



Софийски университет „Св. Климент Охридски”
Физически факултет
катедра Ядрена техника и ядрена енергетика

Сребрин Колев

Нестационарна формулировка на нодалния метод
HEXNEM3 за решаване на уравнението на
неутронен пренос в дифузионно приближение

Автореферат

на дисертация за придобиване на образователната и научна
степен „доктор”

професионално направление: 4.1 Физически науки
докторска програма: Неутронна физика и физика на ядрените
реактори

научен консултант
доц. д-р Ивайло Христосков

София, април 2020 г.

Съдържание

i. Списък с означения и съкращения	3
ii. Предмет и обхват	3
iii. Увод.....	5
iv. Структура и обем на дисертацията.....	6
I. Стационарна двугрупова дифузионна задача	7
I.1. Напречно интегриране	8
I.2. АСМFD схема	9
II. Нестационарна двугрупова дифузионна задача	14
II.1. Третиране на зависимостта от времето.....	15
II.2. Модално разлагане.....	17
II.3. АСМFD схема.....	17
II.3.1 а) Положителен лапласиан	18
II.3.1 б) Отрицателен лапласиан	18
II.3.2. Свързващи коефициенти.....	19
II.4. Балансни уравнения	19
III. Програмна реализация и решаване на тестови задачи	20
III.1. Условнокритични задачи В1–ВВ за ВВЕР-1000	21
III.2. Условнокритична задача АЕР-FCM-101 за ВВЕР-1000	23
III.3. Условнокритична задача АЕР-FCM-001 за ВВЕР-440	24
III.4. Нестационарна задача АЕР-DYN-001 за ВВЕР-440	25
III.5. Нестационарна задача АЕР-DYN-002 за ВВЕР-440	30
III.6. Нестационарна задача DYN-B за ВВЕР-1000	35
v. Приноси на дисертационния труд	38
vi. Авторски публикации, включени в дисертацията	39
vii. Доклади на конференции по темата на дисертацията	39
viii. Литература	39

i. Списък с означения и съкращения

ACMFD: Analytical Coarse-Mesh Finite-Difference

FRCZ: Fine-mesh Radial Coarse-mesh Z (axial)

НЗСМ: HEXNEM3 ACMFD Modal

HEXNEM: HEXagonal Nodal Expansion Method

pcm: per cent mille ($1 \text{ pcm} = 10^{-5}$) – мярка за отклонение от критичност

ВВЕР: Водно-Воден Енергиен Реактор

В настоящата работа величините с **получерен шрифт** са векторни без значение дали са означени с главна или малка буква (например **r**, **J**); величините с **получерен шрифт**, които имат знака '^' отгоре, са матрици (например **\hat{a}** , **\hat{R}**); всички останали величини са скаларни (например *f*, Φ).

Скаларното умножение на вектори е означено с традиционния знак '.' (например **e · r**); при умножението на матрици, както и на матрица по вектор, не е използван специален знак (например **$\hat{Q}\hat{B} = \hat{R}$** , **$\hat{Q}A = d$**).

Знакът '-' върху дадена величина е означение за средна стойност (например $\bar{\Phi}$, \bar{f}). Всички останали индекси и означения върху величините в настоящата работа са специфични за контекста и са пояснени в изложението.

ii. Предмет и обхват

Предмет на изчислителния реакторен анализ е моделирането на неутроннофизични процеси в ядрените реактори чрез решаване на Болцмановото уравнение на неутронния пренос относно пространственото и енергетичното разпределение на зависещия от времето неутронен поток. Това се прави на основата на оценени ядрени данни и процедури за тяхното интерпретиране. Полученото решение се използва за пресмятане на неутроннофизичните характеристики (НФХ) на реактора – скорости на неутронни реакции и други производни величини.

За *експлоатационен* анализ на НФХ най-често се прилага аналитично и изчислително икономичното *дифузионно* приближение на преносното уравнение, което е формулирано относно скаларния поток, т.е. без явно отчитане на посоките на движение на неутроните, и то в малък брой енергетични групи – типично две с граница между тях напр. 0.625 eV. За целта реакторната среда се разделя на мрежа от условно хомогенизирани обеми, за които на основата на по-точни решения на преносната задача се подготвят т.нар. групови дифузионни константи – макроскопични сечения, дифузионни коефициенти, гранични условия, кинетични параметри и т.н. Ако дифузионните константи са пресметнати така, че в условно хомогенизираните обеми да се запазват действителните компоненти на неутронния баланс, то решението на двугруповата дифузионна задача може да бъде достатъчно точно за целите на експлоатацията и проектирането на ядрените реактори с топлинни неутрони.

От приложна гледна точка се различават два типа задачи:

- стационарни (условнокритични), които описват процесите в реактора при постоянни или бавноменящи се мощност и други параметри на състоянието, вкл. състав на реакторната среда;
- нестационарни, които описват относително бързи преходни процеси, каквито могат да настъпят при нормална експлоатация или в аварийни режими.

Решаването на нестационарни задачи се прави с цел изследване и обосноваване на безопасността на реакторните инсталации. Специфично и важно за практиката приложение е и интерпретирането на някои от резултатите от пусковите изпитания на нулева мощност с цел повишаване на тяхната точност – в частност на тези за определяне на ефективността на системата за управление и защита.

Различават се също два мащаба на пространствена дискретизация за дифузионната задача:

- *финоклетъчна*, при която напречният размер на условно хомогенизирания обем (клетка) е сравним или съвпада с този на елементарна реакторна клетка, която се състои от горивен елемент и принадлежащото му количество забавител (напр. за ВВЕР-1000 това е шестстен с диаметър на вписаната окръжност 1.275 cm);
- *едроклетъчна*, при която напречният размер на условно хомогенизирания обем (нод) обикновено съвпада с този на горивна касета и принадлежащото ѝ междукасетно пространство (напр. за ВВЕР-1000 – шестстен с диаметър на вписаната окръжност 23.7 cm).

При финоклетъчните пресмятания обикновено е достатъчно да се приеме, че средната и централната стойност на потока в клетката съвпадат, т.е. локалното изменение на потока е линейно.

При едроклетъчните пресмятания споменатото допускане е твърде грубо и за тях се конструират т.нар. *нодални схеми*, които свързват средния поток в нода с нетните неутронни токове през неговите стени на основата на по-точни и сложни предположения за вътрешното разпределение на потока в нода. За постигане на приемливо малки изчислителни разходи нестационарните дифузионни задачи, а също като правило и стационарните, се решават едроклетъчно с прилагане на подходящи нодални схеми.

В настоящата дисертация е представена новосъздадена модална ACMFD формулировка [Kolev and Christoskov, 2018; Kolev and Christoskov, 2019^a; Kolev and Christoskov, 2019^b] на *едроклетъчния нодален метод* HEXNEM3 [Christoskov and Petkov, 2013], предназначена за решаване на *нестационарната двугрупова дифузионна задача* за реактори от типа ВВЕР. За разлика от досега използваното при методите HEXNEM, а и не само при тях, итериране по енергетични групи, тази формулировка позволява *икономично и устойчиво* прилагане на нужната за такъв тип задачи *неявна диференчна схема по време*.

Създадената програмна реализация НЗСМ на този нов вариант на HEXNEM3 е изследвана за точност, устойчивост и изчислителна ефективност чрез решаване на серия от *математически тестови задачи* и сравняване с техните *финоклетъчни двугрупови дифузионни референтни решения*, които от своя страна при достатъчно малка стъпка на дискретизация са *точни* за условно хомогенизираните нодове в рамките на двугруповото дифузионно приближение. Дифузионните константи, както и

всички други нужни входни данни и условия при тези тестови задачи са известни и фиксирани, така че на проверка подлежи по същество *само* реализираният в НЗСМ едроклетъчен нодален метод.

Такъв тип проверки, които в случая се отнасят за точността, устойчивостта и ефективността на нодалния метод за решаване на нестационарната двугрупова дифузионна задача, както и за качествата на неговата програмна реализация, и се правят с известни и дадени дифузионни константи, кинетични параметри и други входни данни, е прието да се наричат *верификация* [Oberkampf and Trucano, 2007].

Валидацията, чрез която се проверява дали методът и неговата реализация, напр. в рамките на някой приложно ориентиран програмен комплекс, описват реалното поведение на даден реактор в контекста на дефинирани аналитични *потребности*, може да включва оценяване на качеството на използваните оценени ядрени данни, на приложимостта на двугруповото дифузионно приближение в дефинирания контекст, на методите и процедурите за подготовка на дифузионни константи, кинетични параметри и т.н., а също и сравнения с експериментални данни или детайлни симулации. Такива валидационни проверки по своята природа и предназначение са изцяло извън обхвата на представеното в дисертацията изследване.

iii. Увод

HEXNEM е фамилия от нодални методи за решаване на уравнението на неутронен пренос в двугрупово дифузионно приближение с цел моделиране на неутроннофизичното поведение на ядрени реактори от типа ВВЕР. Дифузионната задача се решава за триъгълна решетка от шестостенни горивни касети, а скаларният неутронен поток се разлага по базови функции в рамките на всеки хомогенизиран нод (слой от касета). Оригиналният метод HEXNEM1 е разработен от У. Грундман [Grundmann, 1999].

Методът HEXNEM3 [Christoskov and Petkov, 2013] допринася за развитието на серията от методи HEXNEM, като въвежда в разложението на потока експоненти с линейноменящи се по стените на нода амплитуди, за сметка на използваните в метода HEXNEM2 [Grundmann and Hollstein, 1999] експоненциални функции през върховете на нода. Добавени са и гранични условия за линейно претеглените по стените на нода скаларен поток и нетен ток. Това подобрява точността на решението и улеснява формулирането на физично обосновани вътрешни и външни гранични условия. Методът е разработен във връзка с програмния комплекс HELHEX [Петков и др., 2013; Петков, 2013; Христосков, 2013], който е представен например в [Kamenov et al., 2013]. Наскоро реализация на метода HEXNEM3 беше включена в развиваната в Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf програма DYN3D [Bilodid et al., 2018].

По отношение на поставената начална задача за поведението на скаларния неутронен поток във времето нестационарното двугрупово дифузионно уравнение е твърда система от диференциални уравнения, поради което за осигуряване на стабилност на нейното решение е нужно да се използва неявна диференчна схема по време. От друга страна, досегашният подход за прилагане на методите HEXNEM за решаване на нестационарни задачи се основава на разделно решаване на груповите уравнения, съпроводено с итерирание по енергетични групи. Този итерационен процес,

който впрочем е сроден с организацията на решаване на условнокритични задачи, не се съгласува добре с ограниченията на неявната диференчна схема по време. Ефектът може да бъде бавна сходимост и дори неустойчивост при някои бързи преходни процеси. Нужно е обаче да се отбележи, че независимо от този недостатък оригиналните формулировки на HEXNEM на практика се прилагат и за решаване на нестационарни задачи, както например е избрано в DYN3D, но с цената на особена чувствителност към настройките на чебишевския полиномен метод [Hageman and Young, 1981] за ускоряване на решението на породените от нестационарната задача нехомогенни линейни алгебрични системи.

В дисертацията е представена разработка на нова нестационарна формулировка на метода HEXNEM3, която позволява съвместно безитеративно решаване на двугруповата дифузионна задача. Това е постигнато чрез предварително прилагане на модално разлагане на скаларните потоци [Kolev and Christoskov, 2019^a; Kolev and Christoskov, 2019^b], което води до система от самостоятелни нехомогенни хелмхолцови уравнения за всяка зависима променлива (мод), свързани единствено чрез граничните условия. При положителен лапласиан за даден мод математичният модел за неговата координатна зависимост съвпада с този в HEXNEM3 за скаларните потоци. За специалния случай на отрицателен лапласиан е разработен и описан съответен нов модел за представяне на тази координатна зависимост, съдържащ тригонометрични функции вместо хиперболичните, използвани при положителен лапласиан.

Допълнително нововъведение спрямо оригиналния метод HEXNEM3 е създаването на ACMFD (analytical coarse-mesh finite difference) схема за него [Chao, 1999, Kolev and Christoskov, 2018], която свързва линейно граничния нетен неутронен ток със средните скаларни потоци за два съседни нода. За разлика от базираните на сдвояване по парциални токове оригинални формулировки на HEXNEM, това позволява формиране на явна линейна алгебрична система относно всички средни скаларни потоци или средни стойности на съответните модове и дава свобода на избор на метод за решаване на тази система.

Програмната реализация на новата модална ACMFD формулировка на метода HEXNEM3 е изследвана за устойчивост, сходимост и точност чрез решаване на условнокритични и нестационарни моделни задачи за ВВЕР-440 и ВВЕР-1000. Представените в дисертацията резултати потвърждават предимствата на избрания подход.

iv. Структура и обем на дисертацията

Дисертационният труд включва увод, обзорна част, три основни раздела, заключение и приложение, в което са представени голяма част от математическите изрази, получени в дисертацията. Общият обем е 155 страници, които включват 36 фигури и 37 таблици. Цитираната литература обхваща 59 заглавия.

В увода са очертани мотивацията и целите на направеното изследване, както и главните резултати от него.

Обзорната част съдържа кратък преглед на основните методи за числено решаване на неутронната преносна задача и коментари за техните особености и приложимост. Пояснени са контекстът и мястото на дифузионното приближение сред тези методи.

В първия основен раздел е разгледана условнокритичната двугрупова дифузионна задача. Представено е изграждането на нодалните схеми на метода HEXNEM3 за решаване на двумерната и едномерната задачи, породени от използваната при него техника на напречно интегриране за решаването на тримерни задачи. Описани са начините за апроксимиране на напречните утечки, прилагане на външни гранични условия, използване на коефициенти на прекъсване на потока (ADF) [Smith, 1986]. Коментирани са процедурата по съставяне на алгебрична система от балансни уравнения и алгоритъмът за решаване на условнокритични задачи.

Вторият основен раздел на дисертацията съдържа математическия извод на основните изрази, които са използвани за решаване на нестационарната двугрупова дифузионна задача. Описани са начините и методите за третиране на зависимостта от времето, както и отчитането на закъсняващите неутрони по време на преходни процеси. Коментирана е необходимостта от прилагането на неявна схема. Последователно са изведени и описани техниката на модалното разлагане при метода HEXNEM3 за случаите на положителен и отрицателен лапласиани, както и прилагането на ACMFD схемата при решаване на нестационарни задачи. Формулирана е алгебричната система от балансни уравнения при нестационарни задачи и последователно е описан алгоритъмът за пресмятане на преходни процеси.

Третият основен раздел е посветен на изследване на свойствата на новата модална ACMFD формулировка на метода HEXNEM3 чрез решаване на условнокритични и нестационарни моделни задачи за ВВЕР-440 и ВВЕР-1000. Резултатите, получени със създадената за целите на настоящото изследване програмна реализация НЗСМ, са сравнени с публикувани референтни финоклетъчни двугрупови дифузионни решения на условнокритичните задачи и с генерирани за целта на изследването аналогични референтни решения на нестационарните задачи. За получаване на тези референтни решения е използвана създадената за целите на изследването програмна реализация FRCZ на хибридна, т.е. двумерна финоклетъчна и аксиална нодална схема за решаване на дифузионната задача. Резултатите от сравненията показват много добрата точност, неизменна числена устойчивост и бърза сходимост на новосъздадената формулировка на HEXNEM3.

Заключението резюмира накратко основните резултати, върху които се изгражда дисертационният труд.

I. Стационарна двугрупова дифузионна задача

Типично начално условие на нестационарната дифузионна задача е разпределението на скаларния неутронен поток за определено условнокритично стационарно състояние. По тази причина, а и поради общността при конструиране на нодалната схема, най-напред ще бъде разгледана стационарната двугрупова задача [Duderstadt and Hamilton, 1976]:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_1^n(\mathbf{r}) + \Sigma_r^n \Phi_1^n(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_{eff}} \sum_{g=1}^2 \Sigma_{v,g}^n \Phi_g^n(\mathbf{r}), \quad (I.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_2^n(\mathbf{r}) + \Sigma_a^n \Phi_2^n(\mathbf{r}) = \Sigma_s^n \Phi_1^n(\mathbf{r})$$

Тук n е означение за нод (хомогенизиран обем), а долните индекси 1 и 2 обозначават енергетична група (1 – за *бързата* и 2 – за *топлинната*). Σ_r^n е сечението за извеждане на неутрони от бързата група, Σ_a^n е сечение за поглъщане на топлинни неутрони, Σ_s^n е сечение за разсейване на неутрони от бързата към топлинната група, а $\Sigma_{v,g}^n$ е произведение на сечението за делене с неутрони от съответната група g и средния брой неутрони, получени при един такъв акт на делене. k_{eff} е ефективният коефициент на размножение.

