Софийски Университет "св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Тороидални компактификации на дискретни фактори на комплексното двумерно кълбо

Автореферат
на дисертационния труд

на Панчо Георгиев Бешков

за придобиване на образователната и научна степен "Доктор"
професионално направление 4.5 Математика
докторска програма ”Алгебра, топология и приложения”

Научен ръководител: проф. д-р Азнив Каспарян

София
2022

Ограничена област $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^N$ е симетрична, ако за всяка точка $z \in \mathcal{D}$ съществува холоморфна инволюция $\sigma_z : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ с единствена фиксирана точка z. Всяка ограничена симетрична област $\mathcal{D} = G/K$ е хомогенно пространство на редуктивна група на Ли G. Ограничена симетрична област $\mathcal{D}$ е неприводима, ако не може да се представи като директно произведение на ограничени симетрични области с по-малка размерност. Комплексното 2-мерно кълбо $\mathbb{B} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ е единствената неприводима ограничена симетрична област с комплексна размерност 2. Благодарение на хомогенността си относно действието на унитарната група

$$U(1,2) = \left\{g \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) \,|\, \mathcal{H}_{1,2}(gz, gz') = \mathcal{H}_{1,2}(z, z'),\, \forall z, z' \in \mathbb{B}\right\}$$

на ермитова форма $\mathcal{H}_{1,2} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ със сигнатура $(1,2)$, кълбото $\mathbb{B}$ има много фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ по дискретни подгрупи $\Gamma < U(1,2)$. Най-интересни са факторите $\mathbb{B}/\Gamma$ с краен $U(1,2)$-инвариантен обем, чиито съответни групи Γ се наричат решетки на $U(1,2)$. Решетка $\Gamma < U(1,2)$ е аритметична, ако съществува числово поле $\mathbb{Q} \subseteq k \subset \mathbb{C}$ с пръстен от цели числа $\mathcal{O}_k$, така че $\Gamma \cap \mathrm{GL}(3,\mathcal{O}_k)$ е с краен индекс в Γ и в $\mathrm{GL}(3,\mathcal{O}_k)$.

Реалният ранг на ограничена симетрична област $\mathcal{D} = G/K$ е максималната размерност на абелева подгрупа $A < G < \mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$, чиито елементи се диагонализират едновременно над $\mathbb{R}$. Маргулис доказва в [34], че всички решетки Γ в групата G от холоморфни изометрии на неприводима ограничена симетрична пбласт $\mathcal{D} = G/K$ с реален ранг ≥ 2 са аритметични. Комплексното 2-мерно кълбо е неприводима ограничена симетрична област с реален ранг 1 и неговата група от холоморфни изометрии $U(1,2)$ има неаритметични решетки. Първите примери за неаритметични решетки $\Gamma < U(1,2)$ се появяват в статията на Мостов [38] от 1980г. По-нататъшни конструкции се дължат на статиите [9], [10] на Делин-Мостов, статиите [11], [12] на Деро, статиите [13], [14] на Деро, Паркър и Пупе и т.н. Миналата година, Балди и Улмо доказват в [4], че ако фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$ съдържа безбройно много максимални комплексни напълно геодезични подмногообразия, то Γ е аритметична решетка. Нашият подход за изучаване на некомпактните фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ на кълбото с гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ се прилага едновременно към аритметични и неаритметични решетки $\Gamma < U(1,2)$.

Гладките компактни фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$ се характеризират топологично чрез равенство на техните числа на Черн. Да напомним, че за произволна комплексна проективна повърхнина $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, числото на Чърн $c_2(X) \in \mathbb{Z}$ е Ойлеровата характеристика на X, а $c_1^2(X) = K_X^2 \in \mathbb{Z}$ е индексът на самопресичане на каноничния дивизор K_X на X. Статията [48] на Ван де Вен от 1966г. доказва, че минималните комплексни проективни повърхнини от общ тип удовлетворяват неравенството $c_1^2(X) \leq 8c_2(X)$. По-късно, в [5] Богомолов подобрява тази оценка с $c_1^2(X) \leq 4c_2(X)$. Като следствие от съществуването на решение на уравнението на Монж-Ампер, статията на Яо [49] установява, че гладка минимална повърхнина $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ от общ тип е фактор на кълбото $X = \mathbb{B}/\Gamma$ тогава и само тогава, когато $c_1^2(X) = 3c_2(X)$. Същият резултат е доказан независимо от Мияока в [35]. Много автори наричат $c_1^2(X) = 3c_2(X)$ равенство на Богомолов-Мияока-Яо.

Чрез алгебрична теория на числата, Прасад и Юнг установяват съществуването на краен брой аритметични решетки $\Gamma < SU(1,2)$ с гладък компактен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$.

Те доказват, че всяка такава решетка Γ отговаря на напълно реално числово поле k, проста алгебрична група $G(k)$ над k, чисто имагинерно квадратично разширение $l \supset k$ и алгебра с деление $\mathcal{D}$ с център l. Съществува единствен клас от дискретни нормирания ν_o на k, така че групата $G(k_{\nu_o}) \simeq SU(1,2)$ над попълнението $k_{\nu_o} \simeq \mathbb{R}$ е некомпактна. За всеки друг неархимедов клас от дискретни нормирания $\nu \neq \nu_o$ на k, групата $G(k_\nu) \simeq SU(3)$ е компактна. След класификация на k, l и $\mathcal{D}$, Прасад и Юнг описват аритметичните решетки $\Gamma < SU(1,2)$ с гладък компактен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$. Използвайки компютърни имплементации, Картрайт и Стигър намират в [8] представяния на всички аритметични решетки $\Gamma < SU(1,2)$ с гладки компактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$.

