Рецензия

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:
„Едновременно приближение с операторите на Бернщайн“
за придобиване на
научна степен „доктор на науките“
от

кандидат: **д-р Борислав Радков Драганов**
Област на висше образование: **4. Природни науки, математика и информатика**
Професионално направление: **4.5. Математика**
Катедра: Математически анализ,
Факултет по математика и информатика (ФМИ),
Софийски университет „Св. Климент Охридски“ (СУ),

Рецензията е изготвена от: проф. д.м.н. Пенчо Петров Петрушев от Университета на Южна Каролина в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед РД 38-627/28.11.2023 г. на Ректора на Софийския университет.

1. Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Докторската дисертация на д-р Борислав Драганов на тема „Едновременно приближение операторите на Бернщайн“ съдържа 178 страници и се състои от увод и шест глави. Библиографията на дисертацията съдържа 100 заглавия (монографии и статии в списания). Както е посочено в заглавието, дисертацията е посветена на едновременното птиближение на функции и техните производни върху $[0, 1]$ чрез оператора на Бернщайн и някои от неговите модификации.

2. Данни и лични впечатления за кандидата

Следя математическото развитие на д-р Борислав Драганов от 2004 г., когато той защити своята кандидатска дисертация. Четейки статиите му, той ме обеди, че е надарен аналист способен да схваща и развива нови идеи и техники на високо интелектуално ниво. Очаквам с нетърпение нови отлични резултати от него в теорията на приближенията и други области на анализа, които очаквам с увереност. Познавам и стила на д-р Драганов на изнасяне на лекции. Слушал съм неговите доклади на няколко от конференциите по теория на апроксимациите в Созопол. Той е отличен комуникатор. Той представя резултатите си с компетентност, яснота и владеене на областта. В обобщение д-р Борислав Драганов е талантлив млад математик с обещаващо бъдеще. Имам големи очаквания за д-р Драганов, докато се развива кариерата му.

3. Съдържателен анализ на научните и научноприложните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата

С.Н. Бернщайн въвежда през 1912 г. своя известен оператор:

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x), \quad p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

който преобразува всяка непрекъсната функция f върху $[0,1]$ в алгебричен полином $B_n f$ от степен n. Този оператор позволява лесно да се докаже известната теорема на Вайерщрас за апроксимация на непрекъснати функции чрез алгебрични полиноми върху $[0,1]$, което може да се изрази чрез тъждеството

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n f\| = 0, \quad \forall f \in C[0,1],$$

където $C[0,1]$ означава пространството на всички непрекъснати функции върху $[0,1]$ и $\|\cdot\|$ е sup-нормата върху $[0,1]$.

Съществуват много публикации върху апроксимацията с оператора на Бернщайн и неговите свойства. Дисертацията на д-р Драганов е посветена на едновременното приближаване на функции и техните производни върху $[0,1]$ с тегла на Якоби чрез оператора на Бернщайн и някои от неговите модификации, по-специално, булеви суми на оператори на Бернщайн и оператори на Бернщайн с цели коефициенти.

Във въведението на дисертацията д-р Драганов прави преглед на някои от основните съществуващи резултати за апроксимация с оператора на Бернщайн, включително следния фундаментален резултат на Дитциан и Тотик: За всека функция $f \in C[0,1]$

$$\|f - B_n f\| \le c\,\omega_\varphi^2(f, n^{-1/2}), \tag{1}$$

където модулът на гладкост $\omega_\varphi^2(f,t)$ се дефинира чрез

$$\omega_\varphi^2(f,t) = \sup_{0<h\le t} \sup_{x\pm h\varphi(x)\in[0,1]} |f(x+h\varphi(x)) - 2f(x) + f(x-h\varphi(x))|, \quad t>0.$$

Тук $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$. Представена е и обратната оценка:

$$\|f - B_n f\| \geq c\omega_\varphi^2(f, n^{-1/2}), \quad n \geq n_0. \tag{2}$$

Известният резултат на Вороновская също е даден: За всяко $f \in C^2[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} n(B_n f(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2}\, f''(x) \tag{3}$$

равномерно на $[0,1]$. Освен това е представен следният резултат за едновременна апроксимация: За всека $f \in C^s[0,1]$, $s \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} (B_n f)^{(s)}(x) = f^{(s)}(x) \quad \text{равномерно върху} \quad [0,1]. \tag{4}$$

Една от основните цели на дисертацията е количествената характеризация на скоростите на приближаване в (3) и (4) в духа на оценките (1)–(2) с тегла на Якоби. Получени са точни прави оценки и силни обратни оценки.

