С Т А Н О В И Щ Е

по процедура за защита на дисертационен труд

на тема „Variational analysis without variational principles“

за придобиване на образователна и научна степен *„доктор“*

от Стоян Райчев Апостолов

в област на висше образование: ***4. Природни науки, математика и информатика,***
професионално направление: ***4.5. Математика,***
докторска програма: ***Математически анализ***
на Факултет по математика и информатика (ФМИ) на СУ „Св. Кл. Охридски“ (СУ)

Становището е изготвено от проф. дн Надя Пейчева Златева, член на научното жури по процедурата, съгласно Заповед № РД 38-309/01.07.2022 г. на Ректора на Софийския университет.

1. Обща характеристика на дисертационния труд

Представеният от Стоян Апостолов **дисертационен труд** е с обем от 72 страници и е написан на английски език. Състои от увод, предварителни сведения, три глави по същество (3-та, 4-та и 5-та), заключение и библиография от 61 заглавия. На стр. 65 са посочени три авторски публикации по дисертацията и един препринт.

Дисертацията съдържа оригинални резултати. Позоваването на вече известни резултати е изчерпателно и коректно. Съдържането е много добре представено. Дисертационният труд съдържа научни резултати, които са оригинален принос към научната област и които могат да бъдат продължени в бъдещи изследвания.

При работата върху дисертацията съзнателно е избягвано използването на вариационни принципи. Това донякъде е оправдано, защото демонстрира единен подход към темата и добро владеене на други техники за доказване на основните резултати.

2. Данни и лични впечатления за кандидата

Стоян Апостолов е възпитаник на ФМИ на СУ. Той завършва бакалавърска програма по приложна математика през 2017 г. и магистърска програма по оптимизация през 2019 г. Като студент печели сребърен медал от 22nd International Mathematics Competition, 27 July – 2 August, 2015, Blagoevgrad, Bulgaria. От юли 2019 до юни 2022 г. е редовен докторант в докторска програма „Математически анализ“ на ФМИ, СУ с научен ръководител проф. дн Надежда Рибарска.

Познавам Стоян Апостолов от студент и имам добри впечатления за него като колега с ясно разбиране и добър усет за математика. Познавам работата му от изнесени от него доклади на различни научни форуми, които показват и неговата способност да представя по адекватен начин получените нови резултати.

3. Съдържателен анализ на представения дисертационен труд и публикациите към него

Първа глава е уводна. В нея е направен обзор на известните към момента резултати и накратко са представени резултатите, получени в дисертацията. Обзорът показва много добро познаване на състоянието на областта. Предхождащите резултати на други автори са надлежно цитирани. Ясно са откроени приносите в дисертация и са посочени въведените от дисертанта понятия и получените от него резултати.

Централна тема в дисертацията е понятието трансверзалност. Класическото определение за трансверзалност в обща точка на две гладки многообразия в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ е сумата от допирателните пространства в общата точка да бъде цялото пространство. H. Sussmann в статия от 2006 г. обобщава дефиницията за трансверзалност за затворени изпъкнали конуси C^A и C^B – тангенциални към множества A и B в евклидово пространство – те са трансверзални конуси когато $C^A - C^B \equiv \mathbb{R}^n$ и са силно трансверзални ако освен това изпълняват и $C^A \cap C^B \neq \{0\}$. В крайномерния случай силната трансверзалност на тангенциалните конуси от един и същ тип, напр. на Кларк, е достатъчно условие за локална неотделимост на множества. Множествата A и B са локално отделими в точка $x \in A \cap B$ ако съществува околност U на x, такава че $U \cap A \cap B = \{x\}$. В безкрайномерния случай силната трансверзалност на допирателните конуси не винаги влече локална неотделимост на множествата. Посочен е Пример 1.0.1, илюстриращ това.

Съществуват различни свойства от тип транверзалност, в зависимост от различните възможни приложения. В литературата са разглеждани много понятия, обобщаващи класическата трансверзалност и трансверзалността на конуси. Централните сред тях са трансверзалност и субтрансверзалност, разглеждани и в монографията на A. D. Ioffe *Variational Analysis of Regular Mappings: Theory and Applications* (2017) и причината за това е тяхната връзка с метрическата регулярност и субрегулярност на многозначни изображения. Като понятие субтрансверзалността е въведена през 2015 г. в една работа на D. Drusvyatskiy, A. D. Ioffe, A. S. Lewis (във връзка с доказателството на линейна сходимост на алгоритъма на алтериращите проекции), въпреки че се появява под различни имена от повече от 20 г. Бивас, Кръстанов и Рибарска в своя публикация от 2020 г. въвеждат като понятие тангенциалната трансверзалност и изследват нейните свойства.