Преобладаваща част от решетките $\Gamma < U(1,2)$ имат некомпактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$. Възниква необходимостта от построяване на компактификации на такива $\mathbb{B}/\Gamma$. Гранична точка $z \in \partial\mathbb{B} = \left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}$ е Γ-рационална, ако решетката $\Gamma < U(1,2)$ пресича стабилизатора $\mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z)$ в решетка $\Gamma \cap \mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z)$ на $\mathrm{Stab}_{U(1,2)}(z)$. Множеството $\partial_\Gamma \mathbb{B}$ на Γ-рационалните гранични точки на $\mathbb{B}$ има действие на Γ с краен брой орбити, които се наричат Γ-параболични точки. От резултатите на Бейли и Борел от [3] следва, че присъединяването на Γ-параболичните точки $\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma$ към $\mathbb{B}/\Gamma$ води до комплексно проективно многообразие

$$\widehat{\mathbb{B}/\Gamma} = (\mathbb{B}/\Gamma) \coprod (\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma) .$$

Дори когато факторът $\mathbb{B}/\Gamma$ е гладък, компактификацията на Бейли-Борел $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma}$ има особености в Γ-параболичните точки $\partial_\Gamma \mathbb{B}/\Gamma$. Разрешението на параболичните особености на $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma}$ дава тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на $\mathbb{B}/\Gamma$. За произволна ограничена симетрична област $\mathcal{D} = G/K$ и произволна решетка $\Gamma < G$ от холоморфни изометрии на $\mathcal{D}$ с некомпактен фактор $\mathcal{D}/\Gamma$, тороидалните компактификации на $\mathcal{D}/\Gamma$ са построени от Аш, Мъмфорд, Рапопорт и Таи в [1].

В [39] Мъмфорд обобщава равенството на Богомолов-Мияока-Яо $c_1^2(\mathbb{B}/\Gamma) = 3c_2(\mathbb{B}/\Gamma)$ за гладки компактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ на кълбото и извежда негов аналог за гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$. Нека $D := (\mathbb{B}/\Gamma)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, $\overline{c_2}(X, D) := e(X \setminus D) = e\,(\mathbb{B}/\Gamma)$ е Ойлеровата характеристика на $\mathbb{B}/\Gamma$, а $\overline{c_1}^2(X, D) := (K_X + D)^2$ е индексът на самопресичане на логаритмично-каноничния дивизор $K_X + D$ на (X, D). Мъмфорд доказва, че ако (X, D) е от логаритмично общ тип, т.е., ако достатъчно висока тензорна степен на линейното разслоение, отговарящо на $K_X + D$ задава проективен морфизъм на X върху повърхнина, то $\overline{c_1}^2(X, D) \leq 3\overline{c_2}(X, D)$ с равенство $\overline{c_1}^2(X, D) = 3\overline{c_2}(X, D)$ тогава и само тогава, когато $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор D. Отсега нататък ще казваме, че $\overline{c_1}^2(X, D), \overline{c_2}(X, D)$ са логаритмичните числа на Чърн на (X, D), а $\overline{c_1}^2(X, D) = 3\overline{c_2}(X, D)$ е логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо.

Дисертационният труд изучава гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на некомпактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$. По-точно, той се концентрира върху крайните неразклонени покрития

$$f : (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \longrightarrow (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$$

на гладки тороидални компактификации, които се ограничават до крайни неразклонени покрития $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ на съответните фактори на кълбото и върху някои числови инварианти на гладките тороидални компактификации $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, които са бирационални на линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B. Гореспоменатите оригинални резултати на дисертацията съставят трета и четвърта глави. Нека $L_1 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ е гладка неприводима рационална крива върху повърхнина X, чието свиване не поражда особеност. Тогава индексът на самопресичане на L_1 е $L_1^2 = -1$ и L_1 се нарича накратко (-1)-крива върху X. Произволно неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1$ от степен $d \in \mathbb{N}$ на гладки повърхнини се ограничава до неразклонено покритие $f : L'' \to L'$ от степен d на обединението L' на рационалните (-1)-криви върху X_1 чрез обединението L'' на гладките рационални (-1)-криви върху X_2. Нека $D^{(j)} := (\mathbb{B}/\Gamma_j)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_j)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma_j$, а $\rho_j : (\mathbb{B}/\Gamma_j)' \to Y_j$ е крайна редица от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_j. Дисертацията построява взаимно еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития $f : (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ на гладки тороидални компактификации, които се ограничават до крайни неразклонение покрития $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ от същата степен и крайните неразклонени покрития $\varphi : Y_2 \to Y_1$ на съответните минимални модели, които се ограничават до крайни неразклонени покрития $\varphi : \rho_2\left(D^{(2)}\right) \to \rho_1\left(D^{(1)}\right)$ от същата степен. Гореспоменатите крайни неразклонени покрития задават частична наредба $\succeq$ в множеството Σ на гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$. Минималните елементи $(\mathbb{B}/\Gamma_o)' \in \Sigma$ относно $\succeq$ се наричат примитивни, а максималните $(\mathbb{B}/\Gamma_1)' \in \Sigma$ наричаме наситени. Глава 3 на дисертацията установява, че всяко $(\mathbb{B}/\Gamma)' \in \Sigma$ доминира някакъв примитивен елемент $(\mathbb{B}/\Gamma_0)' \in \Sigma$. Необходимо и достатъчно условие за съществуването на наситен елемент $(\mathbb{B}/\Gamma_1)' \in \Sigma$ с $(\mathbb{B}/\Gamma_1)' \succ (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е крайността на фундаменталната група $\pi_1(Y)$ на минимален модел Y на $(\mathbb{B}/\Gamma)'$. Третата глава характеризира наситените и примитивните $(\mathbb{B}/\Gamma)' \in \Sigma$ с неположителна размерност на Кодаира $\kappa(\mathbb{B}/\Gamma)' \in \{-\infty, 0\}$. Ако $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ свива непресичащи се гладки рационални (-1)-криви и $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на X, доказваме че относителната група от бихоломорфизми $\mathrm{Aut}(X, D)$ е крайна и изоморфна на $\mathrm{Aut}(Y, \beta(D))$.

