

**Резюмета на рецензираните публикации¹
на гл. ас. д-р Цветан Димитров Христов,
представени за участие в конкурса за доцент
по 4.5. Математика (Диференциални уравнения)
във ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски",
обявен в ДВ, бр. 65 от 16.08.2019 г.**

**Abstracts of the reviewed scientific publications²
of Tsvetan Dimitrov Hristov,
Chief Assistant Professor, PhD,
presented in the competition for the occupation of the
academic post "Associate Professor" in the field
4.5 Mathematics (Differential equations)
in Faculty of Mathematics and Informatics of Sofia
University "St. Kliment Ohridski", announced in the
State Gazette, issue. 65/16.08.2019.**

Съдържание/Contents

1 Резюмета на рецензираните публикации	2
2 Abstracts of the reviewed scientific publications	10

¹Резюметата на публикациите са представени на български език и на английски език.

²The abstracts of the scientific publications are presented in the Bulgarian and English languages.

1 Резюмета на рецензираните публикации

За участие в конкурса са представени научни публикации, които не повтарят представените за придобиване на образователната и научна степен “доктор”.

- [1] N. Popivanov, Ts. Hristov, A. Nikolov, M. Schneider, On the existence and uniqueness of a generalized solution of the Protter problem for $(3+1)$ -D Keldysh-type equations, *Boundary Value Problems*, 2017, Volume: 2017, Article number: 26, Pages: 1-30, ISSN (online): 1687-2770, doi: 10.1186/s13661-017-0757-1, **IF(1.156 – 2017)**, **Quartile: Q1(51/310 Mathematics, 2017 JCR-WoS)**, **SJR(0.49 – 2017)**, URL: <https://doi.org/10.1186/s13661-017-0757-1>.

Резюме. В статията се изучава $(3 + 1)$ - мерна гранична задача за уравнения от типа на Келдиш (първи тип). Подобни задачи за уравнения от типа на Трикоми (втори тип) или за вълновото уравнение са формулирани от М. Протер (1954) като многомерни аналози на равнинните задачи на Дарбу или Коши-Гурса. Днес е добре известно, че задачите на Протер не са коректни и те имат сингулярни обобщени решения, дори за гладки десни страни. В настоящата статия е формулирана аналогична гранична задача за четиримерни уравнения от типа на Келдиш. Дефинирано е подходящо обобщено решение с възможна сингулярност. Получени са резултати за съществуване и единственост на такова решение. Установени са априорни оценки, които показват, какъв е реда на възможната сингулярност, когато дясната страна е обобщен хармоничен полином.

- [2] N. Popivanov, Ts. Hristov, A. Nikolov, M. Schneider, Singular solutions to a $(3+1)$ -D Protter-Morawetz problem for Keldysh-type equations, *Advances in Mathematical Physics*, 2017, Volume: 2017, Article number: 1571959, Pages: 1-16, ISSN (print): 1687-9120, ISSN (online): 1687-9139, doi: 10.1155/2017/1571959, **IF(0.71 – 2017)**, **Quartile: Q4(48/55 Mathematical Physics, 2017 JCR-WoS)**, **SJR(0.218 – 2017)**, URL: <https://doi.org/10.1155/2017/1571959>.

Резюме. В статията се изследва $(3 + 1)$ - мерна гранична задача за слабо хиперболични уравнения от типа на Келдиш (Задача *PK*). Уравненията от типа на Келдиш са известни с редица специфични приложения във физика на плазмата, оптиката и анализа на проективни пространства. Задачата *PK* не е коректна,

защото има безкрайномерно ко-ядро. Всъщност, тя е аналог на гранична задача за уравнения от типа на Трикоми, която е формулирана от М. Протер през 1952 година и е тясно свързана с процеси в околзвуквата динамика. Ние разглеждаме обобщени решения на задачата PK , дефинирани в специално функционално пространство, за които са сила теореми за съществуване и единственост. Добре известно е, че тези решения могат да имат силна степенна особеност в една точка от границата на областта, в която са дефинирани, дори за гладки десни страни. В настоящата статия се изучава асимптотичното поведение на обобщените решения на задача PK в сингулярната точка. Намерени са условия за ортогоналност на функцията в дясната страна на уравнението, които са необходими и достатъчни за съществуване на обобщени решения с особености от фиксиран ред.

