БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
Институт по Математика и Информатика (ИМИ)

Ул.”Акад. Г. Бончев”, бл. 8, 1113 София

Академик Петър Ст. Кендеров, асоцииран член на ИМИ

Тел.0887 499 044, ел.поща: vorednek@gmail.com

Рецензия

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:

„Вариационен анализ без вариационни принципи“

за придобиване на

образователна и научна степен „доктор“ от

кандидат: **Стоян Райчев Апостолов**

Област на висше образование: **4. Природни науки, математика и информатика**

Професионално направление**: 4.5. Математика**

Докторска програма: **„Математически анализ“,** катедра: **„Математически анализ“, Факултет по математика и информатика (ФМИ) на Софийски университет „Св. Климент Охридски“ (СУ)**

Рецензията е изготвена от: **дмн Петър Стоянов Кендеров, пенсионер**,

(академична длъжност, научна степен, име, презиме, фамилия - месторабота)

в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед № РД-38-309/01.07.2022 г. на Ректора на Софийския университет.

1. Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Дисертационият труд е написан на английски език и се състои от 72 страници. Структуриран е както следва: Увод, Предварителни бележки, три глави („За свойствата от тип трансверзалност“, „Достатъчни условия за тангенциална трансверзалност“, „Непрекъснатост на изображението *Оптимална стойност*“), Заключение и Библиография. Последната съдържа 62 заглавия.

Освен до дисертационния труд, получих достъп и до внушителен брой други документи (около 30 броя), съпровождащи провеждането на докторантурата и показващи забележителна изрядност в спазването на редица административни изисквания и мерки за предотвратяване на плагиатството. Това показва, че научният ръководител (професор Надежда Рибарска), Катедрата „Математически анализ“ и самият Факултет по математика и информатика са си свършили добре задълженията - изградили са стройна система за добро протичане на подготовката и работата на докторантите. Особено следва да се отбележи обстойната и качествена „вътрешна рецензия“ предоставена от Проф. Надя Златева, която представя подробно основните постижения на кандидата и отправя уместни критични бележки.

Данни и лични впечатления за кандидата

От оскъдната „Автобиография“, написана по образеца “Europass”, се вижда, че Стоян Апостолов е роден на 29.12.1992 г. в Панагюрище. Дипломата му за „Бакалавър по Приложна матемютика“ е издадена от ФМИ на 04.12.2017 г. Завършва магистратура по Приложна математика – оптимизация в същия факултет през 2019 г. След това е постъпил в докторантската програма. Докато е бил студент и докторант е бил използван в образователния процес във ФМИ като хоноруван аситент (по Линейна алгебра - от 2013 до 2016 г и по Диференциално и интегрално смятане – от 2016 до 2021 г). От справките, придружаващи дипломите за бакалавър и магистър, в които са вписани курсовете и оценките от издържаните изпити, се вижда, че са положени 55 изпита. Неотличните оценки са само 7.

Имам пряки впечатления от участието на г-н Апостолов в семинари и проекти, финансирани от националния научен фонд и от Софийския университет. Следя и публикациите му.

2. **Съдържателен анализ на научните и научно-приложните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата**