Освен покритията на гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$, дисертационнният труд дискутира броя на параболичните точки и броя на ненапълно геодезичните пунктирани сфери $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ за гладки $(\mathbb{B}/\Gamma)'$, чийто минимален модел Y има разслоение $r : Y \to B$ чрез рационални прави над елиптична крива B. Основно средство за изучаване на гореспоменатите числови инварианти е логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо на двойка (X, D), съставена от гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ и нейния тороидален компактифициращ дивизор

$$D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$$

с гладки елиптични неприводими компоненти D_j. Ако $\beta : X \to Y$ е свиването на неприводимите гладки рационални (-1)-криви $L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$, $1 \leq i \leq s$ върху $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B, доказваме, че $C_j := \beta(D_j)$ са гладки елиптични криви, върху които разслоението $r : Y \to B$ се ограничава до крайни неразклонени покрития $r|_{C_j} : C_j \to B$ от степен $d_j \in \mathbb{N}$. Ако $d_j = 1$ за всички $1 \leq j \leq k$ и всички C_j са сечения на $r : Y \to B$, то логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) се изразява чрез индексите на пресичане $L_i.D$ за $1 \leq i \leq s$. Ако съществува поне едно $d_j > 1$, то логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) е изразено чрез $L_i.D$ за $1 \leq i \leq s$ и чрез индексите на самопресичане C_j^2 за $1 \leq j \leq k$. Това позволява извеждането на неравенство върху $L_i.D$ за $1 \leq i \leq s$. И в двата случая се установява наличието на пунктирана сфера $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, която не е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$. Като друго следствие от логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо са изведени долни граници върху броя k на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma$, в зависимост от съществуването или, съответно, несъществуването на $d_j > 1$. За сравнително малки k са намерени долни граници $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$ в съответните случаи.

Да разгледаме накратко някои работи на други автори, които са свързани с оригиналните резултати на дисертацията. Покритията на фактори на $\mathbb{B}$ по решетки $\Gamma < U(1, 2)$ са изучавани от Улудаг, Стоъвър, Ди Червo и Стоувър и т.н. Улудаг построява безкрайна редица от разклонени покрития на особени фактори на кълбото, които са бирационални на проективната равнина $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. В [45] Стоувър показва, че съществуват точно два особени некомпактни фактора на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma_1$, $\mathbb{B}/\Gamma_2$ с минимален инвариантен обем и произволен гладък некомпактен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ с минимален обем или, еквивалентно, с минимална Ойлерова характеристика 1, е покритие на $\mathbb{B}/\Gamma_1$ или на $\mathbb{B}/\Gamma_2$ от степен 72. Статията [18] на Ди Червo и Стоувър установява, че съществуват пет фактора на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma_j$, $1 \leq j \leq 5$ с гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma_j)'$ и Ойлерова характеристика $e(\mathbb{B}/\Gamma_j) = 1$. Един от тях, $\mathbb{B}/\Gamma_1 = \mathbb{B}/\Gamma_{\text{Hir}}$ е примерът на Хирцебрух от [25] с абелев минимален модел A_{Hir}. Останалите - $\mathbb{B}/\Gamma_2, \ldots, \mathbb{B}/\Gamma_5$ са бирационални на би-елиптични повърхнини. В [16] Ди Червo и Стоувър доказват, че произволно покритие на Галоа $\zeta_G : A \to A_{\text{Hir}} = A/G$ с крайна група на Галоа G без фиксирани точки, отговаря на неразклонено G-Галоа покритие

$$\zeta'_G : \mathbb{B}/\Gamma_G \longrightarrow \mathbb{B}/\Gamma_{\text{Hir}} = (\mathbb{B}/\Gamma_G)/G$$

на фактори на кълбото. Разглежданията от Глава 3 обобщават гореспоменатия резултат. Като приложение на съответствието между неразклонените крайни покрития на Галоа на A_{Hir} и неразклонените крайни покрития на Галоа на $\mathbb{B}/\Gamma_{\text{Hir}}$, [16] доказва, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществуват не бихоломорфни фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma_1, \ldots, \mathbb{B}/\Gamma_n$ с една и съща тороидална компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma_1)' = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' = \ldots = (\mathbb{B}/\Gamma_n)'$. В [17] Ди Червo и Стоувър построяват редица $(\mathbb{B}/\Gamma_n)'$ от гладки тороидални компактификации с Ойлерови характеристики $e(\mathbb{B}/\Gamma_n) = n$ и би-елиптични минимални модели. Крайни неразклонени покрития на примера на Хирцебрух $(\mathbb{B}/\Gamma_{\text{Hir}})'$ са използвани в статията [46] на Стоувър за конструкция на безкрайни редици $(\mathbb{B}/\Gamma_{n,1})'$, $(\mathbb{B}/\Gamma_{n,2})'$ от гладки тороидални компактификации. Ойлеровите характеристики $e(\mathbb{B}/\Gamma_{n,1})$ и броевете $\nu(\mathbb{B}/\Gamma_{n,1})$ на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma_{n,1}$ клонят към ∞ за $n \to \infty$. Втората редица $\mathbb{B}/\Gamma_{n,2}$ има $\lim\limits_{n \to \infty} e(\mathbb{B}/\Gamma_{n,2}) = \infty$ и ограничени $\nu(\mathbb{B}/\Gamma_{n,2})$. Използвайки примерите за неаритметични решетки от статията [9] на Делин-Мостов, Стоувър построява редица $\mathbb{B}/\Gamma_{n,3}$ с линеен растеж на $e(\mathbb{B}/\Gamma_{n,3})$ и $\nu(\mathbb{B}/\Gamma_{n,3})$ относно n.

Известно е, че всички гладки компактни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ са от общ тип. Статията [25] на Хирцебрух и публикациите [28], [29] на Холцапфел предоставят примери на гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ с абелев минимален модел. Работата [37] на Момот конструира гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ с размерност на Кодаира $\kappa(\mathbb{B}/\Gamma)' = 1$. Статията [17] на Ди Чербо и Стоувър установява съществуването на гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ с би-елиптичен минимален модел. Преобладаваща част от гладките тороидални компактификации са от общ тип. В [29] Холцапфел доказва, че произволна гладка тороидална компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma_0)'$ с абелев минимален модел има гладко крайно разклонено покритие $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ от общ тип. Съществуването на гладки тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ с размерност на Кодаира $\kappa(\mathbb{B}/\Gamma)' = -\infty$ е отворен проблем. Нетороидални рационални компактификации на фактори на кълбото се изучават от Холцапфел, Пинейро и Владов в [27] и от Улудаг в [47]. Част от тези компактификации имат изолирани циклични особености. Статията [30] на Каспарян и Коцев дава пример за компактификация на фактор на кълбото с изолирани циклични особености, която е бирационална на минимална линейчата повърхнина с елиптична база. Глава 4 от дисертацията установява някои числови ограничения върху гладките тороидални компактификации $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, чийто минимален модел Y е линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B. Това поставя под въпрос съществуването на такива $\mathbb{B}/\Gamma$.