Глава 1 съдържа дефинициите и основните свойства на К-функционалите и модули на гладкост на $[0,1]$. Припомняме, че класическият K-функционал между пространствата $L_\infty[0,1]$ и $W_\infty^m[0,1]$ се дефинира чрез

$$K_m(f,t) := \inf_{g \in W_\infty^m[0,1]} \left\{ \|f - g\| + t\,\|g^{(m)}\| \right\}.$$

Класическият модул на гладкост се дефинира чрез

$$\omega_m(f,t) := \sup_{0\leq h\leq t} \|\Delta_h^m f\|_{L_\infty[0,1-mh]}, \quad t > 0,\ m \in \mathbb{N},$$

където $\Delta_h^m f$ е m-тата крайна разлика на $f \in C[0,1]$. Добре известният класически резултат на Джонен твърди, че $K_m(f,t^m) \sim \omega_m(f,t)$. В глава 1 д-р Драганов въвежда по-общи К-функционали и модули на гладкост върху $[0,1]$ с тегла на Якоби, които се използват по-късно в дисертацията.

В глава 2 д-р Драганов представя редица неравенства за влагане в духа на класическото неравенство на Ландау–Колмогоров:

$$\|f^{(j)}\|_J \leq c(\|f\|_J + \|f^{(m)}\|_J), \quad 0 \leq j \leq m,\ f \in W_\infty^m(J),$$

където J е интервал. Неравенствата за влагане, дадени в дисертацията, използват теглата на Якоби

$$\omega(x) := x^{\gamma_0}(1-x)^{\gamma_1}, \quad \gamma_0, \gamma_1 \geq 0, \tag{5}$$

и диференциални оператори като

$$Df(x) := \varphi(x)^2 f''(x) \quad \text{с} \quad \varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}. \tag{6}$$

Резултатите от глави 1 и 2 са спомагателни и служат като подготовка за резултатите в следващите глави.

Глава 3 е посветена на едновременната апроксимация на функции и техните производни чрез оператора на Бернщайн. В дисертацията д-р Драганов ясно описва съществуващите резултати по темата в литературата. Трябва да се отбележи, че малкото такива резултати са по-слаби и непълни в сравнение с резултатите на д-р Драгнев.

Една от основните теореми тук (Теорема 3.3) твърди, че ако $s \in \mathbb{N}$, $0 \le \gamma_0, \gamma_1 < s$, $f \in C[0,1]$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, тогава

$$\|w(B_n f - f)^{(s)}\| \le c\, K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

където

$$K_s^D(f,t)_w := \inf_{g \in C^{s+2}[0,1]} \left\{ \|w(f - g^{(s)})\| + t\|w(Dg)^{(s)}\| \right\}.$$

Показано е, че правата оценка от (7) е точна. Нещо повече, доказан е следният силен обратен резултат (Теорема 3.8): Нека $s \in \mathbb{N}$ и $0 \le \gamma_0, \gamma_1 < s$. Тогава съществува $R \in \mathbb{N}$, такова че за всяка $f \in C[0,1]$ с $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, и всички $k, n \in \mathbb{N}$ с $k \ge Rn$

$$K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w \le c\, \frac{k}{n} \big(\|w(B_n f - f)^{(s)}\| + \|w(B_k f - f)^{(s)}\| \big). \tag{8}$$

В частност,

$$K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w \le c \left(\|w(B_n f - f)^{(s)} \;| + \|w(B_{Rn} f - f)^{(s)}\| \right).$$

По-късно в Глава 4 е показано, че горният K-функционал $K_s^D(f,t)_w$ може да се характеризира в термините на следните по-прости K-функционали:

$$K_m(f,t)_w = \inf_{g \in AC_{loc}^{m-1}(0,1)} \left\{ \|w(f-g)\| + t\|wg^{(m)}\| \right\} \tag{9}$$

and

$$K_{m,\varphi}(f,t)_w = \inf_{g \in AC_{loc}^{m-1}(0,1)} \left\{ \|w(f-g)\| + t\|w\varphi^m g^{(m)}\| \right\}. \tag{10}$$

