{1 - z^2} + \left(1 - z^2\right) d\phi^2 \tag{5.11}$$

За $z = \cos\theta$ веднага идентифицираме, че второто събираемо параметризира двумерна сфера. Ако t е времева координата, то тази метрика е удобна за описание на струна движеща се върху $R^2 \times S^2$. Можем да запишем струнно действие в формализъм от първи ред

$$S = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int d\sigma d\tau \left(p_i \dot{x}^i - \mathcal{H} \right), \tag{5.12}$$

където

$$\mathcal{H} = -p_{-}\left(x^i, x'^i\right). \tag{5.13}$$

Тези стъпки са направени подробно в [38]. Инвариантността под транслации спрямо координатата от мировия лист σ води до запазващ се заряд

$$p_{\text{ws}} = -\int d\sigma p_i x'^i \tag{5.14}$$

За този редуциран модел имаме интересна граница при $J \to \infty$

$$\begin{aligned} E - J &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\sqrt{1-v^2} \\ p_{\text{ws}} &= 2\arccos v. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Записвайки $v = \cos(p_{\text{ws}}/2)$ и комбинирайки уравненията получаваме

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left|\sin\left(\frac{p_{\text{ws}}}{2}\right)\right|. \tag{5.16}$$

Този резултат съвпада точно с вече дискутираното дисперсионното съотношение, ако идентифицираме импулса на мировия лист с импулса на магнона [34]. Епитетът „гигантски“ е нужен, тъй като за да имаме крайни стойности на магнонният импулс p_{mag}, то размерът на солитонните профили трябва да е от порядъка на радиуса на сферата S^5.

5.2 Шиповидни струни

Друг тип солитонни струнни конфигурации с крайна ъглова амплитуда/импулс са така наречените шиповидни струни[4] [39—41]. Този тип струни са отново квази-класическо решение, навиващо се безкрайно много пъти по ортогоналното ъглово направление. Шиповидните струни са обобщение на въртящата се струна (в AdS_5) – шиповидната и структура описва оператори с по-висок туист от гледна точка на полевата теория. В този смисъл, шиповидните струни са много общо решение, което съдържа в себе си и гигантските магнони като граничен случай. Това което ще представлява интерес за нас е друг граничен случай - единичната шиповидна струна.

Нужно е да дискутираме операторите, на които тези струнни конфигурации отговарят от гледна точка на холографски дуалната полева теория. За малък набор шипове (в разглежданите от нас случаи – един) те имат вида

$$\mathcal{O} = \operatorname{Tr}\partial_+^{q_1}\Phi_1 \dots \partial_+^{q_n}\Phi_n. \tag{5.17}$$

Полетата Φ могат да бъдат скалари, фермиони или тензорът на Максуел за $\mathcal{N}=4$ суперсиметричната теория на Янг-Милс. Интересно е, че енергията и „ъгловият дефицит“ $\delta\phi$ са безкрайни величини, но тяхната разлика е крайна:

$$E - T\Delta\phi = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right), \tag{5.18}$$

Моментите на импулса за тези струнни профили също са крайни и в случая на единично шиповидно решение върху S^3 е в сила връзката

$$J_1 = \sqrt{J_2^2 + \frac{\lambda}{\pi^2}\cos^2\theta_1}, \tag{5.19}$$

която много наподобява дисперсионното съотношение за гигантски магнони. Оказва се, че голям брой от свойствата на гигантските магнони и единичните струни живеещи в $AdS_5 \times S^5$ се

[4]Терминът на английски е *spiky strings*

запазват и при деформирани фонови многообразия [36]. Това ни мотивира да изследваме такъв тип струнни профили в термини на нерелативистична холография – тоест живеещи върху TsT-деформираното пространство на Шрьодингер.

5.3 Струнни теории върху многообразия на Сасаки-Айнщайн

Нека Y_n е n-мерно многообразие. Под конична сингулярност, ние ще разбираме точка (отбелязваме я без ограничение на общността с $r = 0$) около която метриката може да бъде представена като

$$h_{mn}dx^m dx^n = dr^2 + r^2 g_{ij}dx^i dx^j, \tag{5.20}$$

където индексите i, j се изменят от едно до $n - 1$. Виждаме, че метриката g_{ij} е метрика на $n - 1$-измерно многообразие, да речем X_{n-1}, а точката $r = 0$ е сингулярност, освен ако X_{n-1} не е (неизродена) сфера. Причината тази метрика да изглежда като конус и ние да я наричаме *конично многообрзие* е фактът, че съществува група от изоморфизми на Y_n, който премащабират метриката по определен начин. Наистина, ако разгледаме трансформациите $r \to tr$ със $t > 0$, те наистина образуват група, изоморфна на $\mathbb{R}^*_+$ (мултипликативната група на положителните реални числа). В такъв случай наричаме Y_n *конус* над X_{n-1}. Още повече, X_{n-1} може да се получи като изключим сингулярната точка и разделим на $\mathbf{R}^*_+$

За $n > 2$, условието Y_n да е многообразие с нулев тензор на Ричи е еквивалентно на това X_{n-1} да е многообразие на Айнщайн с положителна кривина. Например, ако X_{n_1} е неизродена сфера, то Y_n е с нулев тензор на Ричи[5]. Допълнително, посредством конформна трансформация метриката на Y_n може да бъде приведена до вида:

$$\hat{h}_{mn}dx^m dx^n = d\phi^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \quad \phi = \ln r \tag{5.21}$$

От тук може да се покаже, че ако h е метрика, чиито тензор на Ричи е нула, то посредством същата конформна трансформация приложена към тензора на Ричи метриката g_{ij} е всъщност метрика на Айнщайн:

$$R_{ij} = (n - 2)g_{ij} \tag{5.22}$$

Оказва се, че такива пространства са от значение за струнната теория [42]. Разглеждайки например N успоредни $D3$-брани $M_4 \times Y^6$, където M_4 е четиримерно пространство на Минковски [43, 44] може да се покаже, че близко до коничната сингулярност $r \to 0$ фоновото многообразие е от вида $AdS_5 \times X_5$, където X_5 е многообразие на Сасаки-Айнщайн. Тоест, може да се мисли, че полевата теория на $D3$-браните върху коничната сингулярност е дуална на тип IIБ струнна теория върху $AdS_5 \times X_5$. Това води до запазване на определен брой суперсиметрии. Съществуват малко явни примери за такива многообразия в пет измерения. Основните са неизродената метрика върху S^5 и пространството $T^{1,1}$.

Както е показано в [45], всяко многообразие на Сасаки-Айнщайн притежава вектор на Килинг с константна норма. Ако орбитите са компактни, то имаме определено $U(1)$ действие. Всички регулярни компактни пет-мерни многообразия на Сасаки-Айнщайн са вече класифицирани [46]. Сферата S^5 и многообразието $T^{1,1}$ са регулярни многообразия на Сасаки-Айнщайн. Допълнително, в [47] се въвежда още един тип многообразия на Сасаки-Айнщайн – квази-регулярни, които бележим с $Y^{p,q}$.

Конформните полеви теории асоциирани с пространствата $Y^{p,q}$ не могат да се породят в инфрачервения сектор посредством пренормировъчен поток на пертурбация на някоя от известните полеви теории асоциирани с S^5 или $T^{1,1}$. Това контрастира полевата теория асоциирана с $T^{1,1}$, която се поражда посредством пертурбация на теорията асоциирана с орбифолда $S^5/\mathbb{Z}_2$. В този смисъл можем да твърдим, че $T^{1,1}$ е специфично многообразие. Това е нож с две остриета – от една страна получаваме информация за многообразие, дуално (в някакъв смисъл) на конично многообразие, но от друга анализът на това многообразие не е достатъчен за да се правят общи заключения за по-общия клас от многообразия на Сасаки-Айнщайн $Y^{p,q}$.

[5]освен това в този случай многообразието е и плоско

6 Струнни конфигурации върху многообразия на Шрьодингер

6.1 Пространство на Шрьодингер в глобални координати

В тази секция ще опишем метод, по който да получим вида на пространството на Шрьодингер (по S^5 или $T^{1,1}$) в глобални координати (4.15). Започваме от вид, съдържащ координатите на AdS_5 - по този начин директно знаем откъде сме тръгнали преди TsT трансформацията - това е изключително полезно, ако по-нататък искаме да сравняваме нашите резултати с известни други такива.

Пет-мерното пространство на Шрьодингер в локални координати може да бъде изразено като

$$ds^2 = -\ell^2 \frac{\hat{\mu}^2 \left(dx^+\right)^2}{z^4} + ds^2_{AdS_5}, \tag{6.1}$$

където вторият член е пространството AdS във координати светлинен конус

$$ds^2_{AdS_5} = \frac{\ell^2}{z^2}\left(2dx^+ dx^- + d\vec{x}^2 + dz\right) \tag{6.2}$$

Трябва да се отбележи, че локалните координати (6.1) **не са** координати светлинен конус за пространството на Шрьодингер, невнимателното им разглеждане би довело до грешки, както авторът на тази работа сам се убеди. За да намерим глобални координати за пространството на Шрьодингер ние въвеждаме следните координатни преобразувания

$$x^+ = \tan T, \quad x^- = V - \frac{1}{2}\left(Z^2 + \vec{X}^2\right)\tan T, \quad z = \frac{Z}{\cos T}, \quad \vec{x} = \frac{\vec{X}}{\cos T}. \tag{6.3}$$

Имаме следните изрази за диференциалите на координатите

$$\begin{aligned} dx^+ &= \frac{dT}{\cos^2 T}, \quad dx^- = dV - \tan T(ZdZ + \vec{X}\cdot d\vec{X}) - \frac{1}{2}\left(Z^2 + \vec{X}^2\right)\frac{dT}{\cos^2 T} \\ dz &= \frac{dZ}{\cos T} + \frac{Z \sin T dT}{\cos^2 T}, \quad d\vec{x} = \frac{1}{\cos T}(d\vec{X} + \vec{X}\tan T dT) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Замествайки обратно в метриката, получаваме следният израз за AdS_5 частта в глобални координати (отново, това е само част от нелинейно извеждане)

$$ds^2_{AdS_5} = \frac{\ell^2}{Z^2}\left(2dTdV - \left(Z^2 + \vec{X}^2\right)dT^2 + d\vec{X}^2 + dZ^2\right). \tag{6.5}$$

Трябва да преобразуваме и първото събираемо във (6.1). Оказва се, че е в сила следната проста зависимост

$$\frac{\hat{\mu}^2}{z^4}dx^{+2} = \frac{\hat{\mu}^2}{Z^4}dT^2 \tag{6.6}$$

Обединявайки всичко, ние достигаме до израза за метриката на Шрьодингер и B-полето в глобални координати

$$\frac{ds^2_{Schr_5}}{\ell^2} = -\left(\frac{\hat{\mu}^2}{Z^4} + 1\right)dT^2 + \frac{2dTdV - \vec{X}^2 dT^2 + d\vec{X}^2 + dZ^2}{Z^2} \tag{6.7}$$

$$\alpha' B_{(2)} = \frac{\ell^2 \hat{\mu} dT}{Z^2} \wedge (d\hat{\chi} + P) \tag{6.8}$$

Забелязваме, че в току-що описаната процедура, участва само един елемент от напречното (на $Schr_5$) направление S^5 - ъгълът на изометрия χ. Следователно, за да намерим фоновата геометрия $Schr_5 \times T^{1,1}$ в глобални координати ни е нужен само този ъгъл на изометрия от тора $T^{1,1}$.