Неутронният ток и неутронният поток са свързани чрез закона на Фик за дифузионното приближение на уравнението на неутронен пренос:

$$\mathbf{J}_g^n(\mathbf{r}) = -D_g^n \nabla \Phi_g^n(\mathbf{r}), \quad (I.2)$$

където D е *коэффициент на дифузия*.

Методите HEXNEM се основават на т.нар. напречно интегриране и позволяват обособено третиране на двумерна задача в равнината (x, y) и едномерна задача в аксиално направление.

1.1. Напречно интегриране

Напречното интегриране е техника, която се използва при голям брой съвременни нодални методи [Lawrence, 1986] за намиране на средните нодални потоци. Чрез него в случая на решетка от шестостенни призми тримерната задача се разделя на едномерна аксиална и двумерна в равнината (x, y) .

Осредняването на уравненията (I.1) в равнината (x, y) в границите на един нод води до уравнения от вида:

$$-D_g \frac{d^2}{dz^2} \Phi_g(z) + \Sigma_g \Phi_g(z) = Q_g(z), \quad g = 1, 2, \quad (I.1.1)$$

където нодалният индекс е изпуснат, Σ_g е сечението за извеждане на неутрони от съответната група, а $\Phi_g(z)$ е осредненият по x и y поток. Източникът $Q_g(z) = S_g(z) - L_g(z)$ има следните основни компоненти:

$$S_1(z) = \frac{1}{k_{eff}} \sum_{g=1}^2 \Sigma_{v,g} \Phi_g(z); S_2(z) = \Sigma_s \Phi_1(z); L_g(z) = -\frac{D_g}{F} \iint_F \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_g(\mathbf{r}) dx dy,$$

където F е площта на напречното сечение на нода, а $L_g(z)$ е напречната, в случая радиална, утечка.

Аналогично, аксиалното осредняване в границите на нода води до уравненията:

$$-D_g \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_g(x, y) + \Sigma_g \Phi_g(x, y) = Q_g(x, y), \quad (I.1.2)$$

където източникът се формира както при (I.1.1), а напречната (аксиална) утечка е:

$$L_g(x, y) = -\frac{D_g}{H} \int_H \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_g(\mathbf{r}) dz,$$

където H е височината на нода.

Напречното интегриране опростява съставянето на нодални схеми, чрез които нетните токове през стените на нода се свързват със средните нодални потоци, но изисква итерационно решение по напречните утечки. Точността на тяхното представяне, което обикновено включва апроксимация, в голяма степен обуславя точността и устойчивостта на метода за решаване на общата тримерна задача.

В новоразработената модална ACMFD формулировка на метода HEXNEM3 апроксимирането на утечката е непроменено спрямо съществуващите реализации на HEXNEM [Grundmann et al., 2005; Christoskov and Petkov, 2013]. Аксиалната утечка $L_g(x, y)$ се апроксимира с полиномно разложение от втора степен по базис от ортогонални полиноми върху сечението на нода в равнината (x, y) . Аналогично се постъпва с радиалната утечка $L_g(z)$, където ортогоналният полиномен базис се строи в аксиалните граници на нода. Подробно описание на подхода може да бъде намерено в раздел I.3 от дисертацията.

1.2. ACMFD схема

Тук ще бъде представена основно двумерната задача (I.1.2), тъй като процедурата за едномерната аксиална задача е аналогична и технически по-проста.

Основна предпоставка за съставяне на схемата е приемането на източника $Q(x, y)$ за известен, така че нехомогенните уравнения в системата (I.1.2) са разделени. По-долу груповият и нодалният индекси често ще бъдат изпускани, а вместо Σ_g ще се използва означението Σ_r .

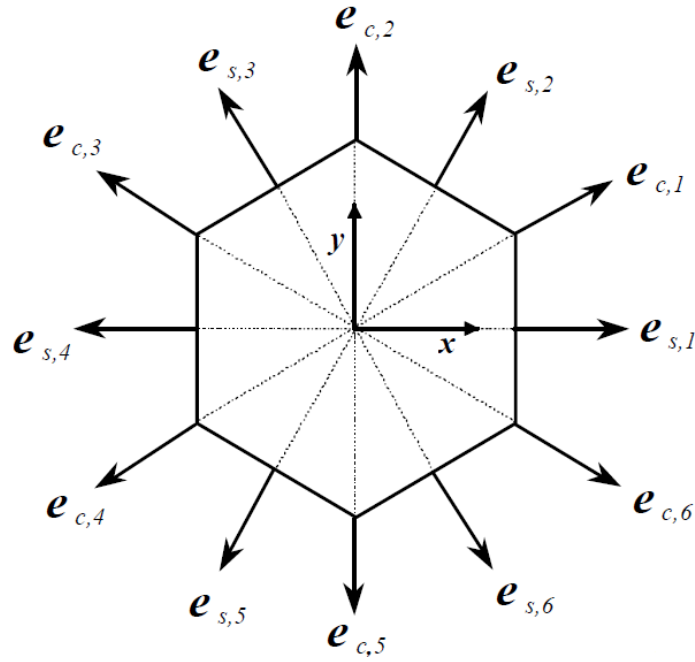
За горивната решетка на ВВЕР шестостенният нод е с размерите на горивна касета с принадлежащото ѝ междукасетно пространство. Той е изобразен на Фиг I.1 с помощните единични вектори, използвани при конструиране на нодалната схема. Равноправно с оста x ще бъдат третираны помощните оси u и v , където u е обща за векторите \mathbf{e}_2^s и \mathbf{e}_5^s , а v е обща за \mathbf{e}_3^s и \mathbf{e}_6^s .

За простота на по-нататъшните изрази е въведено следното обезразмеряване:

$$x' = \frac{x}{h}, y' = \frac{y}{h}; D' = \frac{D}{h}; \Sigma'_r = h\Sigma_r; Q' = hQ; B' = \sqrt{\Sigma'_r/D'},$$

където h е полустъпката на решетката от нодове.

С тези означения видът на (I.1.2) се запазва.



Фиг. I.1. Геометрия на напречното сечение на шестостенен нод

Моделът за нодално разлагане на скаларния поток в настоящата работа съвпада с модела на метода HEXNEM3 [Christoskov and Petkov, 2013]:

$$\Phi(x', y') = \sum_{i=0}^5 c_i p_i(x', y') + \sum_{k=1}^6 a_k^s \exp(B' \mathbf{e}_k^s \cdot \mathbf{r}') + \sum_{k=1}^6 a_k^w (\mathbf{e}_{l(k)}^c \cdot \mathbf{r}') \exp(B' \mathbf{e}_k^s \cdot \mathbf{r}'), \quad (\text{I.2.1})$$

където $l(1) = l(4) = 2; l(2) = l(5) = 6; l(3) = l(6) = 4$ (вж. Фиг. I.1).

Изразът (I.2.1) е общо решение за уравнението (I.1.2). Полиномната компонента $\sum_{i=0}^5 c_i p_i(x', y')$ в него е представена чрез коментирания по повод на напречната утечка ортогонален полиномен базис. Тази компонента е от втора степен, която е минималната с ненулев принос в утечката.

Полиномната компонента е частно решение на (I.1.2) и се определя чрез аналогичното полиномно разложение на източника $Q'(x', y')$.

Непосредствено може да се провери, че членовете с експоненти са решения на хомогенната част на (I.1.2), т.е. $\nabla^2 f(x', y') = B'^2 f(x', y')$.

Изборът на разлагането (I.2.1) е практически мотивиран компромис, защото пълнотата на общото решение на (I.1.2) по принцип изисква броят на експонентите в модела да бъде безкраен, също както и редът от полиноми за частното решение. Важно е да се отбележи, че нехомогенността на уравнението (I.1.2) се дължи на итериранието по източника, докато базовата условнокритична задача без независим източник е хомогенна и нейното решение не би трябвало да съдържа полиномна компонента. При малък брой експоненти обаче въвеждането на тази полиномна компонента повишава адаптивността на нодалното разлагане и е решаваща за осигуряване на добра точност на метода.

Експоненциалните членове с тангенциалноменяща се амплитуда $(\mathbf{e}_{l(k)}^c \cdot \mathbf{r}') \exp(B' \mathbf{e}_k^s \cdot \mathbf{r}')$ са отличителна черта на HEXNEM3. Те заместват 6-те експоненти през върховете на нода в HEXNEM2 и наред с повишаването на точността при нодове с големи размери позволяват обосноваването на по-естествени и удобни за прилагане вътрешни гранични условия.

Допълнително на вътрешните и външните гранични условия за средните по стените на нода скаларен поток Φ_k^s и външна нормална проекция на нетния ток J_k^s , в HEXNEM3 се въвеждат условия и за техните т.нар. *тангенциални моменти*:

$$\begin{aligned} \Phi_k^w &= \frac{1}{L_k^{1s}} \left[\int_{L_k^{1s}} (\mathbf{e}_{l(k)}^c \cdot (x', y')) \Phi(x', y') ds \right] \\ J_k^w &= -\frac{1}{L_k^{1s}} \left[D' \int_{L_k^{1s}} (\mathbf{e}_{l(k)}^c \cdot (x', y')) \mathbf{e}_k^s \cdot \nabla \Phi(x', y') ds \right], \end{aligned} \quad (\text{I.2.2})$$

където L_k^{1s} са дължините на околните стени на нода.

Тези допълнителни условия, които заменят условията за потока и тока във върховете на нода при HEXNEM2, са до голяма степен в основата на високата точност и ефективност на метода HEXNEM3.

Моментите на потока и на тока позволяват отчитане на тяхната вариация по дължината на стената на нода. Така например, ако потокът и токът се изменят най-много линейно по дължината на нодалната стена, то техните средни стойности и тангенциални моменти биха съдържали пълната информация за тях.

От (I.2.1) и (I.2.2) се вижда, че величините Φ_k^s , Φ_k^w , J_k^s , J_k^w са линейна комбинация на коефициентите c_i , $i = 0, \dots, 5$, a_k^s , $k = 1, \dots, 6$ и a_k^w , $k = 1, \dots, 6$.

Нека $\mathbf{c} = \text{col}(c_0, \dots, c_5)$, $\mathbf{A}^s = \text{col}(a_1^s, \dots, a_6^s)$ и $\mathbf{A}^w = \text{col}(a_1^w, \dots, a_6^w)$, където *col* (*column*) е означение за векторна величина. Тогава за всеки нод могат да се запишат връзките (аналогично на работата [Christoskov and Petkov, 2013]):

$$\Phi^s = \hat{\mathbf{Q}}^{f,ss} \mathbf{A}^s + \hat{\mathbf{Q}}^{f,sw} \mathbf{A}^w + \tilde{\mathbf{P}}^{f,s} \quad (\text{I.2.3a})$$

$$\Phi^w = \hat{\mathbf{Q}}^{f,ws} \mathbf{A}^s + \hat{\mathbf{Q}}^{f,ww} \mathbf{A}^w + \tilde{\mathbf{P}}^{f,w}$$

$$\mathbf{d}^s = \hat{\mathbf{Q}}^{c,ss} \mathbf{A}^s + \hat{\mathbf{Q}}^{c,sw} \mathbf{A}^w \quad (\text{I.2.3b})$$

$$\mathbf{d}^w = \hat{\mathbf{Q}}^{c,ws} \mathbf{A}^s + \hat{\mathbf{Q}}^{c,ww} \mathbf{A}^w$$

където:

$$\begin{aligned} \Phi^s &= \text{col}(\Phi_1^s, \dots, \Phi_6^s) & \tilde{\mathbf{P}}^{f,s} &= \hat{\mathbf{P}}^{f,s} \mathbf{c} & \mathbf{d}^s &= -\left(\frac{\mathbf{J}^s}{D} + \tilde{\mathbf{P}}^{c,s} \right); \tilde{\mathbf{P}}^{c,s} = \hat{\mathbf{P}}^{c,s} \mathbf{c} \\ \Phi^w &= \text{col}(\Phi_1^w, \dots, \Phi_6^w) & \tilde{\mathbf{P}}^{f,w} &= \hat{\mathbf{P}}^{f,w} \mathbf{c} & \mathbf{d}^w &= -\left(\frac{\mathbf{J}^w}{D} + \tilde{\mathbf{P}}^{c,w} \right); \tilde{\mathbf{P}}^{c,w} = \hat{\mathbf{P}}^{c,w} \mathbf{c} \end{aligned}$$

Матриците в горните изрази са представени в Приложението към дисертацията (раздел IV.6)

Неизвестни в (I.2.3) са векторите \mathbf{c} , \mathbf{A}^s , \mathbf{A}^w . Елементите на \mathbf{c} могат да бъдат намерени от източника (при построяване на частното решение). Елементите на \mathbf{A}^s и \mathbf{A}^w , от своя страна, могат да бъдат намерени чрез свързването на изразите (I.2.3) за всички нодове чрез вътрешните и външните гранични условия. Това ще образува една линейна система за неизвестните коефициенти. Решаването на тази система позволява пресмятане на средните нодални скаларни потоци и следователно е равносилно на решаване на нехомогенното дифузионно уравнение при известен източник.

В оригиналната реализация на HEXNEM3 [Christoskov and Petkov, 2013], вместо за свързаните с нетния ток величини \mathbf{d} , се съставят подобни на (I.2.3) изрази за средните парциални токове $J_k^{s\pm} = \frac{1}{4}\Phi_k^s \mp \frac{1}{2}J_k^s$ и, аналогично на (I.2.2), за техните тангенциални моменти $J_k^{w\pm}$. Коефициентите \mathbf{A}^s и \mathbf{A}^w се елиминират и се изгражда връзка между входящите J^- и изходящите J^+ парциални токове и тангенциални моменти. На границите между нодовете се налагат условията за непрекъснатост $J_{n\leftarrow m}^{s-} = J_{m\rightarrow n}^{s+}$; $J_{n\leftarrow m}^{w-} = J_{m\rightarrow n}^{w+}$, където индексът m обхожда всички съседи на нода n . Така ефективно се съставя пълна система от уравнения за намиране на средните нодални потоци чрез парциалните токове. Итерационният процес за нейното решаване е стационарен, при което матрицата на системата не се формира явно. При условнокритични задачи не се прилага самостоятелна техника за ускоряване на процеса, защото тази функция може да се съвмести с ускоряването на итерациите по източника.

За разлика от описаната горе техника, известна като сдвояване по парциални токове, в дисертацията е приложен подход, основан на схемата ACMFD (Analytical Coarse-Mesh Finite-Differencing) [Chao, 1999]. ACMFD позволява експлицитно съставяне на матрицата на линейната система за средните скаларни потоци във всички нодове. Това предлага редица удобства най-вече при решаване на нестационарни задачи, като същевременно дава свобода на избор на методи за решаване на тази система.

Извеждането на основните връзки за ACMFD схемата върху метода HEXNEM3 [Kolev and Christoskov, 2018] се базира на изразите (I.2.3) и е както следва.

Най-напред за компактност се въвеждат следните означения:

$$\hat{\mathbf{Q}}^{c/f} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Q}}^{c/f,ss} & \hat{\mathbf{Q}}^{c/f,sw} \\ \hat{\mathbf{Q}}^{c/f,ws} & \hat{\mathbf{Q}}^{c/f,ww} \end{pmatrix}; \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^s \\ \mathbf{d}^w \end{pmatrix}; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^s \\ \mathbf{A}^w \end{pmatrix},$$

където елементите с индекс 1 ... 6 се отнасят за средните стойности, а тези с индекс 7 ... 12 – за тангенциалните моменти.

Така краткият запис на системата (I.2.3б) за коефициентите \mathbf{A} е:

$$\hat{\mathbf{Q}}^c \mathbf{A} = \mathbf{d} \tag{I.2.4}$$

Матрицата $\hat{\mathbf{Q}}^c$ е със специална блочна структура, която позволява нейното сравнително лесно аналитично обръщане.