Факторите на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$ и техните компактификации обобщават естествено Римановите повърхнини от род ≥ 2, които са гладки компактни фактори на единичния диск $\Delta = \{t \in \mathbb{C} \,|\, |t| < 1\}$. Друга мотивация за изучаване на $\mathbb{B}/\Gamma$ е наличието на пространства от модули на комплексни проективни многообразия, които са фактори на кълбото. Нека N е комплексно многообразие. Фиксирайки структурата на реално аналитично многообразие върху N и променяйки комплексната структура върху N, получаваме фамилия $\pi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ над комплексно аналитично пространство $\mathfrak{M}$, параметризираща класовете на изоморфизъм на комплексните структури върху N. При някои допълнителни технически ограничения, $\mathfrak{M}$ се нарича пространство от модули на N. Нека

$$V := \{a = (a_1, \dots, a_4) \in \mathbb{C}^4 \,|\, a_1 + \dots + a_4 = 0\} \simeq \mathbb{C}^3$$

и

$$V_o := \{a \in V \,|\, a_i \neq a_j,\ \forall 1 \leq i \neq j \leq 4\}.$$

Всяка точка $a \in V_o$ отговаря на гладка крива на Пикар

$$C_3(a_1, \dots, a_4) := \left\{ x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,\middle|\, x_0 x_2^3 = \prod_{i=1}^{4} (x_1 - a_i x_0) \right\},$$

която е от род 3. За произволна пермутация $\sigma \in S_4$, $C_3(a_1, \dots, a_4)$ и $C_3(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(4)})$ съвпадат. Ако $a' = (a'_1, \dots, a'_4) = \lambda a = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_4)$ за някое $\lambda \in \mathbb{C}^*$, то $C_3(a'_1, \dots, a'_4)$ е изоморфна на $C_3(a_1, \dots, a_4)$. По този начин, отвореното подмножество

$$\mathfrak{M}_o := (V_o/S_4)/\mathbb{C}^* = (V_o/\mathbb{C}^*)/S_4 \subset (V/\mathbb{C}^*)/S_4 = \mathbb{P}(V)/S_4 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})/S_4$$

на особеното проективно многообразие $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/S_4$ параметризира класовете на изоморфизъм на гладките криви на Пикар. В [26] Холцапфел доказва, че $\mathfrak{M}_o = \mathbb{B}/\Gamma_o$ е фактор на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma_o < U(1,2)$. Затворената обвивка $\mathrm{Cl}(\mathfrak{M}_o) = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})/S_4$ е особено рационално многообразие. Точките от $\mathrm{Cl}(\mathfrak{M}_o) \setminus \mathfrak{M}_o$ параметризират изродени, особени комплексни равнинни проективни криви. Друг пример за пространство от модули, покрито от $\mathbb{B}$, е даден в статията [20] на Долгачёв и Кондо. Нека $p_i := [a_i : 1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $1 \leq i \leq 5$ са пет различни точки от проективната права и

$$C(p_1, \dots, p_5) := \left\{ x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \,\middle|\, x_0^6 = x_0 \prod_{i=1}^{5} (x_1 - a_i x_2) \right\}.$$

Цикличната група $\mathbb{C}_5 = \langle e^{\frac{2\pi i}{5}} \rangle = \left\{ e^{\frac{2\pi i s}{5}} \,\middle|\, 0 \leq s \leq 4 \right\}$ от ред 5 действа върху $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ по правилото

$$\mathbb{C}_5 \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad \left(e^{\frac{2\pi i s}{5}}, [x_0 : x_1 : x_2] \right) \mapsto \left[e^{\frac{2\pi i s}{5}} x_0 : x_1 : x_2 \right]$$

и запазва кривите $C(p_1, \dots, p_5)$ за всички $p_1, \dots, p_5 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Двойното покритие

$$\widehat{S}(p_1, \dots, p_5) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}),$$

разклонено над $C(p_1, \dots, p_5) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ има K3 разрешение на особеностите $S(p_1, \dots, p_5)$ с действие на $\mathbb{C}_5$. Пространството от модули $\mathfrak{M}$ на такива $S(p_1, \dots, p_5)$ е изоморфно на пространството от модули $\mathfrak{M}_1$ на подмножествата

$$\{p_1, \dots, p_5 \,|\, p_i \neq p_j, \, \forall 1 \leq i \neq j \leq 5\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

и $\mathfrak{M}_1 = \mathbb{B}/\Gamma_1$ се оказва фактор на кълбото.

Дисертационният труд се състои от увод, четири глави и библиография от 50 заглавия. В глави 1 и 2 са събрани някои предварителни сведения за числа на Чърн на алгебрични повърхнини, логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо, характеризиращо гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$ и конструкцията на $(\mathbb{B}/\Gamma)'$. Последните две глави покриват оригиналните резултати на автора от статиите [6], съответно, [7]. По-точно, глава 1 започва с напомняне на понятията за холоморфно векторно разслоение $\mathcal{E}$ над комплексно многообразие M и функциите на прехода на $\mathcal{E}$. Тя обяснява защо холоморфните линейни разслоения над M се класифицират с кохомологичната група $H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Следващата разгледана тема е взаимно еднозначното съответствие между дивизорите и линейните разслоения над M. Глава 1 напомня понятията за ермитова метрика h върху холоморфно векторно разслоение $\pi : \mathcal{E} \to M$ и свързаност D върху $\mathcal{E}$. Използвайки метода на Картан на подвижните репери (виж [21]), тя се съсредоточава върху единствената свързаност върху $\pi : \mathcal{E} \to M$, която е съгласувана с ермитовата метрика h и комплексната структура върху $\mathcal{E}$. Матрицата на кривината Θ на тази свързаност относно ортонормиран репер на $\mathcal{E}$ е описана подробно. Накратко е напомнена класификацията на Енрикес-Кодаира на минималните гладки комплексни проективни повърхнини. Въведени са класовете на Чърн на холоморфните векторни разслоения като кохомологичните класове на елементарните симетрични полиноми на елементите на матрицата на кривината Θ. Това позволява определянето на числата на Чърн на гладка комплексна проективна повърхнина и формулирането на равенството на Богомолов-Мияока-Яо, характеризиращо компактните гладки фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$, както и логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо, описващо гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ и техните тороидални компактифициращи дивизори $D := (\mathbb{B}/\Gamma)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$.