6.2 Многообразия на Шрьодингер тип $Schr_5 \times S^5$ и $Schr_5 \times T^{1,1}$

6.2.1 $Schr_5 \times S^5$

Нека започнем с кратко ревю на резултати от изследвания на гигантски магнони и шиповидни струни върху това многообразие [48, 49]. Тези частни случаи на струнни решения можем да мислим като арки и шипове движещи се по определени геодезични линии. Започваме отново от метриката на пространството на Шрьодингер в глобални координати

$$ds^2_{Schr_5} = -\left(1 + \frac{\mu^2}{Z^4} + \frac{\vec{X}^2}{Z^2}\right) dT^2 + \frac{2dTdV + d\vec{X}^2 + dZ^2}{Z^2}. \tag{6.9}$$

Както споменахме преди, макар да имаме неизродена сфера е по-удобно да я запишем като разслоение на Хопф над комплексното проективно пространство $\mathbb{CP}^2$

$$ds^2_{S^5} = ds^2_{CP^2} + (d\chi + P)^2, \tag{6.10}$$

където P е диференциал живеещ върху базата

$$P = \frac{1}{2}\sin^2\mu(d\alpha + \cos\theta d\phi) \tag{6.11}$$

Избираме да запазим означенията от [49], където $\vec{X} = 0$ и $S^3 \subset S^5$. В този случай, съществените формули са[1]

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\mu^2}{Z^4}\right) dT^2 + \frac{2dTdV + dZ^2}{Z^2} + \frac{1}{4}\left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + (d\psi - \cos\theta d\phi)^2\right]$$

$$B = \frac{\mu}{2Z^2} dT \wedge (d\psi - \cos\theta d\phi) \tag{6.12}$$

С последната стъпка вече имаме пълната картина за началната точка на нашите изследвания - нелинеен сигма модел върху пространство на Шрьодингер в пет измерения, умножен по компактно многообразие - 5 мерна сфера. Следващата стъпка е подбор на подходящ анзац, който ще изследваме. Както споменахме, търсим решения тип гигантски магнони и шиповидни струни. Подходящ избор за анзац тогава е

$$\begin{aligned} &T = \kappa\tau + T_y(y), \quad V = \alpha\tau + V_y(y), \quad Z = Z_0 \\ &\theta = \theta_y(y), \quad \psi = \omega_\psi\tau + \Psi_y(y), \quad \phi = \omega_\phi\tau + \Phi_y(y), \end{aligned} \tag{6.13}$$

където $y = c\sigma - d\tau$ и $\kappa, \alpha, Z_0, \omega_\phi$ и ω_Ψ са константи.

Освен четирите заряда - $\mathcal{E}, \mathcal{M}, \mathcal{J}_\psi, \mathcal{J}_\phi$ - които се получават след интегриране на импулсите p_t, p_V, p_ψ, p_ϕ е полезно да въведем и нова величина $\Delta\psi_1 = (\Delta\psi + \Delta\phi)/2$. Технически тежка сметка показва, че дисперсионните съотношения за струни тип гигантски магнони се изразяват с тази величина

$$\left(\sqrt{\mathcal{E}^2 - \mu^2\mathcal{M}^2} - \mathcal{J}_1\right)^2 - \mathcal{J}_2^2 = 4\sin^2\theta\frac{\Delta\phi_1}{2}, \tag{6.14}$$

където $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_\psi + \mathcal{J}_\phi$ и $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_\psi - \mathcal{J}_\phi$.

Аналогично, единична шиповидна струна получаваме

$$\frac{1}{4}\left(\mathcal{J}_1^2 - \mathcal{J}_2^2\right) = \sin^2\left[\frac{1}{2}\left(\mathcal{E} - \mu\mathcal{M} - \Delta\phi_1\right)\right]. \tag{6.15}$$

[1]Трябва да отбележим, че също избираме $\ell = \alpha' = 1$.

6.2.2 $Schr_5 \times T^{1,1}$

Ще следваме означения, подобни на тези в [47, 50—52]. Линейният елемент на това пространство се дава от

$$ds^2_{Schr_5 \times T^{1,1}} = ds^2_{Schr_5} + ds^2_{T^{1,1}}. \tag{6.16}$$

Вече показахме как изглежда метриката на пет-мерното пространство на Шрьодингер в глобални координати. Метриката за многообразието $T^{1,1}$ е

$$ds^2_{T^{1,1}} = \frac{b}{4}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(d\theta_i^2 + \sin^2\theta_i d\phi_i^2\right) + b\left(d\psi - \sum_{i=1}^{2}\cos\theta_i d\phi_i\right)^2\right], \tag{6.17}$$

където $0 \le \psi \le 4\pi$, $0 \le \theta_i \le \pi$,$0 \le \phi_i \le 2\pi$ и $b = 2/3$. Параметъра b изглежда в излишък, но ние ще го запазим, тъй като ни позволява да направим граничният преход $b \to 1$, който ни връща към метриката на пет-мерната сфера S^5. Това на свой ред ни позволява да сравняваме нашите резултати с тези в [49]. С оглед на това да направим следващите извеждания по-прозрачни представяме явната форма на горната метрика в матричен вид

$$\left(\hat{G}^{T^{1,1}}_{kh}\right) = \frac{b}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 & b\cos\theta_1\cos\theta_2 & -b\cos\theta_1 \\ 0 & 0 & b\cos\theta_1\cos\theta_2 & b\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 & -b\cos\theta_2 \\ 0 & 0 & -b\cos\theta_1 & -b\cos\theta_2 & b \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

където сме подредили координатите както следва - $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \psi)$. Отново, трябва да отбележим, че TsT трансформацията поражда и B-поле, което в този случай приема вида

$$B_(2) = \frac{b\mu}{2Z^2} dT \wedge \left(d\psi - \sum_{i=1}^{2}\cos\theta_i d\phi_i\right), \tag{6.19}$$

или отбелязвайки, антисиметричността на B-полетата, независимите компоненти са

$$B_{T\phi_1} = -\frac{b\mu}{2Z^2}\cos\theta_1, \quad B_{T\phi_2} = -\frac{b\mu}{2Z^2}\cos\theta_2, \quad B_{T\psi} = \frac{b\mu}{2Z^2}. \tag{6.20}$$

С това вече знаем достатъчно за изходното положение на нашата задача, а именно явния вид на метриките и B-полето.

6.3 Струнен анзац и запазващи се заряди

Започваме нашите разглеждания с търсене на решения тип единична шиповидна струна. Както споменахме преди, такъв тип решения представляват „твърд“ профил движещ се по геодезична. Отразяваме това като приемаме следният анзац ([49, 53, 54])

$$\begin{aligned} &T = \kappa\tau + t(\xi), \kappa > 0, \quad V = \omega_0\tau + v(\xi), \quad Z = const \neq 0, \quad \vec{X} = \vec{0} \\ &\theta_i = \theta_i(\xi), \quad \phi_i = \omega_i\tau + \Phi_i(\xi), \quad i = 1, 2, \quad \psi = \omega_3\tau + \Psi(\xi) \end{aligned} \tag{6.21}$$

Заместваме този анзац в общия вид на действието за струнен сигма модел със B-поле и получаваме сравнително тежък израз за лагранжиана на нашата теория

$$
\begin{aligned}
L = -\frac{T}{2\alpha}\Bigg\{ & G_{TT}\left[-\dot{T}^2 - 2\beta\dot{T}T' + \left(\alpha^2-\beta^2\right)T'^2\right] \\
& + 2G_{TV}\left[-\dot{T}\dot{V} - \beta\left(\dot{T}V' + \dot{V}T'\right) + \left(\alpha^2-\beta^2\right)T'V'\right] \\
& + \left(\alpha^2-\beta^2\right)\sum_{i=1}^{2} G_{\theta_i\theta_i}\theta_i'^2 \\
& + \sum_{i,j=1}^{2} G_{\phi_1\phi_j}\left[-\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j - 2\beta\dot{\phi}_i\phi_j' + \left(\alpha^2-\beta^2\right)\phi_i'\phi_j'\right] \\
& + 2\sum_{i=1}^{2} G_{\phi_i\psi}\left[-\dot{\phi}_i\dot{\psi} - \beta\left(\dot{\phi}_i\psi' + \dot{\psi}\phi_i'\right) + \left(\alpha^2-\beta^2\right)\phi_i'\psi'\right] \\
& + G_{\psi\psi}\left[-\dot{\psi}^2 - 2\beta\dot{\psi}\psi' + \left(\alpha^2-\beta^2\right)\psi'^2\right] \\
& + 2\alpha\sum_{i=1}^{2} B_{T\phi_i}\left[\dot{T}\phi_i' - T'\dot{\phi}_i\right] + 2\alpha B_{T\psi}\left[\dot{T}\psi' - T'\dot{\psi}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Нашето фоново многообразие има определени изометрии, които отговарят на премествания по T, V, ϕ_1, ϕ_2 и ψ. Плътностите на импулсите, отговарящи за тези изометрии дефинираме по стандартен начин

$$
\Pi_T = -\frac{\partial L}{\partial \dot{T}}, \quad \Pi_V = \frac{\partial L}{\partial \dot{V}}, \quad \Pi_{\phi_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_k}, \quad \Pi_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \tag{6.23}
$$

от където лесно намираме съответните запазващи се заряди

$$
E = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\partial L}{\partial \dot{T}}, \quad J_V = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\partial L}{\partial \dot{V}}, \tag{6.24}
$$

$$
J_{\phi_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_k}, \quad J_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}. \tag{6.25}
$$

Нека сега заместим във (6.23) нашият анзац за шиповидна струна. Получаваме

$$
\frac{2\alpha}{T}\Pi_T = -2\left(G_{TT}\left(\kappa + \beta t'\right) + G_{TV}\left(\omega_0 + \beta v'\right) - \alpha\sum_{i=1}^{2} B_{T\phi_i}\Phi_i' - \alpha B_{T\psi}\Psi'\right) \tag{6.26}
$$

$$
\frac{2\alpha}{T}\Pi_V = 2G_{TV}\left(\kappa + \beta t'\right) \tag{6.27}
$$

$$
\frac{2\alpha}{T}\Pi_{\phi_k} = 2\left(\sum_{i=1}^{2} G_{\phi_k\phi_i}\left(\omega_i + \beta\Phi_i'\right) + G_{\phi_k\psi}\left(\omega_3 + \beta\Psi'\right) + \alpha B_{T\phi_k}t'\right), \quad k = 1,2 \tag{6.28}
$$

$$
\frac{2\alpha}{T}\Pi_\psi = 2\left(\sum_{i=1}^{2} G_{\phi_i\psi}\left(\omega_i + \beta\Phi_i'\right) + G_{\psi\psi}\left(\omega_3 + \beta\Psi'\right) + \alpha B_{T\psi}t'\right) \tag{6.29}
$$

Тези формули ще са от съществено значение по-късно, когато се определяме дисперсионните съотношения.