Заместването на решението на (I.2.4) в (I.2.3а) води до следната връзка на средните стойности и тангенциалните моменти на граничните потоци със средните стойности и тангенциалните моменти на външните нормални проекции на нетния ток:

$$\Phi^{s/w} = \hat{Q}^f (\hat{Q}^c)^{-1} \mathbf{d} + \tilde{P}^f = \hat{R} \mathbf{d} + \tilde{P}^f, \quad (\text{I.2.5})$$

Матриците \hat{R} и $(\hat{Q}^c)^{-1}$ имат показаната на Фиг. I.2 еднаква специална структура, която помага за опростяване на крайните ACMFD изрази.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	α	β	γ	δ	γ	β	0	ϵ	$-\pi$	0	π	$-\epsilon$
2	β	α	β	γ	δ	γ	ϵ	0	$-\epsilon$	π	0	$-\pi$
3	γ	β	α	β	γ	δ	π	$-\epsilon$	0	ϵ	$-\pi$	0
4	δ	γ	β	α	β	γ	0	$-\pi$	ϵ	0	$-\epsilon$	π
5	γ	δ	γ	β	α	β	$-\pi$	0	π	$-\epsilon$	0	ϵ
6	β	γ	δ	γ	β	α	$-\epsilon$	π	0	$-\pi$	ϵ	0
7	0	τ	$-\sigma$	0	σ	$-\tau$	κ	λ	μ	ν	μ	λ
8	τ	0	$-\tau$	σ	0	$-\sigma$	λ	κ	λ	μ	ν	μ
9	σ	$-\tau$	0	τ	$-\sigma$	0	μ	λ	κ	λ	μ	ν
10	0	$-\sigma$	τ	0	$-\tau$	σ	ν	μ	λ	κ	λ	μ
11	$-\sigma$	0	σ	$-\tau$	0	τ	μ	ν	μ	λ	κ	λ
12	$-\tau$	σ	0	$-\sigma$	τ	0	λ	μ	ν	μ	λ	κ

Фиг. I.2. Структура на матриците \hat{R} и $(\hat{Q}^c)^{-1}$

Тъй като целта на ACMFD схемата е да се намери връзка между средните токове по стените на нода и средната стойност на скаларния неутронен поток в него, е нужен израз за средния нодален поток. Той е:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{F'} \alpha \sum_k a_k^s + \bar{P}, \quad (\text{I.2.6})$$

където $F' = 2\sqrt{3}$ е площта на нода, \bar{P} е средната полиномна компонента, a_k^s са елементите на вектора \mathbf{A}^s , а коефициентът α е интегралът на коя-да-е експонента $\exp(\mathbf{B}' \mathbf{e}_k^s \cdot \mathbf{r}')$ по площта на нода.

След заместване на елементите на \mathbf{A}^s с решението на системата (I.2.4), изразът (I.2.6) дава връзка между средния нодален поток и средните стойности и тангенциалните моменти на външните нормални проекции на нетните токове през стените на нода. Тази връзка, заедно с (I.2.5), се използва за получаване на основния ACMFD израз:

$$\Phi_k^{s,n} = C^{J,n} \frac{J_k^{s,n}}{D^n} + C^{\Phi,n} \bar{\Phi}^n + T_k^n \quad (\text{I.2.7})$$

Подобен е изразът и за тангенциалния момент на потока, но в него не участва средният нодален поток. Коефициентите и свободният член в (I.2.7) са описани в дисертацията. Тук е важно да се отбележи, че свободният член зависи от решението на дифузионната задача чрез средните нетни токове и техните тангенциални моменти по стените, които не съвпадат с текущата стена и нейната противоположна.

Изразът (I.2.7) и неговият аналог за тангенциалния момент на граничния поток се използват в условията за непрекъснатост на средните стойности и тангенциалните моменти на граничния поток и външната нормална проекция на нетния ток по общата стена между всеки два съседни нода n и m :

$$\begin{aligned}\Phi_k^{s,n} &= \Phi_l^{s,m} \\ \Phi_k^{w,n} &= \Phi_l^{w,m} \\ J_k^{s,n} &= -J_l^{s,m} = J_{nm}^s \\ J_k^{w,n} &= -J_l^{w,m} = J_{nm}^w\end{aligned}\tag{I.2.8}$$

Тези условия за непрекъснатост са еквивалентни на вдвояването по парциални токове и се допълват от външни гранични условия от логаритмичен или албеден тип.

С използване на условията за непрекъснатост (I.2.8) се достига до крайните ACMFD връзки за средната стойност и тангенциалния момент на външната нормална проекция на нетния ток:

$$\begin{aligned}J_{nm}^s &= \frac{\left(C^{\Phi,m} + \frac{T_l^{s,m}}{\bar{\Phi}^m} \right)}{\left(\frac{C^{J,n}}{D^n} + \frac{C^{J,m}}{D^m} \right)} \bar{\Phi}^m - \frac{\left(C^{\Phi,n} + \frac{T_k^{s,n}}{\bar{\Phi}^n} \right)}{\left(\frac{C^{J,n}}{D^n} + \frac{C^{J,m}}{D^m} \right)} \bar{\Phi}^n = \tilde{D}_{nm}^{s,m} \bar{\Phi}^m - \tilde{D}_{nm}^{s,n} \bar{\Phi}^n \\ J_{nm}^w &= \tilde{D}_{nm}^{w,m} - \tilde{D}_{nm}^{w,n}\end{aligned}\tag{I.2.9}$$

където $\tilde{D}_{nm}^{s/w,m}$ и $\tilde{D}_{nm}^{s/w,n}$ са така наречените *свързващи коефициенти*.

Тяхната зависимост от решението, включително чрез величините T , изисква итеративното им обновяване. При условнокритични задачи това обикновено се прави заедно с итерациите по източника и k_{eff} .

Свързващите коефициенти на свой ред участват във формиране на линейната алгебрична система от балансни уравнения за всички нодове и дадена енергетична група.

$$c_r \sum_{6m} J_{nm}^s + \sum_r \bar{\Phi}_n = \bar{Q}_n, n = 1, \dots, N, \tag{I.2.10}$$

където c_r е геометричен коефициент, а J_{nm}^s са съгласно (I.2.9).

Балансните уравнения се обобщават пряко за тримерния случай.

II. Нестационарна двугрупова дифузионна задача

С отчитане на източника на закъсняващи неутрони, общият запис на нестационарната двугрупова задача е [Azmy and Sartori, 2010]:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_1} \frac{\partial \Phi_1^n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_1^n(\mathbf{r}, t) + \Sigma_r^n(t) \Phi_1^n(\mathbf{r}, t) \\
&= \frac{1}{k_{eff}} \sum_{g=1}^2 (1 - \beta_g^n(t)) \Sigma_{v,g}^n(t) \Phi_g^n(\mathbf{r}, t) + \sum_{j=1}^M \lambda_j^n C_j^n(\mathbf{r}, t) \\
& \frac{1}{v_2} \frac{\partial \Phi_2^n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_2^n(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a^n(t) \Phi_2^n(\mathbf{r}, t) = \Sigma_s^n(t) \Phi_1^n(\mathbf{r}, t) \\
& \frac{\partial C_j^n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{k_{eff}} \sum_{g=1}^2 \beta_{g,j}^n(t) \Sigma_{v,g}^n(t) \Phi_g^n(\mathbf{r}, t) - \lambda_j^n C_j^n(\mathbf{r}, t); j = 1, \dots, M
\end{aligned} \tag{II.1}$$

Тук v_1 и v_2 са скоростите на неутроните съответно в бързата и в топлинната групи. $\{C_j^n\}$ са концентрациите на ядрата-предшественици на закъсняващи неутрони в нод n , $\{\lambda_j^n\}$ са константите на разпадане на тези ядра, а $\{\beta_{g,j}^n\}$ са относителните дялове на закъсняващите неутрони в процеса на генериране на нови неутрони от делене. Индексът j е за съответната група закъсняващи неутрони, а $\beta_g^n = \sum_{j=1}^M \beta_{g,j}^n$. Всички останали означения са като тези при стационарната двугрупова задача.

II.1. Третиране на зависимостта от времето

Производната на неутронния поток по времето в нестационарното дифузионно уравнение по принцип може да бъде представена чрез предна разлика. Това води до така наречената *явна схема*, чието важно потенциално предимство е разделянето на системата от уравнения за зависимите променливи в края на стъпката по време. За параболични частни диференциални уравнения явната схема обаче налага твърде строги ограничения върху стъпката на интегриране по време и е практически неприложима за решаваната реакторна задача. Ако производната по времето се оцени чрез задна разлика се получава *неявната схема*, при която уравненията за зависимите променливи в края на стъпката са свързани. Неявната схема е безусловно стабилна при големи стъпки, но с общо присъщия за крайните разлики риск от неприемливо влошаване на точността с увеличаване на стъпката до практически целесъобразен мащаб. Без загуба на стабилност точността може да се повиши чрез т.нар. θ -претеглена схема, която е линейна комбинация между явната и неявната схеми. Нейното прилагане обаче усложнява реализацията, без да позволи достатъчно за практически цели подобряване на точността спрямо чисто неявната схема.

За целите на настоящото изследване е избрана чисто неявна схема в комбинация със специално представяне на зависимостта на потока от времето (II.1.1), какъвто е например и подходът в DYN3D [Grundmann et al., 2005]. Тази техника, позната като Stiffness Confinement Method [Sutton and Aviles, 1996], цели да се подобри точността при относително големи стъпки по време. В рамките на $t \in [t_k, t_{k+1}]$ неутронният поток се представя във вида:

$$\Phi_g^n(\mathbf{r}, t) = \exp(\omega^n(t - t_k)) \tilde{\Phi}_g^n(\mathbf{r}, t). \tag{II.1.1}$$

С отчитане на природата на параболичните частни диференциални уравнения, зависимостта на потока от времето в (II.1) действително ще бъде локално близка до експоненциална. Така при правилно подбрани параметри $\{\omega^n\}$ функцията $\tilde{\Phi}_g^n(\mathbf{r}, t)$ ще се мени слабо с времето, което позволява сравнително големи стъпки без съществена загуба на точност. Диференцирането на (II.1.1) по времето и апроксимирането на $\partial\tilde{\Phi}_g^n(\mathbf{r}, t)/\partial t$ чрез задна разлика води до:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_g^n(\mathbf{r}, t_{k+1}) \approx \frac{1}{\Delta_k} \left[(1 + \omega^n \Delta_k) \Phi_g^{n,k+1}(\mathbf{r}) - \Phi_g^{n,k}(\mathbf{r}) \exp(\omega^n \Delta_k) \right], \quad (\text{II.1.2})$$

където индексът k привързва съответната величина към момента t_k , а $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$.

Оценяването на $\{\omega^n\}$ може да стане отново на основата на (II.1.1) например по следния начин: $\omega^n = \frac{1}{\Delta_k} \ln \left(\frac{\sum_{g=1}^2 \bar{\Phi}_g^{n,k+1}}{\sum_{g=1}^2 \bar{\Phi}_g^{n,k}} \right)$. За прилагане на (II.1.2) могат да се използват оценки от предходната стъпка, но е възможно и $\{\omega^n\}$ да се преоценяват итеративно, напр. заедно със свързващите коефициенти.

Отново с използване на (II.1.1), интегрирането на уравненията за концентрациите на ядрата-предшественици на закъсняващи неутрони в (II.1) води до следния израз за концентрациите в края на стъпката по време:

$$C_j^{n,k+1}(\mathbf{r}) \approx C_j^{n,k}(\mathbf{r}) \exp(-\lambda_j^n \Delta_k) + \gamma_j^n \left[\frac{1}{k_{eff}^n} \sum_{g=1}^2 \beta_{g,j}^{n,k+1} \sum_{v,g}^{n,k+1} \Phi_g^{n,k+1}(\mathbf{r}) \right], \quad (\text{II.1.3})$$

където $\gamma_j^n = \frac{1 - \exp(-(\lambda_j^n + \omega^n) \Delta_k)}{\lambda_j^n + \omega^n}$.

Използването на (II.1.2) и елиминирането на уравненията за ядрата-предшественици в (II.1) чрез (II.1.3) води до следната двугрупова нестационарна дифузионна задача.

$$\nabla^2 \Phi^{n,k+1}(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{A}}^{n,k} \Phi^{n,k+1}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}^{n,k}(\mathbf{r}), \quad (\text{II.1.4})$$

където векторите Φ и \mathbf{Q} са двueleментни, а матрицата $\hat{\mathbf{A}}$ е с размерност 2×2 . Нейните елементи са функция на дифузионните константи и в съгласие с неявната схема са отнесени към края на стъпката. При необходимост те могат да се обновяват итеративно.

Началното състояние преди преходния процес може да бъде условнокритично, т.е. $\bar{\Phi}_g^{n,0} = \bar{\Phi}_g^{n,crit}$, като същото важи и за полиномното разложение на потока. Така изразите за началните средни концентрации на ядрата-предшественици и коефициентите в тяхното полиномно разложение са:

$$\bar{C}_j^n = \frac{1}{k_{eff}^n} \sum_{g=1}^2 \frac{\beta_{g,j}^n}{\lambda_j^n} \sum_{v,g}^n \bar{\Phi}_g^n; c_{j,m}^{p,n} = \frac{1}{k_{eff}^n} \sum_{g=1}^2 \frac{\beta_{g,j}^n}{\lambda_j^n} \sum_{v,g}^n f_{g,m}^n, \quad (\text{II.1.5})$$

където $c_{j,m}^{p,n}$ и $f_{g,m}^n$ са съответно m -тият коефициент в полиномното разложение на $C_j^n(\mathbf{r})$ и скаларния поток.

II.2. Модално разлагане

Участието на двата групови потока в лявата страна на уравненията (II.1.4) прави невъзможно прилагането на модела HEXNEM3 за нодално разлагане на потока и построяване на ACMFD схемата, както те са описани тук за стационарни задачи в раздел I.2 и по-подробно в разделите I.1.1 и I.2.1 от дисертацията. Едно сравнително просто решение би било в лявата част на уравненията да се оставят величини, свързани единствено с текущата група, а всичко останало да придобие роля на източник. Това налага итерирание по групи подобно на подхода за решаване на стационарни задачи. Такава стратегия е реализирана в DYN3D, но тя не е оптимална от гледна точка на изискванията на неявната схема. Определени твърди преходни процеси водят до сравнително бавна сходимост, а поради стационарността на подобния на последователна релаксация итеративен процес техниките за ускоряване са ограничени.

Приложеното в настоящата работа *модално разлагане* позволява да се запазят свойствата на описания в раздел I.2 нодален метод и същевременно има важното предимство да елиминира нуждата от противоречащото на принципа на неявната схема итерирание по групи при решаване на системата (II.1.4).

Модалното разлагане се основава на аналитично диагонализиране на матрицата $\hat{\mathbf{A}}$ в (II.1.4):

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{Z}}\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{Z}}^{-1},$$

където матрицата $\hat{\mathbf{A}}$ е диагонална и съдържа собствените стойности на $\hat{\mathbf{A}}$.

Така, поради координатната независимост на $\hat{\mathbf{A}}$, от (II.1.4) може да се получи:

$$\nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{A}}\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.2.1})$$

където:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}); \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{Z}}\mathbf{f}(\mathbf{r}); \mathbf{S}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{Z}}^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{r})$$

Записът (II.2.1) съдържа две самостоятелни нехомогенни хелмхолцови уравнения относно величините $f_{1,2}$, които в литературата са познати като *модове*. Собствените стойности $\lambda_{1,2}$ на матрицата $\hat{\mathbf{A}}$ в контекста на (II.2.1) често биват наричани лапласиани.

По принцип техниката на модалното разлагане може да бъде прилагана за решаване на дифузионни задачи с произволен брой енергетични групи, включително при наличие на комплексни собствени стойности на матрицата $\hat{\mathbf{A}}$, както е описано например в статиите [Cho et al., 1997; Aragonés et al., 2007]

II.3. ACMFD схема

Тук, аналогично на раздел I.2 от автореферата, също ще бъде коментирана само двумерната задача в равнината (x,y) , тъй като изводите за едномерната са аналогични.

Матрицата $\hat{\mathbf{A}}$ в (II.1.4) зависи най-вече от материалните константи, характеризиращи съответния хомогенен нод. Нейните собствени стойности са винаги реални, но докато за неразмножаващи среди те почти винаги са положителни, то за размножаваща среда обикновено една от собствените стойности е отрицателна. По тази причина тук ще бъдат разгледани поотделно двете възможности.

По-нататък за удобство е въведено следното обезразмеряване:

$$x' = \frac{x}{h}, y' = \frac{y}{h}; D' = \frac{D}{h}; S'(x', y') \equiv h^2 S(x', y')$$

II.3.1 а) Положителен лапласиан

Нехомогенното хелмхолцово уравнение за мода f има вида:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) f(x', y') - B'^2 f(x', y') = S'(x', y'), \quad (\text{II.3.1})$$

където $B'^2 \equiv h^2 \lambda$

В този случай функционалният вид на решението може да съвпада с модела от стационарната задача (в съгласие с HEXNEM3), а именно (I.2.1).

Нужните за прилагане на условията за непрекъснатост и външните гранични условия величини са аналогични на граничните средни стойности и тангенциални моменти на скаларния поток и външната нормална проекция на нетния ток, но мястото на нетния ток тук се заема от нормалната производна на мода. Тяхната връзка с потока и нетния ток е:

$$\mathbf{f}_k^s(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \Phi_k^s(\mathbf{r}); \mathbf{f}_k^w(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{Z}}^{-1} \Phi_k^w(\mathbf{r}); \mathbf{g}_k^s = -\hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{J}_k^s; \mathbf{g}_k^w = -\hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{J}_k^w; \quad (\text{II.3.2})$$

където $\hat{\mathbf{E}} = \text{diag}(1/D_1', 1/D_2')$.

