СТАНОВИЩЕ

за дисертационния труд на тема
"Пресмятане и оценяване на Фолкманови числа"
на Александър Сотиров Биков
за получаване на образователната и научна степен "доктор"
в професионално направление 4.5 "Математика"

от проф. дмн Недялко Димов Ненов, научен ръководител,
СУ "Св. Климент Охридски" , ФМИ

Александър Сотиров Биков завършва НПМГ с отличен успех през 2007г. и през същата година е приет като редовен студент във Факултета по математика и информатика, специалност "Информатика". През 2013г. под мое ръководство защитава дипломна работа на тема "Компютърно изследване на критични графи на Ramsey". Тази дипломна работа е публикувана в [2] и резултатите от нея са включени в дисертацията в глава 8. От февруари 2015г. до февруари 2018г. е редовен докторант към катедра Алгебра по докторска програма "Алгебра и теория на числата". Автор е на 7 научни публикации.

1. Представени материали:

Представена е дисертация, която съдържа 153 страници. Текстът е оформен в 9 глави и увод. Литературата съдържа 101 заглавия. Представен е и автореферат, който подробно и правилно отразява съдържанието на дисертацията. В края на автореферата има авторска справка, в която са формулирани основните научни приноси на дисертацията. Претенциите на автора в тази справка са основателни. Приложен е списък на публикациите по дисертацията и копия на тези публикации. Налице са и всички останали документи, които се изискват от Закона и Правилника.

2. Нови идеи в дисертационния труд:

По-надолу навсякъде за естествените числа $a_1, ..., a_s$ ще използваме числата m и p, които се дефинират с равенствата:

(*) $m = \sum_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1$, $p = \max\{a_1, ..., a_s\}$

Фолкмановите числа $F_v(a_1, ..., a_s; q)$ се дефинират като минимума на броя на върховете на графите, които не съдържат пълния граф с q върха и имат свойството, че при всяко оцветяване на върховете с s цвята съществува $i \in \{1, ..., s\}$, такова че има едноцветна a_i клика в i-я цвят. Ребрените Фолкманови числа $F_e(a_1, ..., a_s; q)$ се дефинират по аналогичен начин, само че вместо върховете се оцветяват ребрата.

В работата се доказват неравенствата:

(**) $F_v(\underbrace{2,...,2}_{m-p},p;q) \leq F_v(a_1,...,a_s) \leq \widetilde{F}_v(m\big|_p;q)$,

където $\widetilde{F}_v(m\big|_p;q)$ е модифицирано Фолкманово число, което е дефинирано подробно на страница 28. Оценяването на Фолкмановите числа в дисертацията става чрез пресмятането или оценяването на границите $F_v(\underbrace{2,...,2}_{m-p},p;q)$ и $\widetilde{F}_v(m\big|_p;q)$ в (**). Имам подозрението, че разликата между границите в (**) не е голяма, което прави този метод много интересен. В разглежданите в дисертацията случаи тази разлика не е по-голяма от 1. Не е известно дали тази разлика може да бъде по-голяма от 1.

В дисертацията са разработени методи за пресмятането на границите в (**). По-точно е доказано, че ако се пресметнат първите няколко члена в редицата $F_v(\underbrace{2,...,2}_{m-p},p;q)$ при фиксирано p, или в редицата $\widetilde{F}_v(m\big|_p;q)$ при фиксирано p, тогава се намират всичките членове в тези редици и съгласно (**) се получават оценки за Фолкмановите числа $F_v(a_1,...,a_s;q)$. По този начин дисертантът свежда оценяването на безкрайни серии от Фолкманови числа до пресмятането на няколко конкретни Фолкманови числа. Radziszowski и неговите ученици предлагат в [78] метод за пресмятането на Фолкманови числа, който се състои в това да се разширят дадено множество от графи с няколко независими върха. Тези графи, които се разширяват обаче не трябва да имат повече от 12 върха. Поради това, методът може да се прилага успешно, когато търсеното Фолкманово число не е по-голямо от 15. Следващата важна идея от дисертацията, на която искам да обърна внимание, е свързана с това да се подобри методът на Radziszowski, така че да могат да се пресмятат и по-големи Фолкманови числа. Този метод се състои в следното: разширяваме с независимо множество от няколко независими върха даден малък граф с не повече от 10 върха; от получените разширения с теоретични разсъждения се премахват значителен брой ненужни графи. Към всеки от останалите графи отново повтаряме тази процедура. В дисертацията тази процедура се повтаря най-много 6 пъти. Няма да описвам подробно тази процедура, но желаещите могат да я проследят в доказателствата на повечето теореми от дисертацията (вж. например доказателствата на Теорема 2.7, Теорема 3.8, и Теорема 4.2). Единствено резултатите от Глава 8 са получени без прилагането на тази идея. Благодарение на това усъвършенстване на метода на Radziszowski могат да се пресмятат Фолкманови числа, които са по-големи от 15. В дисертацията най-голямото пресметнато конкретно Фолкманово число с този метод е $F_v(2,2,7;8) = 20$. Обръщам специално внимание на тази идея, защото благодарение на нея беше преодолян няколкогодишния застой в областта на Фолкмановите числа.