6.4 Решения тип гигантски магнони и шиповидни струни в $Schr_5 \times T^{1,1}$

След като в предходната секция поставихме задачата, която искаме да решим, в тази ще използваме означенията и дефинициите за да определим уравненията за движение и динамичните степени на свобода, след което ще наложим връзките на Вирасоро. Целта е да анализираме при какви условия получените решения наистина са от тип гигантски магнони или шиповидни струни. По този начин ние ще фиксираме част от константите които досега бяха произволни.

6.4.1 Уравнения за движение

Нетривиалните уравнения за движение, идващи от варирване на действието след налагане на анзаца (6.21) са следните

$$\text{за } t': \qquad (\alpha^2-\beta^2)t'(\xi) = A_V Z^2 + \beta\kappa \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned}\text{за } v': \qquad (\alpha^2-\beta^2)v'(\xi) &= \frac{\alpha b\mu}{2}\left(\omega_3 - \sum_{i=1}^{2}\omega_i\cos\theta_i\right) + A_T Z^2 \\ &+ (Z^4+\mu^2)A_V + \beta\omega_0\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\text{за } \Phi_k': \qquad \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Phi_k'(\xi) = \frac{4}{b}\frac{\left(A_{\phi_k}+A_\psi\cos\theta_k\right)}{\sin^2\theta_k} + \beta\omega_k \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}\text{за } \Psi': \qquad \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Psi'(\xi) &= \frac{4}{b}\sum_{i=1}^{2}\frac{A_{\phi_i}\cos\theta_i + A_\psi}{\sin^2\theta_i} \\ &+ \frac{4(1-2b)}{b^2}A_\psi - \frac{2\alpha\mu k}{bZ^2} + \beta\omega_3\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\text{за } Z: \qquad A_V^2 Z^6 + A_V A_T Z^4 = -\frac{\alpha\kappa}{b}\left(2\mu A_\psi - \alpha b\omega_0\right) \tag{6.34}$$

с добавени две уравнения идващи от θ_1 и θ_2:

$$\begin{aligned}&\left(\alpha^2-\beta^2\right)\theta_1''(\xi) + (1-b)\cos\theta_1\sin\theta_1\left[\omega_1^2 + 2\beta\omega_1\Phi_1' - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Phi_1'^2\right] \\ &\quad - b\sin\theta_1\cos\theta_2\left[\omega_1\omega_2 + \beta\left(\omega_1\Phi_2' + \omega_2\Phi_1'\right) - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Phi_1'\Phi_2'\right] \\ &\quad + b\sin\theta_1\left[\omega_1\omega_3 + \beta\left(\omega_1\Psi' + \omega_3\Phi_1'\right) - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Phi_1'\Psi'\right] \\ &\quad - \frac{2\alpha\mu}{Z^2}\sin\theta_1\left[\kappa\Phi_1' - t'\omega_1\right] = 0\end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}&\left(\alpha^2-\beta^2\right)\theta_2''(\xi) + (1-b)\cos\theta_2\sin\theta_2\left[\omega_2^2 + 2\beta\omega_2\Phi_2' - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Phi_2'^2\right] \\ &\quad - b\sin\theta_2\cos\theta_1\left[\omega_1\omega_2 + \beta\left(\omega_1\Phi_2' + \omega_2\Phi_1'\right) - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Phi_1'\Phi_2'\right] \\ &\quad + b\sin\theta_2\left[\omega_2\omega_3 + \beta\left(\omega_2\Psi' + \omega_3\Phi_2'\right) - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Phi_2'\Psi'\right] \\ &\quad - \frac{2\alpha\mu}{Z^2}\sin\theta_2\left[\kappa\Phi_2' - t'\omega_2\right] = 0\end{aligned} \tag{6.36}$$

Допълнително, от уравнението за Z имаме условие за съгласуваност, което действа като връзка между константите

$$A_V^2 Z^6 + A_V A_T Z^4 + \frac{\alpha\kappa}{b}(2\mu A_\psi - ab\omega_0) = 0. \tag{6.37}$$

Тези уравнения все още са твърде общи за да подлежат на допълнителен анализ. За да ги опростим, трябва да съобразим, че тройката $\theta_2 = \pi/2$, $\omega_2 = 0$, $A_{\phi_2} = 0$ е решение на уравненията за движение. Тоест, подмногообрзието $\mathcal{M}$, дефинирано от $(\theta_2, \phi_2) = const$ и анзаца (6.21), представлява самосъгласуван подсектор на класическата струнна теория, живееща върху $Schr_5 \times T^{1,1}$. Следователно, можем да разглеждаме динамиката на нашата струнна конфигурация не върху цялото многообразие, а върху подмногообрзието $\mathcal{M}$. От тук нататък, ние приемаме означението $\theta_1(\xi) = \theta(\xi), \Phi_1(\xi) = \Phi(x)$ за да описваме точно това подмногообразие.

Ако отчетем изискването глобалното време да е пропорционално на времето върху мировия лист, то $t' = 0$ от където фиксираме константата A_V

$$A_V = -\frac{\beta\kappa}{Z^2}. \tag{6.38}$$

Това веднага води до модифициране и известно опростяване на уравненията за v, Φ, Ψ и Z върху подмногообразието $\mathcal{M}$

$$\text{за } v': \quad (\alpha^2-\beta^2)v'(\xi) = \frac{\alpha b\mu}{2}(\omega_3-\omega_1\cos\theta) + \left[A_T - \left(1+\frac{\mu^2}{Z^4}\beta\kappa\right)\right]Z^2 + \beta\omega_0 \tag{6.39}$$

$$\text{за } \Phi': \quad \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Phi'(\xi) = \frac{4}{b}\frac{A_\phi + A_\psi\cos\theta}{\sin^2\theta} + \beta\omega_1,$$

$$\text{за } \Psi': \quad \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Psi'(\xi) = \frac{4}{b}\frac{(A_\phi\cos\theta + A_\psi)}{\sin^2\theta} + \frac{4(1-b)}{b^2}A_\psi - \frac{2\alpha\mu\kappa}{bZ^2} + \beta\omega_3 \tag{6.40}$$

$$\text{за } Z: \quad \beta(\beta_\kappa - A_T)Z^2 + \frac{\alpha}{\beta}(2\mu A_\psi - \alpha b\omega_0) = 0. \tag{6.41}$$

Оказва се, че последните две уравнения могат да бъдат комбинирани в удобна за използване форма

$$(\alpha^2-\beta^2)(\Phi'\cos\theta - \Psi') + \beta(\omega_3-\omega_1\cos\theta)) = \frac{4}{b^2}\left(\frac{\alpha b\mu\kappa}{2Z^2} - A_\psi\right). \tag{6.42}$$

Следва да наложим връзките на Вирасоро[2]

$$\text{Vir 1}: \qquad G_{MN}\left(\partial_\tau X^M \partial_\tau X^N + \left(\alpha^2-\beta^2\right)\partial_\xi X^M \partial_\xi X^N\right) = 0, \tag{6.43}$$

$$\text{Vir 2}: \qquad G_{MN}\left(\beta\partial_\tau X^M \partial_\tau X^N - \left(\alpha^2-\beta^2\right)\partial_\tau X^M \partial_\xi X^N\right) = 0. \tag{6.44}$$

Можем да използваме уравненията за v, Φ, Ψ за да преобразуваме втората връзка. Получаваме

$$(\kappa A_T + \omega_1 A_\phi + \omega_3 A_\psi)Z^2 - \beta\kappa\omega_0 = 0, \tag{6.45}$$

или

$$\omega_1 A_\phi + \omega_3 A_\psi = \left(\frac{\beta\omega_0}{Z^2} - A_T\right)\kappa. \tag{6.46}$$

Замествайки уравненията за движение във първата връзка на Вирасоро получаваме по-заплетен израз, а именно

$$\begin{aligned}\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2\theta'^2 = -\sin^2\theta&\left\{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\omega_1^2 + \left[\frac{4}{b}\frac{(A_\phi + A_\psi\cos\theta)}{\sin^2\theta} + \beta\omega_1\right]^2\right\}\\ &-\left(\alpha^2-\beta^2\right)b(\omega_3-\omega_1\cos\theta)^2 - b\left[\beta(\omega_3-\omega_1\cos\theta) + \frac{4}{b^2}\left(A_\psi - \frac{\alpha b\mu\kappa}{2Z^2}\right)\right]^2\\ &-\left(\alpha^2-\beta^2\right)\frac{4}{b}\left(G_{TT}\kappa^2 + \frac{2\omega_0\kappa}{Z^2}\right)\end{aligned} \tag{6.47}$$

Хубаво е да се отбележи, че върху подмногообразието $\mathcal{M}$ компонентата $G_{TT} = -|G_{TT}| = -\left(1+\frac{\mu^2}{Z^4}\right)$.

Последната стъпка е да изберем такива стойности за константите, при които наистина уравненията описват шиповидни струни или гигантски магнони. Ако това е възможно, то нашият анзац е смислен и наистина фоновото многообразие позволява такъв тип решения. В следващата секция ще покажем, че това наистина е така.