- [3] Ts. Hristov, N. Popivanov, Singular Solutions to Protter's Problem for a Class of 3-D Weakly Hyperbolic Equations, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 2007, Volume: 60, No. 7, Pages: 719-724, ISSN (print): 1310-1331, ISSN (online): 2367-5535, **IF(0.106 – 2007)**, **Quartile: Q4(46/50 Multidisciplinary sciences, 2007 JCR-WoS)**, URL: <http://www.proceedings.bas.bg/>.

Резюме. През 1952 година М. Протер формулира гранични задачи за хиперболични уравнения, които са тримерни аналози на задачата на Дарбу (или Коши-Гурса) в равнината. Той изучава, също така и подобни задачи за слабо хиперболични уравнения в тримерна област, ограничена от две характеристични повърхнини Σ_1^m и Σ_2^m и кръг Σ_0 . Добре известно е, че за безкраен брой гладки десни страни някои от задачите на Протер нямат класически решения. Попиванов и Schneider (1993) откриват причината за това: съществуват обобщени решения със силна степенна особеност върху характеристичната повърхнина Σ_2^m . В настоящата статия са изучавани гранични задачи за слабохиперболични уравнения, в които се задава условие на Дирихле върху Σ_1^m и трето гранично условие върху Σ_0 : $u_t + \alpha u = 0$. При определени условия за младшите членове в уравнението, показваме, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществуват гладки десни страни, за които съответното единствено обобщено решение има силна степенна особеност $(|x|^2 + t^{m+2})^{-n/2}$ в началото O . Интересно е, че тази особеност е изолирана във върха O на характеристичната повърхнина Σ_2^m .

- [4] Ts. D. Hristov, N. I. Popivanov, M. Schneider, On the uniqueness of generalized and quasi-regular solutions to equations of mixed type in R^3 , Siberian Advances in Mathematics, 2011, Volume: 21, No. 4, Pages: 262-273, ISSN(print): 1055-1344, ISSN(online): 1934-8126, doi:10.3103/S1055134411040043, **SJR(0.169 – 2011)**, URL: <https://doi.org/10.3103/S1055134411040043>.

Резюме. Изследвани са някои тримерни гранични задачи за уравнения от смесен тип. За уравнения от типа на Трикоми те са тримерни аналози на равнината задача на Дарбу (или Коши-Гурса). Подобни задачи за класове хиперболични, слабо хиперболични уравнения, а също така и за някои хиперболично-параболични уравнения са формулирани от М. Протер през 1952 година. За разлика от коректността на двумерната задача на Дарбу, новите тримерни задачи са некоректни. В настоящата статия е формулирана подобна тримерна задача за уравнения от типа на Келдиш. За уравнения от типа на Трикоми и от типа на Келдиш са дефинирани обобщени и квази-регулярни решени. С помощта на неравенството на Харди-Соболев са намерени достатъчни условия за единственост на такива решения на задачите на Протер. Също така, влиянието на младшите членове в уравненията е изследвано.

- [5] Ts. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, Quasi-regular solutions to a class of 3D degenerating hyperbolic equations, AIP Conference Proceedings, 2012, Volume: 1497, Pages: 205-212, ISSN: 0094243X, ISBN:978-0-7354-1111-1, doi: 10.1063/1.4766787, **SJR(0.176 – 2012)**, URL:<https://doi.org/10.1063/1.4766787>.

Резюме. През петдесетте години на миналия век М. Протер формулира тримерни гранични задачи за уравнения от типа на Трикоми. За хиперболично-елиптични уравнения те са многомерни аналози на класическата задача на Гудерли-Моравец в равнината. В този случай не е известен дори един пример на нетривиално решение на новата задача, нито общ резултат за съществуване. Трудности възникват дори при изследването на гранични задачи за слабо хиперболични уравнения, разглеждани в хиперболичната част на областта. В този случай задачите на Протер са тримерни аналози на равнините задачи на Дарбу или Коши-Гурса. Интересно е, че за разлика от двумерните си аналози, тримерните задачи не са коректни. Някои от задачите на Протер за израждащи се хиперболични уравнения без младши членове или за вълновото уравнение имат безкрайномерни ядра. Следователно

за класическата разрешимост на техните спрегнати задачи имат безкраен брой условия за ортогоналност. Интересно е дали, добавяйки младши членове в уравненията, могат се получат резултати за единственост на решения. В тази статия са намерени условия върху коефициентите в уравненията, при които са получени резултати за единственост на квази-регулярни решения на някои от задачите на Протер.