Във **втора глава** на дисертацията са дадени някои необходими дефиниции и предварителни сведения.

В § 3.1 на **Глава 3** е дадена характеризация на субтрансверзалността в пълно метрично пространство – Теорема 3.1.4 като техническият резултат, позволяващ преминаването от локално към глобално неравенство, се съдържа в Лема 3.1.3. Тук е доказана и характеризация на субтрансверзалността посредством наклона на т.нар. *сдвояваща функция*. В § 3.2 се разглежда свойството трансверзалност. Дадена е характеризация на трансверзалността в термините на т.нар. транслирана субтрансверзалност. Получени са и характеризации на трансверзалността, използващи наклона на сдвояващата функция.

Междинно понятие между субтрансверзалност и трансверзалност е понятието присъща трансверзалност, въведено от D. Drusvyatskiy, A. D. Ioffe, A. S. Lewis в спомената по-горе тяхна работа в крайномерно пространство. Те дават и характеризация на присъщата трансверзалност в крайномерно пространство в термините на наклона на сдвояващата функция. В § 3.3 се използва тази характеризация като дефиниция за присъща трансверзалност в метрични пространства – Дефиниция 3.3.2. В Дефиниция 3.3.3 е въведено свойството $(\mathcal{LT})$, за което в Следствие 3.3.4 е доказано, че е необходимо и достатъчно условие за присъща трансверзалност на две множества в тяхна обща точка. Това дава отговор на въпрос, поставен от A. D. Ioffe за намирането на метрична характеризация на присъщата трансверзалност.

В статия на N. Thao et al. от 2020 г. е направено обобщение на присъщата трансверзалност в хилбертови пространства, което се основава на структурата на пространството. Там е въведено и свойството $(\mathcal{P})$, за което пак там е доказано, че е еквивалентно на въпросното обобщение в хилбертови пространства. Основни резултати в § 3.3 са Теорема 3.3.9, в която е показано, че в нормирано пространство свойството $(\mathcal{P})$ в обща точка на затворени множества влече свойството $(\mathcal{LT})$ за тях в точката и Теорема 3.3.10, в която се показва, че в случая на хилбертово пространство е вярно и обратното, т.е. че свойството $(\mathcal{LT})$ влече свойството $(\mathcal{P})$ в общата точка. Доказателствата са много технични. Установяването на точната връзка между присъщата трансверзалност и тангенциалната трансверзалност позволява да се получат характеризации на трансверзалността и субтрансверзалността, близки по природа до тангенциалната трансверзалност. Те от своя страна са използвани за да се покаже, че

$$\text{трансверзалност} \Rightarrow \text{тангенциална трансверзалност} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{присъща трансверзалност} \Rightarrow \text{субтрансверзалност}$$

и че нито една от импликациите не е обратима. Този резултат дава нов поглед върху темата.

В § 3.4 е показано, че многозначно изображение между метрични пространства е метрически субрегулярно в точка от графиката си тогава и само тогава когато две подходящо подбрани множества, едното от които е графиката на изображението, са субтрансверзални в тази точка (Теорема 3.4.1), а ако пространствата са нормирани, е метрически регулярно в точка от графиката си тогава и само тогава, когато същите тези множества са трансверзални в нея (Следствие 3.4.2). В § 3.5 в Теорема 3.5.2 по нов начин е доказана характеризация на субрегулярност на многозначно изображение в точка от графиката, получена в работи на A. D. Ioffe и A. Y. Kruger. В § 3.6 в Теорема 3.6.1 е дадена характеризация от тип *скорост на спускане* на метрическа регулярност на многозначно изображение между пълни метрични пространства X и Y в точка от графиката му и са получени еквивалентни на нея характеризации в случая когато Y е банахово – с използване на вариацията от първи ред на изображението и на графичната производна (Следствие 3.6.2).