6.4.2 Точки на обръщане, гранични условия и струнни решения

Полу-класическите магнонни/шиповидно-струнни решения се описват от отворени струни, разпространяващи се в подпространство на някакво многообразие. Анзацът (6.21), който беше избран прехвърля уравненията за движение от такива за едномерна струна в такива за ефективна

[2]Тук всъщност сме взели линейна комбинация от връзките на Вирасоро, но това не ограничава общността.

точкова частица. В този смисъл, струнните конфигурации, които анализираме, достигат $\theta = \pi$. В тази точка, анзацът ни показва кои са *точките на обръщане* - $\theta' = 0$ и $v' = 0$. Не е трудно да се съобрази, че това наистина е така. Нека погледнем уравненията за движение (6.41) и това което получихме от първата връзка на Вирасоро (6.47). На няколко места виждаме член пропорционален на $(\sin^2\theta)^{-1}$ което е проблематично при $\theta \to \pi$. Ако все пак наложим условие за регулярност (ние търсим решения тип шиповидни струни и гигантски магнони, които са регулярни), то това задължително фиксира някакви константи в разложението на проблематичните членове. Например, ако разложим първият член от дясната страна на израза получен от първата връзка на Вирасоро (6.47) около точката $\theta = \pi$ получаваме

$$\frac{A_\phi^2 + A_\psi^2 + 2A_\phi A_\psi \cos\theta}{\sin^2\theta} \approx \frac{A_\phi^2 + A_\psi^2 - 2A_\phi A_\psi}{(\theta-\pi)^2} + \frac{A_{\Phi_k}^2 + A_\psi^2 + A_\phi A_\psi}{2} + O\Big((\theta-\pi)^2\Big). \tag{6.48}$$

Допълнително, анализирайки „опасните“ членове в уравненията за движение, можем да се убедим, че за да имаме регулярност на Φ', Ψ' и θ' в точката $\theta = \pi$, то трябва да е изпълнено следното условие за константите

$$A_\psi = A_\phi \equiv A. \tag{6.49}$$

Разбира се, условието за регулярност (6.49), което току що постулирахме, ще трябва да бъде наложено обратно върху уравненията на движение. Нека развием дясната страна на (6.47) около точката на обръщане $\theta = \pi$. Налагайки (6.49), получаваме

$$\begin{aligned}
\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2\theta'^2 = -\sin^2\theta &\left\{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\omega_1^2 + \left[\frac{4A}{b}\frac{(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} + \beta\omega_1\right]^2\right\} \\
&- \left(\alpha^2-\beta^2\right) b\left(\omega_3 - \omega_1\cos\theta\right)^2 - b\left[\beta\left(\omega_3-\omega_1\cos\theta\right) + \frac{4}{b^2}\left(A - \frac{\alpha b\mu\kappa}{2Z^2}\right)\right]^2 \\
&- \left(\alpha^2-\beta^2\right)\frac{4}{b}\left(-\left|G_{TT}\right|\kappa^2 + \frac{2\omega_0\kappa}{Z^2}\right)
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Тоест, условието за точка на обръщане води до следните връзки между константите

$$\left[\beta\left(\omega_1+\omega_3\right) + \frac{4}{b^2}\left(A - \frac{\alpha b\mu}{2Z^2}\kappa\right)\right]^2 = \left(\alpha^2-\beta^2\right)\left[\frac{4}{b^2}\left(\left|G_{TT}\right|\kappa^2 - \frac{2\omega_0}{Z^2}\kappa\right) - \left(\omega_1+\omega_3\right)^2\right] \tag{6.51}$$

Допълнително, ако наложим условието, $v' = 0$ в точката на обръщане $\theta = \pi$, то уравнението за v във води до фиксиране на константата A_T посредством Z

$$Z^2\left(A_T - \left|G_{TT}\right|\beta\kappa\right) + \beta\omega_0 + \frac{\alpha b\mu}{2}\left(\omega_1+\omega_3\right) = 0, \tag{6.52}$$

или записано за A_T

$$A_T = -\frac{\alpha b\mu}{2Z^2}\left(\omega_1+\omega_3\right) + \left|G_{TT}\right|\beta\kappa - \frac{\beta\omega_0}{Z^2} \tag{6.53}$$

Убедихме се, че (6.49) и (6.53) са естествени връзки върху константите, идващи от изискването за регулярност на уравненията за движение. Те обособяват физически смислените резултати след налагането на избрания струнен анзац, което е логически обосновано. Освен регулярност, условията (6.49) и (6.53) водят със себе си и значително опростяване на уравненията, които трябва да бъдат решени. В явен вид, след всички преобразувания, получаваме

$$\text{за } v': \qquad (\alpha^2-\beta^2)v'(\xi) = \frac{\alpha b\mu}{2}\omega_1(1+\cos\theta) \tag{6.54}$$

$$\text{за } \Phi': \qquad \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Phi'(\xi) = \frac{4}{b}\frac{A(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} + \beta\omega_1, \tag{6.55}$$

$$\text{за } \Psi': \qquad \left(\alpha^2-\beta^2\right)\Psi'(\xi) = \frac{4}{b}\frac{(\cos\theta+1)}{\sin^2\theta} + \frac{4(1-b)}{b^2}A - \frac{2\alpha\mu\kappa}{bZ^2} + \beta\omega_3 \tag{6.56}$$

Изследвайки горните уравнения забелязваме вектор по който можем да атакуваме задачата. Ако успеем да решим уравнение (6.50) и да получим явния вид на функцията $\theta(\xi)$, то би трябвало да можем да интегрираме и уравнения (6.54), (6.55) и (6.56) за да получим съответно $v(\xi)$, $\Phi(\xi)$ и $\Psi(\xi)$. След тази бележка, нека се фокусираме върху решаването на уравнение (6.50).

Първо, изглежда удобно да въведем нова функция

$$u(\xi) = \cos^2 \frac{\theta(\xi)}{2}, \quad u(\xi) \in [0,1]\,. \tag{6.57}$$

В термини на u, диференциалното уравнение изглежда по следният начин

$$u(\xi)'^2 = a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u^1 + a + 0 \equiv P_4(u), \tag{6.58}$$

тоест от дясната страна на уравнението стои просто полином от четвърта степен по u. Условията за регулярност (6.49), (6.53) отново изиграват съществена роля - лесно се вижда, че от тях следват условията $a_0 = a_1 = 0$ и диференциалното уравнение приема вида

$$u(\xi)'^2 = u^2(a_4 u^2 + a_3 u + a_2) \equiv P_4(u) \geq 0 \tag{6.59}$$

Важно е да свържем константите a_i с тези идващи от наложения анзац за струнни решения. Налице са силно нетривиалните зависимости

$$a_4 = -\frac{4(1-b)\alpha^2\omega_1^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2} < 0 \tag{6.60}$$

$$a_3 = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\left(4(1-b)\alpha^2\omega_1^2 + 4\alpha^2\omega_1^2 - 4b\alpha^2\omega_1\,(\omega_1+\omega_3) + \frac{8\alpha\beta\mu\kappa\omega_1}{Z^2}\right) \tag{6.61}$$

$$a_2 = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\left(-4\alpha^2\omega_1^2 + 4b\alpha^2\omega_1\,(\omega_1+\omega_3) - \frac{8\alpha\beta\mu\kappa\omega_1}{Z^2} - \frac{16A^2}{b^2}\right) \tag{6.62}$$

Макар тежки, за горните изрази е в сила твърдението

$$a_4 + a_3 + a_2 = -\frac{16A^2}{b^2(\alpha^2-\beta^2)^2}. \tag{6.63}$$

Нека да дадем интерпретация на уравнение (6.59). Изглежда сякаш то описва запазване на енергията за динамичната система там където подмногообразието $\mathcal{M}$ се пресича с компактната част $T^{1,1}$. Полинома $P_4(u)$ може да интерпретираме тогава като потенциал $U(u)$[3]. Тъй като $0 < b < 1$, то $a_4 \leq 0$ и по-дефиниция $u(\xi) \in [0,1]$. Както сме упоменали $P_4(u) \geq 0 \implies U(u) \leq 0$ и нулите на потенциала (по-дефиниция) отговарят на точките на обръщане.

Последната стъпка при анализа на точките на обръщане идва от уравнение (6.53). Ако приемем константно Z, то уравнението за движение по Z става алгебрично и има вида

$$Z^2\left[2\left(\beta^2-\alpha^2\right)\omega_0 + \frac{4\alpha\mu}{b}A + \alpha\beta b\mu\,(\omega_1+\omega_3)\right] = 2\beta^2\mu^2\kappa. \tag{6.64}$$

Финално, замествайки (6.49) и (6.53) във втората връзка на Вирасоро (6.46) получаваме следната алгебрична зависимост

$$(\omega_1+\omega_3)\left(A - \frac{\alpha b\mu}{2Z^2}\kappa\right) = \beta\left(\frac{2\omega_0}{Z^2}\kappa - |G_{TT}|\,\kappa^2\right). \tag{6.65}$$

С това достигнахме и до разплитане на нашата система, а именно система от три алгебрични уравнения - (6.52), (6.64) и (6.65) за трите константи A, Z и κ. Ако тези връзки са линейно независими, то системата следва да има единствено решение. С малко алгебрични преобразувания можем да елиминираме $(2\omega_0\kappa/Z^2 - |G_{TT}|\kappa^2)$ от първото уравнение и да получим квадратно

[3] В нашият случай този потенциал е от четвърта степен

уравнение за $4/b^2(A - \alpha b\mu\kappa/2Z^2)$, което съдържа параметрите ω_1 и ω_3. (Двете) решения на това уравнение определят дали класическата струнна конфигурация дава решение тип гигантски магнон или (единична) шиповидна струна. Двата типа решения се квалифицират по следният начин

$$\begin{aligned} \frac{4}{b^2}\left(A - \frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right) &= -\beta\left(\omega_1 + \omega_3\right) \quad \text{гигантски магнони} \\ \frac{4}{b^2}\left(A - \frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right) &= -\frac{\alpha^2}{\beta}\left(\omega_1 + \omega_3\right) \quad \text{единични шиповидни струни} \end{aligned} \tag{6.66}$$