Векторите в (II.3.2) са двуелементни, а матриците са с размерност 2×2 . Връзката между коефициентите в полиномното разложение на потоците и това на модовете е аналогична на (II.3.2).

Базовите връзки за изграждане на ACMFD схемата са напълно аналогични на (I.2.3). Аналогичен е и основният резултат:

$$\begin{aligned} f_k^{s,n} &= C^{d,n} g_k^n + C^{a,n} \bar{f}^n + t_k^n \\ f_k^{w,n} &= C_w^{d,n} g_{k+6}^n + t_{k+6}^n \end{aligned} \quad (\text{II.3.3})$$

Описание на величините C и t , както и извод на изразите (II.3.3), са поместени в Приложението на дисертацията (раздел IV.1).

II.3.1 б) Отрицателен лапласиан

Нехомогенното хелмхолцово уравнение за мода f има вида:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) f(x', y') + \kappa'^2 f(x', y') = S'(x', y') \quad (\text{II.3.4})$$

където $\kappa'^2 \equiv |h^2 \lambda|$

В този случай мястото на експонентите в модела (I.2.1) се заема от тригонометрични функции:

$$\begin{aligned} f(x', y') &= \sum_{i=0}^5 c_i p_i(x', y') + \sum_{k=1}^6 a_k^s \left[\sin(\kappa' \mathbf{e}_k^s \cdot \mathbf{r}') + \cos(\kappa' \mathbf{e}_k^s \cdot \mathbf{r}') \right] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^6 a_k^w \left(\mathbf{e}_{l(k)}^c \cdot \mathbf{r}' \right) \left[\sin(\kappa' \mathbf{e}_k^s \cdot \mathbf{r}') + \cos(\kappa' \mathbf{e}_k^s \cdot \mathbf{r}') \right], \end{aligned} \quad (\text{II.3.5})$$

като $l(1) = l(4) = 2; l(2) = l(5) = 6; l(3) = l(6) = 4$ (вж. Фиг. I.1).

Подобно на случая на положителен лапласиан може пряко да се провери, че тригонометричните функции са решение на хомогенния аналог на (II.3.4).

Замяната на експоненциалните функции от модела за положителен лапласиан с линейна комбинация от синус и косинус запазва структурата на всички матрици, които са необходими за извеждането на ACMFD изразите за модовете в случая на положителен лапласиан. Така всички изрази в ACMFD схемата остават непроменени. Елементите на матриците при отрицателен лапласиан са представени в Приложението на дисертацията (раздел IV.6).

II.3.2. Свързващи коефициенти

Свързващите коефициенти се получават от условията за непрекъснатост на потока и нетния ток и външните гранични условия за тези величини. За целта основните ACMFD изрази за модовете (II.3.3) трябва да се преобразуват в съответните им за двугруповия поток и нетен ток:

$$\Phi_k^{s,n} = -\hat{C}_s^{J,n} \hat{E}^n \mathbf{J}_k^{s,n} + \hat{C}_s^{\Phi,n} \bar{\Phi}^n + \mathbf{T}_k^n, \quad (\text{II.3.6})$$

където:

$$\hat{C}_s^{J,n} = \hat{Z}^n \hat{C}^{d,n} (\hat{Z}^n)^{-1}; \hat{C}_s^{\Phi,n} = \hat{Z}^n \hat{C}^{a,n} (\hat{Z}^n)^{-1}; \mathbf{T}_k^n = \hat{Z}^n \mathbf{t}_k^n$$

Матриците $\hat{C}_s^{J/\Phi,n}$ не зависят от номера на стената, подобно на диагоналните матрици $\hat{C}^{d/a,n}$.

След прилагане на условията за непрекъснатост се стига до аналогичния на (I.2.9) краен израз за границата между два съседни нода n и m :

$$\mathbf{J}_{nm}^s = \hat{\mathbf{D}}_{nm}^{s,n} \bar{\Phi}^n - \hat{\mathbf{D}}_{nm}^{s,m} \bar{\Phi}^m \quad (\text{II.3.7})$$

Същият подход се използва и за получаване на изразите за тангенциалния момент на тока. Те, както и съответните им в раздел I.2, не зависят явно от средните нодални потоци. Изразите за външна граница са също аналогични на тези в раздел I.2 и са представени в дисертацията.

Важно е да се отбележи, че за разлика от израза (I.2.9), тук вдвойнните коефициенти са пълни матрици. Останалите техни свойства, включително и зависимостта им от решението, са аналогични на описаните в раздел I.2.

II.4. Балансни уравнения

Подобно на стационарната задача, за нестационарни случаи също, чрез ACMFD схемата, се съставя явна линейна алгебрична система от балансни уравнения за средните нодални потоци. За разлика от стационарния случай обаче, където се итерираща по групи, при нестационарни задачи балансните уравнения за всички нодове и двете енергетични групи трябва да се решават съвместно. Тази разлика се дължи на факта, че след прилагането на модално разлагане в нестационарния случай свързващите коефициенти са пълни матрици с размерност 2×2 . Така в балансните уравнения за дадена група се появява зависимост от средните нодални потоци и в другата група.

Балансните уравнения за нестационарната задача имат следния вид:

$$\begin{aligned}
c_r \sum_{6m} J_{nm,1}^{s,k+1} + \tilde{\Sigma}_{1,1}^{n,k+1} \bar{\Phi}_1^{n,k+1} + \tilde{\Sigma}_{1,2}^{n,k+1} \bar{\Phi}_2^{n,k+1} &= \bar{Q}_1 \\
c_r \sum_{6m} J_{nm,2}^{s,k+1} + \tilde{\Sigma}_{2,1}^{n,k+1} \bar{\Phi}_1^{n,k+1} + \tilde{\Sigma}_{2,2}^{n,k+1} \bar{\Phi}_2^{n,k+1} &= \bar{Q}_2
\end{aligned}
\tag{II.4.1}$$

където c_r е геометричен коефициент и:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_{1,1}^{n,k+1} &= \left(\Sigma_r^{n,k+1} + \frac{1 + \omega^n \Delta_k}{v_1 \Delta_k} - \gamma^{n,k} \Sigma_{v,1}^{n,k+1} \right) \\
\tilde{\Sigma}_{1,2}^{n,k+1} &= -\gamma^{n,k} \Sigma_{v,2}^{n,k+1} \\
\tilde{\Sigma}_{2,1}^{n,k+1} &= -\Sigma_s^{n,k+1} \\
\tilde{\Sigma}_{2,2}^{n,k+1} &= \left(\Sigma_a^{n,k+1} + \frac{1 + \omega^n \Delta_k}{v_2 \Delta_k} \right) \\
\bar{Q}_1 &= \frac{\exp(\omega^n \Delta_k)}{v_1 \Delta_k} \bar{\Phi}_1^{n,k} + \sum_{j=1}^M \lambda_j^n \bar{C}_j^{n,k} \exp(-\lambda_j^n \Delta_k) \\
\bar{Q}_2 &= \frac{\exp(\omega^n \Delta_k)}{v_2 \Delta_k} \bar{\Phi}_2^{n,k}
\end{aligned}$$

За представяне на нетните токове се използва (II.3.7). Балансните уравнения се обобщават пряко за тримерния случай.

Решението на системата от балансни уравнения дава средните нодални потоци в края на съответната стъпка по време. Ако е необходимо, се правят итерации за обновяване на свързващите коефициенти и величините $\{\omega^n\}$.

За решаване на породената от балансните уравнения нехомогенна линейна алгебрична система в програмната реализация на новосъздадената модална ACMFD формулировка на HEXNEM3 е използван методът BiCGSTAB [Van der Vorst, 1992].

III. Програмна реализация и решаване на тестови задачи

Създадена е програмна реализация НЗСМ на новата модална ACMFD формулировка на нодалния метод HEXNEM3. Тя е изследвана за точност, устойчивост и сходимост чрез решаване на шест тестови моделни задачи.

Тъй като за част от моделните задачи не съществуват публикувани референтни решения, референтни решения за тях са получени чрез създадената за целта програмна реализация FRCZ на хибриден метод за решаване на двугруповото дифузионно уравнение – финоклетъчен в равнината (x,y) и нодален по оста z , съвпадащ с този на HEXNEM3. Удостоверено е, че решенията по хибридният метод на практика съвпадат с напълно финоклетъчните решения и е избрана стъпка на дискретизация, чието понататъшно намаляване не променя решението. Също така е проверено, че решенията с FRCZ са в отлично съгласие с наличните публикувани решения на моделните задачи.

При решаване на моделните задачи са приложени следните критерии за сходимост:

– за условнокритични задачи: $\varepsilon_k = 1.E-6$; $\varepsilon_f = 1.E-5$; $\varepsilon_{bcgs} = 1.E-7$, където ε_k е критерият по ефективен коефициент на размножение; ε_f е критерият по източника от делене, а ε_{bcgs} е критерият за сходимост в BiCGSTAB.

– за нестационарни задачи: $\varepsilon_{bcgs} = 1.E-7$; $\varepsilon_{pwr} = 1.E-5$, където ε_{pwr} е критерият за сходимост по амплитудна функция, т.е. относителна пълна мощност на реактора в края на стъпката по време

Разпределението на мощността по нодове или касети е нормирано към единична средна стойност и е избрано отклоненията от референтните решения да бъдат представени в абсолютна, а не относителна, мярка. Отклоненията по k_{eff} са представени като относителни.

Пълно описание на моделните задачи и по-подробен анализ на решенията могат да бъдат намерени в дисертацията.

III.1. Условнокритични задачи В1–ВВ за ВВЕР-1000

Наборът от стационарни двумерни математически тестови задачи В1-ВВ [Petkov and Mittag, 2003] представя началото на първа кампания за ВВЕР-1000 в горещо състояние на нулева мощност (hot zero power). При В1 не са въведени органи за регулиране в активната зона, докато от В2 до ВВ последователно се въвеждат поглътителите от десета до първа група. Така при ВВ са въведени всички групи. Зареждането на зоната е описано в 60-градусов сектор на симетрия. Дефинирани са индивидуални албедни матрици за всяка от външните стени на касетите в сектора. Използват се коефициенти на прекъсване на потока ADF (Assembly discontinuity factors [Smith, 1986]) по типове касети. Стъпката на решетката от касети е 23.7178 cm.

Референтното решение е получено финоклетъчно в дифузионно приближение с програмата HEX2DA [Petkov and Georgieva, 1987] и е екстраполирано към нулева стъпка на пространствена дискретизация. Резултати от сравнението с НЗСМ са представени в Табл. III.1 и на Фиг. III.1.

В Табл. III.1 и по-надолу $\delta k/k$ е означение за относителното отклонение по k_{eff} ($1 \text{ pcm} = 1.E-5$), min е минималното отклонение на мощността от референтната, max е максималното отклонение, а rms е средноквадратичното отклонение.

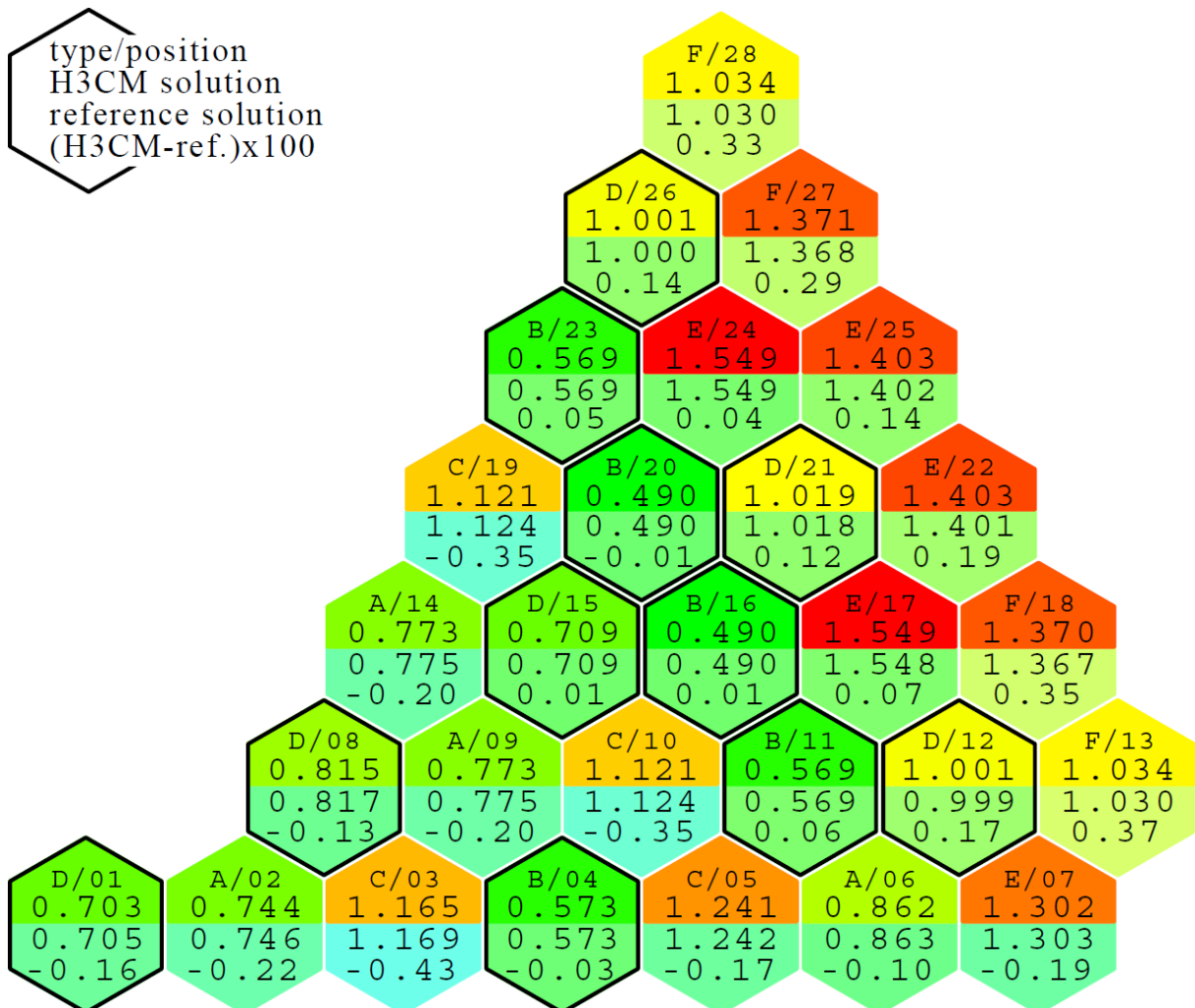
На всички картограми по-долу цветният код в горната половина на клетката съответства на относителната мощност, а в долната – на отклонението от референтното решение.

Избрано е да бъде илюстрирано решението на задача ВВ, тъй като при нея отклоненията от референтното решение са най-големи. Трябва да се отбележи обаче, че резултати, при които отклонението по k_{eff} е до около 10 pcm, а по относителна мощност е до около 1 %, обикновено се приемат за много добри и достатъчно точни за експлоатационни цели.

Броят на външните итерации за задачите В1–ВВ е типично около 70-80, а средният брой вътрешни итерации на една външна е типично около 2-3 за всяка група.

Табл. III.1. Задачи В1-ВВ. Отклонения на НЗСМ от референтното финоклетъчно решение по k_{eff} (относително) и по относителна мощност по касети

Задача	$\delta k/k$, pcm	min×100	max×100	rms×100
B1	-3.5	-0.17	0.05	0.05
B2	-3.0	-0.18	0.09	0.06
B3	-3.4	-0.24	0.09	0.07
B4	-3.8	-0.29	0.12	0.08
B5	-5.3	-0.32	0.13	0.09
B6	-5.4	-0.15	0.11	0.07
B7	-6.4	-0.18	0.16	0.10
B8	-7.8	-0.26	0.26	0.12
B9	-10.1	-0.25	0.16	0.11
BA	-9.7	-0.25	0.15	0.11
BB	-5.2	-0.43	0.37	0.21



Фиг. III.1. Двумерна задача ВВ. Разпределение на относителната мощност по касети (НЗСМ). Цветен код: горе – мощност, долу – разлика

На Фиг. III.1 в позициите с черен контур са въведени погълтители.

