Р Е Ц Е Н З И Я

от проф. дмн Йохан Тодоров Давидов
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,

на дисертационен труд
за присъждане на научната степен **„доктор на науките“**
в област на висше образование *4. Природни науки, математика и информатика*,
професионално направление *4.5 Математика*,
научна специалност *Геометрия*

Автор: доц. д-р Иван Минчев Минчев
Тема: Геометрия на кватернионно-контактни многообразия
и проблем на Ямабе

Със заповед No. РД 38-113/19.02.2020 на Ректора на Софийския университет "Св. Климент Охридски" проф. дфн Атанас Герджиков съм определен за член на научното жури за процедурата по защитата на дисертационния труд на доц. д-р Иван Минчев от катедра "Геометрия" на Факултета по математика и информатика на СУ. Като член на научното жури получих от доц. Минчев всички документи, изисквани от Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагането на ЗРАСРБ и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в СУ

Кратки биографични данни на дисертанта

Иван Минчев е роден на 12.06.1975 г. В периода 1995 - 2001 г. той е студент във Факултета по математика и информатика на Софийския университет "Св. Кл. Охридски". Завършва висшето си образование през 2001 г. с отличен успех и магистърска степен. От 2002 до 2005 г. е докторант в Катедрата по геометрия на ИМИ, СУ. През 2006 г. успешно зашитава дисертация за получаване на ОНС "доктор" на тема "Диференциална геометрия на метрични свързаности с торзия". В периода март, 2005 - май, 2012 е асистент в Катедрата по геометрия на ФМИ, СУ, след което е избран за главен асистент. През 2013 г. след конкурс той заема академична длъжност "доцент". От октомври, 2006 до ноември, 2008 г. той е на пост-докторска позиция в Humboldt University, Berlin, от ноевмри, 2008 до март, 2012 г. заема такава позиция във Philips University, Marburg, Германия, а от ноември, 2013 до ноември, 2016 г. е на пост-докторска позиция в Masaryk University, Brno, Чешка република. Той защитава хабилитационна дисертация в Philips University, Marburg през 2012 г. пред жури, съставено от изтъкнати специалисти по диференциална геометрия. У нас няма точен аналог на хабилитационна дисертация, но може да се каже, че тя приблизително съответства на дисертация за получаване на научната степен "доктор на науките".

В момента доц. д-р Иван Минчев е заместник-декан на ФМИ, СУ.

Участие в научни проекти

Иван Минчев е участвал в 5 научни проекта. Четири от тях са били финансирани от Националния фонд за научни изследвания, а един от тях - от National

Academies, САЩ.

Образователна дейност

Иван Минчев е водил упражнения във ФМИ, СУ по линейна алгебра, алгебра, геометрия, аналитична геометрия, диференциална геометрия. Освен това, той е водил упражнения и чел лекции по различни математически дисциплини в Биологическия факултет, Факултета по химия и фармация и в Стопанския факултет на СУ. В Humboldt University Иван Минчев е водил упражнения на английски език по алгебрична топология, а във Philips University е имал упражнения на немски по анализ 1 и 2, диференциална геометрия и елементарна геометрия. В този университет е чел лекции и водил упражнения по алгебрична топология 1 и 2 и елементарна геометрия.

Обща характеристика на дисертационния труд.

Дисертацията на Иван Минчев е в обем от 208 страници със списък на литературата от 91 заглавия. Материалът в нея е изложен въз основа на 4 съвместни статии с С. Иванов и Д. Василев.

В увода на дисертацията (3 страници) е дадено описание на основните задачи, разглеждани в нея, както и на съдържанието на нейните глави.

