СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
"СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Николай Костов Червенов

КОПУЛИ В СОБОЛЕВИ ПРОСТРАНСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за придобиване на образователна и научна степен "доктор" по професионално направление 4.5 "Математика" (Математическо моделиране и приложение на математиката в икономиката)

Научен ръководител
доц. д-р Йордан Йорданов

СОФИЯ
2018

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на дд.мм.гггг г. на заседание на катедра Вероятности, операционни изследвания и статистика на Факултета по математика и информатика (ФМИ) на Софийския университет "Св. Климент Охридски" – протокол № ? от дд.мм.гггг г.

Дисертационният труд е на български език и съдържа 100 страници, от които 6 страници библиография, включваща 69 заглавия.

Изследванията са проведени в рамките на задочна докторантура в докторска програма "Математическо моделиране и приложение на математиката в икономиката" към катедра Вероятности, операционни изследвания и статистика на Факултета по математика и информатика при Софийския университет "Св. Климент Охридски".

Съдържание

Предговор . . . 3
Представяне на дисертационния труд . . . 7
Авторска справка . . . 17

Библиография **20**

Предговор

Съвременният инструмент при създаване на гъвкави вероятностни модели при повече от една случайна величина се нарича копули. В наши дни те са широко използвани в сферите на застраховането, банкирането и финансите или, по-общо казано, там където има взаимодействащи си процеси (рискове) и необходимост да се установи тяхната зависимост.

Официалната история на копулите започва през 1959 г. със статията на Склар [62], в която той формулира прочутата си теорема, носеща неговото име, съгласно която едно многомерно разпределение се изразява явно чрез вероятностните разпределения на няколко случайни величини, които се оказват и неговите едномерни маргинали, а функциите, които позволяват това, се наричат копули. Именно, ако X и Y са две случайни величини, зададени със съответните вероятностни разпределения, $F(x) = P(X \leqslant x)$ и $G(y) = P(Y \leqslant y)$ и $H(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$ е съвместното вероятностно разпределение на X и Y, като $F(x) = H(x,+\infty)$, $G(y) = H(+\infty, y)$ са маргиналите на H. Тогава съществува копула C такава, че за всяко $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ е изпълнено

$$H(x,y) = C\big(F(x), G(y)\big).$$

Ако F и G са непрекъснати, копулата C е еднозначно определена. Вярно е и обратното твърдение.

Доказателството на Теоремата на Склар не е дадено в първата статия на Склар [62], но скица на него е предоставена в последваща статия през 1973 г. и накрая, доказана подробно в статия на Швайцер и Склар през 1974 г. [59].

Дефиницията, свойствата и редица приложения на копулите могат да се намерят в книгите [50], [11] и [32].

Появата на копула във финансите, която е добре документирана в [26], предизвика множество различни проучвания: виж например [7], където копулите се въвеждат от гледна точка на приложения на финансовата математика. Там авторите използват копули, за да опишат и характеризират важни понятия като ценообразуване на активи и деривати, управление на риска и анализ на кредитния риск, [43] съдържа въведение в областта на копулите, насочена към количествения риск мениджмънт, [51] разглежда използването на копули в иконометричното моделиране и много други.

Докато повечето стандартни модели налагат копули върху данните и изследват дали използваната копула (например Гаусова копула, копула на Клейтън, T-копула и т.н.) отговаря и добре описва стохастичната зависимост (правят се тестове на приложимост), в настоящата дисертация се предлага модел, в който се получава уникална копула като решение на задача с диференциално уравнение, отговаряща за конкретните данни.

Да припомним дефиницията на копула. Означаваме с $I = [0,1]$ и $I^2 = I \times I$. Функцията $C : I^2 \to I$ се нарича двумерна копула, ако:

1. За всяко $(u, v) \in I^2$

$$
\begin{aligned}
C(u,0) &= 0 = C(0,v), \\
C(u,1) &= u,\ C(1,v) = v;
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

2. C е 2-растяща, т.е. за всички u_1, u_2, v_1, v_2 от I, за които $u_1 \leqslant u_2$ и $v_1 \leqslant v_2$, е изпълнено

$$
V_C(B) \equiv C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geqslant 0, \tag{0.2}
$$

   където B е правоъгълникът $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ и изразът в (0.2) дефинира C-обем на B.

Основните два въпроса, свързани с копулите, са:

1. Как да проверим дали дадена функция е 2-растяща (обикновено граничните условия са тривиални)?

2. Как да конструираме нова копула?

В случая на $n \geqslant 3$ сложността на зададените по-горе въпроси расте изключително много. Към настоящия момент копулите от този вид се броят на пръсти.

В настоящата дисертация авторите дават отговор на горните два въпроса, разглеждайки копулите като функции в съответни Соболеви пространства.

За разлика от изложението, в по-голяма част от литературата (като например [50]), където се предполага, че разглежданите функции имат смисъл за всяка точка и следователно копулите са липшицови функции върху дефиниционното си множество ([50], теорема 2.2.4), ние разглеждаме копулите в по-общи допускания и доказваме редица хубави свойства за тях, като например обобщение на свойствата 2-растяща и n-растяща функция.