На този момент е важно да сравним получените от нас изрази с тези от литературата. Вижда се, че ако вземем границата $\mu \to 0$, тоест нулева деформация, то ние стигаме до резултатите получени за не TsT трансформирано пространство - $AdS_5 \times S^5$ [54]. Следващата естествена стъпка е решаването на по-горните алгебрични системи за двата различни типа струнни решения. Започваме с изразяване на константата A (ще отбелязваме с A_m тази за магнони и с A_s тази за шиповидни струни)

$$A_m = \frac{\alpha b}{2}\left[\frac{\omega_0}{\mu} - \frac{\beta b}{2\alpha}\left(\omega_1 + \omega_3\right)\right] \tag{6.67}$$

$$A_s = \frac{\alpha b}{2}\frac{\omega_0}{\mu} \tag{6.68}$$

С това извеждане също фиксираме κ^2 и Z^2

$$\kappa_m^2 = \frac{\omega_0^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{4}\left(\omega_1 + \omega_3\right)^2 \tag{6.69}$$

$$\kappa_s^2 = \frac{\omega_0^2}{\mu^2} \tag{6.70}$$

$$Z_m^2 = \frac{\mu^2\kappa_m}{\omega_0} \tag{6.71}$$

$$Z_s^2 = \frac{2\beta\mu^2\kappa_s}{2\beta\omega_0 + b\mu\alpha\left(\omega_1 + \omega_3\right)} \tag{6.72}$$

Нека обобщим това извършените пресмятания. Изхождайки от уравненията за движение (заедно с връзките на Вирасоро) показахме, че наистина върху многообразието $Schr_5 \times S^5$ живеят струнни решения тип шиповидни струни или гигантски магнони. Допълнително, намерихме и решихме алгебричните съотношения които определят напълно параметрите описващи решенията. С това динамиката на полу-класическите решения които разглеждаме е почти определена. Все още не сме определили дисперсионните съотношения на струнните конфигурации. За да направим това ще трябва да намерим решенията на диференциалното уравнение (6.58). Веднага виждаме, че полиномът $P_4(u)$ има един двоен корен за $u = 0$ и други два идващи от квадратният тричлен. Както споменахме по-горе, ние налагаме $\theta = \pi \implies u = 0$ да бъде точка на обръщане. Налагайки и граничните условия, то можем да отгатнем, че структурата на уравнението трябва да е следната

$$u'^2 = u^2\left(a_4u^2 + a_3u + a_2\right) = |a_4|\, u^2\left(r_+ - u\right)\left(u + |r_-|\right), \tag{6.73}$$

където с $r_\pm$ сме отбелязали (наредените по големина) корени

$$r_- \le 0 \le u(\xi) \le r_+ \le 1. \tag{6.74}$$

В термини на тези променливи можем да напишем общо решение

$$u(\xi) = \frac{r_+\,|r_-|}{\left(r_+ + |r_-|\right)\cosh^2\left(\frac{\sqrt{|a_4|r_+|r_-|2}}{\xi}\right) - r_+} \tag{6.75}$$

или ако ползваме свойството на хиперболичния косинус, $2\cosh^2 x = 1 + \cosh(2x)$

$$u(\xi) = \frac{\frac{2r_+|r_-|}{(r_++|r_-|)}}{\cosh\left(\sqrt{|a_4|\,r_+\,|r_-|}\xi\right) - \frac{r_+-|r_-|}{r_++|r_-|}}. \tag{6.76}$$

Това общо решение ни дава някаква интуиция, но за да можем да го използваме, ще трябва да изразим корените посредством коефициентите в полинома P_4 (и от там, с параметрите на анзаца (6.21)). Използваме формулите на Виет

$$r_+ - |r_-| = \frac{a_3}{|a_4|}, \quad r_+\,|r_-| = \frac{a_2}{|a_4|} > 0, \text{ тоест } \quad a_2 > 0. \tag{6.77}$$

Нека си спомним (6.63), което ни даваше връзка между a_i и A. Показва се, че е в сила следното

$$\frac{16A^2}{b^2\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2} = -a_4\left(\frac{a_2}{a_4} + \frac{a_3}{a_4} + 1\right) = |a_4|\,(1-r_+)\,(1+|r_-|) \geq 0 \tag{6.78}$$

или

$$\frac{2A}{b} = \pm|\alpha|\,|\omega_1|\,\sqrt{(1-b)\,|1-r_+|\,(1+|r_-|)}. \tag{6.79}$$

Сега вече имаме цялата ни нужна информация за да презапишем решението за $u(\xi)$ в термини на a_i

$$u(\xi) = \frac{2a_2}{B\cosh\left(\sqrt{a_2}\xi\right) - a_3}, \tag{6.80}$$

където сме отбелязали

$$B = \sqrt{a_3^2 - 4a_4a_2}. \tag{6.81}$$

За да е в сила горното твърдение, е нужно $a_2 > 0$ и $|a_3|/B < 1$. Този израз задава добре дефинирано солитонно решение [54].

6.5 Дисперсионни съотношения

В тази секция ще намерим дисперсионните съотношения за разглежданите досега струнни конфигурации - гигантски магнони и единични шиповидни струни. Досега получихме различни взаимоотношения между параметрите в анзаца и струнните решения, както и общо солитонно решение, което ги описва. За да намерим дисперсионните съотношения, ще използваме тези знания и ще ги отнесем към плътностите на импулсите и запазващите се заряди.

6.5.1 Запазващите се заряди и ъглови амплитуди

Нека напомним, че фоновото ни многообразие притежава 4 изометрии и динамиката на струнните конфигурации е инвариантна под премествания с произволни константи по посоките T, V, ψ и $\phi \equiv \phi_1$. Използвайки всичко получено досега, плътностите на импулсите могат да бъдат записани както следва

$$\frac{\alpha}{T}\Pi_T = -G_{TT}\kappa - G_{TV}\left(\omega_0 + \beta v'\right) + \alpha B_{T\phi}\Phi' + \alpha B_{T\psi}\Psi', \tag{6.82}$$

$$\frac{\alpha}{T}\Pi_V = G_{TV}\kappa, \tag{6.83}$$

$$\frac{\alpha}{T}\Pi_\phi = G_{\phi\phi}\left(\omega_1 + \beta\Phi'\right) + G_{\phi\psi}\left(\omega_3 + \beta\Psi'\right), \tag{6.84}$$

$$\frac{\alpha}{T}\Pi_\psi = G_{\phi\psi}\left(\omega_1 + \beta\Phi'\right) + G_{\psi\psi}\left(\omega_3 + \beta\Psi'\right), \tag{6.85}$$

където сме направили следните полагания

$$v'(\xi) = -\frac{b\alpha\mu\omega_1}{(\alpha^2-\beta^2)}u, \tag{6.86}$$

$$\Phi'(\xi) = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)}\left[\frac{2A}{b}\frac{1}{(1-u)} + \beta\omega_1\right], \tag{6.87}$$

$$\Psi'(\xi) = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)}\left[\frac{2A}{b}\frac{1}{(1-u)} + \frac{4(1-b)A}{b^2} - \frac{2\alpha\mu\kappa}{bZ^2} + \beta\omega_3\right]. \tag{6.88}$$

За жалост, за да можем да работим ни трябват явни изрази за 4-те импулса като функции на u, които да заместим в интегралите за запазващите се величини. Както може да се очаква, директното заместване води до разходящи интеграли. Наистина, първите два интеграла са очевидно разходящи, тъй като плътностите на импулсите Π_V и Π_T са константи.

Въпреки тази спънка, ние все пак можем да говорим за дисперсионни съотношения в някои определени случаи. За да продължим анализа за нашите решения, трябва да конструираме и пресметнем ъгловата разлика по направленията ϕ и ψ. Нужно е да интегрираме уравненията за Φ' и Ψ' ((6.88), (6.87)) по цялото ξ, тоест $\xi \in (-\infty, \infty)$ върху солитонното решение (6.80).

Отново, наивното интегриране не е полезно - в подинтегралната функция участва $1/(1-u(\xi))$ което е разходящо при интегриране по $\xi \in (-\infty, \infty)$. За да избегнем това (и с него разходимосттите на амплитудите $\Delta\phi$ и $\Delta\psi$) можем да въведем комбинацията [49, 53, 54]:

$$\Delta \equiv \frac{\Delta\phi + \Delta\psi}{2} = \int_{\infty}^{\infty} d\xi \left(\frac{\Phi' + \Psi'}{2}\right). \tag{6.89}$$

Тази амплитуда е крайна за гигантски магнони, но за единична шиповидна струна все още е разходяща. Въпреки това и за двата случая има вида

$$\Delta = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{4}{b^2}\left(A - \frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right) + \beta\left(\omega_1+\omega_3\right)\right] + \frac{2A}{b}\left(\frac{u}{1-u}\right)\right\}. \tag{6.90}$$

От изразите за плътностите на импулсите и амплитудата Δ става ясно, че всъщност се налага пресмятането на три отделни интеграла. Тъй като функцията $u(\xi)$ намалява, когато аргументът се изменя между нула и безкрайност и нараства, когато той е между минус безкрайност и нула, то можем да разбием интеграционната мярка $d\xi$ на две

$$d\xi = -\frac{du}{u\sqrt{|a_4|(r_+-u)(u+|r_-|)}}, \tag{6.91}$$

когато сме между нула и безкрайност и интегрирането по u трябва да се вземе от r_+ до нула. Интегрирането по другият интервал става с мярката

$$d\xi = +\frac{du}{u\sqrt{|a_4|(r_+-u)(u+|r_-|)}} \tag{6.92}$$

и интегрирането по u е върху интервала $(0, r_+)$. Схематично написано, имаме

$$\int_{\infty}^{\infty} d\xi \cdots = 2\int_0^{r_+} \frac{du}{u\sqrt{|a_4|(r_+-u)(u+|r_-|)}} \tag{6.93}$$

Тогава трите интеграла, които трябва да бъдат пресметнати са

$$\mathrm{Int}_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi u = \frac{4}{\sqrt{|a_4|}} \arctan \sqrt{\frac{r_+}{|r_-|}} \tag{6.94}$$

$$\mathrm{Int}_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi u^2 = 2\frac{(r_+ - |r_-|)}{\sqrt{|a_4|}} \arctan \sqrt{\frac{r_+}{|r_-|}} + 2\sqrt{\frac{r_+ |r_-|}{|a_4|}} \tag{6.95}$$

$$\mathrm{Int}_3 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{u}{1-u} = \frac{4}{\sqrt{|a_4| (1-r_+)(1+|r_-|)}} \arctan \sqrt{\frac{r_+ (1+|r_-|)}{|r_-| (1-r_+)}}. \tag{6.96}$$

В този момент вече ще ни е нужна връзката между A и корените $r_\pm$ (6.78).

