Р Е Ц Е Н З И Я

на дисертационен труд за получаване на образователна и
научна степен „доктор“ по професионално направление 4.5 Математика,
докторска програма „Алгебра, топология и приложения“

Автор: Александър Сотиров Биков

Тема: Пресмятане и оценяване на Фолкманови числа

Рецензент: проф. дмн Емил Миланов Колев,
Институт по математика и информатика, БАН.

1. Общо описание на дисертацията и актуалност на тематиката

Представения дисертационен труд е в обем на 153 страници. Библиографията съдържа 101 източника.

Дисертацията е посветена на търсене на точни стойности и на граници на върхови и ребрени Фолкманови числа, както и на намиране на минимални графи.

Нека G е неориентиран граф без кратни ребра и примки с множество от върхове $V(G)$ и множество от ребра $E(G)$. За произволни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_s$ символът

$$G \overset{e}{\rightarrow} (a_1, a_2, \ldots, a_s) \text{ (съответно } G \overset{v}{\rightarrow} (a_1, a_2, \ldots, a_s))$$

означава, че при всяко оцветяване на ребрата на G (съответно върховете на G) в s цвята съществува $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, за което има едноцветна a_i-клика в цвят i.

С $\mathcal{H}_e(a_1, a_2, \ldots, a_s; q)$ (съответно $\mathcal{H}_v(a_1, a_2, \ldots, a_s; q)$) се означава множеството от графите G, за които $G \overset{e}{\rightarrow} (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ (съответно $G \overset{v}{\rightarrow} (a_1, a_2, \ldots, a_s)$) и пълният граф с q върха K_q не е подграф на G.

Ребрените и върховите Фолкманови числа се дефинират като минималния брой на върховете на граф от $\mathcal{H}_e(a_1, a_2, \ldots, a_s; q)$ и $\mathcal{H}_v(a_1, a_2, \ldots, a_s; q)$.

Дори и за малки стойности на параметрите $a_1, a_2, \ldots, a_s$ намирането на точните стойности или граници за Фолкмановите числа е изключитено трудна задача. В това направление са работили много известни математици, като за получаване на стойностни резултати (като например намирането на ребреното Фолкманово число $F_e(3, 3; 5) = 15$) понякога са били нужни десетилетия.

Както при други подобни задачи, определянето на точните стойности на Фолкманови числа се свежда до намирането на горни и долни граници. Горните граници са конструктивни, т.е. съществуването на граф с дадените свойства определя горна граница за търсеното число. За намирането на долни граници се използват комбинаторни разсъждения, като много често са необходими компютърни пресмятания.

2. Характеристика на дисертационния труд

Дисертацията е разделена на две части – Върхови Фолкманови числа и Ребрени Фолкманови числа.

В първа глава на първа част са въведени основните понятия, дефиниции и известни резултати.

За произволни естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_s$ се въвеждат числата

$$m = \sum_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1 \text{ и } p = \max\{a_1, a_2, \dots, a_s\}.$$

Основното твърдение, което се използва за получаване на граници за върховите Фолкманови числа е Теорема 1.19:

$$F_v(2_{m-p}, p; q) \le F_v(a_1, a_2, \dots, a_s; q) \le \tilde{F}_v(m|_p; q).$$

В горните означения $F_v(2_{m-p}, p; q) = F_v(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m-p}, p; q)$ и $\tilde{F}_v(m|_p; q)$ е модифицирано Фолкманово число. По дефиниция модифицираното Фолкманово число $\tilde{F}_v(m|_p; q)$ е равно на минималния брой върхове в граф G, за които $G \overset{v}{\to} (m|_p)$. Символът $G \overset{v}{\to} (m|_p)$ означава, че за всеки избор на числа $a_1, a_2, \dots, a_s$ за произволно s, за които $m = \sum_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1$ и $\max\{a_1, a_2, \dots, a_s\} \le p$ е изпълнено $G \overset{v}{\to} (a_1, a_2, \dots, a_s)$.

Във втора глава са получени резултати, свързани с намирането на върхови Фолкманови числа $F(a_1, a_2, \dots, a_s; m-1)$ за $m = \sum_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1$ и $\max\{a_1, a_2, \dots, a_s\} = 5$.