Втората глава е посветена на конструкцията на тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$. Започвайки от нулата, тя описва транзитивното действие на $U(1,2)$ върху $\mathbb{B}$, $\partial\mathbb{B}$ и $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus (\mathbb{B} \cup \partial\mathbb{B})$, отъждествявайки съответните стабилизатори с $U_1 \times U_2$, максимална параболична подгрупа P of $U(1,2)$ и, съответно, с $U(1,1) \times U_1$. Доказва се, че P е максимална собствена подгрупа на $U(1,2)$. Групата P е разрешима, а оттам и минимална параболична подгрупа на $U(1,2)$. Втората глава описва прецизираното разлагане на Лангландс на максималната параболична подгрупа $P_o := \mathrm{Stab}_{U(1,2)}(1,0) < U(1,2)$, стабилизираща $(1,0) \in \partial\mathbb{B} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Това позволява дискутирането на хоросферичното разлагане на $\mathbb{B}$, отговарящо на P_o, както и съответната реализация на $\mathbb{B}$ като област на Зигел. Максимална параболична подгрупа P на $U(1,2)$ е Γ-рационална, ако $\Gamma \cap P$ е решетка на P. Да означим с $\mathrm{MPar}(\Gamma)$ множеството на Γ-рационалните максимални параболични подгрупи на $U(1,2)$ и да разгледаме центъра $Z(N_P)$ на унипотентния радикал N_P на някое $P \in \mathrm{MPar}(\Gamma)$. Тогава $\Gamma \cap Z(N_P)$ е решетка на реалната 1-мерна група на Ли $Z(N_P)$ и факторът $\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)]$ е фамилия от пунктирани дискове с променлив радиус, параметризирана с комплексната права $N_P/Z(N_P) \simeq \mathbb{C}$. Присъединявайки центровете на тези дискове получаваме частичната компактификация $(\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)])'$ в $P \in \mathrm{MPar}(\Gamma)$. Да отбележим, че комплексно аналитичното пространство $(\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)])'$ не е компактно, независимо от неговото име. Решетката Γ действа чрез спрягания върху $\mathrm{MPar}(\Gamma)$ с краен брой орбити, отговарящи на Γ-параболичните точки $\partial_\Gamma\mathbb{B}/\Gamma$. За произволно $\gamma \in \Gamma$ спрягането

$$\psi_\gamma : \mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)] \longrightarrow \mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_{\gamma P \gamma^{-1}})]$$

с γ се продължава до бихоломорфизъм

$$\psi_\gamma : (\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)])' \longrightarrow \big(\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_{\gamma P \gamma^{-1}})]\big)'$$

и задава действие на Γ върху непресичащото се обединение

$$\coprod_{P \in \mathrm{MPar}(\Gamma)} (\mathbb{B}/[\Gamma \cap Z(N_P)])' \tag{0.1}$$

на частичните компактификации в Γ-рационалните максимални параболични подгрупи $P < U(1,2)$. Тороидалната компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ се определя като Γ-факторът на (0.1). Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиването на гладките рационални (-1)-криви $L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, а $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. Глава 2 обяснява накратко защо индексите на пресичане $L_i.D \geq 4$ са по-големи или равни на 4 за всички $1 \leq i \leq s$ с равенство $L_i.D = 4$ тогава и само тогава, когато пунктираната сфера $L_i \setminus D$ е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$.

Третата глава отразява резултатите на статията [6]. По-точно, тя дискутира взаимно еднозначното съответствие между неразклонените покрития

$$f : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \longrightarrow (\mathbb{B}/\Gamma_1)' = X_1$$

от степен d на гладки тороидални компактификации и неразклонените покрития $\varphi : Y_2 \to Y_1$ от степен d на техните минимални модели, които са съгласувани с крайна редица $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ от свивания на (-1)-криви. Нека $f : M \to f(M)$ е сюрективно холоморфно изображение на комплексни многообразия, N е комплексно аналитично подпространство на M или отворено подмножество на M и $f(N) \cap f(M \setminus N) = \emptyset$. Като подготовка се установява, че ако две от изображенията

$$f : N \longrightarrow f(N), \quad f : M \setminus N \longrightarrow f(M \setminus N), \quad f : M \longrightarrow f(M)$$

са неразклонени покрития от степен $d \in \mathbb{N}$, то и третото изображение е неразклонено покритие от същата степен d. Нека $f : X \to X'$ е неразклонено покритие от степен d на гладки проективни повърхнини, а $D = \coprod\limits_{j=1}^{k} D_j$ е дивизор върху X с непресичащи се гладки неприводими компоненти D_j, така че $f : D \to f(D)$ е неразклонено покритие от степен d. Установено е, че тогава $f : D_j \to f(D_j)$ са неразклонени покрития от степен d_j на гладки криви $f(D_j)$ и $f(D_j)$ се пресичат тогава и само тогава, когато съвпадат. За произволна гладка неприводима рационална крива $C' \subset X'$ е доказано, че пълният пра-образ $f^{-1}(C') = \coprod\limits_{i=1}^{d} C_i$ се състои от d непресичащи се гладки неприводими рационални криви $C_i \subset X$, върху които f се ограничава до бихоломорфизъм $f : C_i \to C'$, $\forall 1 \leq i \leq d$. Нека $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ е композиция на краен брой свивания на (-1)-криви и $\varphi : Y_2 \to Y_1$ е неразклонено покритие от степен d. Тогава разслоеното произведение изпълнява комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd}
X_2 = X_1 \times_{Y_1} Y_2 \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "f"] & Y_2 \arrow[d, "\varphi"] \\
X_1 \arrow[r, "\rho_1"] & Y_1
\end{tikzcd} \tag{0.2}$$