Използвайки и това, че $K_1(f,t)_w \sim \omega_1(f,t)_w$ и $K_{2,\varphi}(f,t^2)_w \sim \omega_\varphi^2(f,t)_w$ (модула на гладкостта на Дитциан-Тотик с тегло) д-р Драганов извежда следния пряк резултат (Теорема 3.5): Ако $f \in C[0,1]$ и $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$, $s \in \mathbb{N}$, тогава

$$
\begin{aligned}
&\|w(B_nf-f)^{(s)}\| \\
&\quad \le c \begin{cases} \omega_\varphi^2(f', n^{-1/2})_w + \omega_1(f', n^{-1})_w, & s=1,\ 0 \le \gamma_0, \gamma_1 < 1, \\[2mm] \omega_\varphi^2(f^{(s)}, n^{-1/2}) + \omega_1(f^{(s)}, n^{-1}) + \dfrac{1}{n}\,\|f^{(s)}\|, & s \ge 2,\ \gamma_0 = \gamma_1 = 0, \\[2mm] \omega_\varphi^2(f^{(s)}, n^{-1/2})_w + \dfrac{1}{n}\,\|wf^{(s)}\|, & s \ge 2,\ 0 < \gamma_0, \gamma_1 < s. \end{cases}
\end{aligned}
$$

За доказателството на пряката оценка (7) д-р Драганов прилага стандартен метод, използван например в монографията на Дитциан и Тотик „Модули на гладкост“. За доказателство на обратната оценка (8) той използва общата схема, разработена от Дитциан и Иванов. Доказателствата за горните резултати в дисертацията са нетривиални и технически сложни. За доказването на тези резултати д-р Драганов установява редица помощни резултати, които са интересни сами по себе си. Например, за да докаже пряката оценка (7) д-р Драганов установява следните важни оценки (вижте Предложение 3.14 и Следствие 3.18): За всяка $f \in C[0,1]$ такава, че $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$

$$\|w(B_nf)^{(s)}\| \le c\|wf^{(s)}\|,$$

и за всяка $f \in AC^{s+1}[0,1]$ такава, че $w\varphi^2 f^{(s+2)} \in L_\infty[0,1]$

$$\|w(B_nf-f)^{(s)}\| \le \frac{c}{n}\|w(Df)^{(s)}\|.$$

За доказателството на обратната оценка (8) д-р Драганов установява следните интересни неравенства от типа на Бернщайн (вижте Следствие 3.24 и Следствие 3.25): За всека $f \in C[0,1]$ такава, че $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$

$$\|w(DB_nf)^{(s)}\| \le cn\|wf^{(s)}\|,$$

и за всяка $f \in C[0,1]$ такава, че $w\varphi^2 f^{(s+2)} \in L_\infty[0,1]$

$$\|w(D^2B_nf)^{(s)}\| \le cn\|w(Df)^{(s)}\|.$$

Освен това в следния по-ограничен случай д-р Драганов успява да усили обратната оценка (8) (Теорема 3.26): Нека $1 \le s \le 6$ и $\gamma_0, \gamma_1 \in [0, s/2]$. Тогава съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, така че за всяка $f \in C[0,1]$ с $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$

$$K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w \le c\,\|w(B_n f - f)^{(s)}\|, \quad n \ge n_0.$$

Тази оценка заедно с (7) влече, че при горните допускания

$$\|w(B_n f - f)^{(s)}\| \sim K_s^D(f^{(s)}, n^{-1})_w.$$

Накрая в глава 3 д-р Драганов разглежда едновременното приближаване на функции и техните производни с оператора на Канторович, дефиниран чрез

$$K_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (n+1) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)\,,dt\, p_{n,k}(x),\ p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Използвайки връзката между операторите на Канторович и Бернщайн, той получава прави и обратни оценки, подобни на оценки (7) и (8) за едновременната апроксимация чрез оператора на Канторович.

От горното става ясно, че д-р Драганов е получил интересни резултати за едновременна апроксимация на функции и техните производни чрез оператора на Бернщайн. Наи-важното свойство на резултатите на д-р Драганов е, че те използват правилните характеристики: K-функционали и модулите на гладкост на Дитциан и Тотик които отчитат подобрението на апроксимацията близко до краищата на интервала. В допълнение към това д-р Драганов проучва едновременна апроксимация в по-общата постановка с тегла на Якоби. В същото време всички съществуващи резултати (с изключение на един) са в термините на класическите модили на гладкост с фиксирана стъпка. С резултатите си в глава 3 д-р Драганов практически изчерпва темата „едновременно приближаване на функции и техните производни чрез оператора на Бернщайн".

Глава 4 на дисертацията се концентрира върху едновременната апроксимация на функции и техните производни с тегла чрез итерирани булеви суми на операторите на Бернщайн $\mathcal{B}_{r,n}$, дефинирани чрез

$$\mathcal{B}_{r,n} := I - (I - B_n)^r,$$

където I е идентитета. Скоростта на $\|\mathcal{B}_{r,n}f - f\|$ е достатъчно добре характеризирана в литературата.