- [6] N. Popivanov, M. Schneider, Ts. Hristov, Protter problems for 3-D mixed type equations, Doklady AMAN, 2013, Volume: 15, Issue: 2, Pages: 57–63, ISSN (print): 1726-9946, URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21207839>, Ref.

Резюме. Разглеждат се задачи на Протер за уравнения от типа на Трикоми и от типа на Келдиш. За уравнения от смесен тип от първи род те са въведени от Протер, като тримерни аналози на равнината задача на Гудерли-Моравец. В статията са дадени постановки на задачи на Протер за слабо хиперболични уравнения от типа на Келдиш, съдържащи младши членове. Дадена е дефиниция на квази-регулярно решение в двата случая - за уравнения от типа на Трикоми и от типа на Келдиш. Намерени са достатъчни условия за единственост на такова решение. Разгледани са също така суперкритичния и критичния случаи за някои полулинейни уравнения от смесен тип и е установено несъществуване на нетривиално решение.

- [7] Ts. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, Generalized solutions to Protter problems for 3-D Keldysh type equations, AIP Conference Proceedings, 2014, Volume: 1637: 10-th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences: ICNPAA 2014, Narvik, Norway, Pages: 422-430, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1276-7, doi: 10.1063/1.4904607, **SJR(0.171 – 2014)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4904607>.

Резюме. Разглеждат се някои тримерни гранични задачи за уравнения от типа на Келдиш. Подобни задачи, но за уравнения от типа на Трикоми са формулирани от М. Протер като тримерни аналози на равнините задачи на Дарбу или Коши-Гурса. Известно е, че за разлика от коректността на двумерните задачи, задачите на Протер не са коректни. Попиванов, Schneider и Христов формулират задача на Протер за уравнения от типа на Келдиш и показват, че тя не е коректна, защото хомогенната спрегната задача има безкрайно много нетривиални класически решения. В настоящата

статия е дефинирано обобщено решение на задачата на Протер за тримерни самоспрегнати уравнения от типа на Келдиш в специално функционално пространство с тегла. Получени са резултати за съществуване и единственост на такова решение.

- [8] Ts. Hristov, Singular solutions to Protter problem for Keldysh type equations, AIP Conference Proceedings, 2014, Volume: 1631, Pages: 255-262, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1270-5, doi: 10.1063/1.4902484, **SJR(0.171 - 2014)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4902484>.

Резюме. Изследвана е тримерна гранична задача за самоспрегнати уравнения от типа на Келдиш. Разглежданата задача е некоректна, защото има безкрайномерно ко-ядро. В настоящата статия е показано, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува гладка дясна страна f_n , за която съответното единствено обобщено решение има силна степенна особеност. Тази особеност е изолирана във върха O на вътрешната характеристична повърхнина. Получена е точна априорна оценка за обобщеното решение.

- [9] Ts. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, Protter problem for 3-D Keldysh type equations involving lower order terms, AIP Conference Proceedings, 2015, Volume: 1690, Article number: 40020, Pages: 1-12, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1337-5, doi: 10.1063/1.4936727, **SJR(0.180 - 2015)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4936727>.

Резюме. Разглежда се тримерна гранична задача за уравнения от типа на Келдиш, съдържащи младши членове. Задачата не е коректна, защото има безкрайномерно ко-ядро. За да се избегнат безкрайният брой условия за ортогоналност, необходими за класическата разрешимост, е въведено обобщено решение. За малки степени на израждане $m \in (0, 1)$ резултати за единственост и съществуване на такова решение са получени, без да се налагат условия за анулиране на младшите коефициенти върху параболичната част от границата. Този резултат кореспондира с така нареченото условие на Протер за тримерните задачи на Протер за уравнения от типа на Трикоми.