Основната задача, която си поставяме по-нататък, е да намерим копула, която е решение на следната гранична задача

$$\begin{aligned}
&\partial_{uv}C(u,v) = f(u,v) \text{ в } I^2 \text{ (в слаб смисъл) };\\
&C(u,0) = 0 = C(0,v);\\
&C(u,1) = u,\ C(1,v) = v,\ \text{за всички } u,v \in I,
\end{aligned}$$

при някои наложени условия върху функцията f. Първо разглеждаме случая, когато f е гладка функция, а след това обобщаваме до по-общия случай, когато $f \in W^{-1,p}(I^2)$, $p > 2$. Разглежданите условия върху контура на I^2 създават впечатлението, че се решава задачата на Дирихле за вълново уравнение. Формулираната задача, обаче, е некоректна. Въпреки това, ние доказваме съществуване и единственост на решение, като налагаме някои условия по контура за дясната страна на разглежданото уравнение.

Аналогично, решаваме задачата в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$.

Структурата на настоящия дисертационен труд е следната: В Глава 1 разглеждаме случая $n = 2$. В параграф 1.1 правим обобщение на понятието 2-растяща функция и даваме множество примери, върху които прилагаме метода си. В параграф 1.2 даваме необходимите сведения за пространства на Соболев и доказваме априорна оценка, от която следва теорема за единственост. В параграф 1.3 разглеждаме гладкия случай за съществуване на копула като решение на разглежданата гранична задача, а в параграф 1.4 даваме обобщено решение на същата задача. В §1.5 правим едно приложение на доказаното, като даваме ново доказателство теоремата на Склар в разглеждания случай.

В Глава 2 разглеждаме случая $n \geqslant 3$. В параграф 2.1 правим обобщение на понятието n-растяща функция по два начина и показваме как методът ни работи на няколко примера. В параграф 2.2 даваме ново доказателство на необходимото и достатъчно условие една функция да е Архимедова копула, първо, за случая $n = 2$, а после и за всяко $n \geqslant 3$. В параграф 2.3 доказваме теорема за съществуване и единственост на решението на граничната задача в случая на n-мерни копули.

В Глава 3 поставяме конкретна задача за оценка на риска от застраховането и я решаваме с числени методи. В параграф 3.1 даваме общи сведения за числените методи, използвани при решаване на уравнението. В §3.2 построяваме самата копула и правим анализ на решението.

Представяне на дисертационния труд

В тази част на автореферата към дисертационния труд ще изложим накратко важните резултати и съпътстващи коментари и разяснения.

Ще посочим основни означения, които сме използвали в дисертацията.

За $n > 0$, означаваме $\overline{\mathbb{R}}^n = \overline{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{R}}$. Ако $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_k \leqslant b_k$, за $k = 1, \ldots, n$, означаваме с B n-мерния паралелепипед

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Върховете на B са точките $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, където c_k е равно или на a_k, или на b_k, за $k = 1, \ldots, n$.

С $I^n = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1]$ означаваме единичния n-мерен куб.

Ако G е област в $\mathbb{R}^n$, с $\mathscr{D}$ означаваме пространството на тест (пробни) функции над G, а с $\mathscr{D}'$ – пространството на разпределения над G.

За $\varepsilon > 0$, с J_ε ще означаваме усредняващото ядро, а с f_ε – средната функция на функцията f.

В **Глава 1** разглеждаме случая на бивариантни копули.

В **Параграф 1.1** разискваме въпроса за 2-растяща функция. Доказваме **лема 1.1.2**, където показваме, че ако една функция $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ притежава непрекъснати градиент и смесена производна H_{xy}, то тя е 2-растяща тогава и само тогава, когато

$$H_{xy} \geqslant 0 \text{ в } \mathbb{R}^2.$$

Изхождайки от този резултат, даваме нова, обобщена дефиниция на понятието 2-растяща функция, когато производните се смятат в слаб смисъл, а именно

Дефиниция 1.1.3 Ще казваме, че разпределението $H \in \mathscr{D}'$ е 2-растящо в слаб смисъл, ако за всяко $\varphi \geqslant 0$ в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ е изпълнено:

$$\big(H_{xy}, \varphi\big) \geqslant 0. \tag{0.3}$$

Нормално е да поискаме, когато H е гладка функция, новата дефиниция да съвпада с формалната. Ето затова доказваме **лема 1.1.4**, която гласи, че ако $H \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2) \cap C^0(\mathbb{R}^2)$ е 2-растящо разпределение в слаб смисъл, то H е 2-растяща функция в смисъла на формалната дефиниция.

Пресмятайки слабите производни и използвайки обобщената дефиниция **дефиниция 1.1.3**, даваме ново доказателство в **пример 1.1.3**, че функциите $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$, $M(u,v) = \min(u,v)$ и $C(u,v) = \big[min(u,v)\big]^{-\theta}(uv)^{1-\theta}$ са 2-растящи, докато функцията $\max(u,v)$ – не е.

В **Параграф 1.2** формулираме граничната задача и показваме единственост на решението, доказвайки априорна оценка. Преди това даваме необходимите ни сведения от пространства на Соболев, за да докажем теоремата.