Нужно е внимание когато работим с израза за Δ. В явен вид имаме

$$\Delta = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{4}{b^2} \left(A - \frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa \right) + \beta (\omega_1 + \omega_3) \right] \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi + 2 \arctan \sqrt{\frac{r_+ (1+|r_-|)}{|r_-| (1-r_+)}}. \tag{6.97}$$

Удобна параметризация, аргументирана в дисертацията е

$$D \equiv \frac{r_+ - |r_-|}{r_+ + |r_-|} \equiv -\cos\delta, \tag{6.98}$$

$$C + D \equiv \frac{2r_+|r_-|}{r_+ + |r_-|} + \frac{r_+ - |r_-|}{r_+ + |r_-|} \equiv -\cos\gamma, \quad \delta \le \gamma \in [0, \pi], \tag{6.99}$$

като целта е да опростим максимално вида на солитона (6.80). Наистина, с този избор на параметри $u(\xi)$ има приятен за работа (и за гледане) вид

$$u(\xi) = \frac{C}{\cosh(\sqrt{a_2}\xi) - D}, \quad a_2 \ge 0, \quad |C + D| < 1. \tag{6.100}$$

Полезно е да знаем и че следните изрази са верни:

$$\frac{r_+}{|r_-|} = \frac{1+D}{1-D} = \frac{1-\cos\delta}{1+\cos\delta} = \tan^2\frac{\delta}{2} \tag{6.101}$$

$$\frac{r_+ (1+|r_-|)}{|r_-| (1-r_+)} = \frac{1+(C+D)}{1-(C+D)} = \frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = \tan^2\frac{\gamma}{2}, \tag{6.102}$$

както и

$$r_+ |r_-| = \frac{C^2}{1-D^2} = \frac{a_2}{|a_4|}. \tag{6.103}$$

Полезно при този избор на параметри е, че пропорцията $a_2/|a_4|$, която се появява на много места, се изразява директно посредством γ и δ

$$\frac{\cos\delta - \cos\gamma}{\sin\delta} = \sqrt{\frac{a_2}{|a_4|}}. \tag{6.104}$$

С това интегралите Int_1 и Int_2 се опростяват драстично

$$\mathrm{Int}_1 = \frac{2}{\sqrt{|\, a_4 \,|}}\delta \tag{6.105}$$

$$\mathrm{Int}_2 = \frac{a_3}{|a_4| \sqrt{|a_4|}}\delta + 2\frac{\sqrt{a_2}}{|a_4|}. \tag{6.106}$$

Още повече, от тук се вижда, че тези интеграли не са независими. Напротив, съществува проста линейна зависимост между Int_1 и Int_2, а именно

$$\mathrm{Int}_2 = \frac{a_3}{2|a_4|} \mathrm{Int}_1 + 2\frac{\sqrt{a_2}}{|a_4|}. \tag{6.107}$$

Изразът за Δ приема следният вид.

$$\Delta = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{4}{b^2}\left(A-\frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right)+\beta\left(\omega_1+\omega_3\right)\right]\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi+\gamma. \tag{6.108}$$

След тази обстойна обработка на изразите, вече можем да изведем общата форма на зарядите J_Ψ и J_Φ.

$$\alpha\frac{J_\psi}{T} = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)}\left\{\frac{b^2}{4}\left[\beta\frac{4}{b^2}\left(A-\frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right)+\alpha^2\left(\omega_1+\omega_3\right)\right]\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi-\frac{\alpha b^2}{2\sqrt{1-b}}\delta, \tag{6.109}$$

$$\alpha\frac{J_\phi}{T} = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)}\left\{\frac{b^2}{4}\left[\beta\frac{4}{b^2}\left(A-\frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right)+\alpha^2\left(\omega_1+\omega_3\right)\right]\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi-\alpha b\sqrt{1-b}\sqrt{\frac{a_2}{|a_4|}}. \tag{6.110}$$

Използвайки връзката (6.104),

$$\alpha\frac{J_\phi}{T} = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)}\left\{\frac{b^2}{4}\left[\beta\frac{4}{b^2}\left(A-\frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right)+\alpha^2\left(\omega_1+\omega_3\right)\right]\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi-\alpha b\sqrt{1-b}\left(\frac{\cos\delta-\cos\gamma}{\sin\delta}\right) \tag{6.111}$$

Макар и сложен, тези вид на изразите се оказва достатъчно удобен за изследване на дисперсионните съотношения. Ще разгледаме случаите на гигантски магнони (при които $\alpha^2-\beta^2>0$) и шиповидни струни (при които $\alpha^2-\beta^2<0$) поотделно в следващите под-секции. Удобно е да въведем величината

$$\eta^2 \equiv \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^p,$$

където $p=1$ за магнони и $p=-1$ за шиповидни струни. В следващите под-секции това ще е имплицитно прието.

6.5.2 Дисперсионни съотношения за гигантски магнони

В тази подсекция пресмятаме зарядите и извеждаме дисперсионните съотношения за струни тип гигантски магнони върху нашето фоново многообразие. В предишните глави сме описали граничните условия, които дават такъв тип струнно решение. Това, което остава е да пресметнем съответните интеграли. Имаме

$$\alpha\frac{E}{T} = \kappa\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\mu^2}+\frac{b^2}{4}\left(\omega_1+\omega_3\right)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi \tag{6.112}$$

$$\alpha\frac{J_V}{T} = \frac{\omega_0}{\mu^2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi \tag{6.113}$$

$$\alpha\frac{J_\psi}{T} = \frac{b^2}{4}\left(\omega_1+\omega_3\right)\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi-\alpha\frac{b^2}{2\sqrt{1-b}}\delta \tag{6.114}$$

$$\alpha\frac{J_\phi}{T} = \frac{b^2}{4}\left(\omega_1+\omega_3\right)\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi-\alpha b\sqrt{1-b}\left(\frac{\cos\delta-\cos\gamma}{\sin\delta}\right) \tag{6.115}$$

Веднага виждаме малка победа - стойността на Δ се оказва крайна,

$$\Delta = \gamma. \tag{6.116}$$

За жалост, това е помрачено от факта, че и четирите заряда са разходящи поради наличие на константни членове. Макар това да означава, че нямаме директен достъп до стойностите на зарядите, оказва се, че можем да анализираме определени линейни комбинации от тях и да достигнем по такъв начин до дисперсионните съотношения.

Разглеждайки подробно изразите виждаме, че всички те имат разходимост от един и същи „тип“, а именно такава, която може да бъде прехвърлена във вида

$$\frac{b}{2}(\omega_1+\omega_3)\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi = \alpha\sqrt{\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2}. \tag{6.117}$$

Имайки (6.117), ние можем да идентифицираме комбинациите от заряди, при които тази разходимост се съкращава, тоест комбинациите от заряди, които са крайни стойности. Оказва се, че те са 4 на брой

$$\frac{J_\psi}{T}-\frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2}, \tag{6.118}$$

$$\frac{J_\phi}{T}-\frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2}, \tag{6.119}$$

$$\frac{J_\psi}{T}+\frac{J_\phi}{T}-b\sqrt{\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2}, \tag{6.120}$$

$$\frac{J_\psi}{T}-\frac{J_\phi}{T}. \tag{6.121}$$

Макар четири на брой, само две от комбинациите са линейно независими от другите. Замествайки параметрите в първият израз с техните съответни, получени в миналата секция, имаме

$$\frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2}-\frac{J_\psi}{T}=\frac{b^2}{2\sqrt{1-b}}\delta. \tag{6.122}$$

Аналогично, изваждайки последният израз от първият получаваме

$$\frac{b}{2}\sqrt{\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2}-\frac{J_\phi}{T}=b\sqrt{1-b}\left(\frac{\cos\delta-\cos\gamma}{\sin\delta}\right). \tag{6.123}$$

Можем да елиминираме δ от уравнения (6.123) и (6.122). Ако го направим и използваме, че за случаят на гигантски магнони $\Delta=\gamma$, както отбелязахме в началото на под-секцията, то получаваме израз за дисперсионното съотношение за струни тип гигантски магнони живеещи върху (определено подмногообразие на) $Schr_5\times T^{1,1}$,

$$\frac{\cos\left\{\sqrt{\frac{(1-b)}{b^2}\left[\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2\right]}-\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\left(\frac{J_\psi}{T}\right)\right\}-\cos\Delta}{\sin\left\{\sqrt{\frac{(1-b)}{b^2}\left[\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2\right]}-\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\left(\frac{J_\psi}{T}\right)\right\}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2(1-b)}\left[\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2\right]}-\frac{1}{b\sqrt{1-b}}\left(\frac{J_\phi}{T}\right). \tag{6.124}$$

Ако въведем обобщен двуиндексен заряд и го разгледаме като оператор приемащ коефициентите като параметри,

$$\frac{\hat{J}_{V\alpha}}{T}[M,N]=\sqrt{M\left[\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2\right]}-N\left(\frac{J_\alpha}{T}\right), \tag{6.125}$$

то можем да презапишем изразът като

$$\frac{\cos\left(\hat{J}_{V\psi}\left[\frac{1-b}{b^2},\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\right]\right)+\cos\Delta}{\cos\left(\hat{J}_{V\psi}\left[\frac{1-b}{b^2},\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\right]\right)}=\hat{J}_{V\phi}\left[\frac{1}{2(1-b)},\frac{1}{b\sqrt{1-b}}\right], \tag{6.126}$$

което е и финалният вид на дисперсионното съотношение за случая на гигантски магнони върху $Sch_5 \times T^{1,1}$. Важно е да се отбележи, че полученият резултат е съгласуван с предходно известните резултати, получени в $AdS_5 \times T^{1,1}$ (отговарящо на граничен преход $\mu \to 0$) [54] и с такива получени за $Sch_5 \times S^5$ (отговарящо на граничен преход $b \to 1$)[49].