- [10] T. Hristov, A. Nikolov, N. Popivanov, M. Schneider, Generalized Solutions of Protter Problem for (3+1)-D Keldysh Type Equations, AIP Conference Proceedings, 2016, Volume: 1789, Article number: 40007, Pages: 1-13, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1453-2, doi: 10.1063/1.4968460, **SJR(0.165 – 2016)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4968460>.

Резюме. В статията са изследвани задачи на Протер за уравнения от типа на Келдиш в R^4 . Първоначално такива задачи са формулирани от М. Протер за уравнения от типа на Трикоми. Добре известно е, че задачите на Протер за уравнения променящи типа си от първи тип са некоректни и за гладки десни страни могат да имат сингулярни обобщени решения. В настоящата статия е формулирана задача на Протер за четиримерни уравнения от втори тип (типа на Келдиш) и е показано, че по отношение на класическата разрешимост задачата е некоректна. Дефинирано е обобщено решение в подходящо функционално пространство. Получени са резултати за съществуване и единственост на такова решение, както и априорна оценка за него.

- [11] Ts. Hristov, A. Nikolov, Behaviour of Singular solutions to Protter problem for (3+1)-D Keldysh type equations, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 2017, Volume: 70, No. 2, Pages: 167-174, ISSN (print): 1310-1331, ISSN (online): 2367-5535, **IF(0.27 – 2017)**, **Quartile: Q4(62/64 Multidisciplinary sciences, 2017 JCR-WoS)**, **SJR(0.21 – 2017)**, URL: <http://www.proceedings.bas.bg/>.

Резюме. През 1952 М. Протер формулира нови гранични задачи за слабо хиперболични уравнения от типа на Трикоми, които са многомерни аналози на равнинната задача на Дарбу или Коши-Гурса. Протер изучава тези задачи в област, ограничена от две характеристични повърхнини и кръг, лежащ в равнината на параболично израждане на уравненията. Известно е, че задачите на Протер са некоректни и някои от тях имат обобщени решения с особености, дори за гладки десни страни. В настоящата статия е изследвана подобна задача за (3+1)- мерно уравнение от типа на Келдиш в област, аналогична на областта на Протер. Показано е, че задачата е некоректна, защото има безкрайномерно ко-ядро. Дефинирано е подходящо обобщено решение в специално функционално пространство, за което са в сила теореми за съществуване и единственост. Подобно на случая на Триком, това обобщено решение може да има сингулярност, изолирана в една

точка от границата на областта - върха на характеристичната повърхнина. Представено е асимптотично развитие на обобщеното решение в особената точка върху тази характеристична повърхнина.

- [12] Ts. Hristov, Singular solutions to the Protter-Morawetz problem for Keldysh-type equations involving lower order terms, AIP Conference Proceedings, 2018, Volume: 2048, Article number: 040025, Pages: 1-10, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1774-8, doi: 10.1063/1.5082097, **SJR(0.182 – 2018)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.5082097>.

Резюме. В статията се изследва тримерната задача на Протер-Моравец за слабо хиперболични уравнения от типа на Келдиш, съдържащи младши членове. Подобна задача за уравнения от типа на Трикоми е предложена от М. Протер във връзка с двумерната задача на Гудерли-Моравец, моделираща свръхзвуков поток. Разглежданата в статията задача на Протер-Моравец за уравнения от типа на Келдиш не е Фредхолмова по отношение на класическата разрешимост, защото има безкрайномерно ко-ядро. В настоящата статия са намерени нови нетривиални решения на спрегнатата хомогенна задача. Разгледано е обобщено решение, в специално функционално пространство, за което са в сила теореми за съществуване и единственост. При определени условия върху младшите членове са намерени гладки десни страни, такива че съответните обобщени решения имат силни степенни особености. Интересно е, че тези особености са изолирани само в една точка от границата на областта, което прави този случай различен от традиционния случай за разпространение на особеностите.

- [13] Ts. Hristov, An innovative model for integrating electronic assessment into differential equations education, AIP Conference Proceedings, 2018, Volume: 2048, Article number: 020034, Pages: 1–8, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1774-8, doi: 10.1063/1.5082052, **SJR(0.182 – 2018)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.5082052>.