Теорема 1.2.6 Нека $C \in W^{1,p}(I^2)$, $p > 2$ е решение на задачата

$$\partial_{uv}C = f(u,v), \ \ (u,v) \in I^2,$$

където $f \in L_p(I^2)$ и горното равенство е в слаб смисъл, т.е.

$$\big(C_{uv},\varphi\big) = (f,\varphi),$$

за всяко $\varphi \in \widetilde{W}^{1,p}(I^2) = \big\{w \in W^{1,p}(I^2) \,\big|\, w|_{u=0} = w|_{v=0} = 0\big\}$. Нека освен това

$$\begin{cases} C(0,v) = 0 = C(u,0) \\ C(u,1) = u, \ C(1,v) = v, \end{cases}$$

където $u,v \in I$.

Тогава съществува константа M, която не зависи от f, такава че

$$\|C\|_{W^{1,p}(I^2)} \leqslant M\,\|f\|_{L_p(I^2)}.$$

От априорната оценка веднага следва единствеността на решението.

Следствие 1.2.7 Решението на задачата е единствено.

Трябва да отбележим, че когато решението $C \in W^{1,p}(I^2)$, а $C_{uv} \in W^{-1,p}(I^2)$, отново е валидна теоремата за единственост, защото тогава дясната страна на уравнението става $f = 0 \in L_p(I^2)$.

И не на последно място **теорема 1.2.6** всъщност ни дава непрекъснатост на C по отношение на дясната страна f. Този резултат е съществен и ще бъде използван в **Глава 3** при построяване на копулата от примера, разгледан там.

В **Параграф 1.3** Показваме съществуване на решението на граничната задача, където функцията $f(u,v)$ в дясната страна удовлетворява следните условия:

$$
\begin{aligned}
& f \in L_p(I^2),\ p \in (1, +\infty); \\
& f(u,v) \geqslant 0,\ \text{за всички}\ (u,v) \in I^2; \\
& \int\limits_{B_{u,1}} f(\xi,\eta) d\xi\, d\eta = u,\ \text{за всяко}\ u \in [0,1],\ \text{където}\ B_{u,1} = [0,u] \times [0,1]; \\
& \int\limits_{B_{1,v}} f(\xi,\eta) d\xi\, d\eta = v,\ \text{за всяко}\ v \in [0,1],\ \text{където}\ B_{1,v} = [0,1] \times [0,v].
\end{aligned}
$$

Доказателството се базира на [66], §15, където е решена задачата на Гурса $\partial_{uv}W + a\partial_u W + b\partial_u W + cW = f(u,v)$ с диференцируеми данни върху характеристиките $\big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, u = 0\big\}$ и $\big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, v = 0\big\}$ и с непрекъсната дясна страна $f(u,v)$. Доказва се съществуване и единственост на C^1-решение във всеки правоъгълник, имащ за страни въпросните характеристики с гладки данни по тях.

В **Параграф 1.4** разширяваме понятието за решение на граничната задачата, като вместо с обичайната производна си служим със слаба производна. Доказваме, че в този случай съществува решение от $W^{1,p}(I^2)$ на тази задача, което е единствено благодарение на оценката от **теорема 1.2.6**, при условие че дясната страна $f \in W^{-1,p}(I^2)$ удовлетворява модифицирани условия (на съответните такива за гладкия случай) заедно с едно допълнително условие за неговата трансформация на Фурие $\widehat{f} \equiv \mathscr{F}(f)$.

Теорема 1.4.1 Нека $f \in W^{-1,p}(I^2)$, $p > 2$ и $f \geqslant 0$ в слаб смисъл. Предполагаме, че са изпълнени условията

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\widetilde{f}, \chi_{B_{u,1}} * J_\varepsilon \right) &= u,\ \text{за всяко}\ u \in I, \\
\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\widetilde{f}, \chi_{B_{1,v}} * J_\varepsilon \right) &= v,\ \text{за всяко}\ v \in I,
\end{aligned}
$$

където $\widetilde{f} \in \big(W^{1,p}(\mathbb{R}^2)\big)'$ е продължението на f.

Тогава съществува единствено решение $C \in W^{1,p}(I^2)$ на задачата:

$$
\begin{aligned}
& C_{uv}(u,v) = f(u,v)\ \text{в}\ I^2\ \text{(в слаб смисъл)}\ ; \\
& C(u,0) = 0 = C(0,v); \\
& C(u,1) = u,\ C(1,v) = v,\ \text{за}\ u,v \in I,
\end{aligned}
$$

при условие че

$$\left\| \mathscr{F}^{-1}\left\{ \frac{\chi_1(\xi,\eta)|\eta|}{\xi} \cdot \frac{\widehat{f}(\xi,\eta)}{(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \right\|_{L_p} < +\infty,$$

$$\left\| \mathscr{F}^{-1}\left\{ \frac{\overline{\chi}_1(\xi,\eta)|\xi|}{\eta} \cdot \frac{\widehat{f}(\xi,\eta)}{(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \right\|_{L_p} < +\infty,$$

където χ_1 и $\overline{\chi}_1$ са гладки осредняващи функции със свойствата:

а) $supp\,\chi_1 \subset \{$конична околност на $(0,\pm 1)\}\backslash\{$ околност на $(0,0)\}$;

б) $supp\,\overline{\chi}_1 \subset \{$конична околност на $(\pm 1,0)\}\backslash\{$ околност на $(0,0)\}$.