В първа глава (32 страници) са изложени основните факти от геометрията на кватернионно-контактните многообразия (накратко QC-многообразия), необходими за разбиране на получените резултати и техните доказателства. Да напомним, че кватернионно-контактна структура върху $(4n+3)$-мерно многообразие M - понятие, въведено от O. Biquard, се състои от подразслоение H на TM от ранг $4n$, положително дефинитна метрика g върху H и подразслоение Q на $End(H)$ от ранг 3, такива че в околност U на всяка точка на M, съществуват 1-форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ със стойности в $\mathbb{R}^3$ и тройка $\vartheta = (I_1, I_2, I_3)$ сечения на Q със следните свойства: (1) $H|U$ е ядрото на η; (2) Ендоморфизмите (I_1, I_2, I_3) на H са три почти комплексни структури, локално пораждащи Q и удовлетворяващи комутационните тъждества на имагинерните кватерниони: $I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = -Id_H$, $I_1I_2 = -I_2I_1 = I_3$; (3) $d\eta_s(X,Y) = 2g(I_sX,Y)$ за $X, Y \in H|U$. Всеки две тройки от сечения на Q, удовлетворяващи условието (2), са репери на Q, които определят една и съща ориентация, следователно разслоението Q притежава канонична ориентация. Това разслоение се снабдява с ограничението на стандартната метрика на End(H), дефинирана чрез метриката g на H. Съгласно резултат на Biquard, ако $dim\,M > 7$, то съществуват единствено разслоение V, допълващо H до TM, и единствена свързаностоn ∇ върху M, удовлетворяващи някои специални условия, които тук за по-кратко изложение ще пропуснем, препращайки интересуващите се към първа глава на дисертацията или оригиналната статия на Bquiard. Едно от свойствата на свързаността ∇ е, че тя запазва разслоението Q. Ако $dim\,M = 7$, то не винаги е възможно да се намерят допълнение V на H и свързаност ∇, такива че свързаността запазва Q, така че допълнително трябва да се предположи, че ∇ има това свойство. И така, размерност 7 е специален случай в теорията на кватернионно-контактните многообразия. Разслоенията H и V често се наричат "хоризонтално" и "вертикално". Да предположим,че формата $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ и почти комплексните структури $\vartheta = (I_1, I_2, I_3)$ удовлетворяват условията (1), (2), (3) и нека (ξ_1, ξ_2, ξ_3) е реперът на V, дуален на $(\eta_1|V, \eta_2|V, \eta_3|V)$. Векторните полета ξ_1, ξ_2, ξ_3 се наричат полета ма Рийб (Reeb) и имат свойството, че $\imath_{\xi_s} d\eta_t|H = -\imath_{|xi_t} d\eta_s|H,\ s,t = 1,2,3$ (това свойство липсва в размерност 7 без допълнителното предположение за ∇). Съответствието $\xi_s \to I_s$, $s = 1,2,3$, задава изоморфизъм $V \to Q$ на разслоения, който не зависи от избора на η и ϑ. С помощта на този изоморфизъм метриката и ориентацията на Q се пренасят до метрика и ориентация върху V. По този начин върху цялото разслоение TM се дефинира Риманова метрика, която обикновено се означава пак с g, както зададената метрика върху H.

Втората глава на дисертацията обхваща параграфите от 4 до 9 (95 страници). В началото на главата авторът получава резултати от технически характер, необходими за по-нататъшните разглеждания. След това за ограничението върху хоризонталното пространство H на тензора на Ричи на свързаността на Бикар (Biquard) ∇ той намира експлицитна формула, която показва грубо казано, че това ограничение се определя от торзията T на ∇. Ограничението на тензора на Ричи върху H се нарича QC-тензор на Ричи (Ricci), а неговата следа - QC-скаларна кривина. Едно QC–многообразие се нарича QC-Айнщайново, ако QC-тензорът на Ричи е пропорционален на метриката g. Коефициентът на пропорционалност разбира се е QC-скаларната кривина, разделена на $4n$. От споменатата експлицитна формула за QC- тензора на Ричи следва, че едно QC-многообразие е QC-Айн-щайново точно тогава, когато за всяко $\xi \in V$ ендоморфизмът $T_\xi : H \to H$, дефиниран с $T_\xi(X) = T(\xi, X)$, е нула. Важен резултат, получен от автора тук, е Теорема 5.9, съгласно която QC-скаларната кривина на QC-Айнщайново многообразие от размерност по-голяма от 7 е постоянна (в размерност 7 това е доказано в глава 3) и, освен това, вертикалното разпределение V е интегруемо. Това свойство на V е необходимо и достатъчно за постоянност на QC-скаларната кривина в размерност 7. Примери на QC-Айнщайнови многообразия са кватернионната група на Хайзенберг (Heisenberg) $G(\mathbb{H})$ с нейната естествена QC-структура и 3-Сасакиевите (Sasaki) многообразия. Свързаността на Бикар на $G(\mathbb{H})$ е плоска и всяко QC-многообразие с плоска свързаност на Бикар е локално изоморфно на $G(\mathbb{H})$. QC-скаларната кривина на всяко 3-Сасакиево многообразие е положителна. Обратно, ако QC-скаларната кривина на едно QC-Айнщайново многообразие е положителна константа, то QC-структурата на многообразието е локално определена от 3-Сасакиева структура. (следователно многообразието е Айнщайново с положителна скаларна кривинае). Това е съдържанието на Теорема С, която е един от основните резултати на дисертацията. Авторът се занимава и със задачата как QC-тензорът на Ричи се изменя при конформни трансформации на QC-структурата. В частност той намира всички функции, за които съответната конформна трансформация на стандартната QC-Айнщайнова структура на групата на Хайзенберг $G(\mathbb{H})$ е пак QC-Айнщайнова стуктура (Теорема А). По-натък, по аналогия с понятието за псевдо Айнщайнова структура върху многообразие на Коши-Риман (Cauchy-Riemann), въведено от Джон Лий (John M. Lee), дисертантът въвежда понятието за QC-псевдо Айнщайнова структура. Това е такава QC-структура, за която една специална компонента на безследния QC-тензор на Ричи е нула. Съгласно експлицитната формула за QC-тензора на Ричи, спомената по-горе, това условие е еквивалентно на анулирането на една от компонентите на тензора на торзията.