Резюме. Статията е посветена на електронното оценяване, като модерна форма за оценяване на знанията и уменията на студентите, която може да бъде интегрирана в традиционното обучение по математика, когато част от дейностите по оценяването се извършват онлайн. Това налага използването на адекватни мерки за сигурност и защита като например различни форми за идентификация на студентите и проверка на авторството. В статията се дискутират възможностите и ограниченията при използването на веб-базирана система за идентификация на студенти. Докладва се за експеримент,

който бе извършен с помощта на системата TeSLA (An Adaptive Trust-based e-assessment System for Learning) с цел да се изследват съществуващите проблеми и да се предложат нови решения в текущото електронно оценяване при обучението по математика. Представен е модел за електронно оценяване в курса по "Диференциални уравнения и приложения" в бакалавърската програма "Софтуерно инженерство" в Софийския университет, базиран на дългогодишния опит, който имаме в обучението по тази дисциплина. Представени са и са анализирани резултати от анкетиране на студени във връзка използвания софтуер за идентификация в системата TeSLA.

2 Abstracts of the reviewed scientific publications

The scientific publications presented for participation in the competition do not repeat those presented for the acquiring of educational and scientific degree "doctor".

- [1] N. Popivanov, Ts. Hristov, A. Nikolov, M. Schneider, On the existence and uniqueness of a generalized solution of the Protter problem for $(3+1)$ -D Keldysh-type equations, *Boundary Value Problems*, 2017, Volume: 2017, Article number: 26, Pages: 1-30, ISSN (online): 1687-2770, doi: 10.1186/s13661-017-0757-1, **IF(1.156 – 2017)**, **Quartile: Q1(51/310 Mathematics, 2017 JCR-WoS)**, **SJR(0.49 – 2017)**, URL: <https://doi.org/10.1186/s13661-017-0757-1>.

Abstract. A $(3 + 1)$ -dimensional boundary value problem for equations of Keldysh type (the second kind) is studied. Such problems for equations of Tricomi type (the first kind) or for the wave equation were formulated by M.H. Protter (1954) as multidimensional analogues of Darboux or Cauchy-Goursat plane problems. Now, it is well known that Protter problems are not correctly set, and they have singular generalized solutions, even for smooth right-hand sides. In this paper an analogue of the Protter problem for equations of Keldysh type is given. An appropriate generalized solution with possible singularity is defined. Results for uniqueness and existence of such a generalized solution are obtained. Some a priori estimates are stated.

- [2] N. Popivanov, Ts. Hristov, A. Nikolov, M. Schneider, Singular solutions to a $(3+1)$ -D Protter-Morawetz problem for Keldysh-type equations, *Advances in Mathematical Physics*, 2017, Volume: 2017, Article number: 1571959, Pages: 1-16, ISSN (print): 1687-9120, ISSN (online): 1687-9139, doi: 10.1155/2017/1571959, **IF(0.71 – 2017)**, **Quartile: Q4(48/55 Mathematical Physics, 2017 JCR-WoS)**, **SJR(0.218 – 2017)**, URL: <https://doi.org/10.1155/2017/1571959>.

Abstract. We study a boundary value problem for $(3 + 1)$ -D weakly hyperbolic equations of Keldysh type (problem PK). The Keldysh-type equations are known in some specific applications in plasma physics, optics, and analysis on projective spaces. Problem PK is not well-posed since it has infinite-dimensional cokernel. Actually, this problem is analogous to a similar one proposed by M. Protter in 1952, but for Tricomi-type equations which, in part, are closely connected with transonic fluid

dynamics. We consider a properly defined, in a special function space, generalized solution to problem PK for which existence and uniqueness theorems hold. It is known that it may have a strong power-type singularity at one boundary point even for very smooth right-hand sides of the equation. In the present paper we study the asymptotic behavior of the generalized solutions of problem PK at the singular point. There are given orthogonality conditions on the right-hand side of the equation, which are necessary and sufficient for the existence of a generalized solution with fixed order of singularity.