III.2. Условнокритична задача AER-FCM-101 за ВВЕР-1000

При стационарната тримерна математическа тестова задача AER-FCM-101 [Schulz, 1996] броят касети и стъпката на решетката съответстват на прототипна конструкция на ВВЕР-1000. Горивната област е оградена от отражателни нодове, на чиято външна граница се налагат условия на свободна повърхност. В средната част на централната касета има изгарящ погълтител, а в дванадесет от касетите (в симетрични позиции) са въведени наполовина органи за регулиране. Пълната височина на активната зона е 355 cm. Общият брой на аксиалните слоеве (включващ двата аксиални отражателя) е 12, като аксиалната стъпка е 35.5 cm. Коефициенти на прекъсване на потока не се прилагат. Стъпката на решетката от касети е 24.1 cm.

Референтното решение е получено по метода на крайните елементи с програмата CRONOS [Lautard et al., 1990]. Решението е екстраполирано към нулева стъпка на дискретизация и е публикувано в [Kolev et al., 1999]. Задачата AER-FCM-101 е стандартен еталон за проверка на точността на тримерни дифузионни програми за ВВЕР-1000.

Резултатите от сравнение на НЗСМ с референтното решение са както следва:

- по k_{eff} относителната разлика е -6.8 pct при референтна стойност 1.049526.

При разпределението на относителната мощност *по нодове*:

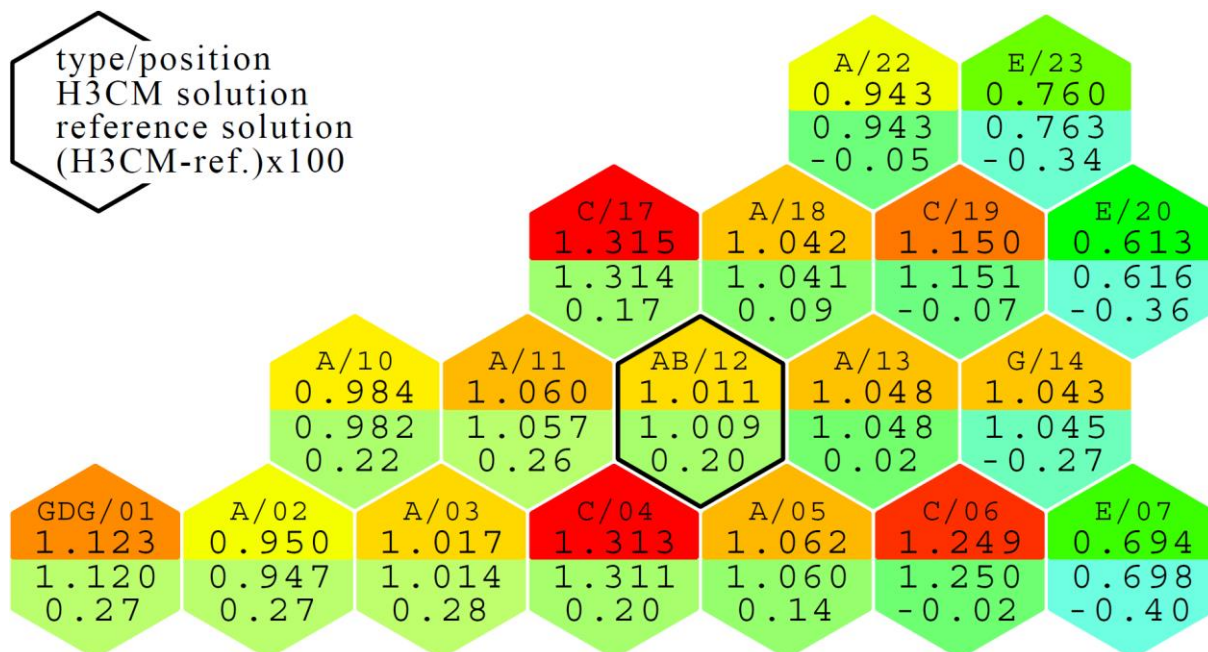
- максимална разлика: 1.21E-02 при референтна стойност 1.608;
- минимална разлика: -1.11E-02 при референтна стойност 0.873;
- средноквадратично отклонение *по нодове*: 0.59E-02

При разпределението на относителната мощност *по касети*:

- максимална разлика: 0.28E-02 при референтна стойност 1.014;
- минимална разлика: -0.40E-02 при референтна стойност 0.698;
- средноквадратично отклонение *по касети*: 0.24E-02

Външните итерации за задача FCM-101 са 148, а вътрешните итерации са средно около 3-4 на една външна итерация за всяка от групите.

Разпределението на относителната мощност по касети за задача FCM-101 е представено на Фиг. III.2, където касетата в позиция 12 е с наполовина въведен сноп погълтители.



Фиг. III.2. Задача AER-FCM-101. Разпределение на относителната мощност по касети (H3CM). Цветен код: горе – мощност, долу – разлика

III.3. Условнокритична задача AER-FCM-001 за ВВЕР-440

При стационарната тримерна математическа тестова задача за ВВЕР-440 AER-FCM-001 [Seidel, 1985] горивната област е оградена с отражателни нодове, на чиято външна граница се налагат условия от логаритмичен тип: $\alpha = J^{s/w} / \Phi^{s/w} = 0.46948$ за всички външни граници и енергетични групи. Пълната височина на активната зона е 250 cm, а пълният брой аксиални слоеве, първият и последният от които са отражателни, е 12, всеки с височина 25 cm. Коefициенти на прекъсване на потока не се прилагат. В 30-градусов сектор на симетрия в позиции 1 и 7 са въведени наполовина поглътителите. Стъпката на решетката от касети е 14.7 cm. При тази задача в околностите на поглътителите се наблюдават големи вариации на потока, което я прави важна за допълнителна проверка на точността на решението с H3CM.

Подобно на AER-FCM-101, референтното решение е получено с програмата CRONOS и е публикувано в [Maráczy et al., 1999].

Резултатите от сравнение на H3CM с референтното решение са както следва:

- по k_{eff} относителната разлика е -19 рсм при референтна стойност 1.011325.

При разпределението на относителната мощност по нодове:

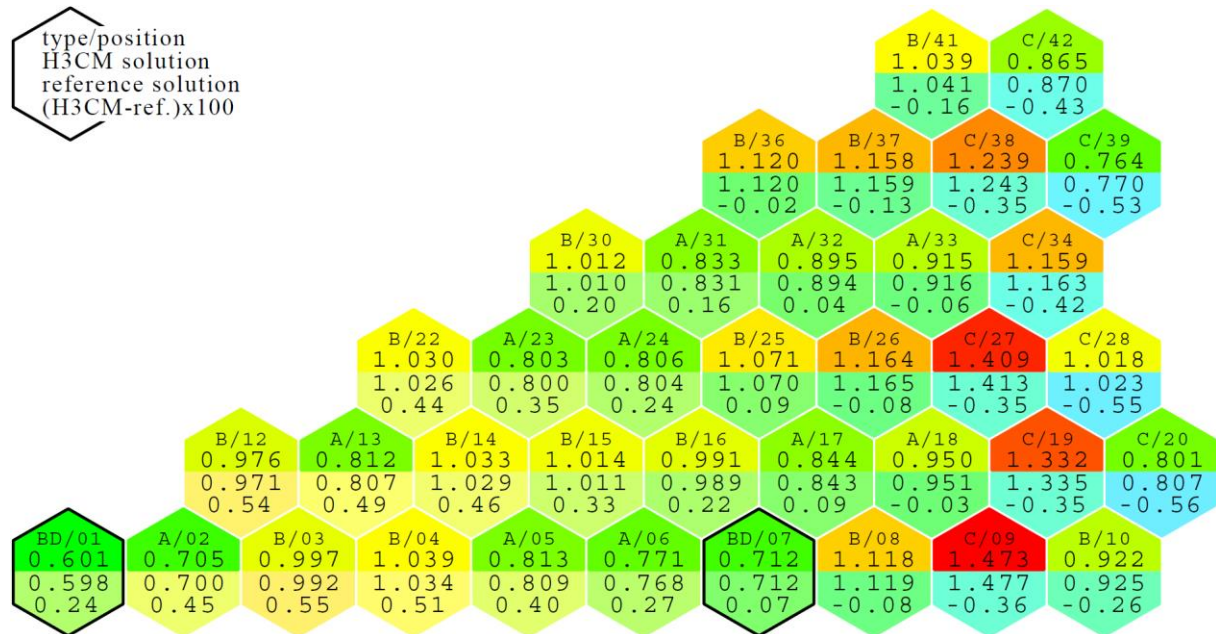
- максимална разлика: 1.13E-02 при референтна стойност 1.672;
- минимална разлика: -0.90E-02 при референтна стойност 1.459;
- средноквадратично отклонение *по нодове*: 0.44E-02

При разпределението на относителната мощност *по касети*:

- максимална разлика: 0.55E-02 при референтна стойност 0.992;
- минимална разлика: -0.56E-02 при референтна стойност 0.807;
- средноквадратично отклонение *по касети*: 0.34E-02

Външните итерации за задачата FCM-001 са 98, а средният брой вътрешни итерации на една външна е типично около 4-5 за всяка от групите.

Разпределението на относителната мощност по касети за задача FCM-001 е представено на Фиг. III.3., където в позиции 1 и 7 до средата на активната зона са въведени поглътители.



Фиг. III.3. Задача AER-FCM-001. Разпределение на относителната мощност по касети (H3CM). Цветен код: горе – мощност, долу – разлика

III.4. Нестационарна задача AER-DYN-001 за ВВЕР-440

Подробно описание на нестационарната тримерна математическа тестова задача за ВВЕР-440 AER-DYN-001 е публикувано в [Keresztúri and Telbisz, 2000]. Тъй като за тази задача не съществува публикувано референтно решение, за сравнение с H3CM са използвани получени с програмата FRCZ резултати.

Конфигурацията на задачата съвпада с тази за FCM-001. Горивната област е оградена с отражателни нодове, на чиято външна граница се налагат същите условия от логаритмичен тип както при FCM-001. Пълната височина на активната зона е 250 cm, а пълният брой аксиални слоеве, първият и последният от които са отражателни, е 12, всеки с височина 25 cm. Коефициенти на прекъсване на потока не се прилагат. Дифузионните константи остават непроменени спрямо FCM-001. В Табл. III.7 от дисертацията са представени 6-груповите кинетични параметри.

В задачата AER-DYN-001 се симулира изхвърляне на орган за регулиране в горещо състояние на нулева мощност и последващо въвеждане на аварийна защита. Очакваната по условие максимална реактивност е $+0.7 - +0.8 \%$ при $\beta = 0.0065$. Достигнатата максимална мощност не е твърде голяма, което позволява задачата да бъде решена без отчитане на реактивностни обратни връзки.

Органите за регулиране са обединени в четири групи. Техните позиции в 180-градусов сектор от активната зона (вж. Фиг. III.6) са представени в Табл. III.2. На

Фиг. III.6 и по-нататък позициите със сив контур съответстват на изцяло изведени от активната зона органи за регулиране, а тези с черен контур – на частично или изцяло въведени.

Табл. III.2. Задача AER-DYN-001. Позиции на органите за регулиране в 180-градусов сектор по групи

група	„21“	„23“	„25“	„26“
позиции	11, 17, 132, 138	2, 8, 14, 20, 73, 76, 182, 191	67, 70, 79, 82, 129, 135, 141, 185, 188	5

Началната височина за групи „21“ и „26“ е 50 cm над долния отражател, а групи „23“ и „25“ са напълно изведени от активната зона.

В началното условнокритично състояние при AER-DYN-001 отклоненията на решението с НЗСМ спрямо полученото с FRCZ референтно решение са както следва:

– по k_{eff} относителната разлика е -11 рсм при референтна стойност 0.9993265.

При разпределението на относителната мощност *по нодове*:

- максимална разлика: 0.39E-2 при референтна стойност 1.222;
- минимална разлика: -0.90E-2 при референтна стойност 1.220;
- средноквадратично отклонение *по нодове*: 0.22E-2

При разпределението на относителната мощност *по касети*:

- максимална разлика: 0.28E-02 при референтна стойност 0.886;
- минимална разлика: -0.40E-02 при референтна стойност 0.870;
- средноквадратично отклонение *по касети*: 0.20E-02

Предписаният за задачата DYN-001 преходен процес протича по следния начин:

– Органът за регулиране „26“ в позиция 5 от Фиг. III.6 се изхвърля от активната зона за $t=0.08$ s с постоянна скорост.

– Аварийната защита на реактора се задейства в момента $t=1$ s. Всички органи за регулиране, с изключение на изхвърления, започват да се спускат в активната зона с постоянна скорост 25.0 cm/s.

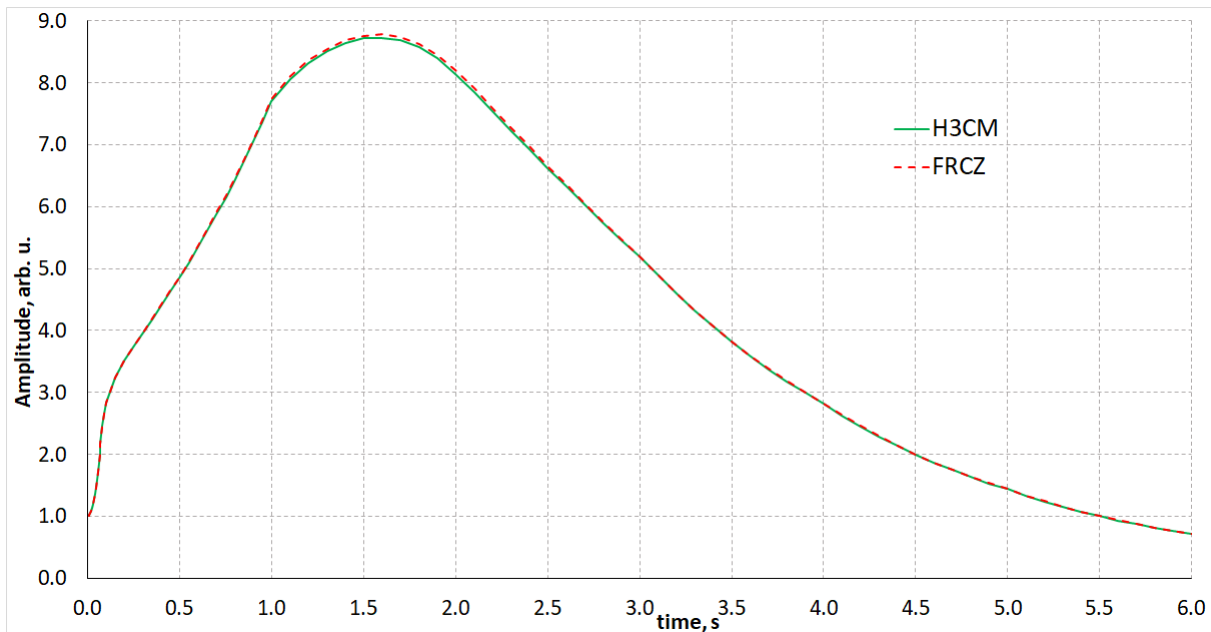
– Преходният процес се проследява до $t=6$ s, когато поглътителите от група „21“ са напълно въведени (още при $t=3$ s), а тези от групи „23“ и „25“ са въведени до 125 cm над долния отражател.

При органите за регулиране на ВВЕР-440 поглътителят се движи заедно с разположената под него горивна наставка на касетата. Това е отчетено чрез съответно преместване на материалните характеристики на горивната наставка, включително и на концентрациите на ядрата-предшественици на закъсняващи неутрони.