Много нови интересни идеи има в осемте алгоритъма, които се използват в дисертацията. За съжаление тук нямам възможност да говоря за тях.

3. Описание на основните научни приноси в дисертацията:

Всички върхови Фолкманови числа от вида $F_v(a_1,...,a_s;q)$, където $q \geq m$, са известни. Известни са също и числата от вида $F_v(a_1,...,a_s;m-1)$, когато $p \leq 4$, и числото $F_v(3,5;6) = 16$, [92]. В дисертацията се разглеждат числата от вида $F_v(a_1,...,a_s;m-1)$, когато $p = 5$, 6, или 7.

В случая $p = 5$ се доказва, че границите от (**) съвпадат и $F_v(a_1,...,a_s;m-1) = m+9$.

При $p = 6$ се получава, че границите от (**) се различават с единица и $m+9 \le F_v(a_1,...,a_s;m-1) \le m+10$. С допълнителни усъвършенствания на метода е доказано, че всички числа освен $F_v(\underbrace{2,...,2}_{m-6};6;m-1)$ са равни на горната граница $m+10$.

В случая $p = 7$ се доказва, че границите от (**) се различават с единица и $m+11 \le F_v(a_1,...,a_s;m-1) \le m+12$. Долната граница се достига за всяко m. Не е известно обаче дали се достига горната граница.

В случая $q = m-2$ (в който не е пресметнато нито едно Фолкманово число, когато $p \ge 3$) са подобрени известните оценки за две числа от този тип, а именно $20 \le F_v(2,2,2,3;4) \le 22$ и $20 \le F_v(2,3,3;4) \le 24$.

В дисертацията се разглежда също и най-трудния граничен случай за пресмятане на Фолкманови числа $q = \max\{a_1,...,a_s\}+1$. Използвайки вече получените резултати дисертанът доказва нови оценки за този важен клас Фолкманови числа, които аз няма да формулирам тук (вж. Теореми 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, и 6.5).

Последните две глави са посветени на ребрените Фолкманови числа $F_e(3,3;q)$ и графите свързани с тях. В глава 8 се разглеждат графи, които имат свойството, че при всяко оцветяване на ребрата в два цвята има едноцветен триъгълник, и са минимални в смисъл, че техните собствени подграфи нямат това свойство. Доказани са много нови резултати за тези графи. Намерени са и всички такива графи с не повече от 13 върха. Броят на 13-върховите минимални графи е 306 635, от където става ясно, че не би могло да се докаже неравенството $F_e(3,3;5) \ge 13$ без помощта на компютър (истинската стойност на това число е 15). Последната глава е посветена на най-търсеният граф в теорията на Фолкмановите числа. Това е граф, чийто брой върхове определя числото $F_e(3,3;4)$. В дисертацията е получена нова оценка за това число $F_e(3,3;4) \ge 20$. Предишната оценка $F_e(3,3;4) \ge 19$ е получена преди 10 години.

4. Публикации и цитати:

Резултатите от дисертацията са публикувани в седем статии ([2], [3], [4], [5], [6], [7], и [8]). Работите [2] и [3] са самостоятелни, а работите [4], [5], [6], [7], и [8] са съвместни с научния ръководител. Всички статии освен [7] са излезли от печат, а [7] е приета за печат. Три от статиите [5], [7], и [8] са публикувани в специализирани международни списания. Към публикациите бих добавил и английския вариант на дисертацията, който е публикуван в arXiv и ResearchGate. Участието на дисертантът в съвместните ни работи е равноправно и поради това включването на резултатите от тези публикации в дисертацията е основателно. Дисертантът е забелязал 9 цитирания (8 са на резултати от дисертацията и 1 на непубликуван резултат свързан с дисертацията). Най-много е цитирана работата [5] - 5 пъти. Тези цитати са от едни от най-изявените специалисти в теорията на Фолкмановите числа.

Заключение

Дисертационният труд е посветен на Фолкмановите числа, които са модификация на класическите числа на Ramsey. Нещо повече, някои Фолкманови числа съвпадат с числата на Ramsey. Пресметнати са три безкрайни серии от върхови Фолкманови числа и са получени нови оценки за някои други Фолкманови числа. Специално трябва да се отбележи оценката $F_e(3, 3; 4) \geq 20$ от последната глава, която е свързана с най-търсения Фолкманов граф и се цитира най-много. Резултатите са постигнати благодарение на няколко нови идеи, които описахме по-горе, на доброто познаване на литературата в областта на Фолкмановите числа, и на уменията по програмиране на дисертанта. Научните приносите на дисертанта в теорията на Фолкмановите числа са много повече, от колкото това се изисква от Закона.

С голямо удоволствие препоръчвам на Александър Сотиров Биков да бъде присъдена образователната и научна степен "доктор" професионално направление 4.5 "Математика".

28.08.2018г. проф. дмн Недялко Ненов