- [3] Ts. Hristov, N. Popivanov, Singular Solutions to Protter's Problem for a Class of 3-D Weakly Hyperbolic Equations, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 2007, Volume: 60, No. 7, Pages: 719-724, ISSN (print): 1310-1331, ISSN (online): 2367-5535, **IF(0.106 – 2007)**, **Quartile: Q4(46/50 Multidisciplinary sciences, 2007 JCR-WoS)**, URL: <http://www.proceedings.bas.bg/>.

Abstract. In 1952 M. Protter formulated some boundary value problems (BVP) for hyperbolic equations which are three-dimensional analogues of the Darboux problems (or Cauchy-Goursat problems) on the plane. As well he studied such problems for weakly hyperbolic equations in 3-D domain m , bounded by two characteristic surfaces Σ_1^m and Σ_2^m , and by a plane region Σ_0 . Now, it is well known that, for the infinite number of smooth functions in the right-hand side, some of Protter's problems do not have classical solutions. Popivanov and Schneider (1993) found the reason of this fact in the case of Dirichlet's condition on Σ_0 : the strong power-type singularity appears in the generalized solution on the characteristic surface Σ_2^m . In the present paper on weakly hyperbolic equation involving lower order terms we study BVP, with the Dirichlet's condition on Σ_1^m , and third BV data on $\Sigma_0 : u_t + \alpha u = 0$. Under some conditions on lower order terms we prove that for each $n \in \mathbb{N}$ there exists a smooth right-hand side function f_n , for which the corresponding unique generalized solution has strong power type singularity $(|x|^2 + t^{m+2})^{-n/2}$ at the point O. It is interesting that this singularity is isolated at the vertex O of the characteristic surface Σ_2^m and does not propagate along it.

- [4] Ts. D. Hristov, N. I. Popivanov, M. Schneider, On the uniqueness of generalized and quasi-regular solutions to equations of mixed type in R^3 , *Siberian Advances in Mathematics*, 2011, Volume: 21, No. 4, Pages: 262-273, ISSN(print): 1055-1344, ISSN(online): 1934-

8126, doi:10.3103/S1055134411040043, **SJR(0.169 – 2011)**, URL: <https://doi.org/10.3103/S1055134411040043>.

Abstract. Some three-dimensional (3D) problems for mixed type equations of first and second kind are studied. For equation of Tricomi type, they are 3D analogs of the Darboux (or Cauchy-Goursat) plane problem. Such type problems for a class of hyperbolic and weakly hyperbolic equations as well as for some hyperbolic-elliptic equations are formulated by M. Protter in 1952. In contrast to the well-posedness of the Darboux problem in the 2D case, the new 3D problems are strongly ill-posed. A similar statement of 3D problem for Keldysh-type equations is also given. For mixed type equations of Tricomi and Keldysh type, we introduce the notion of generalized or quasi-regular solutions and find sufficient conditions for the uniqueness of such solutions to the Protter's problems. The dependence of lower order terms is also studied.

- [5] Ts. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, Quasi-regular solutions to a class of 3D degenerating hyperbolic equations, AIP Conference Proceedings, 2012, Volume: 1497, Pages: 205-212, ISSN: 0094243X, ISBN:978-0-7354-1111-1, doi: 10.1063/1.4766787, **SJR(0.176 – 2012)**, URL:<https://doi.org/10.1063/1.4766787>

Abstract. In the fifties M. Protter stated new three-dimensional (3-D) boundary value problems (BVP) for mixed type equations of first kind. For hyperbolic-elliptic equations they are multidimensional analogue of the classical two-dimensional (2-D) Morawetz-Guderley transonic problem. Up to now, in this case, not a single example of nontrivial solution to the new problem, neither a general existence result is known. The difficulties appear even for BVP in the hyperbolic part of the domain, that were formulated by Protter for weakly hyperbolic equations. In that case the Protter problems are 3D analogues of the plane Darboux or Cauchy-Goursat problems. It is interesting that in contrast to the planar problems the new 3-D problems are strongly ill-posed. Some of the Protter problems for degenerating hyperbolic equation without lower order terms or even for the usual wave equation have infinite-dimensional kernels. Therefore there are infinitely many orthogonality conditions for classical solvability of their adjoint problems. So it is interesting to obtain results for uniqueness of solutions adding first order terms in the equation. In the present paper we do this and find conditions for coefficients under which we prove uniqueness of quasi-regular solutions to the Protter problems.