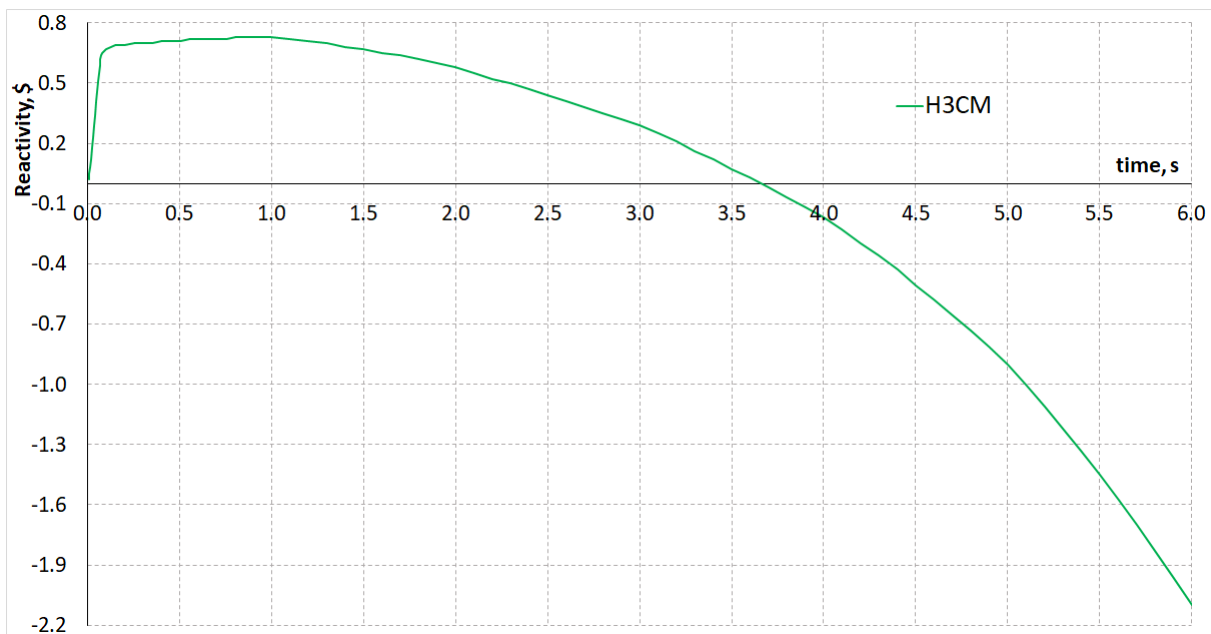
Ходът на амплитудната функция и на реактивността са представени на Фиг. III.4 и Фиг. III.5.

В Табл. III.3 са представени отклоненията на НЗСМ от FRCZ по относителна мощност за различни моменти от преходния процес.

Разпределенията на относителната мощност по касети в края на процеса $t=6.0$ s е представено на Фиг. III.6. Позицията на изхвърления орган за регулиране е заштрихована.



Фиг. III.4. Задача AER-DYN-001. Ход на амплитудната функция (H3CM vs FRCZ)



Фиг. III.5. Задача AER-DYN-001. Ход на реактивността (H3CM)

Максималното относително отклонение по амплитудна функция на H3CM от FRCZ е -0.7%. Максималната стойност на амплитудната функция за H3CM е 8.730 и се получава в момента $t=1.6$ s. Максималната реактивност е +0.73 \$ в момента $t=1.0$ s.

По време на изхвърлянето до $t=0.08$ s стъпката по време е $5E-3$ s; след това до $t=0.1$ s стъпката е $1E-2$ s; след това до $t=1.0$ s стъпката е $5E-2$ s; след това до края на процеса $t=6.0$ s стъпката е $1E-1$ s.

За H3CM средният брой външни итерации (по амплитудна функция, величини $\{\omega\}$ и сдвояващи коефициенти) на една стъпка по време е около 6-7. Средният брой вътрешни итерации (в BiCGSTAB) на една външна е около 30.

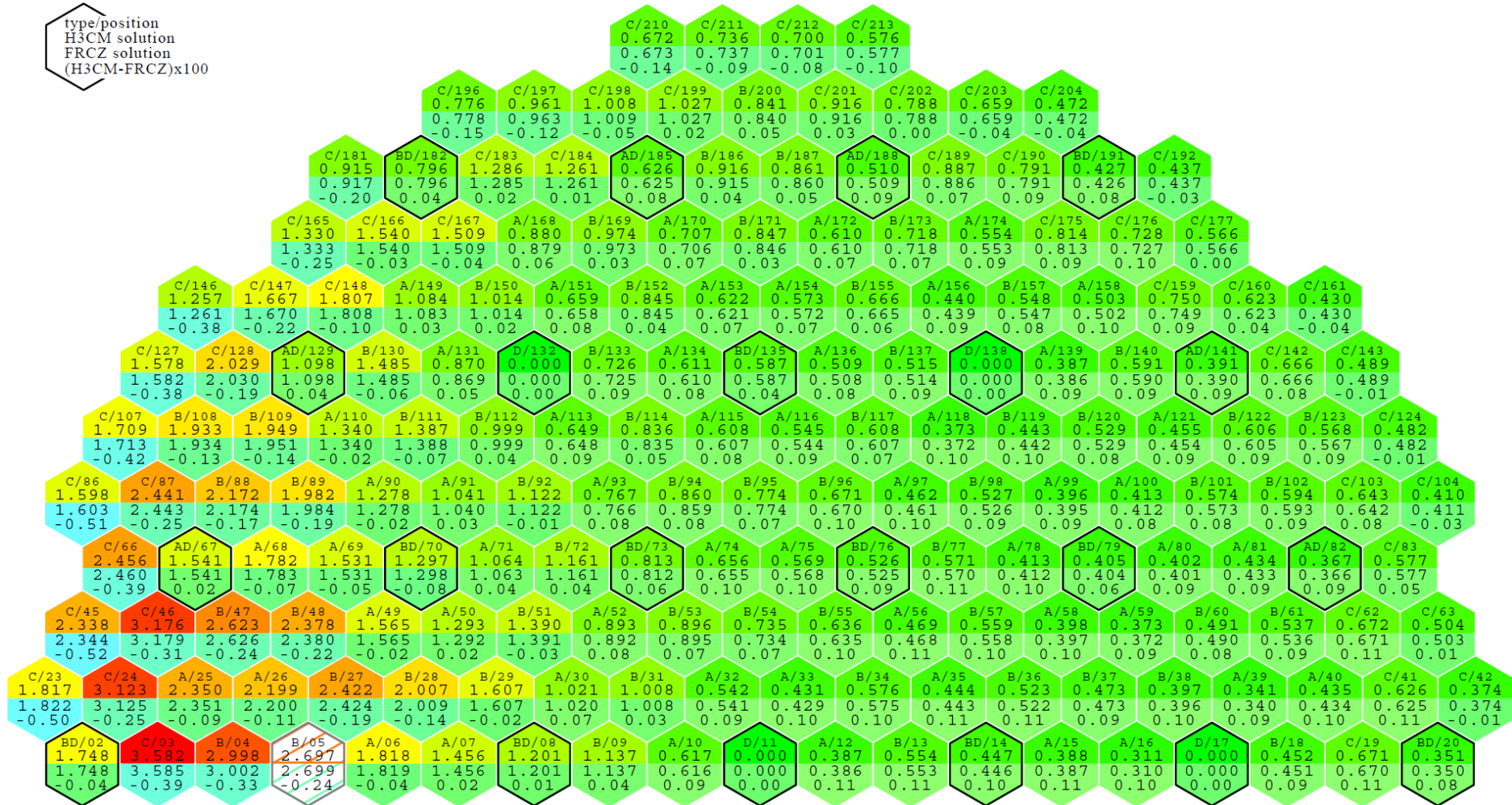
Табл. III.3. Задача AER-DYN-001. Отклонения по относителна мощност.
(H3CM-FRCZ)

		<i>по нодове</i>				
t, s		0.04	0.08	1.0	3.0	6.0
max×100		0.36	0.26	0.20	0.26	0.56
min×100		-0.40	-0.63	-0.86	-1.05	-1.32
rms×100		0.13	0.12	0.15	0.17	0.23

		<i>по касети</i>				
t, s		0.04	0.08	1.0	3.0	6.0
max×100		0.16	0.16	0.13	0.14	0.11
min×100		-0.27	-0.41	-0.52	-0.61	-0.52
rms×100		0.11	0.11	0.14	0.15	0.13

С отчитане на твърдостта на породената от нестационарната двугрупова дифузионна задача система от диференциални уравнения, на особеностите на ВВЕР-440, при който се наблюдават големи вариации на неутронния поток в околностите на органите за регулиране, и на сложния преходен процес при AER-DYN-001, трябва изрично да се изтъкне, че методът HEXNEM3 в модална ACMFD формулировка проявява много добра сходимост и числена устойчивост, при което получените с неговата програмна реализация H3CM резултати са в много добро съгласие с референтното финоклетъчно решение с FRCZ.

type/position
H3CM solution
FRCZ solution
(H3CM-FRCZ)x100



Фиг. III.6. Задача AER-DYN-001. Разпределение на относителната мощност по касети в момента $t=6.0$ s.

H3CM vs FRCZ. Цветен код: горе – мощност, долу – разлика

III.5. Нестационарна задача AER-DYN-002 за ВВЕР-440

Подробно описание на нестационарна тримерна математическа тестова задача за ВВЕР-440 AER-DYN-002 е публикувано в [Grundmann, 2000]. Тъй като и за тази задача няма публикувано референтно решение, за сравнение с НЗСМ са използвани получени с програмата FRCZ резултати.

Преходният процес симулира изхвърляне на орган за регулиране от активната зона без последващо въвеждане на аварийна защита. Неограниченото нарастване на топлинната мощност се спира от отрицателната доплерова реактивностна обратна връзка по температура на горивото.

Според спецификацията на задачата нагряването на ядреното гориво се приема за адиабатно. Реактивностната обратната връзка по температура на горивото е чрез връзката:

$$\Sigma_{f,2}^n(t) = \Sigma_{f,2}^{n,0} \left[1 + \gamma \left(\sqrt{T_f^n(t)} - \sqrt{T_{f,0}} \right) \right], \quad (\text{III.1})$$

където $\Sigma_{f,2}^n$ е сечението за делене в топлинната група, n е нодален индекс, $T_{f,0} = 260^\circ\text{C}$ е началната температура на горивото, а $\gamma = -7.228 \cdot 10^{-4}$ е константа с размерност $1/\sqrt{^\circ\text{C}}$. Приема се, че γ и $T_{f,0}$ са глобални константи за активната зона.

Важни за задачата характеристики на активната зона и горивото са представени в Табл. III.12 от дисертацията.

За да се постигне желаната от авторите на задачата максимална реактивност (близо +2 \$) е увеличено двугруповото сечение за поглъщане на неутрони за материала на поглъщителя – съответно 0.2 и 0.8 cm^{-1} , а дяловете на закъсняващите неутрони са мащабирани така, че β да се намали от 0.65% на 0.5% . Останалите дифузионни константи остават непроменени спрямо тези в FCM-001.

Отражателните нодове са заменени със специално дефинирани радиални и аксиални логаритмични гранични условия.

Позициите на органите за регулиране са според Фиг. III.9. Началната височина на поглъстителите е 50 cm над дъното на активната зона.

Описанието на преходния процес е както следва:

– При начално горещо състояние на нулева мощност органът за регулиране в позиция 4 (Фиг. III.9) се изхвърля от активната зона за 0.16 s с постоянна скорост. Началната мощност на реактора е 1.375 kW .

– Горивото се нагрява адиабатно и се прилага реактивностната обратна връзка (III.1).

Спецификацията на задачата изисква преходният процес да се проследи до момента $t=2.0 \text{ s}$. За да се опише добре ходът на амплитудната функция, е необходимо да се правят малки стъпки по време (напр. $\Delta t=0.001 \text{ s}$). За целите на настоящото изследване преходният процес е проследен до $t=0.4 \text{ s}$. Този момент също е значително след пика на мощността и характеризира достатъчно добре решението на задачата. Причина за този избор е големият изчислителен ресурс необходим на FRCZ. По същата причина, за настоящата задача финоклетъчното решение с FRCZ е с увеличена до около 6 mm стъпка на разбиване на шестостенните нодове на триъгълни призми (за разлика от

използваната в задача DYN-001 стъпка от около 3 mm). Според направените допълнителни изследвания това не се отразява съществено на точността на финоклетъчното решение, но многократно съкращава изчислителното време за получаване на референтно решение за НЗСМ.

В началното условнокритично състояние разликите между полученото с НЗСМ решение и референтното решение с FRCZ са както следва:

- по k_{eff} относителната разлика е -13 рсм при референтна стойност 0.9981274.

При разпределението на относителната мощност *по нодове*:

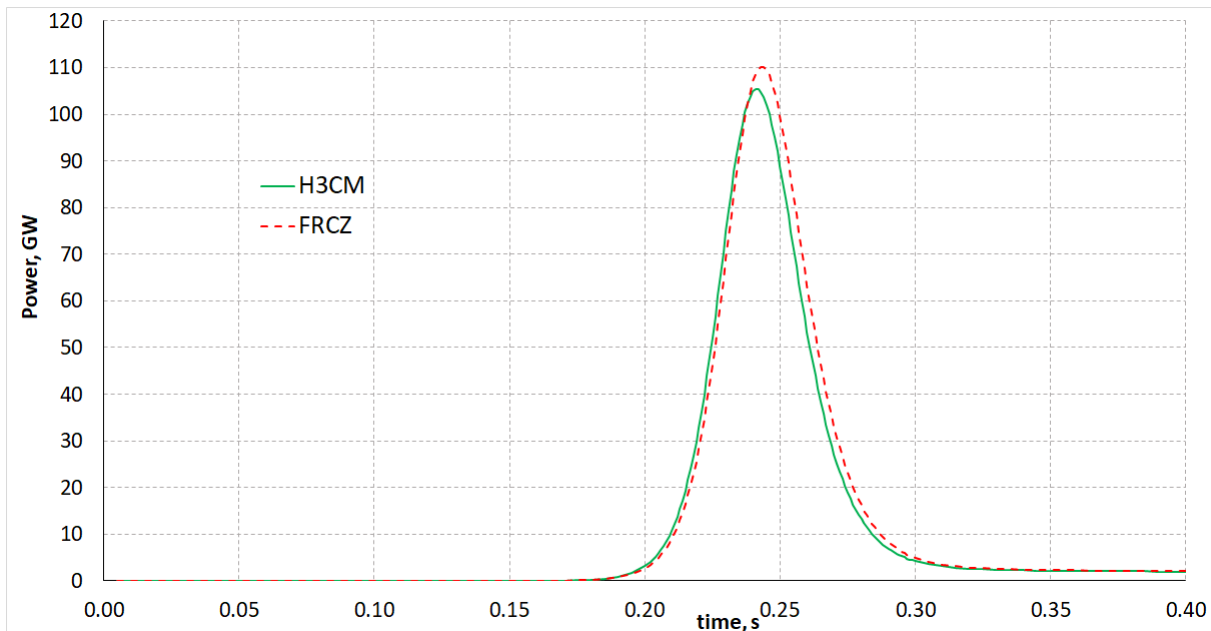
- максимална разлика: 0.69E-2 при референтна стойност 1.058;
- минимална разлика: -0.80E-2 при референтна стойност 0.795;
- средноквадратично отклонение *по нодове*: 0.28E-2

При разпределението на относителната мощност *по касети*:

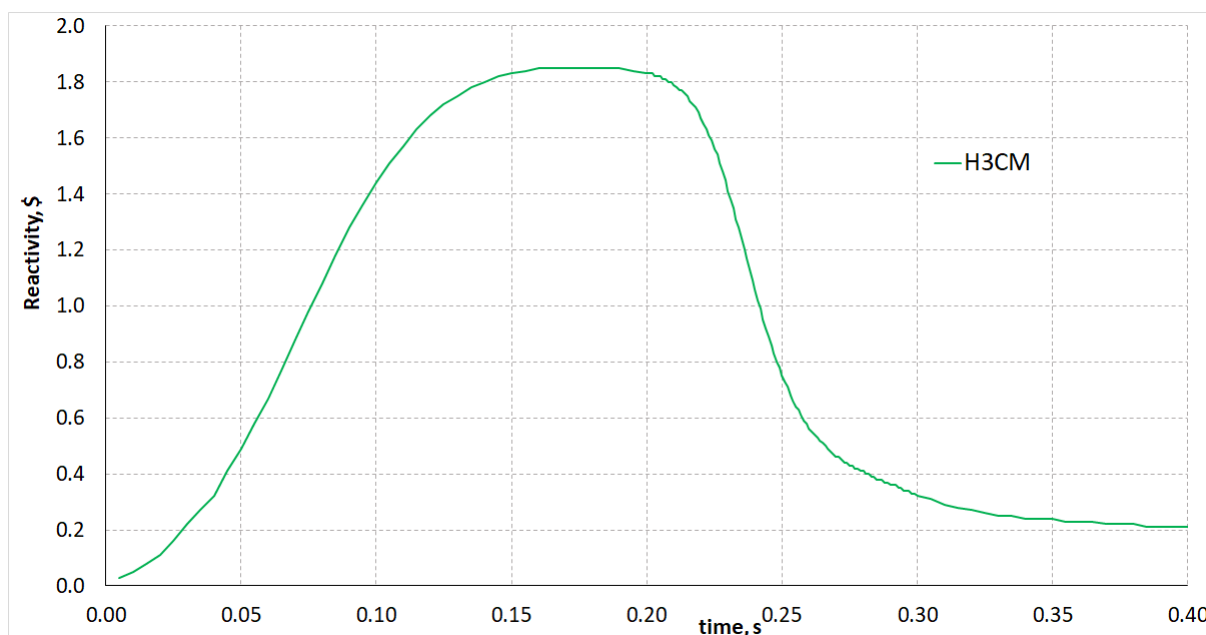
- максимална разлика: 0.12E-02 при референтна стойност 1.275;
- минимална разлика: -0.23E-02 при референтна стойност 0.843;
- средноквадратично отклонение *по касети*: 0.08E-02

Ходът на пълната мощност и на реактивността са представени на Фиг. III.7 и Фиг. III.8. В Табл. III.4 са представени отклоненията на НЗСМ от FRCZ по относителна мощност за различни моменти от преходния процес.