и дава повърхнина X_2 с неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1$ от степен d, както и с композиция на краен брой свивания на (-1)-криви $\rho_2 : X_2 \to Y_2$, така че f и φ са съгласувани с ρ_2. Още повече, за произволни (евентуално приводими) дивизори $D^{(i)} \subset X_i$, които не съдържат неприводима компонента на изключителния дивизор на $\rho_i : X_i \to Y_i$, $f : D^{(2)} \to D^{(1)}$ е неразклонено покритие от степен d тогава и само тогава, когато ограничението $\varphi : \rho_2\left(D^{(2)}\right) \to \rho_1\left(D^{(1)}\right)$ е неразклонено покритие от степен d. В частност, ако $\rho_1 : X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)' \to Y_1$ е свиването на гладките неприводими рационални (-1)-криви върху гладка тороидална компактификация $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$, то произволно неразклонено покритие $\varphi : Y_2 \to Y_1$ от степен d издърпва X_1 до гладка тороидална компактификация $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ с неразклонени покрития $f : X_2 \to X_1$, $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to \mathbb{B}/\Gamma_1$ от степен d. Обратно, да предположим, че $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ е композиция на краен брой свивания на (-1)-криви и $f : X_2 \to X_1$ е неразклонено покритие от степен d. Тогава разлагането на Щайн на $\rho_1 f : X_2 \to Y_1$ предоставя комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение, където ρ_2 е крайна редица от свивания на (-1)-криви, φ е неразклонено покритие от степен d и f, φ са съгласувани с ρ_2. В резултат, произволно неразклонено покритие $f : X_2 \to X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ от степен d на гладка тороидална компактификация $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ и произволна композиция на краен брой свивания на (-1)-криви $\rho_1 : X_1 \to Y_1$ към минимална повърхнина Y_1 индуцира комутативна диаграма (0.2), където $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е гладка тороидална компактификация, $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ е крайна редица от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_2 и морфизмите $\varphi : Y_2 \to Y_1$, $\varphi : \rho_2(X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2)) \to \rho_1(X_1 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_1))$ са неразклонени покрития от степен d. По този начин, първият параграф на глава 3 установява, че произволно крайно неразклонено покритие на дефиниционната област или областта от стойности на $\rho_1 : X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)' \to Y_1$ индуцира комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение. Вторият параграф на трета глава доказва, че съвместимите крайни неразклонени покрития чрез дефиниционната област или чрез областта от стойности на $\rho_2 : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to Y_2$ се продължават до комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение. По-точно, нека $\rho_2 : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to Y_2$ е композиция на краен брой свивания на (-1)-криви от гладка тороидална компактификация $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ към минимална повърхнина Y_2 и $f : X_2 \to f(X_2) = X_1$ е неразклонено покритие от степен d, което е съгласувано с ρ_2 и се ограничава до неразклонено покритие $f : \mathbb{B}/\Gamma_2 \to f(\mathbb{B}/\Gamma_2)$ от степен d. Дисертацията доказва, че гореспоменатите предположения са достатъчни за съществуването на комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение. Обратно, ако $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор $D^{(2)} := X_2 \setminus (\mathbb{B}/\Gamma_2)$, $\rho_2 : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to Y_2$ е крайна редица от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_2 и $\varphi : Y_2 \to \varphi(Y_2)$ е неразклонено покритие от степен d, което е съгласувано с ρ_2 и се ограничава до неразклонено покритие $\varphi : \rho_2\left(D^{(2)}\right) \to \varphi\rho_2\left(D^{(2)}\right)$ от степен d, то съществува комутативна диаграма (0.2) на разслоено произведение. Последният, трети параграф на трета глава интерпретира нетривиалните крайни неразклонени покрития $f : X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to (\mathbb{B}/\Gamma_1)' = X_1$ на гладки тороидални компактификации, удовлетворяващи (0.2), като частична наредба $X_2 \succeq X_1$ в множеството $\mathcal{S}$ на гладките тороидални компактификации на некомпактни фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$. Максималните елементи на $\mathcal{S}$ относно $\succeq$ се наричат наситени, а минималните са примитивни. Доказва се, че произволна гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ доминира примитивна $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)'$. За разлика от това, гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ се доминира от наситена $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)' \in \mathcal{S}$ тогава и само тогава, когато X има крайна фундаментална група $\pi_1(X)$. Последният параграф на глава 3 дискутира наситеността и примитивността на гладките тороидални компактификации $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ с размерност на Кодаира $\kappa(X) \in \{-\infty, 0\}$. Той установява, че $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е наситена тогава и само тогава, когато X е рационална повърхнина или X има K3 минимален модел. Ако $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е рационална повърхнина или минималният модел Y на X е повърхнина на Енрикес, то X е примитивна. Нека $\rho : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е композиция на краен брой свивания на (-1)-криви, които трансформират гладка тороидална компактификация в абелева или K3 минимална повърхнина Y, а $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. В такъв случай, X е непримитивна тогава и само тогава, когато Y има нетривиален автоморфизъм $g : Y \to Y$ без фиксирани точки, който запазва $\rho(D)$. В случая на K3 повърхнина Y, g трябва да е от ред 2. След като забелязва, че в някои случаи непримитивността на $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ се свежда до съществуване на елемент на относителната група от бихоломорфизми $\mathrm{Aut}(Y, \rho(D))$ без фиксирани точки, последният параграф на глава 3 установява, че ако изключителният дивизор $E(\rho) = \coprod\limits_{i=1}^{s} L_i$ на $\rho : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е непресичащо се обединение на гладки неприводими рационални (-1)-криви L_i, то относителните групи от бихоломорфизми $\mathrm{Aut}(X, D) = \mathrm{Aut}(X, D, E(\rho))$ и $\mathrm{Aut}(Y, \rho(D)) = \mathrm{Aut}(Y, \rho(D), \rho(D)^{\mathrm{sing}})$ имат естествен изоморфизъм, трансформиращ елементите на $\mathrm{Aut}(X, D)$ без фиксирани точки върху елементите на $\mathrm{Aut}(Y, \rho(D))$ без фиксирани точки. Освен това е доказано, че $\mathrm{Aut}(X, D)$ е крайна група.