Основният резултат в **Глава 4** е изложен в § 4.3 и представлява достатъчно условие за тангенциална трансверзалност в абстрактна форма в две версии – по-лесна и по-интуитивна (Теорема 4.3.1) и по-обща (Теорема 4.3.2). Полезността на получените теоретични резултати е илюстрирана в § 4.4 с някои приложения сред които може да се отбележи това, че ако надграфиката на функция удовлетворява добре известното условие на J.-P. Aubin и ограниченията на задачата са от специален вид, съществуват множители на Лагранж за задачата – Теорема 4.4.9. Като следствия също така са получени и някои известни достатъчни условия за тангенциална трансверзалност на масивни в съвкупност множества.

В **Глава 5** се изследва непрекъснатостта на оптималната стойност на оптимизационна задача в метрично пространство в зависимост от параметрично изменение на допустимото множество, т.е. изследва се непрекъснатостта на функцията

$$S_{\text{val}}(p) := \inf\{g(y) : y \in D(p)\},$$

където D е многозначно изображение от метрично пространство X в метрично пространство Y, а $g : Y \to \mathbb{R}$ е функция. Подобни резултати намират широко приложение в математическата икономика и оптималното управление. В дисертацията се изследва взаимодействието между непрекъснатостта на g и D, което да гарантира непрекъснатост на функцията S_{val}. Формулирано е условие, зависещо едновременно от g и D и е показано, че то е достатъчно за непрекъснатост на S_{val}. Коментирано е и това как по-ранните резултати се вписват естествено в предложения подход.

В § 5.2 е даден контрапример 5.2.1, който илюстрира това, че хаусдорфовата непрекъснатост на D и g не е достатъчна, за да гарантира непрекъснатост на S_{val}. Въведено *предположение за отслабена равномерна непрекъснатост* на двойката (D, g) – Дефиниция 5.2.2, което двойката от контрапримера не удовлетворява. В Теорема 5.2.3 е доказано, че ако D е хаусдорфово непрекъснато в p, g е непрекъсната върху $D(p)$ и (D, g) е отслабено равномерно непрекъсната двойка, то S_{val} е непрекъсната в p. В § 5.3 са разгледани някои частни случаи.

Библиографията на дисертацията е изчерпателна и показва задълбочено познаване на областта. Заглавията в нея са подредени по азбучен ред по фамилия на първия автор.

4. Апробация на резултатите

В § 6.1 на **Заключението** в много добър стил са посочени експлицитно основните приноси на дисертацията. В § 6.2 са посочени три статии, в които са публикувани резултати от дисертацията:
1. S. Apostolov, M. Krastanov and N. Ribarska, Sufficient Condition for Tangential Transversality, Journal of Convex Analysis, 27, 2020, 19-30, WoS Mathematics Q3 (2020),
2. S. Apostolov, On continuity of optimal value map, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, Vol 74, 2021, No 4, 506-513, WoS Multidisciplinary sciences Q4 (2021),
3. S. Apostolov, M. Bivas, and N. Ribarska, Characterizations of Some Transversality-Type Properties, Set-Valued and Variational Analysis, 30, 2022, Issue 3, 1041-1060, WoS Mathematics applied Q2 (2021)
и един препринт.

Прави отлично впечатление и е много добър атестат за качествата на дисертанта това, че Стоян Апостолов има самостоятелна публикация. В поне равностойния му принос в останалите нямам основание да се съмнявам. Представеният дисертационен труд и свързаните с него публикации съдържат оригинални резултати и в тях няма никакво плагиатство.

5. Качества на автореферата

Авторефератът е на български език, с обем от 39 страници и 61 заглавия цитирана литература. В него а изчерпателно и коректно са отразени резултатите, описани в дисертацията. В авторската справка, част от автореферата, са посочени ясно приносите на дисертационния труд. За съжаление, номерацията на теореми, дефиниции и т.н. в автореферата не съвпада с номерацията им в дисертацията и това затруднява проследяването на съответствията.

6. Заключение

Дисертационният труд на Стоян Апостолов представлява оригинално изследване в областта на вариационния анализ. Получените резултати са нови, интересни и имат потенциал за бъдещо развитие.

Въз основа на направения по-горе анализ **потвърждавам**, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ за придобиване от кандидата на образователната и научна степен „доктор“ в професионално направление математика. В частност, кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, **убедено препоръчвам** на научното жури да присъди на **Стоян Райчев Апостолов** образователна и научна степен **„доктор“** в научна област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 **Математика (Математически анализ)**.

август 2022 г.

/проф. дн Надя Златева/