Разпределението на относителната мощност по касети в края на процеса $t=0.4$ s е представено на Фиг. III.9. Позицията на изхвърления орган за регулиране е заштрихована.



Фиг. III.7. Задача AER-DYN-002. Ход на пълната мощност (НЗСМ vs FRCZ)



Фиг. III.8. Задача AER-DYN-002. Ход на реактивността (H3CM)

Максималната мощност при H3CM е 105.4 GW и се достига в момента $t=0.241$ s. При FRCZ максималната мощност е 110.1 GW и се достига в момента $t=0.243$ s. Максималната достигната реактивност за процеса е +1.85 \$. Максималната достигната температура на горивото (в момента $t=0.4$ s) за H3CM е 2176 °C, а за FRCZ е 2155 °C.

По време на изхвърлянето и след това до $t=0.2$ s стъпката по време е $5E-3$ s; след това до $t=0.3$ s стъпката е $1E-3$ s; след това до края на процеса $t=0.4$ s стъпката е $5E-3$ s. Така общият брой стъпки е 160.

Задачата AER-DYN-002 може да се използва за илюстриране на изчислителната производителност на реализацията H3CM на новосъздадената модална ACMFD формулировка на метода HEXNEM3. Цитираните времена за изпълнение се отнасят за компютър Acer Swift 3 Acer Swift 3 SF314-57-31U1 с процесор Intel Core i3-1005G1, 8GB DDR4 и 512GB SSD PCIe.

- Средният брой външни итерации, т.е. по амплитудна функция, величини $\{\omega\}$, вдвояващи коефициенти, температура на горивото и реактивностна обратна връзка чрез (III.2.4), е 5.2 на една стъпка по време.
- Средният брой вътрешни итерации, т.е. итерациите в BiCGSTAB за решаване на балансните уравнения, е 24.1 на една външна итерация.
- Времето за изпълнение на една външна итерация е 0.033 s, от които 29.3 % е за решаване на балансните уравнения, а останалото е за подготовката на матрицата и вектора на десните части на системата от балансни уравнения с прилагане на модалната ACMFD формулировка на метода HEXNEM3. Общото време за решаване на задачата е 27.6 s.

За характеризирание на ефекта от модалното разлагане тази тестова задача е решена и чрез стандартното за методите HEXNEM итерирание по групи. За целта извъндиагоналните членове в системата (II.1.4) са пренесени в десните части и за получените еднотрупни нехомогенни Хелмхолцови уравнения е приложен моделът на HEXNEM3 за скаларния поток. За осигуряване на равни условия ACMFD схемата за

потока и решаването на еднотруповите линейни системи от балансни уравнения по метода BiCGSTAB са запазени. Резултатът е средно 191 итерации по групи за постигане на решение, еквивалентно на безитеративно полученото чрез модално разлагане съвместно двугрупово решение. Чебишевско ускоряване или друг вид екстраполация на итерациите по групи не е прилагано. Поради по-благоприятните свойства на матриците на линейните системи средният брой итерации в BiCGSTAB е 6–7, но изчислителният разход остава много по-голям – времето за решаване на задачата нараства от 27.6 s на около 35 min. Очакваното му намаляване поради оптимизиране на организацията и въвеждането на ускоряване е 2–3 пъти, което не променя извода за решаващото предимство на модалното разлагане.

Табл. III.4. Задача AER-DYN-002. Отклонения по относителна мощност. (НЗСМ–FRCZ)

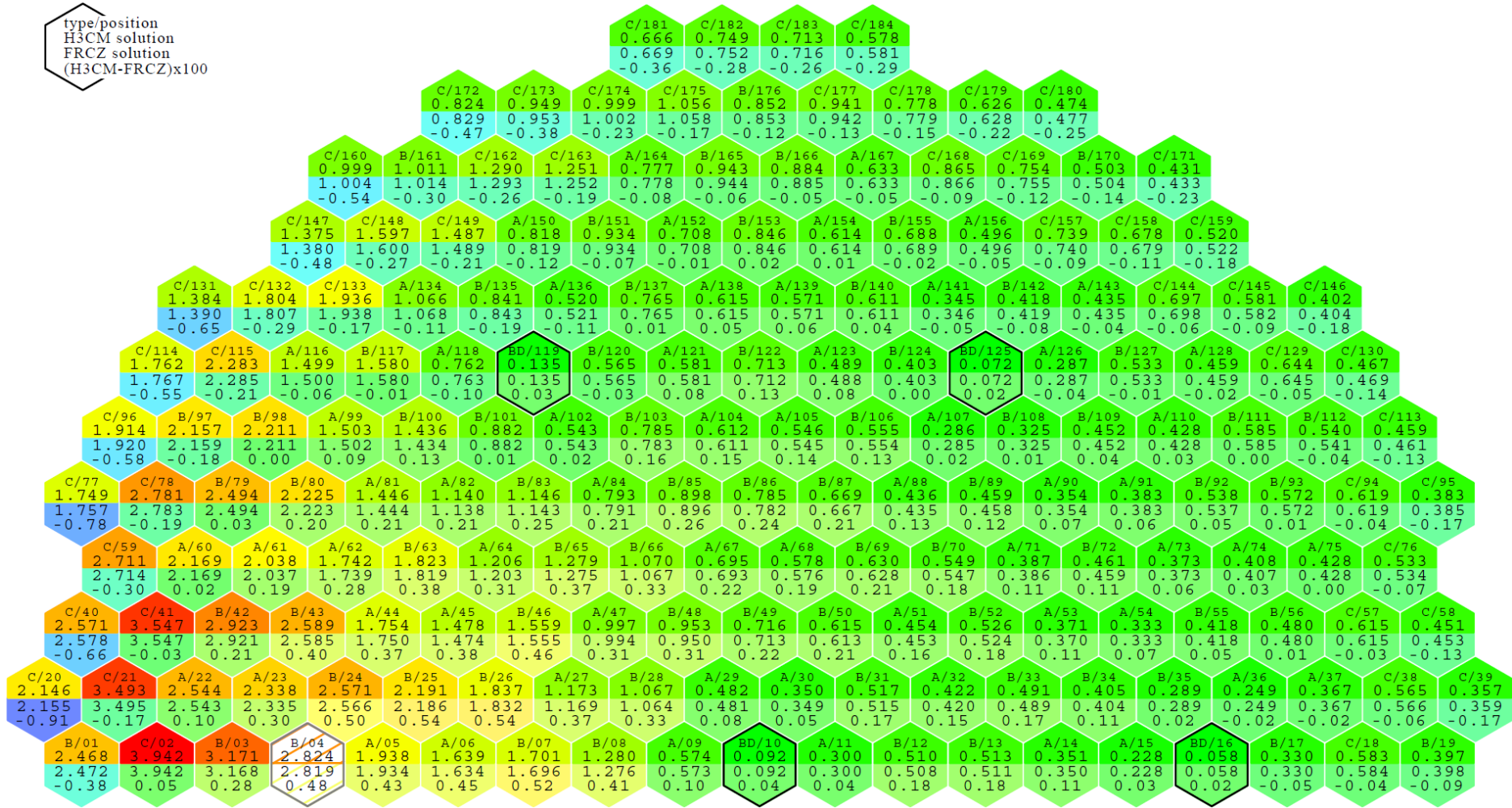
<i>по нодове</i>			
t, s	0.16	0.24 (P _{max})	0.4
max×100	2.25	1.66	0.90
min×100	-2.48	-2.59	-2.12
rms×100	0.47	0.51	0.36
<i>по касети</i>			
t, s	0.16	0.24 (P _{max})	0.4
max×100	1.01	0.69	0.54
min×100	-0.79	-1.12	-0.91
rms×100	0.32	0.29	0.24

Задачата AER-DYN-002 е изключително чувствителна към началното отклонение от критичност и към въведената реактивност след изхвърляне на органа за регулиране от активната зона, при което ефектите от варирането на тези параметри върху еволюцията на пространственото разпределение допълнително се усложняват от обратните връзки.

Относителната разлика между НЗСМ и FRCZ в максимума на мощността на Фиг. III.7 е -4.3 % и е проява на по-бързото нагряване на горивото при решението с НЗСМ. Това обяснява и малко по-ранното настъпване на максимума. С отчитане на спецификите на тази задача, разликите от няколко процента в амплитудата и от около 2 ms в позицията на максимума могат да се разглеждат като много добро съвпадение между двете решения.

Средноквадратичното отклонение на разликите по относителна нодална мощност е винаги под 1.0E-2, което е признак за достатъчно добро съгласие между НЗСМ и FRCZ. Максималните достигнати разлики от около -2.5E-2 също са приемливи за такава задача, и то особено ако се отчете, че в повечето нодове, където отклоненията надхвърлят по модул 1.0E-2, относителната мощността е по-голяма от 1.0.

type/position
H3CM solution
FRCZ solution
(H3CM-FRCZ)x100



Фиг. III.9. Задача AER-DYN-002. Разпределение на относителната мощност по касети в момента $t=0.4$ s.

НЗСМ vs FRCZ. Цветен код: горе – мощност, долу – разлика

III.6. Нестационарна задача DYN-B за ВВЕР-1000

Нестационарната тримерна математическа тестова задача DYN-B е съставена за целите на настоящото изследване на основата на двумерните задачи В1–ВВ за ВВЕР-1000. Преходният процес е без реактивностни обратни връзки и по сценарий и максимална достигната реактивност наподобява задачата DYN-001.

Стъпката на решетката от горивни касети за DYN-B е 23.7178 cm. Активната зона е без отражатели и е с пълна височина 354 cm, разделена на 15 слоя по 23.6 cm. Броят на горивните касети е 163. Външните гранични условия са от логаритмичен тип ($J^s = \alpha\Phi^s$). Те са общи за радиалната и аксиалната граници и са получени за всяка група на основата на решението с НЗСМ на задача В2 като отношение между осреднените за пълната външна гранична повърхност нетен ток и скаларен поток.

С изключение на сеченията за поглъщане в горивните области с въведен поглътител, които са умножени с коефициент 1.04, дифузионните константи са непроменени спрямо тези в задачите В1–ВВ. Коефициенти на прекъсване не се прилагат, а кинетичните параметри са същите като при DYN-002.

Разпределението на позициите на органите за регулиране в 180-градусов сектор от активната зона (вж. Фиг. III.12) по групи е представено в Табл. III.5.

Табл. III.5. Задача DYN-B. Позиции на органите за регулиране в 180-градусов сектор по групи

група	„3“	„4“	„5“	„8“	„9“	„10“
позиции	15, 72, 76	26, 65, 80	7, 58	19, 22, 31, 34, 37	42, 51, 78	4, 10, 45, 48

Началната височина за групи 3-та, 4-та и 9-та е 23.6 cm; на групи 5-та и 8-ма е 354 cm (напълно изведени); на група 10-та е 0.0 cm (напълно въведена).

В началното условнокритично състояние отклоненията на решението с НЗСМ спрямо полученото с FRCZ референтно решение са както следва:

– по k_{eff} относителната разлика е -4.5 рсм при референтна стойност 1.0162647.

При разпределението на относителната мощност *по нодове*:

– максимална разлика: 0.24E-2 при референтна стойност 2.520;

– минимална разлика: -0.48E-2 при референтна стойност 4.274;

– средноквадратично отклонение *по нодове*: 0.08E-2

При разпределението на относителната мощност *по касети*:

– максимална разлика: 0.17E-2 при референтна стойност 2.712;

– минимална разлика: -0.32E-2 при референтна стойност 2.905;

– средноквадратично отклонение *по касети*: 0.08E-2

Преходният процес за DYN-B протича по следния начин:

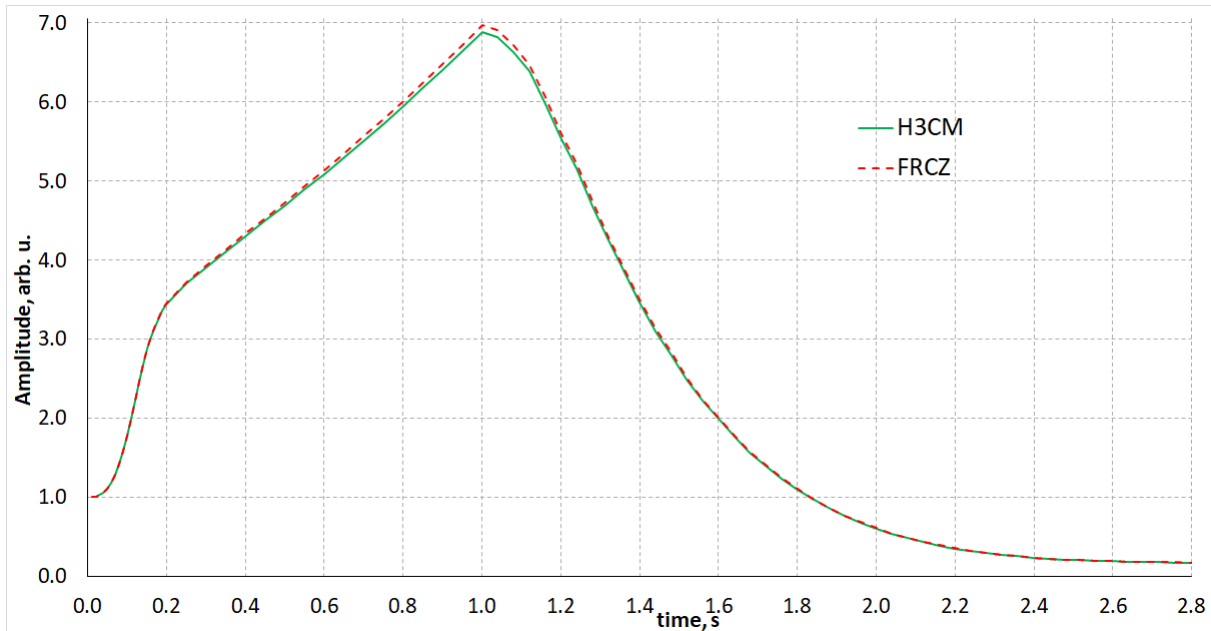
– Органът за регулиране в позиция 4 от Фиг. III.12 се изхвърля от активната зона за $t=0.15$ s с постоянна скорост.

– В момента $t=1.0$ s органите за регулиране от всички групи (с изключение на 10-та, която е вече напълно въведена) започват да се спускат в активната зона с постоянна скорост. Групи 5-та и 8-ма, които са първоначално изведени от активната зона,

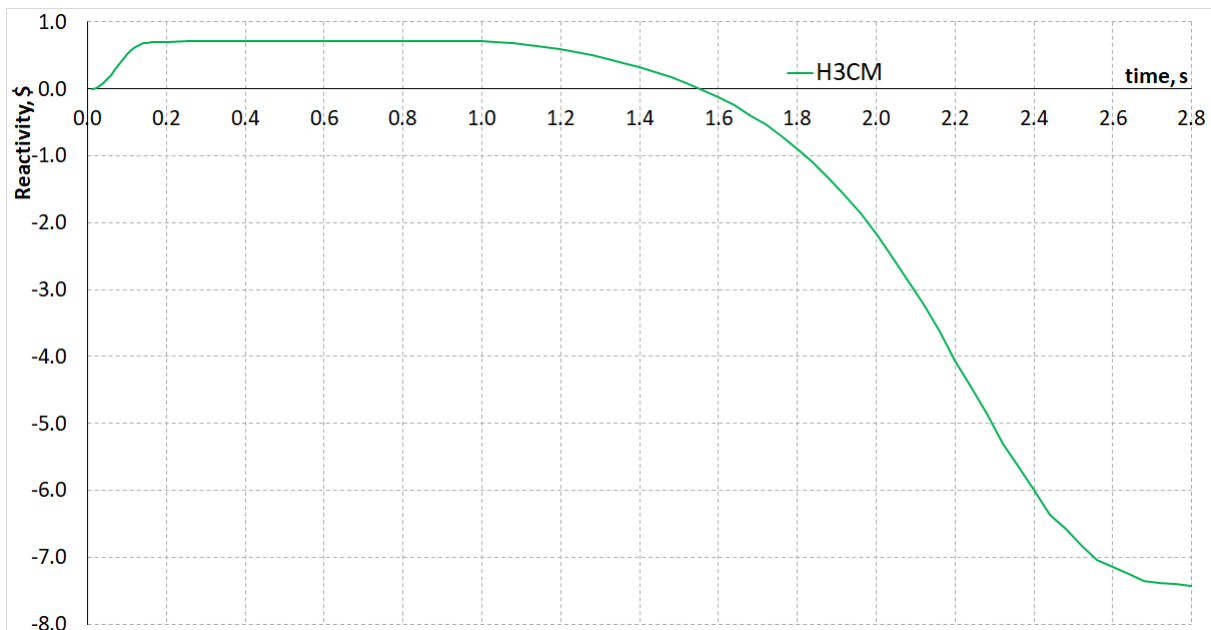
достигат дъното за 1.8 s. Групи 3-та, 4-та и 9-та, които са на височина 23.6 cm достигат дъното за 0.12 s.