Последната, четвърта глава на дисертацията представя резултатите на статията [7]. Да предположим, че $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на гладки неприводими рационални (-1)-криви L_i, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B и $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum\limits_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. Доказано е, че $C_j := \beta(D_j)$ са такива гладки неприводими елиптични криви върху Y, че ограниченията $r : C_j \to B$ са крайни неразклонени покрития от степен $d_j \in \mathbb{N}$. Нека $B_0 \subset Y$ е сечение на разслоението $r : Y \to B$ чрез рационални прави, с минимален индекс на самопресичане $\delta = B_0^2$. Съгласно теорема на Нагата от [40], $\delta \leq g(B) = 1$ не надминава рода $g(B) = 1$ на B. За $\delta < 0$ работата [7] доказва , че произволна гладка неприводима елиптична крива $C_j \subset Y$ е сечение на $r : Y \to B$. В случая $\delta = B_0^2 \in \{0, 1\}$ може да има гладки неприводими елиптични криви $C_j \subset Y$ с $\deg \left[r|_{C_j} : C_j \to B \right] = d_j > 1$ и $C_j^2 = 0$. Глава 4 редуцира логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) към

$$\sum_{i=1}^{s} (L_i.D - 4) = \sum_{j=1}^{k} C_j^2.$$

Ако всички C_j са сечения на $r : Y \to B$, това равенство е еквивалентно на

$$(k-1) \left[\sum_{i=1}^{s} (L_i.D - 4) \right] = \sum_{i=1}^{s} L_i.D(L_i.D - 1).$$

Когато $\deg \left[r|_{C_j} : C_j \to B \right] = d_j > 1$ за поне едно $1 \leq j \leq k$, получаваме неравенството

$$(k-2) \left[\sum_{i=1}^{s} (L_i.D - 4) \right] \geq \sum_{i=1}^{s} (L_i.D - 1)(L_i.D - 2).$$

В резултат, поне една пунктирана сфера $L_i \setminus D$, възникваща от (-1)-крива $L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ върху $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, трябва да не е напълно геодезично вложена в $\mathbb{B}/\Gamma$. Ако всички C_j са сечения на $r : Y \to B$, доказано е, че броят k на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma$ е $k \geq 15$. Ойлеровата характеристика на $\mathbb{B}/\Gamma$ се оказва $e(\mathbb{B}/\Gamma) = s \geq 14$. За произволно естествено $15 \leq k \leq 62$ е пресметната явна долна граница $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$. Аналогично, ако съществува $1 \leq j \leq k$ с $\deg \left[r|_{C_j} : C_j \to B \right] = d_j > 1$ и $C_j^2 = 0$, доказано е, че $\mathbb{B}/\Gamma$ има $k \geq 12$ параболични точки и Ойлеровата характеристика $e(\mathbb{B}/\Gamma) = s \geq 11$. За произволно $12 \leq k \leq 44$ са намерени явни долни граници $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$.

Научни приноси

По преценка на автора, научните приноси на дисертационния труд са следните:

1. Явна конструкция на взаимно еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)' \to X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ на гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ и крайните неразклонени покрития $Y_1 \to Y$ на минимален модел Y на X.

2. Явна конструкция на взаимно еднозначно съответствие между крайните неразклонени покрития $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ чрез гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$, които са съгласувани с редица $\rho : X \to Y$ от свивания на гладки неприводими рационални (-1)-криви към минимална повърхнина Y и крайните неразклонени покрития $Y \to Y_1$, съгласувани с ρ.

3. Крайните неразклонени покрития $X_2 = (\mathbb{B}/\Gamma_2)' \to X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ на гладки тороидални компактификации, които са съгласувани с редица $\rho_2 : X_2 \to Y_2$ от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y_2 и индуцират крайни неразклонени покрития $Y_2 \to Y_1$ на минималния модел Y_1 на X_1 задават частична наредба в множеството $\mathcal{S}$ на гладките тороидални компактификации $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ на факторите $\mathbb{B}/\Gamma$ на комплексното двумерно кълбо $\mathbb{B}$ по решетка $\Gamma < U(1,2)$. Минималните елементи на $\mathcal{S}$ се наричат примитивни, докато максималните са наситени. Произволно $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \mathcal{S}$ доминира някоя примитивна $X_0 = (\mathbb{B}/\Gamma_0)' \in \mathcal{S}$. Гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ се доминира от наситена $X_1 = (\mathbb{B}/\Gamma_1)'$ тогава и само тогава, когато X има крайна фундаментална група $\pi_1(X)$. С помощта на свойствата на минималните проективни повърхнини Y с неположителна размерност на Кодаира, дисертацията характеризира наситените и примитивните е $X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \in \mathcal{S}$ с минимален модел Y.

4. Нека $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка тороидална компактификация с тороидален компактифициращ дивизор $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ и $\beta : X \to Y$ е крайна редица от свивания на (-1)-криви към минимална повърхнина Y, чийто изключителен дивизор $E(\beta) = \coprod_{i=1}^{s} L_i$ има непресичащи се неприводими компоненти L_i. Доказано е, че групата $\mathrm{Aut}(X, D) = \mathrm{Aut}(X, D, E(\beta))$ е крайна и изоморфна на $\mathrm{Aut}(Y, \beta(D)) = \mathrm{Aut}(Y, \beta(D), \beta(D)^{\mathrm{sing}})$.

5. Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на гладки неприводими рационални (-1)-криви L_i, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B, а $D := X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$ с гладки елиптични неприводими компоненти D_j. Глава 4 изразява в явен вид логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) чрез индексите на пресичане $L_i.D$ и индексите на самопресичане $\beta(D_j)^2$ на гладките елиптични криви $\beta(D_j) \subset Y$. Ако всички $\beta(D_j)$ са сечения на $r : Y \to B$, то логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) е изразено само чрез $L_i.D$, $1 \leq i \leq s$. Когато $r|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \to B$ е от степен $d_j > 1$ за поне едно $1 \leq j \leq k$, то от логаритмичното равенство на Богомолов-Мияока-Яо за (X, D) е изведено неравенство за $L_i.D$, $1 \leq i \leq s$.

6. Чрез споменатото в 5. равенство, съответно неравенство за $L_i.D$, $1 \leq i \leq s$ са намерени долни граници за броя k на параболичните точки на $\mathbb{B}/\Gamma$, който съвпада с броя на гладките елиптични неприводими компоненти D_j на тороидалния компактифициращ дивизор $D = X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$.

7. Доказано е, че за фактор на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$ с гладка тороидална компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$, чийто минимален модел е линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B, съществува ненапълно геодезична пунктирана сфера $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, възникваща от гладка неприводима рационална (-1)-крива $L_i \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ върху $(\mathbb{B}/\Gamma)'$.