Осъзнаването на практическото значение на Принципа за максимума на Л.С. Понтрягин и намирането на различни негови доказателства доведе до възникаването на редица нови изследвания и появата на нови математически области. Един от примерите в това направление е Негладкия анализ, при който тангенциалната апроксимация на едно множество A в дадена негова точка x_0 не е цяло линейно подпространство, а конус C^A, който зависи от точката x_0. В много оптимизационни задачи, намирането на необходими условия за екстремум често почива на съображения за отделимост, поне локална, на две множества A и B с обща точка x_0. Локалната отделимост на две такива множества в точката x_0 тук се разбира като съществуване на отворена околност U на точката x_0 , за която $A \cap B \cap U = \{x_0\}$, т.е. в околност U на точката x_0 двете множества нямат друга обща част, освен точката x_0 . В значителен брой изследвания, особено в крайномерния случай, доказателството на необходимо условие за екстремум почива на интуитивно ясния факт, че ако две множества са локално отделими в дадена точка x_0, то тангенциалните им приближения C^A и C^B също „нямат голяма обща част“, т.е. в някакъв смисъл „не се пресичат“ . Формалният термин е „ не са строго трансверзални“ . Строгата трансверзалност означава, че множеството $C^A - C^B$ (разбирано като разлика по Минковски) е цялото пространство и че конусите C^A и C^B нямат друга обща точка освен нулевия елемент на пространството. Доколко това необходимо условие е „силно“ и може да се използва за добиване на съдържателна информация за оптималния обект в съответната практическа задача зависи от избора на дефиницията на тангенциалните конуси и от смисъла на понятието за строга трансверзалност. Това доведе до появата на едно поразително многообразие от дефиниции за тангенциални конуси (на Кларк , на Булиганд и на много други автори), както и до появата на различни трансверзалности. Дисертацията също следва тази тенденция, но ударението, освен в глава 5, е върху различните видове трансверзалност, при това в безкрайномерни пространства, където строгата трансверзалност на конусите C^A и C^B в посочения по-горе смисъл вече не влече след себе си локална неотделимост на множествата A и B. В тази посока са, според мен, най-съществените приноси на дисертанта. Той разглежда цяла палитра от *различни* трансвеалности: трансверзалност, тангенциална трансверзалност, присъща трансверзалност, субтрансверзалност, като всяка от тях влече следващата. Дисертантът правилно посочва (стр. 64 -65 от дисертационния труд) и други свои приноси като най-съществени. Част от тях споменавам накратко тук:

1. Намиране на достатъчно условие за тангенциална трансверзалност (Теорема 4.3.2.), както и установяването, че това условие включва като частни случаи други известни достатъчни условия за тангенциална трансверзалност.

2. Прилагането на това достатъчно условие за извличане на тангенциална трансверзалност на допустимото множество на минимизационна задача и епиграфиката на целевата функция (4.4.3., 4.4.6. и 4.4.8.) в три важни случая, като и в трите случая се извежда правило от типа „Множители на Лагранж“ (4.4.9.).

3. Дадена е подходяща дефиниция за присъща трансверзалност в случая на безкрайномерни пространства. Показано е (3.3.9. и 3.3.10.), че тази дефиниция е еквивалентна, в случая на хилбертови пространства на

дефиниция, въведена през 2020 г. в статия на Thao, N. H.; Bui, H. T.; Cuong, N.D.; Verhaegen, M. (труд 60 от библиографията в края на дисертацията).

4. Доказано е (3.4.1. и 3.4.2.), че трансверзалността и субтрансверзалността могат да се използват за характеризация на метрическата регулярност и субрегулярност.

Според мен, има още множество „незабележими“ приноси, които са части от доказателствата и разглежданията и показват забележителна изобретателност от страна на дисертанта. Дори само тази част на дисертацията напълно покрива изискванията за присъждане на образователната и научна степен „доктор“.

Последната (пета поред) глава на дисертацията съдържа разглеждания от съвсем различен тип. Става дума за серия от минимизационни задачи с една и съща целева функция $g(y)$, дефинирана в топологичното пространство Y , като допустимите множества $D(p)$ на отделните задачи лежат в Y и зависят от параметър p. Когато множеството X от параметрите е снабдено с топология, има смисъл въпросът:

При какви условия оптималната стойност $s(p) = inf\{g(y): y \in D(p)\}$ *е непрекъсната функция на параметъра* p*?*

Като мотивация за разглеждането на този въпрос дисертантът посочва отстраняването на неточност в твърдение, присъстващо в книга и формулирано в дисертацията като Теорема 1.0.4:

Assume that for some point $p°$ *of the topological space X,*

D is continuous at $p°$ *and* g *is continuous on D(*$p°$*). Then* s *is continuous*

at $p°$.

Тази формулировка допуска тълкуване, което прави твърдението очевидно неверно. Когато се каже „*g is continuous on D($p°$)“,* това обикновено се възприема като „непрекъснатост на рестрикцията на $g(y)$ върху множеството *D($p°$)“*. По-добре да се използва израз от вида : „ *g is continuous at the points of D($p°$)”*. Тъкмо това е имал предвид дисертантът, както личи от доказателствата на твърденията в тази глава, където се използва точно такава форма на непрекъснтост.