- [6] N. Popivanov, M. Schneider, Ts. Hristov, Protter problems for 3-D mixed type equations, Doklady AMAN, 2013, Volume: 15, Issue: 2, Pages: 57–63, ISSN (print): 1726-9946, URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21207839>, Ref.

Abstract. Protter problems for equations of Tricomi and Keldish type are studied. For equation of mixed type of first kind they are introduced by Protter as 3-D analogues of the Guderley-Morawetz plane problem. Now we give statements of Protter problems for weakly hyperbolic equations of Keldish type. We give a notion for quasi-regular solutions in both cases of equations of Tricomi and Keldish type and find sufficient conditions for uniqueness of such solutions to the Protter problems. Further, we study the supercritical and critical case for some semi-linear mixed-type operators, and establish nonexistence of nontrivial solutions.

- [7] Ts. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, Generalized solutions to Protter problems for 3-D Keldysh type equations, AIP Conference Proceedings, 2014, Volume: 1637: 10-th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences: ICNPAA 2014, Narvik, Norway, Pages: 422-430, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1276-7, doi: 10.1063/1.4904607, **SJR(0.171 – 2014)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4904607>.

Abstract. Some three-dimensional boundary value problems for equations of Keldysh type are studied. Such type problems, but for equations of Tricomi type are stated by M. H. Protter as 3-D analogues of Darboux or Cauchy-Goursat plane problems. It is well known that in contrast of well-posedness of 2-D problems, the Protter problems are strongly ill-posed. T. Hristov, N. Popivanov and M. Schneider formulate Protter problem for Keldysh type equations and show that it is not correctly set since the homogeneous adjoint problem has infinitely many nontrivial classical solutions. In the present paper a notion for generalized solution to Protter problem for self-adjoint Keldysh type equations is introduced. Further, results for existence and uniqueness of such solution are obtained.

- [8] Ts. Hristov, Singular solutions to Protter problem for Keldysh type equations, AIP Conference Proceedings, 2014, Volume: 1631, Pages: 255-262, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1270-5, doi: 10.1063/1.4902484, **SJR(0.171 - 2014)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4902484>.

Abstract. Three-dimensional boundary value problem for self-adjoint equations of Keldysh type is studied. It is known that this problem is

not well-posed, since it has infinite-dimensional co-kernel. In the present paper it is shown that for $n \in \mathbb{N}$ there exist a smooth right-hand side function f_n , for which the corresponding unique generalized solution has a strong power-type singularity. This singularity is isolated at the vertex O of the inner characteristic surface and does not propagate along the surface. As well as, an exact a priori estimate for unique generalized solution is stated.

- [9] Ts. Hristov, N. Popivanov, M. Schneider, Protter problem for 3-D Keldysh type equations involving lower order terms, AIP Conference Proceedings, 2015, Volume: 1690, Article number: 40020, Pages: 1-12, ISSN: 0094243X, ISBN:978-0-7354-1337-5, doi: 10.1063/1.4936727, **SJR(0.180 – 2015)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4936727>.

Abstract. A three dimensional boundary value problem for equations of Keldysh type involving lower order terms is studied. This problem is not correctly set, since it has an infinite-dimensional co-kernel. In order to avoid the infinite number of necessary conditions for classical solvability a notion for generalized solution is given. For small power of degeneration $m \in (0, 1)$ results of existence and uniqueness of such solution are obtained, without supposing any vanishing conditions on parabolic part of the boundary for first order terms. This result corresponds with so called Protter condition for 3-D problems originally formulated by M. Protter for Tricomi type equations.

- [10] T. Hristov, A. Nikolov, N. Popivanov, M. Schneider, Generalized Solutions of Protter Problem for (3+1)-D Keldysh Type Equations, AIP Conference Proceedings, 2016, Volume: 1789, Article number: 40007, Pages: 1-13, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1453-2, doi: 10.1063/1.4968460, **SJR(0.165 – 2016)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4968460>.