6.5.3 Единични шиповидни струни

Следващата задача е да намерим дисперсионното съотношение за вторият вид струнна конфигурация, която разглеждаме - единична шиповидна струна. Методът на работа е същият като за гигантските магнони - налагаме предходно получените гранични условия и връзки между константи в изразите за зарядите. Получаваме

$$\alpha \frac{E}{T} = \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi = \frac{\omega_0}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \tag{6.127}$$

$$\alpha\mu \frac{J_V}{T} = \frac{\omega_0}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi + \alpha \frac{b\,(\omega_1+\omega_3)}{2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \tag{6.128}$$

$$\frac{J_\psi}{T} = -\frac{b^2}{2\sqrt{1-b}}\delta \tag{6.129}$$

$$\frac{J_\phi}{T} = -b\sqrt{1-b}\left(\frac{\cos\delta - \cos\gamma}{\sin\delta}\right) \tag{6.130}$$

В този случай не само зарядите (конкретно E и J_V) са разходящи - изразът за Δ също съдържа разходимости

$$\Delta = -\frac{(\omega_1+\omega_3)}{2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi + \gamma \tag{6.131}$$

Въпреки това, светлината в края на тунела идва от това, че комбинацията на трите разходящи израза ни дава регулярен такъв. Наистина,

$$\gamma = \frac{1}{b}\left[\mu\left(\frac{J_V}{T}\right) - \left(\frac{E}{T}\right)\right] + \Delta. \tag{6.132}$$

Използвайки последният израз и изразът за J_ψ можем да елиминираме параметрите γ и δ. С това получаваме израз за дисперсионното съотношение

$$\frac{\cos\left[\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\left(\frac{J_{ij}}{T}\right)\right] - \cos\left\{\frac{1}{b}\left[\left(\frac{E}{T}\right) - \mu\left(\frac{J_V}{T}\right)\right] - \Delta\right\}}{\sin\left[\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\left(\frac{J_\psi}{T}\right)\right]} = \frac{1}{b\sqrt{1-b}}\left(\frac{J_\phi}{T}\right). \tag{6.133}$$

В термини на оператора $\hat{J}_{V\alpha}[M,N]$ можем да запишем израза както следва (означили сме $\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2} = Y$)

$$\frac{\cos\left(\hat{J}_{V\psi}[0,Y]\right) - \cos\left(\frac{1}{b}\left[\left(\frac{E}{T}\right) - \mu\left(\frac{J_V}{T}\right)\right] - \Delta\right)}{\sin\left(\hat{J}_{V\psi}[0,Y]\right)} = \hat{J}_{V\phi}\left[0, \frac{1}{b\sqrt{1-b}}\right]. \tag{6.134}$$

С този израз завършваме анализа си дисперсионното съотношение за гигантски магнони и единични шиповидни струни върху $Schr_5 \times T^{1,1}$.

6.6 Гранични случаи и сходни направления

В тази глава разгледахме два типа струнни решения - гигантски магнони и единични шиповидни струни живеещи върху $Sch_5 \times T^{1,1}$. Подобен тип проблеми са интересни, защото по холографско съответствие те отговарят на силно свързани нерелативистични конформни полеви теории. Тези, така наречени „диполни теории“, все още не са добре изучени. Използвайки различни комбинации от запазващи се заряди, ние успяхме да конструираме сходящи величини и ги използвахме, за да пресметнем дисперсионните съотношения при двете струнни конфигурации. Естественият въпрос, който се зарежда е на какви точно оператори отговарят тези дисперсионни съотношения. Определени идеи, за това какъв може да е отговорът на този въпрос, са дадени в [51] и [49].

Въпреки че работихме с компактното многообразие ^{1,1}, при което $b = 2/3$, ние сметнахме за удачно да оставим b като произволен параметър в извежданията ни - това директно ни позволява да разглеждаме различни гранични случаи и да сравняваме с вече известни резултати. Например, ако вземем границата $b \to 1$ в (6.126) и пресметнем внимателно, виждаме че

$$\frac{\cos\left(\hat{J}_{V\psi}\left[\frac{1-b}{b^2}, \frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\right]\right) + \cos\Delta}{\cos\left(\hat{J}_{V\psi}\left[\frac{1-b}{b^2}, \frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\right]\right)} = \hat{J}_{V\phi}\left[\frac{1}{2(1-b)}, \frac{1}{b\sqrt{1-b}}\right],$$
$$\underset{b\to 1}{\Longrightarrow} \left(\hat{J}_{V1}[1,1]\right)^2 - \left(\hat{J}_{V2}[0,1]\right)^2 = 4\sin^2\frac{\Delta}{2}, \quad (6.135)$$

където индексите $1, 2$ трябва да се разбират като свързани с $J_1 = J_\psi + J_\phi$ и $J_2 = J_\psi - J_\phi$. Сложната трансцендентна връзка се опростява значително. Допълнително, както споменахме в преходната секция, получаваме точно резултата получен в [49].

Другият граничен преход, който споменахме е този, при който деформационният параметър μ, който идва от TsT трансформацията, клони към нула. Тази граница можем да вземем почти директно

$$(6.126) \underset{\mu\to 0}{\Longrightarrow} \frac{\cos\left\{\frac{\sqrt{1-b}}{b}\left[\frac{E}{T} - \frac{2}{b}\left(\frac{J_\psi}{T}\right)\right]\right\} - \cos\Delta}{\sin\left\{\frac{\sqrt{1-b}}{b}\left[\frac{E}{T} - \frac{2}{b}\left(\frac{J_\psi}{T}\right)\right]\right\}} = \frac{\frac{E}{T} - \frac{2}{b}\left(\frac{J_\psi}{T}\right)}{2\sqrt{1-b}}. \quad (6.136)$$

Естествено, може да бъдат разгледани и гранични преходи в малко по-странични направления - точкови струни (BMN, [31]) и нагънати струни (GKP, [55]). Следва кратка дискусия за дисперсионното съотношение в тези граници.

Във BMN границата следните величини са малки

$$\hat{J}_{V\psi}\left[(1-b), \frac{2\sqrt{1-b}}{b}\right] \sim \Delta \sim \hat{J}_{V\phi}\left[(1-b), \frac{2\sqrt{1-b}}{b}\right] \to 0. \quad (6.137)$$

В такъв случай, след като развием аргументите на тригонометричните функции получаваме просто

$$\left(\frac{E}{T} - \frac{2-b}{b}\left(\frac{J_\psi}{T}\right) - \frac{J_\phi}{T}\right)^2 = (J_\psi - J_\phi)^2 + b^2\Delta^2. \quad (6.138)$$

В случая на $T^{1,1}$ параметъра b приема стойност $b = 2/3$. Получаваме

$$\left(\frac{E}{T} - 2\left(\frac{J_\psi}{T}\right) - \frac{J_\phi}{T}\right)^2 = (J_\psi - J_\phi)^2 + \frac{4}{9}\Delta^2 \quad (6.139)$$

В [56—58], например, лявата част на горното уравнение бива ползвана, за да бъдат класифицирани състоянията в pp-wave границата (като допълнително е идентифицирано $H = E - 2J_\psi - J_\phi$. Оказва се, че ако искаме точно да достигнем до резултата в сферичния случай, трябва да премащабираме Δ.

Илюстративно е да се разгледа GKP режима, който отговаря на $\eta \to 0$. За да сравним резултатите трябва да сме внимателни. Нужно е да се върнем и да направим граничният преход за коефициентите на полинома (6.59) и след това – за стойността на Δ посредством коефициентите C и D. Оказва се, че

$$\hat{J}_{V\phi}\left[\frac{1}{2(1-b)}, \frac{1}{b\sqrt{1-b}}\right] = \cot\left\{\hat{J}_{V\psi}\left[\frac{(1-b)}{b^2}, \frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\right]\right\}. \quad (6.140)$$

Отбелязваме, че за точковите струни дисперсионното съотношения е квадратично, но за нагънатите струни то остава трансцендентно. Този факт може да представлява интерес за бъдещи изследвания.

7 Заключение

В представения дисертационен труд намерихме и изследвахме струнни конфигурации тип гигантски магнони и (единични шиповидни струни) живеещи в пространството $Schr_5 \times T^{1,1}$. Мотивацията ни беше изследването на нерелативистичната версия на AdS/CFT дуалността, както и резултатите на Клебанов и Уитън за струнни теории, живеещи върху конични многообразия. Изведохме явен израз за лагранжиана на нелинейния сигма модел, който включва и антисиметрично B-поле. С подходящ анзац, ние решаваме класическата теория, намирайки уравненията за движение.

Уравненията за движение наложиха определени връзки между константите на анзаца, показвайки, че наистина имаме квази-класически решения тип гигантски магнони и единични шиповидни струни. Поставената задача се редуцира до ефективна теория на точкови частици. Разгледахме точките на обръщане за тези конфигурации. Допълнително решихме напълно алгебричните връзки, тоест напълно определихме струнните профили.

Разгледани бяха и дисперсионните съотношения на гигантските магнони и единичните шиповидни струни, живеещи върху $Schr_5 \times T^{1,1}$. Направен беше обстоен анализ на изразите и беше показано, че имаме съответствие с известни от литературата резултати, когато направим подходящи гранични преходи.

Интересна задача е да се разгледат информатично-теоретичните свойства на теории върху пространство-време на Шрьодингер. По-точно, интересно е какво става с информационната метрика на Фишер върху пространството от константи на връзката от двете страни на холографското съответствие. Пертурбативна рецепта за пресмятане на информационната метрика на Фишер за конкретен клас холографски модели е предложена в [59] и след това разширена и потвърдена от групата по теория на струните във Физически Факултет [60], където е доказано, че в случая на диполни конформни полеви теории дуални на струнна теория върху пространство на Шрьодингер (нерелативистичното) холографско съответствие е изпълнено и търсените величини съвпадат точно. Това е интересно защото показва, че и от информационна гледна точка оригиналното AdS/CFT съответствие може да се разшири до нерелативистичната му форма. Все още обаче остава нерешен проблемът за информационните свойства на нерелативистичната холография при наличието на черни дупки. Друг интересен въпрос, мотивиран от изследванията в [61] по който е започната работа е изследването на геометрични потоци върху TsT деформирани многообразия – поток на Ричи, поток на Ямабе, поток на Перелман и други. Това представлява интерес, тъй като все още не е изучена напълно геометричната природа на TsT трансформацията. Допълнително, започнати са предварителни изследвания относно така наречената $T\bar{T}$ деформация ([62] и източниците в нея) в контекста на многообразия на Шрьодингер и нерелативистична холография.

Научни приноси

- Решена е класическа струнна теория върху $Schr_5 \times T^{1,1}$ на ниво уравнения за движение. Реализирани са решения тип „гигантски магнони“ и „шиповидни струни“;
- изведени са експлицитни изрази за дисперсионните съотношения, отговарящи на тези струнни конфигурации. Те са трансцендентни функции на аномалната размерност , за разлика от подобни структури върху по-симетрични пространства;
- въпреки това внимателното налагане на гранични преходи ни води точно до известните от литературата резултати.