Д-р Драганов се фокусира върху едновременното приближение чрез операторите $\mathcal{B}_{r,n}$ върху $[0,1]$ с тегла на Якоби. В дисертацията е установена следната права оценка (Теорема 4.3): Нека $r, s \in \mathbb{N}$ и $0 \le \gamma_0, \gamma_1 < s$. Тогава за всяка $f \in C[0,1]$ такава, че $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$

$$\|w(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| \le c\, K^D_{r,s}(f^{(s)}, n^{-r})_w, \tag{11}$$

където K-функционалът $K^D_{r,s}(f,t)_w$ се дефинира чрез

$$K^D_{r,s}(f,t)_w := \inf_{g \in C^{2r+s}[0,1]} \left\{ \|w(f - g^{(s)})\| + t\|w(D^r g)^{(s)}\| \right\}.$$

Също така е установеnа съответна обратна оценка (Теорема 4.10): Нека $r, s \in \mathbb{N}$ и $0 \le \gamma_0, \gamma_1 < s$. Тогава съществува $R \in \mathbb{N}$, такова че за всяка $f \in C[0,1]$ с $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$ и всички $k, n \in \mathbb{N}$ с $k \ge Rn$

$$K_{r,s}(f^{(s)}, n^{-r})_w \le c \left(\frac{k}{n}\right)^r \left(\|w(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| + \|w(\mathcal{B}_{r,k}f - f)^{(s)}\|\right). \tag{12}$$

В частност,

$$K_{r,s}(f^{(s)}, n^{-r})_w \le c \left(\|w(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| + \|w(\mathcal{B}_{r,Rn}f - f)^{(s)}\|\right).$$

Показано е (Теореми 4.4, 4.5), че K-функционалът $K^D_{r,s}(f,t)_w$ може да се характеризира в термините на по-простите K-функционали от (9)–(10). Освен това, използвайки, че $K_r(f,t^r)_w \sim \omega_r(f,t)_w$ и $K_{2r,\varphi}(f,t^{2r})_w \sim \omega^{2r}_\varphi(f,t)_w$ д-р Драганов извежда следните директни оценки в термините на модулите на гладкост (Теореми 4.7, 4.8): Ако $r, s \in \mathbb{N}$ и $0 < \gamma_0, \gamma_1 < s$, за всяка $f \in C[0,1]$ такава, че $wf^{(s)} \in L_\infty[0,1]$

$$\|w(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| \le c \begin{cases} \omega^{2r}_\varphi(f', n^{-1/2})_w + \omega_1(f', n^{-r})_w, & s = 1, \\ \omega^{2r}_\varphi(f^{(s)}, n^{-1/2})_w + \dfrac{1}{n^r}\|wf^{(s)}\|, & s \ge 2, \end{cases}$$

и за всяка $f \in C^s[0,1]$

$$\|(\mathcal{B}_{r,n}f - f)^{(s)}\| \le c \begin{cases} \omega^{2r}_\varphi(f', n^{-1/2}) + \omega_r(f', n^{-1}) + \omega_1(f', n^{-r}), & s = 1, \\ \omega^{2r}_\varphi(f^{(s)}, n^{-1/2}) + \omega_r(f^{(s)}, n^{-1}) + \dfrac{1}{n^r}\|f^{(s)}\|, & s \ge 2. \end{cases}$$

В допълнение, д-р Драганов установява права оценка чрез оператора D (Теорема 4.9): При дадени $r,s\in\mathbb{N}$ за всяка $f\in C^{2s}[0,1]$

$$\|D^s(\mathcal{B}_{r,n}f-f)\|\le c\,\widehat{K}_{r,s}(D^sf,n^{-r}),$$

където

$$\widehat{K}_{r,s}(F,t)=\inf_{g\in C^{2(r+s)}[0,1]}\{\|F-D^sg\|+t\|D^{r+s}g\|\}.$$

Накрая в глава 4 д-р Драганов остановява права оценка за едновременна апроксимация чрез итерирани булеви суми на оператора на Канторивич като следствие от съответната оценка за апроксимация чрез $\mathcal{B}_{r,n}$.