Доказателството се базира на следните разсъждания. Тъй като две от граничните условия се получават от предположения за дясната страна на уравнението, можем да разглеждаме задачата на Гурса в слаб смисъл, а именно:

$$\begin{cases} \text{Търсим } h \in W_0^{1,p}(K_1),\ K_1 = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0,\ v > 0\big\}, \\ \text{за което } h_{uv} = f \in W^{-1,p}(\mathbb{R}^2),\ \text{ в слаб смисъл}, \\ \text{т.е. } (h_{uv},\varphi) = (f,\varphi),\ \text{ за всяко } \varphi \in \mathscr{D}(K_1), \\ \text{където } supp\, f \text{ е ограничен.} \end{cases}$$

След това формулираме аналог на горната задача в цялото пространство $\mathbb{R}^2$, а не в K_1. По този начин достигаме до ситуация, когато може да се приложи трансформацията на Фурие и съответните дефиниции за пространства на Соболев.

Показваме, че горната задача не е еквивалентна, но следва от

$$\begin{cases} \text{Търсим функция } H \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2),\ p > 2,\ supp\, H \subset \overline{K_1}, \\ \text{за която } (H,\varphi_{uv}) = (f,\varphi),\ \text{ за всяко } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

Смисълът в промяната на формулировката е очевиден: ако установим съществуването на такова H, тогава следите му върху ∂K_1 ще бъдат равни на нула, т.е. това ще бъде търсеното решение h.

Съществуването на слабо решение H на новоформулираната задача, т.е.

$$(H,\varphi_{uv}) = (f,\varphi),\ \text{ за всяко } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

се основава на добре известната процедура, използваща теоремата на Хан-Банах (виж [47], §4.2). Разбира се, такова решение не е единствено, но ние доказваме единственост в конкретния случай, използвайки допълнителните условия.

В **Параграф 1.5** илюстрираме употребата на получените дотук резултати за копули, като доказваме по нов начин теоремата на Склар, в случая когато съответните вероятностни функции на плътност са непрекъснати и не се анулират никъде.

Дори в този прост случай се пораждат множество копули (в зависимост от плътността на двумерното разпределение), които не са посочени например в ([50]).

В **Глава 2** разглеждаме случая на копули на повече от две променливи.

В **Параграф 2.1** Тук засягаме темата за n-растящи функции, когато $n \geqslant 3$. Отново изхождайки от факта, че ако функция $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, притежава непрекъснати производни, то тя е n-растяща тогава и само тогава, когато

$$H_{x_1 \dots x_n} \geqslant 0 \text{ в } \mathbb{R}^n,$$

даваме нова, обобщена дефиниция на понятието 2-растяща функция, когато производните се смятат в слаб смисъл, а именно:

Дефиниция 2.1.7 Нека $G \subset \mathbb{R}^n$ е област. Разпределението $H \in \mathscr{D}'(G)$ се нарича слабо n-растящо разпределение в G, ако за всяка неотрицателна тестова функция $\varphi \in \mathscr{D}$ е изпълнено

$$\big(H_{x_1,\dots,x_n}, \varphi\big) \geqslant 0.$$

По аналогия на двумерния случай доказваме, че горната дефиниция съвпада с формалната, когато $H \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$.

След което забелязахме, че можем да дадем втора обобщена дефиниция, която в дадени случаи е по-удобна да се използва. Всъщност **дефиниция 2.1.7** води до неудобството да се търсят слаби производни (т.е. производни в смисъл на теория на разпределенията) на негладки функции. Такива примери сме дали вече в Глава 1. Освен това в тази дефиниция не се взема предвид, че всъщност в случаите, които ще разглеждаме, функцията H принадлежи на подходящо Соболево пространство.

Дефиниция 2.1.10 Нека $G \subset \mathbb{R}^n$ е област такава, че контурът ѝ ∂G удовлетворява условието за сегмента (виж [1]). Тогава ще казваме, че $H \in W^{1,p}(G)$ е слабо n-растяща функция в G, ако

$$(-1)^n (H, f_{x_1 \cdots x_n}) \geqslant 0,$$

за всяка функция $f \in W^{n-1,p}(G)$, която е неотрицателна.

Ако преположим, че $(-1)^n(H, f_{x_1 \cdots x_n}) \geqslant 0$ е валидно само за гладки функции f, то предвид теорема 3.22 от [1] ще получим отново **дефиниция 2.1.10**.

Отново доказваме, че ако H е непрекъсната, то **дефиниция 2.1.10** е еквивалентна на класическата.

Показваме в **забележка 2.1.14**, че **дефиниция 2.1.7** и **Дефиниция 2.1.10** са еквивалентни, построявайки от произволна $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \geqslant 0$ функция g, която се анулира върху стените на куба I^n, които минават през върха $(1, \ldots, 1)$, заедно с производните си.

На края на параграфа показваме по нов начин, използвайки доказаното, че функцията Долна граница на Фреше

$$W^n(x_1, \cdots, x_n) = \max[x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n + 1, 0]$$

не е n-растяща в I^n и следователно не е копула за $n \geqslant 3$.