– Преходният процес се проследява до $t=2.8$ s, когато всички поглътители без изхвърления са напълно въведени.

Ходът на амплитудната функция и на реактивността са представени на Фиг. III.10 и Фиг. III.11.



Фиг. III.10. Задача DYN-B. Ход на амплитудната функция (H3CM vs FRCZ)



Фиг. III.11. Задача DYN-B. Ход на реактивността (H3CM)

Максималното относително отклонение по амплитудна функция на H3CM от FRCZ е -1.3%. Максималната стойност на амплитудната функция за H3CM е 6.887 и се

достига в момента $t=1.0$ s. Максималната положителна реактивност е $+0.71$ \$ в момента $t=1.0$ s.

По време на изхвърлянето и след това до $t=0.2$ s стъпката по време е $1E-2$ s; след това до $t=1.0$ s стъпката е $5E-2$ s; след това до края на процеса $t=2.8$ s стъпката е $4E-2$ s.

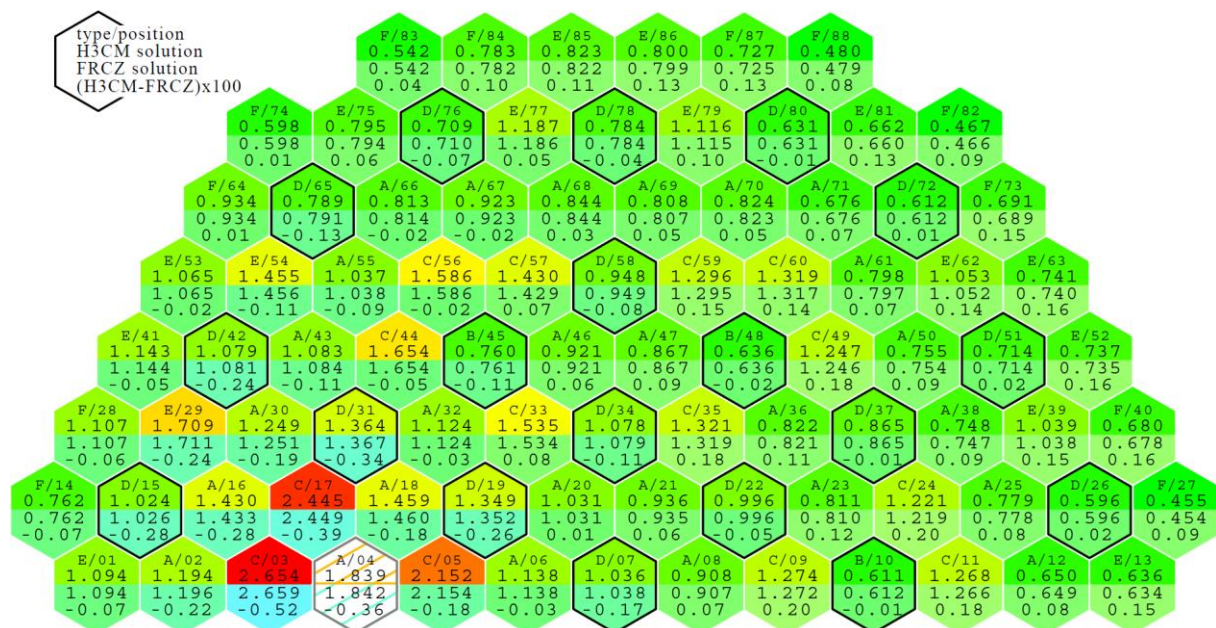
За НЗСМ средният брой външни итерации (по амплитудна функция, величини $\{\omega\}$ и вдвояващи коефициенти) на една стъпка по време е около 5. Средният брой вътрешни итерации (в ViCGSTAB) на една външна е около 25.

В Табл. III.6 са представени отклоненията на НЗСМ от FRCZ по относителна мощност за различни моменти от преходния процес.

Табл. III.6. Задача DYN-B. Отклонения по относителна мощност (НЗСМ–FRCZ)

		по нодове			
t, s		0.15	1.0	1.6	2.8
max×100		0.13	0.14	0.17	0.28
min×100		-0.43	-0.44	-0.55	-0.90
rms×100		0.10	0.10	0.12	0.16
		по касети			
t, s		0.15	1.0	1.6	2.8
max×100		0.10	0.10	0.11	0.20
min×100		-0.26	-0.28	-0.28	-0.52
rms×100		0.09	0.09	0.10	0.15

Разпределението на относителната мощност по касети в края на процеса $t=2.8$ s е представено на Фиг. III.12. Позицията на изхвърления орган за регулиране е застрихована.



Фиг. III.12. Задача DYN-B. Разпределение на относителната мощност по касети в момента $t=2.8$ s. НЗСМ vs FRCZ. Цветен код: горе – мощност, долу – разлика

Резултатите от задача DYN-B потвърждават доброто съгласие между H3CM и FRCZ и за преходни процеси при ВВЕР-1000, където стъпката на решетката от горивни касети е значително по-голяма от тази на ВВЕР-440, а конфигурацията на активната зона и устройството на органите за регулиране се различават съществено.

Както беше наблюдавано при предходните две нестационарни задачи, така и тук методът HEXNEM3 в модална ACMFD формулировка проявява много добра сходимост и числена устойчивост.

v. Приноси на дисертационния труд

1. Създадена е нова формулировка на нодалния метод HEXNEM3 за решаване на неутронната преносна задача в двугрупово дифузионно приближение, специално предназначена за решаване на нестационарни задачи.

Главна характеристика на тази формулировка е въведеното за пръв път при фамилията от методи HEXNEM модално разлагане, което позволява съвместно решаване на двугруповата задача, от своя страна нужно за безконфликтно и ефикасно прилагане на неявната диференчна схема по време, изисквана за осигуряване на устойчивост на решението на твърдата система от диференциални уравнения, породена от нестационарното дифузионно уравнение.

Следствие от модалното разлагане е необходимостта от построяване на допълнителен модел за пространственото разпределение на мода, съответстващ на отрицателна собствена стойност на хомогенното хелмхолцово уравнение. Този нов за HEXNEM3 модел запазва общите характеристики на метода по отношение на точност и изчислителна тежест. Особеностите на модела и нужните за прилагането му аналитични изрази са изведени и подробно описани в дисертацията.

2. Друг важен и относително самостоятелен нов резултат е въвеждането на аналитична CMFD схема (ACMFD) за HEXNEM3, която да замени техниката на вдвояване по парциални токове, приложена в оригиналната реализация на метода. Конструирването на тази схема също е описано в дисертацията. Техниката ACMFD позволява формиране на явна линейна алгебрична система от балансни уравнения за средните скаларни потоци, което води до редица удобства при нейното решаване и в частност улеснява съвместното решаване на балансните уравнения за пълната тримерна задача.

3. Създадена е програмна реализация H3CM на модалната ACMFD формулировка на HEXNEM3. Допълнително е създадена и програмна реализация FRCZ на хибридна, т.е. двумерна финоклетъчна и аксиална нодална, схема за двугруповата дифузионна задача, предназначена за генериране на референтни решения на тестови задачи за H3CM. Решени са условнокритични и нестационарни тестови моделни задачи за ВВЕР-440 и ВВЕР-1000. Реализацията H3CM е изследвана за точност, устойчивост и сходимост. Чрез сравнения с публикувани референтни решения за условнокритичните задачи и получени с FRCZ референтни решения за нестационарните задачи са установени много добрата точност, неизменна устойчивост и бърза сходимост на новата модална ACMFD формулировка на нодалния метод HEXNEM3.

vi. Авторски публикации, включени в дисертацията

Kolev S., Christoskov I., 2018. *A CMFD Formulation of the HEXNEM3 Method for Solving the Two-group Neutron Diffusion Equation*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, Vol. 71, No2, pp. 176-184

Kolev S., Christoskov I., 2019. *A CMFD Formulation of the HEXNEM3 Method for Solving the Neutron Diffusion Equation Through Modal Decomposition*, AIP Conference Proceedings 2075, 070003

Kolev S., Christoskov I., 2019. *A Modal ACMFD Formulation of the HEXNEM3 Method for Solving the Time-dependent Neutron Diffusion Equation*, Annals of Nuclear Energy Vol. 130, pp. 331–337

vii. Доклади на конференции по темата на дисертацията

Kolev S., Christoskov I., *A CMFD Formulation of the HEXNEM3 Method for Solving the Neutron Diffusion Equation Through Modal Decomposition*, доклад на 10th Jubilee Conference of the Balkan Physical Union (BPU10), 26-30.08.2018, София

Kolev S., Christoskov I., *ACMFD formulation of the HEXNEM3 method for solving the time-dependent neutron diffusion equation via modal decomposition*, доклад на 28th Symposium of AER (Atomic Energy Research) on VVER Reactor Physics and Reactor Safety, 08-12.10.2018, Olomouc, Czech Republic

viii. Литература

Aragonés J.M., Ahnert C., Garcia-Herranz N., 2007. *The Analytic Coarse-Mesh Finite Difference Method for Multigroup and Multidimensional Diffusion Calculations*, Nuclear Science and Engineering, 157:1, 1-15

Azmy Y., Sartori E., 2010. *Nuclear Computational Science: A Century in Review*, Springer, Dordrecht

Bilodid Y., Grundmann U., Kliem S., 2018. *The HEXNEM3 nodal flux expansion method for the hexagonal geometry in the code DYN3D*, Annals of Nuclear Energy, Vol. 116, pp. 187-194

Chao Y., 1999. *Theoretical Analysis of the Coarse Mesh Finite Difference Representation in Advanced Nodal Methods*, The Proceedings of M&C'99-Madrid, Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis in Nuclear Applications, Madrid, Spain, September 27–30, 1, 117-126

Cho N.Z., Kim Y.H., Park K.W., 1997. *Extension of Analytic Function Expansion Nodal Method to Multigroup Problems in Hexagonal-Z Geometry*, Nuclear Science and Engineering: 126, 35-47

Christoskov I., Petkov P., 2013. *A Development of the HEXNEM Nodal Expansion Method*, Annals of Nuclear Energy, Vol. 51, pp. 235-239

Duderstadt J.J., and Hamilton L.J., 1976. *Nuclear Reactor Analysis*, John Wiley & Sons

Grundmann U., 1999. *HEXNEM – a Nodal Method for the Solution of the Neutron Diffusion Equation in Hexagonal Geometry*, In: Proceedings of the M&C099 – Conference on

Mathematics and Computations in Nuclear Applications, pp. 1086–1095, Madrid, September 27-30.

Grundmann U., 2000. *AER Benchmark Specification Sheet – Test ID: AER-DYN-002*, (<http://aerbench.kfki.hu/aerbench/Dyn002.doc>)

Grundmann U., Hollstein F., 1999. *A Two-Dimensional Intranodal Flux Expansion Method for Hexagonal Geometry*, Nuclear science and engineering: the journal of the American Nuclear Society 13(2):201-212

Grundmann U., Rohde U., Mittag S., Kliem S., 2005. *DYN3D Version 3.2, Code for Calculation of Transients in Light Water Reactors (LWR) with Hexagonal or Quadratic Fuel Elements. Description of Models and Methods*, Institute of Safety Research, Forschungszentrum Rossendorf, Wissenschaftlich-Technische Berichte FZR-434, ISSN 1437-322X

Hageman L.A. and Young D.M., 1981. *Applied Iterative Methods*, Academic Press, New York

Kamenov K., Antov A., Kamenov A., Spasova V., 2013. *Experience from the HELHEX code package validation at the Kozloduy NPP*, 10. International conference on WWER fuel performance, modelling and experimental support, Sandanski (Bulgaria)

Keresztúri A., Telbisz M., 2000. *AER Benchmark Specification Sheet – Test ID: AER-DYN-001*, (<http://aerbench.kfki.hu/aerbench/Dyn001.doc>)

Kolev N., Lenain R., Magnaud C., 1999. *AER Benchmark Specification Sheet – Test ID: AER-FCM-101*, (<http://aerbench.kfki.hu/aerbench/FCM101.doc>)

Kolev S., Christoskov I., 2018. *A CMFD Formulation of the HEXNEM3 Method for Solving the Two-group Neutron Diffusion Equation*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, Vol. 71, No2, pp. 176-184

Kolev S., Christoskov I., 2019^a. *A CMFD Formulation of the HEXNEM3 Method for Solving the Neutron Diffusion Equation Through Modal Decomposition*, AIP Conference Proceedings 2075, 070003

Kolev S., Christoskov I., 2019^b. *A Modal ACMFD Formulation of the HEXNEM3 Method for Solving the Time-dependent Neutron Diffusion Equation*, Annals of Nuclear Energy Vol. 130, pp. 331–337

Lautard J., Loubiere S., Fedon-Magnaud C., 1990. *CRONOS: A Modular Computational System for Neutronic Core Calculations*, IAEA Spec. Mtg. on Advanced Calculation Methods for Power Reactors, Cadarache, France, September 10-14

Lawrence R.D., 1986. *Progress in Nodal Methods for the Solution of the Neutron Diffusion and Transport Equations*, Progress in Nuclear Energy, Vol. 17, No. 3, pp. 271-301

Lohan R., 1933. *Linear Algebra and its Applications*, 265 (1997), 123-145. *Das Entwicklungsverfahren zum Ausgleichen geodaetischer Netze nach Boltz im Matrizenkalkuel*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 13 (1933), 59-60.

Maráczy Cs., Kolev N.P., Magnaud C., Lenain R., 1999. *Test ID: AER-FCM-001*, (<http://aerbench.kfki.hu/aerbench/FCM001.doc>)

Oberkampf W.L. and Trucano T.G., Design of and Comparison with Verification and Validation Benchmarks, Workshop on Benchmarking of CFD Codes for Application to Nuclear Reactor Safety (CFD4NRS), Garching, 5-7 September 2006. (NEA/CSNI/R(2007)3)

Petkov P.T., Georgieva I.S., 1987. *HEXAB2DB - a Code for Calculation of the Pin-Wise Power Distribution in the WWER-440 Core*, XVI Symposium of VMK, Moscow

Schulz G., 1996. *Solutions of a 3D VVER-1000 Benchmark*, Proc. 6-th Symposium of AER on VVER Reactor Physics and Safety, Kirkkonummi, Finland

Seidel F., 1985. *Diffusion Calculations for VVER-440 2D and 3D Test Problem*, Proc. of the 14th Symp. of Temporary International Collective (TIC), Warsaw, Poland, 23-27 vol.1, p.216

Smith K.S., 1986. *Assembly Homogenization Techniques for Light Water Reactor Analysis*. Prog. Nucl. Energy 17, 303– 335

Sutton T.M., Aviles B.N., 1996. *Diffusion Theory Methods for Spatial Kinetics Calculations*, Progress in Nuclear Energy, Vol. 30, No. 2, pp. 119-182

Van der Vorst H.A., 1992. *Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems*, SIAM J. Sci. and Stat. Comput. 13 (2): 631–644

Петков П.Т., Христосков И., Петков П.В., 2013. *Разработване, тестване, валидиране и въвеждане в експлоатация на софтуер за стационарни 3-мерни потвелни пресмятания на неутронно-физични характеристики на активната зона на ВВЕР-1000 и на софтуер за подготовка на съответна библиотека малогрупови константи за различни типове касети и поглъщащи елементи за ВВЕР-1000 чрез съвременна спектрална програма*, Договор № 298000010/19.06.2009 г. между „АЕЦ Козлодуй“ ЕАД и НИС на СУ „Св. Климент Охридски“

Петков П.Т., 2013. *Кодирание и тестване при разработчика на стационарната малогрупова тримерна финоклетъчна дифузионна програма HEX3DP и интегрирането ѝ с HEX3DA*, отчет за АЕЦ „Козлодуй“ ЕАД

Христосков И., 2013. *Кодирание и тестване при разработчика на стационарната малогрупова тримерна едроклетъчна дифузионна програма HEX3DA*, отчет за АЕЦ „Козлодуй“ ЕАД