Основният принос на д-р Драганов в тази глава е към *едновременната апроксимация* чрез операторите $\mathcal{B}_{r,n}$ върху $[0,1]$ с тегла на Якоби. За да докаже горните оценки д-р Драганов прилага метода на доказване на резултатите за едновременна апроксимация с оператора на Бернщаин B_n. За да постигне това, той доказва редица междинни оценки; повечето от тях са интересни сами по себе си. Доказателствата са нетривиални и изискват много работа, изобретателност и постоянство.

В глава 5 д-р Драганов се фокусира върху едновременното приближение с полиноми на Бернщайн с цели коефициенти. Проблемът (поставен от С.Н. Бернщаин) е да се определи до каква степен скоростта на приближаване с алгебрични полиноми в равномерна норма върху $[0,1]$ се влияе от изискването коефициентите на апроксимиращите алгебрични полиноми да са са цели числа. За да реши този проблем, Л.В. Канторович въвежда оператора

$$\widetilde{B}_n(f)(x):=\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right]x^k(1-x)^{n-k},$$

където $[\alpha]$ означава най-голямото цяло число $\le\alpha$. Канторович показа, че ако $f\in C[0,1]$ е такава, че $f(0),f(1)\in\mathbb{Z}$, тогава

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{B}_n(f)-f\|=0.$$

Д-р Драганов въвежда друга целочислена модификация на полиномите на Бернщайн, дефинирана чрез

$$\widehat{B}_n(f)(x):=\sum_{k=0}^{n}\left\langle f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right\rangle x^k(1-x)^{n-k},$$

където $\langle \alpha \rangle$ означава най-близкото цяло число до α.

Забележете, че операторът $\widetilde{B}_n$ не е ограничен, докато $\widehat{B}_n$ е ограничен, но не е непрекъснат. Двата оператора $\widetilde{B}_n$ и $\widehat{B}_n$ са нелинейни.

В тази глава д-р Драганов се концентрира върху едновременната апроксимация с операторите $\widetilde{B}_n$ и $\widehat{B}_n$. Той доказва прави оценки на $\|(\widetilde{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\|$ и $\|(\widehat{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\|$ в термините на модула на гладкост на Дитциан-Тотик $\omega_\varphi^2(\cdot,\cdot)$ при подходящи гранични условия за f както и слаби обратни оценки. Като следствие той извежда следните характеризации (Следствия 5.6, 5.7): При предположенията на Теорема 5.1 при $0 < \alpha < 1$

$$\|(\widetilde{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| = O(n^{-\alpha}) \iff \omega_\varphi^2(f^{(s)}, h) = O(h^{2\alpha}) \quad \text{and} \quad \omega_1(f^{(s)}, h) = O(h^\alpha),$$

и при предположенията на Теорема 5.4 за $0 < \alpha < 1$

$$\|(\widehat{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| = O(n^{-\alpha}) \iff \omega_\varphi^2(f^{(s)}, h) = O(h^{2\alpha}) \quad \text{and} \quad \omega_1(f^{(s)}, h) = O(h^\alpha).$$

Получен е и резултат за насищане (Теорема 5.14): Нека $f \in C^s[0,1]$, $s \in \mathbb{N}_0$, е такова, че $f(0), f(1) \in \mathbb{Z}$. Ако

$$\|(\widetilde{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| = o(1/n) \quad \text{или} \quad \|(\widehat{B}_n(f))^{(s)} - f^{(s)}\| = o(1/n),$$

тогава $f(x) = px + q$ за някои $p, q \in \mathbb{Z}$ и следователно $\widetilde{B}_n(f) = \widehat{B}_n(f) = f$ за всички n.

Резултатите от глава 5 са също нетривиални и получаването им изисква задълбочен анализ и много работа. Идеята за въвеждане и изучаване на оператора $\widehat{B}_n$ е нова. Въпреки че не са в основата на дисертацията, резултатите от тази глава са хубаво допълнение към нея като цяло.

В глава 6 д-р Драганов си поставя за задача да изследва скоростта на приближение в теоремата на Вороновская (3) за оператора на Бернщайн. Следните два диференциални оператора играят важна роля тук

$$D_n f(x) := n(B_n f(x) - f(x)) \quad \text{и} \quad \mathcal{D} f(x) := \frac{\varphi^2(x)}{2} f''(x).$$

Основният резултат в тази глава използва K-функционала

$$\widetilde{K}(F,t) := \inf_{g \in W^4_\infty(\varphi)[0,1]} \left\{ \|F - \mathcal{D}g\| + t \left(\|\varphi^2 g^{(3)}\| + \|\varphi^4 g^{(4)}\| \right) \right\}.$$