В **Параграф 2.2** разглеждаме важен клас копули – Архимедовите копули. Те са описани подробно не само на едно място (виж глава 4 в [50], както и [33], [11], [44], [24]). Този клас копули намира широко приложение, тъй като копулите в него са лесни за построяване и притежават хубави свойства.

Доказваме необходимото и достатъчно условие за това кога една функция, дефинирана като Архимедова копула, е копула. Тъй като граничните условия са тривиално изпълнени, съществен е въпросът за доказателството на свойството n-растяща функция.

В случая на бивариантни копули доказваме:

Теорема 2.2.9 Нека φ е непрекъсната и строго намаляваща функция от $[0, 1]$ в $[0, +\infty]$ такава, че $\varphi(1) = 0$, и нека $\varphi^{[-1]}$ е нейната псевдообратна функция, дефинирана с $\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{за } 0 \leqslant t \leqslant \varphi(0), \\ 0, & \text{за } \varphi(0) \leqslant t \leqslant +\infty. \end{cases}$

Тогава функцията C^2, дефинирана със

$$C^2(u, v) = \varphi^{[-1]}\big(\varphi(u) + \varphi(v)\big),$$

е копула тогава и само тогава, когато φ е изпъкнала.

Когато $n \geqslant 3$, доказваме:

Теорема 2.2.12 Нека φ е непрекъсната и строго намаляваща функция от $[0, 1]$ в $[0, \infty]$, където $\varphi(0) = \infty$ и $\varphi(1) = 0$. Нека φ^{-1} е обратната на φ. Тогава функцията $C^n : I^n \longrightarrow I$, дефинирана със

$$C^n(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{[-1]}\big(\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n)\big)$$

е n-копула за $n > 2$, тогава и само тогава, когато φ^{-1} е напълно монотонна върху интервала $[0, +\infty]$, т.е. когато е изпълнено $(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geqslant 0$ в $[0, +\infty]$.

В края на параграфа представяме контра пример на необходимостта на условието изпъкналост на функция φ в двумерния случай.

Параграф 2.3 обобщава изложеното за бивариантни копули и подробно описано в глава 1, в §1.2, §1.3 и §1.4, като построяваме n-копула като решение на гранична задача за n-мерния куб I^n.

Ключов резултат представлява съобщението [5] относно задачата на Гурса в куб.

Основното твърдение, което доказваме в този параграф, е следващата теорема.

Теорема 2.3.1 Нека $p > n$ и функцията $f \in W^{1-n,p}(I^n)$ е такава, че:

а) удовлетворява условията

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}_\varepsilon(\xi_1, \ldots, \xi_n) \chi_{B_k} \, d\xi_1 \ldots d\xi_n = x_k,$$

за всяко $k = 1, \ldots, n$ и за всеки паралелепипед
$B_k = [0, 1] \times \ldots \times [0, x_k] \times \ldots \times [0, 1] \subset I^n$;

б) е неотрицателна в смисъл на теория на разпределенията, т.е.

$$(f, \varphi) \geqslant 0, \text{ за всяко } \varphi \in W_0^{n-1,q}(I^n);$$

в) удовлетворява условие за регулярност $(\mathscr{R})$ (което ще формулираме по-долу).

Тогава съществува единствено решение $C \in W^{1,p}(I^n)$ на задачата:

1) в I^n в слаб смисъл да е изпълнено

$$(-1)^n \big(C, \varphi_{x_1 \ldots x_n}\big) = (f, \varphi),$$

за всяко $\varphi \in W_0^{n-1,q}(I^n)$, където q е спрегнатият индекс на p;

2) граничните условия

$$C(x_1, \ldots, x_n) = 0, \text{ ако } x_k = 0 \text{ за поне един индекс } k = 1, \ldots, n.$$

Условието за регулярност $(\mathscr{R})$ дефинираме с

$(\mathscr{R})$: Нека за функциите f_α, представящи f, да предположим

$$\partial_{x_i}\mathscr{D}^{\alpha'} f_\alpha \in L_p(I^n),\ i = 1, \dots, n,\ |\alpha| \leqslant n-1,$$

където

$$\partial_i \mathscr{D}^{\alpha'}\varphi = \begin{cases} \varphi & ,\ \text{когато}\ \alpha'_i = -1 \\ \partial_{x_i}\mathscr{D}^{\alpha'_i}\varphi & ,\ \text{когато}\ \alpha'_i \geqslant 0. \end{cases}$$

За всеки мултииндекс $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ е положено

$$\begin{cases} \alpha' = ({\alpha'}_1, \dots, {\alpha'}_n) = (\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_n - 1) \\ \mathscr{D}^{\alpha'} = \mathscr{D}_1^{\alpha'} \dots \mathscr{D}_n^{\alpha'}, \end{cases}$$

където за всяко $i = 1, \dots, n$

$$\mathscr{D}_i^{\alpha'_i}\varphi = \begin{cases} \int\limits_0^{x_i} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_i & ,\ \text{когато}\ \alpha'_i = -1, \\ \varphi(x_1, \dots, x_n) & ,\ \text{когато}\ \alpha'_i = 0, \\ \partial_i^{\alpha'_i}\varphi & ,\ \text{когато}\ \alpha'_i > 0. \end{cases}$$

Накрая на параграфа отбелязваме, че използваните микролокални ограничения в доказателството на двумерния случай **теорема 1.4.1** са еквивалентни в известен смисъл с условието $(\mathscr{R})$.