Научните приноси са на основата на следните публикации:

A. Golubtsova и др. “Pulsating strings in Schr$_5$ $\times$ $T^{1,1}$ background”. В: *J. Phys. A* 54.3 (2021), с. 035401

A. Golubtsova и др. “More on Schrödinger holography”. В: *JHEP* 08 (2020), с. 090

Ivo Iliev и RC Rashkov. “Near-Flat Limit of $Schr_5 \times S^5$”. В: *Journal of Physics and Technology* 3.2 (2019)

Библиография

[1] Juan Martin Maldacena. “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity”. В: *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999).

[2] Thomas Mehen, Iain W. Stewart и Mark B. Wise. “Conformal invariance for nonrelativistic field theory”. В: *Phys. Lett. B* 474 (2000).

[3] C.A. Regal, M. Greiner и D.S. Jin. “Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs”. В: *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004).

[4] K.M. O’Hara и др. “Observation of a Strongly Interacting Degenerate Fermi Gas of Atoms”. В: *Science* 298 (2002).

[5] Yusuke Nishida и Dam T. Son. “Nonrelativistic conformal field theories”. В: *Phys. Rev. D* 76 (2007).

[6] Koushik Balasubramanian и John McGreevy. “Gravity duals for non-relativistic CFTs”. В: *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008).

[7] Allan Adams, Koushik Balasubramanian и John McGreevy. “Hot Spacetimes for Cold Atoms”. В: *JHEP* 11 (2008).

[8] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory.* Cambridge University Press, 2004.

[9] J. Polchinski. *String Theory.* Т. 1,2. String Theory 2 Volume Hardback Set. Cambridge University Press, 2001. ISBN: 9780521633031.

[10] M.B. Green и др. *Superstring Theory: Volume 1, Introduction.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1988. ISBN: 9780521357524.

[11] Timo Weigand. *Lecture notes on String Theory.* Heidelberg University. 2015.

[12] R. Blumenhagen, D. Lüst и S. Theisen. *Basic Concepts of String Theory.* Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 9783642294976.

[13] K. Becker, M. Becker и J.H. Schwarz. *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction.* Cambridge University Press, 2006. ISBN: 9781139460484.

[14] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov и Alexander M. Polyakov. “Gauge theory correlators from noncritical string theory”. В: *Phys. Lett. B* 428 (1998).

[15] Edward Witten. “Anti-de Sitter space and holography”. В: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998).

[16] Gary T. Horowitz и Veronika E. Hubeny. “Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium”. В: *Phys. Rev. D* 62 (2000).

[17] Aitor Lewkowycz и Juan Maldacena. “Generalized gravitational entropy”. В: *JHEP* 08 (2013).

[18] R. A. Konoplya и A. Zhidenko. “Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory”. В: *Rev. Mod. Phys.* 83 (2011).

[19] Michael Lublinsky и Edward Shuryak. “Improved Hydrodynamics from the AdS/CFT”. В: *Phys. Rev. D* 80 (2009).

[20] Wojciech Florkowski, Michal P. Heller и Michal Spalinski. “New theories of relativistic hydrodynamics in the LHC era”. В: *Rept. Prog. Phys.* 81.4 (2018).

[21] Sean A. Hartnoll, Christopher P. Herzog и Gary T. Horowitz. “Holographic Superconductors”. В: *JHEP* 12 (2008).

[22] Joseph Polchinski. “Introduction to Gauge/Gravity Duality”. В: *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: String theory and its Applications: From meV to the Planck Scale.* Окт. 2010.

[23] Eric D’Hoker и Daniel Z. Freedman. “Supersymmetric gauge theories and the AdS / CFT correspondence”. В: *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 2001): Strings, Branes and EXTRA Dimensions.* Ян. 2002.

[24] Veselin G. Filev и др. “Flavoured large N gauge theory in an external magnetic field”. В: *JHEP* 10 (2007).

[25] Jorge Casalderrey-Solana и др. *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions.* Cambridge University Press, 2014. ISBN: 978-1-139-13674-7.

[26] V.K. Dobrev. “Non-Relativistic Holography - A Group-Theoretical Perspective”. В: *Int. J. Mod. Phys. A* 29 (2014).

[27] D.T. Son. “Toward an AdS/cold atoms correspondence: A Geometric realization of the Schrodinger symmetry”. В: *Phys. Rev. D* 78 (2008).

[28] R.R. Metsaev. “Type IIB Green-Schwarz superstring in plane wave Ramond-Ramond background”. В: *Nucl. Phys. B* 625 (2002).

[29] R.R. Metsaev и Arkady A. Tseytlin. “Exactly solvable model of superstring in Ramond-Ramond plane wave background”. В: *Phys. Rev. D* 65 (2002).

[30] Gary T. Horowitz и Alan R. Steif. “Spacetime singularities in string theory”. В: *Phys. Rev. Lett.* 64 (3 ян. 1990).

[31] David Eliecer Berenstein, Juan Martin Maldacena и Horatiu Stefan Nastase. “Strings in flat space and pp waves from N=4 superYang-Mills”. В: *JHEP* 04 (2002).

[32] Jan Christoph Plefka. “Lectures on the plane wave string / gauge theory duality”. В: *Fortsch. Phys.* 52 (2004).

[33] Jr. Callan Curtis G. и др. “Quantizing string theory in AdS(5) x S**5: Beyond the pp wave”. B: *Nucl. Phys. B* 673 (2003).

[34] Diego M. Hofman и Juan Martin Maldacena. “Giant Magnons”. B: *J. Phys. A* 39 (2006).

[35] N.P. Bobev и R.C. Rashkov. “Multispin Giant Magnons”. B: *Phys. Rev. D* 74 (2006).

[36] N.P. Bobev и R.C. Rashkov. “Spiky strings, giant magnons and beta-deformations”. B: *Phys. Rev. D* 76 (2007).

[37] Jan Plefka. “Spinning strings and integrable spin chains in the AdS/CFT correspondence”. B: *Living Rev. Rel.* 8 (2005).

[38] Gleb Arutyunov, Sergey Frolov и Marija Zamaklar. “Finite-size Effects from Giant Magnons”. B: *Nucl. Phys. B* 778 (2007).

[39] Riei Ishizeki и Martin Kruczenski. “Single spike solutions for strings on S**2 and S**3”. B: *Phys. Rev. D* 76 (2007).

[40] Riei Ishizeki и др. “Scattering of single spikes”. B: *JHEP* 02 (2008).

[41] Martin Kruczenski. “Spiky strings and single trace operators in gauge theories”. B: *JHEP* 08 (2005).

[42] Philip Candelas, Paul S Green и Tristan Hübsch. “Rolling among Calabi-Yau vacua”. B: *Nuclear Physics B* 330.1 (1990). ISSN: 0550-3213.

[43] Igor R. Klebanov и Edward Witten. “Superconformal field theory on three-branes at a Calabi-Yau singularity”. B: *Nucl. Phys. B* 536 (1998).

[44] Ofer Aharony, Ansar Fayyazuddin и Juan Martin Maldacena. “The Large N limit of N=2, N=1 field theories from three-branes in F theory”. B: *JHEP* 07 (1998).

[45] Charles P. Boyer и Krzysztof Galicki. “On Sasakian-Einstein geometry”. B: *Int. J. Math.* 11 (2000).

[46] Th. Friedrich и I. Kath. “Einstein manifolds of dimension five with small first eigenvalue of the Dirac operator”. B: *J. Differential Geom.* 29.2 (1989).

[47] Jerome P. Gauntlett и др. “Sasaki-Einstein metrics on S**2 x S**3”. B: *Adv. Theor. Math. Phys.* 8.4 (2004).

[48] Chong-Sun Chu, George Georgiou и Valentin V. Khoze. “Magnons, classical strings and beta-deformations”. B: *JHEP* 11 (2006).

[49] George Georgiou и Dimitrios Zoakos. “Giant magnons and spiky strings in the Schrödinger/dipole-deformed CFT correspondence”. B: *JHEP* 02 (2018).

[50] Stijn J. van Tongeren. “Yang–Baxter deformations, AdS/CFT, and twist-noncommutative gauge theory”. B: *Nucl. Phys. B* 904 (2016).

[51] Monica Guica, Fedor Levkovich-Maslyuk и Konstantin Zarembo. “Integrability in dipole-deformed $\boldsymbol{\mathcal{N} = 4}$ super Yang–Mills”. B: *J. Phys. A* 50.39 (2017).

[52] Mirjam Cvetic и др. “New Einstein-Sasaki spaces in five and higher dimensions”. B: *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005).

[53] H. Dimov и R.C. Rashkov. “On the anatomy of multi-spin magnon and single spike string solutions”. B: *Nuclear Physics B* 799.3 (2008). ISSN: 0550-3213.

[54] Sergio Benvenuti и Erik Tonni. “Giant magnons and spiky strings on the conifold”. B: *JHEP* 02 (2009).

[55] S.S. Gubser, I.R. Klebanov и Alexander M. Polyakov. “A Semiclassical limit of the gauge / string correspondence”. B: *Nucl. Phys. B* 636 (2002).

[56] N. Itzhaki, Igor R. Klebanov и Sunil Mukhi. “PP wave limit and enhanced supersymmetry in gauge theories”. B: *JHEP* 03 (2002).

[57] Jaume Gomis и Hirosi Ooguri. “Penrose limit of N = 1 gauge theories”. B: *Nucl. Phys. B* 635 (2002).

[58] Leopoldo A. Pando Zayas и Jacob Sonnenschein. “On Penrose limits and gauge theories”. B: *JHEP* 05 (2002).

[59] Andrea Trivella. “Holographic Computations of the Quantum Information Metric”. B: *Class. Quant. Grav.* 34.10 (2017).

[60] H. Dimov и др. “Holographic Fisher Information Metric in Schr\”odinger Spacetime”. B: (сент. 2020).

[61] Davide De Biasio и Dieter Lüst. “Geometric Flow Equations for Schwarzschild-AdS Space-Time and Hawking-Page Phase Transition”. B: *Fortsch. Phys.* 68.8 (2020).

[62] Yunfeng Jiang. “Lectures on solvable irrelevant deformations of 2d quantum field theory”. B: (апр. 2019).

[63] A. Golubtsova и др. “Pulsating strings in $\mathrm{Schr}_5 \times T^{1,1}$ background”. B: *J. Phys. A* 54.3 (2021).

[64] A. Golubtsova и др. “More on Schrödinger holography”. B: *JHEP* 08 (2020).

[65] Ivo Iliev и RC Rashkov. “Near-Flat Limit of $Schr_5 \times S^5$”. B: *Journal of Physics and Technology* 3.2 (2019).