В тази глава са доказани равенствата

$$F_v(2, 2, 5; 6) = 16 \text{ и } F_v(2|_{m-5}, 5; m-1) = m + 9 \text{ при } m \ge 7.$$

Намерени са и точните стойности на модифицираните върхови Фолкманови числа от вида $\tilde{F}_v(m|_5; m-1)$.

Като следствие от горните равенства се доказва основния резултат – намирането на всички числа от този вид:

$$F_v(a_1, a_2, \ldots, a_s; m-1) = m+9$$

За целта се прилага алгоритъм А1, като за разработването му и за доказване на неговата коректност са въведени множествата $\mathcal{H}_{max}(2_{r-1}, p; q; n-k)$ и са доказани допълнителни твърдения.

В параграф 2.5 е разработен алгоритъм А2 за пресмятане и оценяване на произволни Фолкманови числа $F_v(a_1, a_2, \ldots, a_s; q)$.

В трета глава са получени резултати, свързани с намирането на върхови Фолкманови числа $F_v(a_1, a_2, \ldots, a_s; m-1)$ за $m = \sum_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1$ и $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_s\} = 6$.

Доказани са равенствата

$$F_v(2, 2, 6; 7) = 17 \text{ и } F_v(3, 6; 7) = 18.$$

С помощта на тези две равенства се пресмятат и всички числа от две безкрайни редици:

$$F_v(2_{m-6}, 6; m-1) = m+9, m \geq 8 \text{ и } F_v(2_{m-8}, 6; m-1) = m+10, m \geq 8.$$

Горните два резултата, заедно с пресметнатите точни стойности на модифицираните върхови Фолкманови числа от вида $\tilde{F}_v(m|_6; m-1)$ водят до получаване на основния резултат в тази глава – Теорема 3.1.

$$F_v(a_1, a_2, \ldots, 6; m-1) = m+9, \text{ ако } a_1 = a_2 = \cdots = a_{s-1} = 1$$

$$F_v(a_1, a_2, \ldots, 6; m-1) = m+10, \text{ ако } a_{s-1} \geq 3.$$

За получаване на резултатите от тази глава е разработен алгоритъм А3, който представлява модификация на алгоритъм А2.

В четвърта глава са получени резултати, свързани с намирането на точни стойности и граници за върхови Фолкманови числа $F_v(a_1, a_2, \ldots, a_s; m-1)$ за $m = \sum_{i=1}^{s}(a_i - 1) + 1$ и $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_s\} = 7$.

С помощта на доказаното равенство $F_v(2,2,7;8) = 20$ се пресмятат стойностите на $F_v(2_{m-7},7;m-1) = m+11$ при $m \geq 9$. Основният резултат в глава 4 е Теорема 4.1:

$$m + 11 \leq F_v(a_1, a_2, \ldots, a_s; m-1) \leq m + 12.$$

За получаване на резултатите е разработен алгоритъм А4, който е подобрение на алгоритъм А3.

В пета глава са представени резултати за числа от вида $F(a_1, a_2, \ldots, a_s; m-2)$. Когато $p = 3$ за пресмятането на числата от този вид важни се оказват точните стойности на $F_v(2,2,2,3;4)$ и $F_v(2,3,3;4)$. За тези две числа са получени нови граници, като основните резултати са представени в Теорема 5.1 и Тероема 5.2:

$$20 \leq F_v(2,2,2,3;4) \leq 22 \text{ и } 20 \leq F_v(2,3,3;4) \leq 24.$$

За получаване на резултатите от тази глава е разработен алгоритъм А5.

В шеста глава са представени резултати за числа от вида $F(a_1, a_2, \ldots, a_s; q)$ за $q = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_s\} + 1$. Получени са нови долни граници за числата

$$F_v(4,4;5), F_v(5,5;6), F_v(6,6;7) \text{ и } F_v(7,7;8).$$

В Глава 7 се дефинират ребрените Фолкманови числа и се представят известни резултати. Основният акцент са ребрените Фолкманови числа от вида $F_e(3,3;q)$ при $q = 6,5,4$.

В Глава 8 се разглежда задачата за намиране на минимални графи в $\mathcal{H}_e(3,3)$. Един граф от $\mathcal{H}_e(3,3)$ е минимален когато всеки негов собствен подграф не е от това множество.