В **Глава 3** построяваме копула, базирайки се на метода, разработен в дисертацията, а именно да получим копула като решение на диференциално уравнение, използвайки реални данни от българска застрахователна компания и прилагайки числени методи за решаване на уравнението.

Съществуват много модели, описващи връзката между размера на искове и тяхната честота. Тук предлагаме модел, който допълнително позволява да се изследва връзката между размера на исковете, момента от времето, в които те настъпват (спрямо датата на сключване на полицата) и тяхната честота.

Като пример за използването на копули в застраховането и управлението на финансови рискове разглеждаме данните за CASCO автомобилни застраховки на застрахователна компания, представена на българския пазар.

В **Параграф 3.1** даваме общи сведения за числените методи, използвани при решаване на уравнението.

В **Параграф 3.2** построяваме самата копула и правим анализ на решението. Установяваме, че точността на числения метод е 10^{-4} поради данните, с които разполагаме.

В крайна сметка получената копула се оказва много подобна на копулата $\Pi(u, v) = uv$. Това означава, че двете разглеждани разпределения: *размер на застрахователната претенция* и *момент на възникване на събитието*, са почти независими, откъдето коефициентите на зависимост излизат нули с точност до четвъртия знак.

Авторска справка

Дисертационният труд разглежда копулите като инструмент за построяване взаимодействащи модели при оценка на риска.

В Глава 1 – Бивариантни копули в Соболеви пространства – разглеждаме случая за $n = 2$, като даваме нова обобщаваща дефиниция на свойството 2-растяща функция. Доказваме еквивалентност с формалната в случай на гладки функции. Констатирани са множество примери.

След това дефинираме гранична задача. Доказваме, че полученото решение съществува и е единствено при допълнителни условия за дясната страна на уравнението.

В Глава 2 – Копули на повече от две променливи – разглеждаме общия случай за $n \geqslant 3$. Отново даваме две еквивалентни обобщаващи, класическата, дефиниции на n-растяща функция.

Като следствие от тях доказваме необходимо и достатъчно условие за функции от вида на Архимедови копули да бъдат n-растящи, а следователно и копули.

Накрая, дефинираме гранична задача и доказваме, че полученото решение съществува и е единствено при определени условия.

В Глава 3 – Практическо приложение в пример от застраховането – ще се поинтересуваме как методът ни практически може да бъде използван от една застрахователна компания при оценката на риска, която прави. За целта ще построим бивариантна копула като числено решение на граничната задача, използвайки реални данни за автомобилна застраховка на българска застрахователна компания. Установяваме, че променливите: *размер на застрахователната претенция* и *момент на възникване на събитието* са почти независими.

Публикации, свързани с дисертацията

1. Iordanov I., N. Chervenov. Copulas on Sobolev spaces, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Vol 68, No1, pp.11-18, 2015.

2. Iordanov I., N. Chervenov. Copulas on Sobolev spaces, Serdica Math. J. 42, 335 - 360, 2016.

3. Chervenov N., I. Iordanov, B. Kostadinov. Goursat problem over unit cube in first quadrant of $\mathbb{R}^n$ (with applications to existence of copulas), AIP Conference Proceedings 2048, 040022 (2018); doi: 10.1063/1.5082094.

4. Chervenov N., B. Kostadinov. Generalisation of the Notion of an n-increasing function. Archimedean Copulas. Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 2019. (accepted)

5. Chervenov N., I. Iordanov, B. Kostadinov. n-dimensional copulas and week derivatives, Serdica Math. J., 2019. (accepted)

6. (pre-press) Stoilov N., N. Chervenov, Spectral approach to application of copulas in actuarial science.

Представяне на резултатите, свързани с дисертацията

Част от резултатите в дисертацията са представени на конференции, между които:

1. Изнесен доклад „Върху теоремата на Склар“, Пролетна научна конференция на ФМИ, 16.03.2013.

2. Изнесен доклад „Обобщени дву-растящи функции“, Пролетна научна конференция на ФМИ, 29.03.2014, https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/proletna-nauchna-sesiya-na-fmi-2014.

3. Изнесен доклад „Goursat problem over unit cube in first quadrant of $\mathbb{R}^n$ (with applications to existence of copulas)“, AMEE 2018, Sozopol, https://tu-sofia.bg/conferences/139.

Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че този дисертационен труд съдържа собствени резултати, получени от него или в съвместна работа с научния ръководител и/или други съавтори на съвместни публикации по разглежданите теми. Използваните резултати на други автори са надлежно цитирани.

Библиография

[1] Adams R.A., J.J.F. Fournier, Sobolev Spaces, Oxford, Elsevier LTD, Academic Press, 2003.

[2] Banach S., Theoérie des Óperations Linéaires. Monografie Matematyczne, Vol 1, Warszawa, 1932.

[3] Ben-Naoum A.K., On the Dirichlet problem for the nonlinear wave equation in bounded domains with corner points. Bull. Belg. Math. Soc. 3, pp. 345-361, 1996.

[4] Bergh J., J. Löfström, Interpolation Spaces, An Introduction. Berlin, Springer-Verlag, 1980.