Както Дж. Лий отбелязва, псевдо Айнщайновите CR-структури са тясно свързани с CR-плюрихармоничните реално-значни функции, т.е. функции, които са реалната част на CR-холоморфна функция. Оказва се, че в случая на QC-многообразие интерес представляват не реално-значните, а кватернионно-значните функции. Аналог на холоморфните функции за гладки кватернионно-значни функции върху пространството $\mathbb{H}$ на кватернионите е въведен от Р. Фойтър (R. Feuter) през 30-те години на миналия век. Тези функции се наричат кватернионно регулярни, а функциите, които са аналог на анти-холоморфните функции се наричат анти-регулярни. Една гладка кватернионно-значна функция върху $\mathbb{H}^n$ се нарича регулярна (анти-регулярна), ако тя е регулярна (анти-регулярна) относно всяка кватернионна променлива. Вземайки предвид идеята на Фойтъровата дефиниция за регулярна функция и обичайната дефиниция на CR-холоморфна функция, авторът въвежда понятието за регулярна (анти-регулярна) кватернионно-значна функция на Cauchy-Riemann-Feuter (накратно "CRF") върху QC-многообразие. Авторът установява различни свойства на анти-регулярните функции върху $\mathbb{H}^n$ и на анти-CRF-фунциите. Един от мотивите за това е, че всяка конформна трансформация на QC-структурата на 3-Сасакиево многообразие, дефинирана чрез реалната част на анти-регулярна CRF-функция, е псевдо Айнщайнова QC-структура. След изследването на споменатите функции, авторът разглежда векторните полета върху едно QC-многообразие, чиито поток се състои от (локални) конформни кватернионно-контактни автоморфизми. В дисертацията за краткост те са наречени QC-векторни полета. Авторът показва, че върху QC-многообразие с положителна QC-скаларна кривина, за която в размерност 7 се предполага, че е постоянна, полетата на Рийб са QC-векторни полета тогава и само тогава, когато QC-структурата е хомотетична на 3-Сасакиева структура; в този случай полетата на Рийб запазват метриката. Последната тема, разглеждана в глава 2, е проблемът на Ямабе (Yamabe) за QC-многообразия. Този проблем се състои в намирането на конформните трансформации на една QC-структура, които водят до QC-структура с постоянна QC-скаларна кривина. Авторът получава следното частично решение на проблема на Ямабе за сферата S^{4n+3} (Теорема B). Нека $\eta = f\overline{\eta}$ е конформна трансформация на стандартната QC-структура на сферата S^{4n+3}, чиито резултат е QC-структура с постоянна QC-скаларна кривина. Да предположим допълнително, че вертикалното разпределение на новата QC-структура η е интегруемо. Тогава новата QC-структура е Айнщайнова и, с точност до постоянен множител, η се получава от $\overline{\eta}$ чрез конформен кватернионно-контактен автоморфизъм, т.е. $\phi^*\overline{\eta} = const.f\overline{\eta}$, където $\phi^*\overline{\eta} = \mu\Psi.\overline{\eta}$ за гладка функция μ и $so(3)$-матрица Ψ. Освен това, в случая $n > 1$ такъв автоморфизъм ϕ съществува, ако f е реалната част на анти-регулярна CRF-функция без никакво предположение за вертикалното разпределение. Както е известно, групата от конформните кватернионно-контактни автморфизми на стандартната QC-структура на S^{4n+3} е групата $Sp(n+1, 1)$ и всеки такъв автоморфизъм води до постоянна QC-скаларна кривина. Следователно, съгласно Теорема B, това са всички трансформации, за които новата QC-скаларна кривина е постоянна, стига новото верикално разпределение да е интегруемо. Да отбележим още, че QC-многообразието S^{4n+3}, от което е махната една точка, е еквивалентно на групата на Хайзенберг $G(\mathbb{H})$, откъдето следва, че конформният множител има вида, даден в Теорема А.