Лесно се вижда, че K_6 е минимален, а от $F_e(3,3;6) = 8$ следва, че няма минимален граф със 7 върха. Единственият минимален граф с 8 върха е $K_3 + C_5$, а единствения минимален граф с 9 върха е получен от Ненов.

Не е трудно да се докаже, че всеки граф от вида $K_3 + C_{2r+1}$ при $r \geq 1$ е минимален. Известни са 5 минимални графи с 10 върха. В тази глава се прави пълна касификация на минималните графи с до 12 върха. Доказано е, че:

- Съществуват 6 минимални графа с 10 върха.
- Съществуват 79 минимални графа с 11 върха.
- Съществуват 3041 минимални графа с 12 върха.

За получаване на тези резултати е използван алгоритъм A6. При него от съществено значение са следните свойства: Ако G е минимален граф в $\mathcal{H}(3,3;6)$, то:

- $\delta(G) \geq 4$;
- G не е шпернеров граф;
- $\chi(G) \geq 6$.

За получаване на всички минимални графи $G \in \mathcal{H}_e(3,3)$, за които

$$\alpha(G) \geq |V(G)| - k \geq 1$$

при фиксирано k се използва алгоритъм A7. Модификация на този алгоритъм (наречен A7-M) се използва за намиране на всички минимални графи $G \in \mathcal{H}_e(3,3:q;n)$, за които $\alpha(G) \geq n-k \geq 1$.

Намирането на всичси 13-върхови минимални графи в $\mathcal{H}_e(3,3)$ е разделено на две части. Първо са намерени графите от това множество с $\alpha(G) = 2$. Те са подмножество на $\mathcal{R}(3,6;13)$, като има 275086 графа в $\mathcal{R}(3,6;13)$. От тях само 13 са минимиални графи в $\mathcal{H}_e(3,3)$.

След това са намерени всички 13-върхови графи с $\alpha(G) \geq 3$, като за целта се използва програмата nauty и алгоритъм A7-M.

Окончателно, има 306 635 минимални 13-върхови графи в $\mathcal{H}_e(3,3)$.

В тази глава са разгледани интересни свойства за минималната и максималната степен и хроматичното число на получените минималните графи в $\mathcal{H}_e(3,3)$. Изказана е интересна хипотеза, че единствения минимален граф в $\mathcal{H}_e(3,3)$, за който $M(G) \neq 1$ е K_6. С $M(G)$ се означава минимума на броя на едноцветните триъгълници по всички 2-оцветявания на графа.

Представени са оценки за числото на независимост и минималната степен на минималните графи в $\mathcal{H}_e(3,3)$.

В глава 9 е получен един от основните резултати в дисертацията – намирането на границата $\mathcal{F}_e(3,3;4) \geq 20$. С това долната граница за това Фолкманово число е подобрена с 1. За целта е разработен алгоритъм A8, чиято математическа обосновка е свързана с доказване на редица свойства на графите от $\mathcal{H}_e(3,3;4)$.

3. Автореферат, научни приноси и публикации по дисертацията

Авторефератът напълно отразява съдържанието на дисертационния труд. В авторската справка правилно са отразени приносите на дисертанта.

Резултатите от дисертацията са публикувани в 7 статии (6 от които излезли от печат, а една е приета за печат). Две от статиите са саомостоятелни, а останалите са съвместни с научния ръководител на дисертанта.

Забелязани са 8 цитирания на резултати от дисертацията.

4. Критични бележки

Нямам съществени критични бележки тъй като изложението е изключително точно и прецизно. Оформлението е на много добро ниво.

Глава 7 е в обем на три страници и е можело да се добави като уводна част към следващата глава.

5. Заключение

Дисертантът е работил в една изключителна трудна тематика. Изложението показва отлично познаване на състоянието на проблема. Получени са нови интересни резултати, като са преодолени значителни трудности.

Считам, че дисертационният труд съдържа научни резултати, които представляват оригинален принос в науката и отговарят на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България.

Представените към дисертацията трудове са достатъчни по качество и количество, като няма съмнение относно значимостта на приносите в тях.

Това ми дава основание убедено да препоръчам на научното жури да гласува за присъждане на Александър Сотиров Биков на образователната и научна степен „доктор“ по професионално направление 4.5 Математика, докторска програма „Алгебра, топология и приложения“.

19.09.2018 г. Емил Колев: ....