[5] Chervenov N., I. Iordanov, B. Kostadinov, Goursat problem over unit cube in first quadrant of $\mathbb{R}^n$ (with applications to existence of copulas). AIP Conference Proceedings 2048, 040022 (2018); doi: 10.1063/1.5082094.

[6] Cherubini U., Mulinacci S.,Gobbi F., and Romagnoli S., Dynamic copula methods in finance. Wiley, New York, 2001.

[7] Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W.: Copula Methods in Finance. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2004.

[8] Clement R. T. and Reilly T., Correlations and copulas for decision and risk analysis. Management Science, 45(2):208-204, 1999.

[9] Dall'Aglio, G (1991) Frechet classes: the beginnings. In Dall'Aglio G., Kotz S., and Salinetti G., Probability distributions with given marginals, pages 1–12. Kluwer, Dordrecht, 1991.

[10] Deheuvels P., Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 23:1–36., 1978.

[11] Durante, F., Sempi, C.: Principles of copula theory. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2016.

[12] Durante, F., Fernández-Sánchez, J., Sempi, C.: Sklar's theorem obtained via regularization techniques. Nonlinear Analysis, **75**, 769-774, 2012.

[13] Durante, F., Fernández-Sánchez, J., Sempi, C.: A topological proof of Sklar's theorem. Applied Mathematics Letters, Volume 26, Issue 9, Pages 945-948, September 2013.

[14] Elidan, G., Copulas in machine learning. In Jaworski P., Durante F., and Hardle W. K., editors, Copulae in mathematical and quantitative finance, volume 213 of Lecture Notes in Statistics, pages 39–60. Springer, Berlin/Heidelberg, 2013.

[15] Embrechts P., Copulas: a personal view. Journal of Risk and Insurance, 76:639–650, 2009.

[16] Embrechts P., McNeil A. J., and Straumann D., Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. In Dempster M., editor, Risk management: value at risk and beyond, pages 176–223. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[17] Féron R., Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, casde l'espace â trois dimensions. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 5:3–12, 1956.

[18] Fikhtengolts G.M., Rate differential and integral calculus. Textbook. In 3 vols. T.1. 11th ed.,/ Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya. Uchebnik. V 3-kh tt. T. 1. 11-e izd., ster (Russian), 2017.

[19] Fisher N. I. and Sen P. K., The collected works of Wassily Hoeffding. Springer, New York, 1994.

[20] Fréchet M., Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Ann. Univ. Lyon, Sect. A (3), 14:53–77, 1951.

[21] Fréchet M., Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont donnéees. C. R. Acad. Sci. Paris, 242:2426–2428, 1956.

[22] Fokin M.V., On the solvability of the Dirichlet problem for the equation of the vibrating string. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. 272, No4, pp. 801-805, 1983; English transl. in Soviet Math. Dokl. 28, No2, 455-459, 1983.

[23] Fox D.W., C. Pucci., The Dirichlet problem for the wave equation. Annali di Matematica Pura ed Applicata, Volume 46, Issue 1, pp 155-182, December 1958.

[24] Genest C., J. MacKay, Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. The Canadian Journal of Statistics / La Revue Canadienne de Statistique , Vol. 14, No. 2, pp. 145-159, 1986.

[25] Genest C. and Favre A. C., Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. J. Hydrol. Eng., 12:347–368, 2007.

[26] Genest, C., Gendron, M., and Bourdeau–Brien, M.: The advent of copulas in finance. European J. Finance, **15**, 2009.

[27] Gumbel E. J., Distributions â plusieurs variables dont les marges sont données. C. R. Acad. Sci. Paris, 246:2717–2719, 1958.

[28] Hoeffding V., Masztabinvariante Korrelationstheorie. Schriften des Mathrematisches Instituts und des Instituts fur Angewandte Mathematik des Universitat Berlin, 5:181–233. English translation as "Scale invariant correlation theory" in Fisher and Sen [1994], pp. 57–107, 1940.

Hoeffding V., Masztabinvariante Korrelationsmasse fur diskontinuierliche Verteilungen. Arch. Math. Wirtschafts- u. Sozialforschung, 7:49–70. English translation as "Scale–invariant correlation for discontinuous disributions" in Fisher and Sen [1994], pp. 109–133, 1941.

[29] Hörmander L, Linear Partial Differential Operators. Berlin, Springer-Verlag, 1976.

[30] Hougaard P., Analysis of multivariate survival data. Statistics for Biology and Health. Springer-Verlag, New York., 2000.

[31] Jaworski P., Durante F., and Hardle W. K., editors, Copula in mathematical and quantitative finance, volume 213 of Lecture Notes in Statistics - Proceedings. Springer, Berlin/Heidelberg, 2013.

Jaworski P., Durante F., Hardle W. K., and Rychlik T., editors, Copula Theory and its Applications, volume 198 of Lecture Notes in Statistics - Proceedings. Springer, Berlin/Heidelberg, 2010.

[32] Joe H., Multivariate models and dependence concepts, Chapman and Hall/CRC, New York, Series: Chapman and Hall/CRC Monographs on Statistics and Applied Probability, 1997.