Основната тук Теорема 6.1 гласи: Ако $f \in C[0,1]$ и $\varphi^2 f'' \in L_\infty[0,1]$, тогава

$$\|D_n f - \mathcal{D} f\| \le c\, \widetilde{K}(\mathcal{D} f, n^{-1}) \le c \left(K_{2,\varphi}(f'', n^{-1})_{\varphi^2} + \frac{1}{n} \|\varphi^2 f''\| \right).$$

Обратно, ако $f \in C[0,1]$ и $\varphi^2 f'' \in L_\infty[0,1]$, тогава за всички $k, n \in \mathbb{N}$

$$K_{2,\varphi}(f'', n^{-1})_{\varphi^2} \le 2\, \|D_k f - \mathcal{D} f\| + c\frac{k}{n}\, K_{2,\varphi}(f'', k^{-1})_{\varphi^2} + \frac{c}{n}\, \|\varphi^2 f''\|.$$

Като следствие от горното д-р Драганов извежда следната характеризация: Ако $f \in C[0,1]$, $\varphi^2 f'' \in L_\infty[0,1]$ и $0 < \alpha < 1$, тогава

$$\|D_n f - \mathcal{D} f\| = O(n^{-\alpha}) \quad \Longleftrightarrow \quad K_{2,\varphi}(f'', t)_{\varphi^2} = O(t^\alpha).$$

За да докаже горните резултати, д-р Драганов доказва няколко нетривиални свойства на оператора на Вороновская и свързани с него оценки.

От написаното по-горе става ясно, че д-р Драганов е получил впечатляващи резултати върху едновременна апроксимация с оператора на Бернащайн и някои от неговите модификации. В дисертацията си той показва дълбоко разбиране на апроксимацията чрез линейни оператори, по-специално чрез оператора на Бернщайн, и отлично познаване на съществуващите резултати в литературата по темата. Във всяка глава от дисертацията д-р Драганов включва и обсъжда всички свързани съществуващи резултати в литературата. Макар и стандартни, доказателствата на неговите резултати са нетривиални, оригинални и технически сложни. В работите си д-р Драганов проявява значителна енергия, самостоятелност и изобретателност. Дисертацията е написана много добре, резултатите и техните доказателства са внимателно структурирани и представени достатъчно подробно, което прави дисертацияата лека за четене. Д-р Драганов е свършил много добра работа при обяснението на основните концепции и идеите на своите доказателства. Като цяло дисертацията на д-р Драганов има характер на цялостен трактат по едновременното приближаване на функции и техните производни чрез оператора на Бернщайн, и някои от неговите модификации, по-специално, булеви суми на операторите на Бернщайн и операторите на Бернщайн с цели коефициенти, което оставя малко място за по-нататъшно развитие.

4. Апробация на резултатите

Дисертацията на д-р Драганов се базира на девет негови статии, публикувани в добри списания: Journal of Approximation Theory, Results in Mathematics и Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica. Две негови статии са публикувани в сборници от конференции. Резултатите от дисертацията на д-р Драганов са цитирани в 15 публикации.

Научните трудове отговарят на минималните национални изисквания (по чл. 2б, ал. 2 и 3 от ЗИДСРБ*) и допълнителните изисквания на СУ „Св. Климент Охридски" за придобиване на научна степен "доктор на науките" в научната област и професионалната област на процедурата.

Резултатите, представени от д-р Драганов в дисертацията, не се припокриват с резултатите от неговата кандидатска дисертация.

Резултатите на д-р Драганов са оригинални и впечатляващи. Плагиатство е изключено. В дисертацията съществуващите резултати в литературата са представени и цитирани много внимателно и подробно.

5. Качества на автореферата

Авторефератът е добре написан и коректно представя резултатите и съдържанието на дисертационния труд. Той отговаря на всички изисквания за подготовка на автореферати.

6. Критични бележки и препоръки

Настоящият рецензент няма критични забележки към дисертацията на д-р Драганов. Очаква нови отлични резултати от д-р Драганов.

7. Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни и научноприложни приноси, **потвърждавам**, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ „Св. Климент Охридски" за придобиване от кандидата на научната степен „доктор на науките" в научната област Природни науки, математика и информатика и професионално направление Математика. В частност кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове. Въз основа на гореизложеното, **препоръчвам** на научното жури да присъди на д-р Борислав

Радков Драганов научна степен „доктор на науките“ в научна област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика (Математически анализ).

20.2.2024 Изготвил рецензията:

(проф. д.м.н Пенчо Петров Петрушев)