Всъщност, с разглежданията си в тази глава, дисертантът наистина отстранява възможна неточност, но в друго направление. Твърдението за непрекъснатост на $s(p)$ е вярно (и лесно за доказване), ако функцията

$g(y)$ е непрекъсната и многозначното изображение $D: X \;=> Y$ е компактно-значно и непрекъснато по отношение на топологията на Виеторис в пространството от затворените подмножества на Y. Когато Y е метрично пространство, непрекъснатостта на D може да се разглежда и по отношение на разстоянието на Хаусдорф, в който случай казваме, че имаме метрична непрекъснатост на D . Двата вида непрекъснатост съвпадат, ако образите $D(p)$ са компактни. Автоматичното прехвърляне на валидността на рзглежданото твърдение върху метрично непрекъснато изображение D с некомпактни образи е неправомерно, както показва конструираният от дисертанта пример 5.2.1. Нещата могат да се оправят (и това е добре известно), ако се поиска равномерна непрекъснатост на функцията $g(y)$. Много добър принос на дисертанта в тази глава от дисертацията е намирането на по-слабо от равномерната непрекъснатост условие - Дефиниция 5.2.2, което играе същата роля. Доказателствата стават значително по-трудни, но и резултатите са по-удовлетворителни.

1. Апробация на резултатите

Част от резултатите от дисертацията са публикушани в три списания с импакт фактор (Journal of Convex Analysis, Set-Valued and Variational Analysis, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences). Има и една статия подадена за печат.

Резултати от дисертацията са докладвани на три международни научни форуми (един в Чехия и два в България), както и на две пролетни научни сесии, организирани от Факултета по математика и информатика (през 2021 и 2022 г.). Статията, публикувана в Set-Valued and Variational Analysis през 2022 г.вече е реферирана в поне една от двете меродавни за математиката бази от данни - zbMATH (https://zbmath.org/?q=an%3A7563239). Същото се отнася и до статията, публикувана в Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences (https://zbmath.org/?q=an%3A1488.49037) .

Макар и публикувани неотдавна, вече има благоприятни отзиви за резултатите на Апостолов. Ето какво е написано в дисертацията на NGUYEN DUY CUONG, представена за защита в Австралийския федерален университет (https://www.researchgate.net/profile/Cuong-Nguyen-Duy-4/publication/353605783_Thesis-

_NguyenDuyCuong/links/6105c1581e95fe241a9e63b3/Thesis-NguyenDuyCuong.pdf):

Very recently, another important property called "tangential transversality" has come to life. The property is used to obtain necessary optimality conditions for optimization problems in terms of abstract Lagrange multipliers and to formulate intersection rules for tangent cones in Banach spaces. For more discussions about the property as well as connections with other transversality properties, we refer the reader to these recent papers [3, 4, 30, 31].

В споменатите под номера 3 и 4 трудове Апостолов е съавтор или автор.

Минималните национални изисквания по чл. 2б, ал. 2 и 3 от ЗРАС на РБ са надхвърлени многократно (по група Г повече от трикратно, а по общ сбор – повече от двукратно).

2. Качества на автореферата

Авторефератът отразява добре представените в дисертацията резултати и разглеждания. Намирам , че е твърде обемист - почти колкото половината дисертация.

3. Критични бележки и препоръки

Нямам други критични бележки, освен изложените по-горе. Препоръката ми към автора е да продължи да се занимава със същата тематика, която в момента е много актуална и е привлекла силни и продуктивни изследователи.

Има смисъл, освен непрекъснатостта на оптималната функция $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{p})$, да се изследва и непрекъснатостта на множеството от точки, където $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ достига минмума си върху $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})$. В тази бласт има много изследвания, но не е ясно дали и колко от тях ще са верни при по-слабите предположения за фукцията $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$, разглеждани в дисертацията.

4. Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни и научно-приложни приноси, **потвърждавам,** че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ „Св. Климент Охридски" за придобиване от кандидата на образователната и научна степен „доктор" в научната област **4. Природни науки, математика и информатика** и професионално направление **4.5. Математика**. В частност кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, **препоръчвам** на научното жури да присъди на Стоян Райчев Апостолов образователната и научна степен „доктор" в научна област **4. Природни науки, математика и информатика**, професионално направление . **4.5. Математика.**

01.10.2022 г. Изготвил рецензията:

дмн Петър Стоянов Кендеров

(академична длъжност, научна степен, име, фамилия)