[33] Joe H., Dependence Modeling with Copulas, Chapman and Hall/CRC, New York, Series: Chapman and Hall/CRC Monographs on Statistics and Applied Probability (Book 133), 2014.

[34] Hardy G.H., J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities. London, Cambridge University Press, 1934.

[35] Iordanov I., N. Chervenov, Copulas on Sobolev spaces. Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Vol 68, No1, pp.11-18, 2015.

[36] Iordanov I., N. Chervenov, Copulas on Sobolev spaces. Serdica Math. J. 42, 335 - 360, 2016.

[37] Jones S., Of couples and copulas. Financial Times. Published on April 24, 2009.

[38] Li D., On default correlation: a copula function approach. Journal of Fixed Income, 9:43–54, 2001.

[39] Lloyd N. Trefethen, Spectral Methods in MATLAB, SIAM, Philadelphia, 2000

[40] Lusternik L.A., V.J. Sobolev Elements of Functional Analysis, Moscow, Nauka, 1965 (in Russian).

[41] Mai J.-F. and Scherer M., Simulating copulas. Stochastic models, sampling algorithms and applications. World Scientific, Singapore, 2012.

Mai J.-F. and Scherer M., Financial engineering with copulas explained. Palgrave MacMillan, Hampshire, UK, 2014.

[42] Malevergne Y. and Sornette D., Extreme financial risks. Springer, Berlin, 2006.

[43] McNeil, A.J., Frey, R., and Embrechts, P.: Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools - Revised edition. Princeton University Press, Princeton, 2015.

[44] McNeil A.J., J. Nešlehová Multivariate Archimedean Copulas, d-monotone Functions and l_1-norm Symmetric Distributions, The Annals of Statistics (Institute of Mathematical Statistics), Vol. 37, No. 5B, 3059 - 3097, 2009.

[45] Mikosch T., Copulas: tales and facts. Extremes, 9:3–20, 2006a.

Mikosch T., Copulas: tales and facts—rejoinder. Extremes, 9:55–62, 2006b.

[46] Moore D. S. and Spruill M. C., Unified large-sample theory of general chi-square statistics for tests of fit. Ann. Statist., 3:599–616, 1975.

[47] Nagumo M., Lecture notes on modern theory of partial differential equations. Moscow, Mir, 1967 (in Russian).

[48] Natanson I.P., Theory of functions of a real variable. Sofia, Nauka, 1971 (in Bulgarian).

[49] Nelsen R. B., An introduction to copulas, volume 139 of Lecture Notes in Statistics. Springer, New York, 1999.

[50] Nelsen R.B., An introduction to copulas. Springer Series in Statistics, New York, Springer, 2006.

[51] Patton, A.: Copula–based models for financial time series. In: Andersen, T.G., Davies, R.A., Kreiss, J.–P., and Mikosch, T. (eds.): Handbook of Financial Time Series. Springer, Berlin, 767–785, 2009.

[52] Salmon F., Recipe for disaster: The formula that killed Wall Street. Wired Magazine. Published on February 23, 2009.

[53] Salmon F., The formula that killed Wall Street. Significance, 9(1):16–20, 2012.

[54] Salvadori G., De Michele C., Kottegoda N. T., and Rosso R., Extremes in nature. An approach using copulas. Springer, Dordrecht, 2007.

[55] Schönbucker P., Credit derivatives pricing models: models, pricing, implementation. Wiley, Chichester, 2003.

[56] Schweizer B., Thirty years of copulas. In Dall'Aglio, G., Kotz, S., and Salinetti, G., editors, Probability distributions with given marginals, pages 13–50. Kluwer, Dordrecht, 1991.

[57] Schweizer B., Introduction to copulas. J. Hydrological Engineering, 12:346, 2007.

[58] Schweizer B. and Sklar A., Espaces métriques aléatoires. C. R. Acad. Sci. Paris, 247:2092–2094.

[59] Schweizer B. and Sklar A., Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables. Studia Math., 52:43–52, 1974.

[60] Schweizer B. and Sklar A., Probabilistic metric spaces. North-Holland, New York. Reprinted, Dover, Mineola, NY, 2005, 1983.

[61] Schweizer B. and Wolff E. F., On nonparametric measures of dependence for random variables. Ann. Statist., 9:879–885, 1981.

[62] Sklar A., Fonctions de répartition â n dimensions et leurs marges. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 8:229–231, 1959.

[63] Sklar A., Random variables, joint distribution functions and copulas. Kybernetika (Prague), 9:449–460, 1973.

[64] Song P. X.-K., Correlated data analysis: modeling, analytics, and applications. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2007.

[65] Trivedi P. K. and Zimmer D. M., Copula modeling: an introduction for practitioners. Now Publishers, Hanover, MA, 2007.

[66] Vladimirov V.S., Equations of Mathematical Physics. Moscow, Nauka, 1981 (in Russian).

[67] Chervenov N., B. Kostadinov, Generalisation of the Notion of an n-increasing function. Archimedean Copulas. Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 2019. (accepted)

[68] Chervenov N., I. Iordanov, B. Kostadinov, n-dimensional copulas and week derivatives. Serdica Math. J., 2019. (accepted)

[69] (pre-press) Stoilov N., N. Chervenov, Spectral approach to application of copulas in actuarial science, to be published.