Третата глава на дисертацията се състои от параграфите 10 - 13 (20 страници). В първата част на тази глава авторът доказва, че QC-скаларната кривина на 7-мерно QC-Айнщайново многообразие е постоянна (Теорема D). С този резултат и Теорема 5.9 в предходната глава се завършва доказателството на един от основните резултати в дисертацията, а именно, че във всяка размерност QC-Айнщайновите многообразия имат постоянна QC-скаларна кривина. Освен това, вертикалното разпределение на такова многообразие е интегруемо. Друга тема в трета глава е чудесната идея на автора да въведе метрична свързаност $\widetilde{\nabla}$ върху вертикалното разслоение, която е плоска тогава и само тогава, когато многообразието е QC-Айнщайново. По този начин свойство в суб-Римановата геометрия се оказва еквивалентно на свойство в Римановата геометрия. Като използва свързаността $\widetilde{\nabla}$, авторът намира описание на QC-Айнщайновото условие чрез уравнения за контактната форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, нейният диференциал $d\eta$ и една 2-форма, определена от QC-структурата. Като следствие от Теореми C и D и резултат на С. Иванов - Д. Василев, дисертантът установява. че всяко QC-Айнщайново многообразие от размерност 7, чиято QC-скаларна кривина никъде не се анулира, е локално QC-хомотетично на 3-Сасакиево многообразие в широк смисъл. Тук ще отбележим още и Твърдение 12.3, съгласно което всяко QC-Айнщайново многообразие с нулева QC-скаларна кривина е разслоение над локално хипер-Келерово многообразие, ако вертикалното разпределение V удовлетворява някои условия, например, ако слоевете на фолиацията, дефинирана от разпределението V (което, да напомним, е интегруемо), са компактни.

Основната цел на четвърта глава (параграфи 15 и 16, 26 страници) е да се получи решение на проблема на Ямабе за стандартната QC-структура на сферата S^7. Полученият резултат - Теорема E, е подобен на този в Теорема B, но за разлика от Теорема B, сега не се правят никакви допълнителни предположения. Доказателството е доста технично и се основава на една дивергентна формула (Теорема 15.4), чието интегриране влече факта, че всяка конформна трансформация на QC-структурата на S^7 с постоянна QC-скаларна кривина е QC-Айнщайнова структура. Авторът пресмята и константата на Ямабе за S^7, т.е. минимумът на функцонала на Ямабе. Като приложение той намира (Теорема F) най-добрата константа в неравенството на Фоланд-Стайн (Folland-Stein) върху кватернионната група на Хаизенберг $G(\mathbb{H})$, както и функциите, за които в неравенството имаме равенство. Съществениат момент тук е наблюдението, че реципрочната стойност на най-добрата константа съвпада с константата на Ямабе за QC-многообразието $G(\mathbb{H})$, което е еквивалентно на $S^7 \setminus \{point\}$.

В последната глава, глава 5 (параграфи 17 и 18, 5 страници), авторът доказва, че теореми E и F са в сила във всяка размерност Съответният резултат е формулиран като Теорема G. Нейното доказателство, за разлика от това на теореми E и F, има изцяло аналитичен характер.

Публикации по дисертацията.

Дисертацията на Иван Минчев се основава на 4 статии, публикувани в престижни математически списания с висок импакт фактор. Прави впечатление, че pdf- копия на само 2 от тези статии са сложени в CD-то, предоставено на членовете на журито. И само тези две статии са включени в справката за удовлетворяване на минималните изисквания съгласно алинея 26, параграф 2 на ЗРАСРБ. Както дисертантът ми обясни, причината за това е, че тези две статии формално не участват в прецедурата, като резултатите в тях са включени в текста на дисертацията за пълнота на разглежданията. Аз внимателно проучих няколко документа, свързани със ЗРАСПБ и мога убедено да кажа, че това по никакъв начин не е нарушение на Закона.

Статиите, включени в дисертацията, не са били използвани за получаване на ОНС ”доктор”. Те са цитирани 13 пъти от други автори.

Лично участие на автора.

Познавам Иван Минчев и неговата математическа дейност от поне 15 години. Аз бях член на журито, когато той участва в конкурс за заемане на академичната длъжност ”доцент”. За мен няма съмнение, че неговия принос в съвместните статии е равен на приноса на другите съавтори. От формална гледна точка това бе потвърдено от Иван Минчев в писмена декларация, изпратена до мен по електронната поща.

Бих искал да отбележа още, че не съм открил никакви случаи на плагиатство в дисертацията.

Автореферат.

Авторефератът е изготвен съгласно изискванията и правилно отразява съдържанието на дисертацията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Документите и материалите, представени от доц. д-р Иван Минчев Минчев, отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и Правилника за реда и условията за получаване на академична степен и заемане на академична длъжност на СУ ”Св. Кл. Охридски”.

Резултатите в дисертацията на Иван Минчев са важен принос в развитието на една трудна и актуална област на съвременната диференциална геометрия.

Поради гореизложеното, давам своята положителна оценка за проведеното изследване в рецензираната дисертация и предлагам на научното жури да гласува за присъждане на доц. д-р Иван Минчев Минчев научната степен "доктор на науките" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, научна специалност ”Геометрия ”.

02.05.2020 г. Рецензент:

(прф. дмн Йохан Давидов)