Abstract. This paper deals with Protter problems for Keldysh type equations in R^4 : Originally such type problems are formulated by M. Protter for equations of Tricomi type. Now it is well known that Protter problems for mixed type equations of the first kind are ill-posed and for smooth right-hand side functions they have singular generalized solutions. In the present paper Protter problem for equations of second kind (Keldysh type) is formulated and it is shown that in the frame of classical solvability this problem is not well posed. Further, a notion for a generalized solution in suitable functional space is given. Results for existence and uniqueness of generalized solution of the considered problem are obtained. Some a priori estimates are stated.

- [11] Ts. Hristov, A. Nikolov, Behaviour of Singular solutions to Protter problem for (3+1)-D Keldysh type equations, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 2017, Volume: 70, No. 2, Pages: 167-174, ISSN (print): 1310-1331, ISSN (online): 2367-5535, **IF(0.27 – 2017)**, **Quartile: Q4(62/64 Multidisciplinary sciences, 2017 JCR-WoS)**, **SJR(0.21 – 2017)**, URL: <http://www.proceedings.bas.bg/>.

Abstract. In 1952 M. Protter formulated some boundary value problems for weakly hyperbolic equations of Tricomi type, which are multidimensional analogues of the Darboux problems (or Cauchy–Goursat problems) on the plane. Protter studied these problems in a domain, bounded by two characteristic surfaces, and by a region lying in the plane of parabolic degeneration of the equations. Now, it is well known that Protter problems are not correctly set and some of them have singular generalized solutions, even for smooth right-hand sides. In the present paper a similar problem for (3+1)-D Keldysh type equations in a domain analogical to the Protter domain is considered. It is shown that this problem is not well posed since it has infinite-dimensional co-kernel. An appropriate generalized solution in a special function space is defined where uniqueness and existence theorems hold. Similarly to the Tricomi case, this generalized solution is allowed to have singularity isolated at one boundary point – vertex of a characteristic surface. An asymptotic expansion of the generalized solution on this characteristic surface is given.

- [12] Ts. Hristov, Singular solutions to the Protter-Morawetz problem for Keldysh-type equations involving lower order terms, *AIP Conference Proceedings*, 2018, Volume: 2048, Article number: 040025, Pages: 1-10, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1774-8, doi: 10.1063/1.5082097, **SJR(0.182 – 2018)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.5082097>.

Abstract. The three-dimensional Protter-Morawetz problem for weakly hyperbolic equations of Keldysh type involving lower order terms is studied. Similar problem for Tricomi-type equations was proposed by M. Protter in connection with the Guderley- Morawetz plane problem that models the transonic flow phenomena. The considered Protter-Morawetz problem for Keldysh-type equations is not Fredholm in the frame of classical solvability, because it has infinite-dimensional co-kernel. In the present paper new nontrivial classical solutions to the homogeneous adjoint problem are found. Further, a generalized solution to the formulated problem is considered, in a special function space, for which existence and uniqueness theorems hold. Under some conditions on lower

order terms smooth right-hand side functions are found, such that the corresponding generalized solutions have strong power type singularities. It is interesting that these singularities are isolated at only one boundary point, which makes this case different from the traditional case on the propagation of singularity.

- [13] Ts. Hristov, An innovative model for integrating electronic assessment into differential equations education, AIP Conference Proceedings, 2018, Volume: 2048, Article number: 020034, Pages: 1–8, ISSN: 0094243X, ISBN: 978-0-7354-1774-8, doi: 10.1063/1.5082052, **SJR(0.182 – 2018)**, URL: <https://doi.org/10.1063/1.5082052>.

Abstract. Electronic assessment is a modern form of assessment of students' knowledge and skills that can be integrated into traditional mathematics education when some of the assessment activities are done online. However, this requires the use of adequate security and protection measures such as various forms for student identification and authorship verification. This article discusses the possibilities and limitations of using a web-based student identification system in mathematics education. We report on the experiment that was conducted in the frame of TeSLA (An Adaptive Trustbased e-assessment System for Learning) project to explore existing problems and to offer new solutions in continuous eassessment especially in differential equation education. We present an innovative model for e-assessment in the course "Differential equations and applications" in the bachelor program "Software engineering" at Sofia University, based on the long experience we have in the education in this discipline. Some results of a survey of the students opinion in relation to the TeSLA identification software used are presented and analyzed.