8. Нека $\beta : X = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to Y$ е свиване на гладки неприводими рационални (-1)-криви L_i, $1 \leq i \leq s$ върху гладка тороидална компактификация $X = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ към минимална линейчата повърхнина $r : Y \to B$ с елиптична база B и $D = X \setminus (\mathbb{B}/\Gamma) = \sum_{j=1}^{k} D_j$ е тороидалният компактифициращ дивизор на $\mathbb{B}/\Gamma$. Ако $r|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \to B$ са бихоломорфизми за всички $1 \leq j \leq k$, предполагаме, че $k \leq 62$. Ако съществува $1 \leq j \leq k$ с $\deg \left[f|_{\beta(D_j)} : \beta(D_j) \to B \right] > 1$, нека $k \leq 44$. Пета ‘ на дисертацията извежда явни долни граници $\mu_k \geq 2$ върху броя на ненапълно геодезичните $L_i \setminus D \subset \mathbb{B}/\Gamma$, в зависимост от $\deg \left(r|_{\beta(D_j)} \right) = 1$, $\forall 1 \leq j \leq k$ или от съществуването на $\deg \left(r|_{\beta(D_j)} \right) > 1$ за някое $1 \leq j \leq k$.

Апробация на резултатите

Резултатите на дисертационниа труд са публикувани в следните две статии:

- Beshkov P., Kasparian A., Sankaran G.: Saturated and primitive smooth compactifications of ball quotients, *Ann. Sofia Univ., Fac. Math. and Inf.*, **106**, 2019, 53–77.
- Beshkov P., Kasparian A.: Lower bounds on the number of cusps of a toroidal compactification with a ruled minimal model, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **74(8)**, 2021, 1120–1127.

Научните приноси на дисертацията са докладвани на:

1. Национален семинар по кодиране ”Професор Стефан Додунеков”, 2018.
2. Национален семинар по кодиране ”Професор Стефан Додунеков”, 2019.
3. Пролетна научна сесия на Факултета по математика и информатика на Софийски университет ”св. Климент Охридски”, 2019.
4. Пролетна научна сесия на Факултета по математика и информатика на Софийски университет ”св. Климент Охридски”, 2021.

Декларация за оригиналност на представените резултати

Декларирам, че настоящият дисертационен труд съдържа оригинални резултати, получени при проведени от мен научни изследвания (с подкрепата и съдействието на научния ми ръководител и всичките ми съавтори). Резултатите, които са получени, описани и публикувани от други учени, са надлежно и подробно цитирани в библиографията.

Настоящата работа не е прилагана за придобиване на научна степен в друго висше училище, университет или научен институт.

Подпис:

(Панчо Георгиев Бешков)

Библиография

[1] A. Ash A., Mumford D., Rapoport M., and Tai Y.-S.: *Smooth Compactifications of Locally Symmetric Varieties*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] Bagnera, G., de Franchis, M.: Sur les surfaces hyperelliptiques. *C. R. Acad. Sci.*, **145**, 1907, 747–749.

[3] Baily W., Borel A.: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. Math.*, **84** 1966, 442–528.

[4] Baldi G., Ullmo E.: Special subvarieties of non-arithmetic ball quotients and Hodge theory, ArXiv:2005.03524v2[mathAG] 27 Sept 2021.

[5] Bogomolov F.: Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.*, **42(6)**, 1978, 1227–1287.

[6] Beshkov P., Kasparian A, Sankaran G.: Saturated and primitive smooth compactifications of ball quotients, *Ann. Sofia Univ., Fac. Math. and Inf.*, **106**, 2019, 53–77.

[7] Beshkov P., Kasparian A.: Lower bounds on the number of cusps of a toroidal compactification with a ruled minimal model, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **74(8)**, 2021, 1120–1127.

[8] Cartwright D. I., Steger T.: Enumeration of the 50 fake projective planes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **348**, 2010, 11–13.

[9] Deligne P., Mostow G.D.: Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.*, **63**, 1986, 5–89.

[10] Deligne P., Mostow G.D.: Commensurabilities among lattices in $\mathrm{PU}(1,n)$, vol. **132**, *Annals of Math. Studues*, 1993, Princeton Univ. Press.

[11] Deraux M.: Non-arithmetic lattices and the Klein quadric, *J. reine Angew. Math.*, **754**, 2019, 253–279.

[12] Deraux M.: Non-arithmetic lattices from a configuration of elliptic curves in an Abelian surface, *Comm. Math. Helv.*, **93 (3)**, 2016, 533–554.

[13] Deraux M., Parker J.R., Paupert J.: New non-arithmetic complex hyperbolic lattices, *Invent. Math.*, **203(3)**, 2016, 681–771.

[14] Deraux M., Parker J.R., Paupert J., New nonarithmetic complex hyperbolic lattices II, *Mich. Math. J.*, **70(1)**, 2021, 13–205.

[15] Di Cerbo G., Di Cerbo L.F.: Effective results for complex hyperbolic manifolds, *J. London Math. Soc.*, **91(1)**, 89–104.

[16] Di Cerbo L.F., Stover M.: Multiple realizations of varieties as ball quotient compactifications, *Michigan Math. J.*, **65(2)**, 2016, 441-447.

[17] Di Cerbo L.F., Stover M.: Bielliptic ball quotient compactifications and lattices in $PU(2,1)$ with finitely generated commutator subgroup, *Ann. Inst. Fourier*, **67(1)**, 2017, 315–328.

[18] Di Cerbo L.F., Stover, M.: Classification and arithmeticity of toroidal compactifications with $\overline{c_1}^2 = 3\overline{c_2} = 3$, *Geom. Topol.* , **22(4)**, 2018, 2465–1510.

[19] Di Cerbo L.F., Stover M.: Punctured spheres in complex hyperbolic spaces and bi-elliptic ball quotient compactifications, *Trans. Amer. Math. Society*, **372**, 2019, 4627–4646.

[20] Dolgachev I.V., Kondo S.: Moduli of K3 surfaces and complex ball quotients, In *Arithmetic and geometry around hypergeometric functions - CIMPA Summer School*, Galatasaray Univesity, Istanbul 2005, Holzapfel R.P., Uludağ A.M., Yoshida M. (Eds.), Progress in Mathematics **260**, 2007, 43-100.

[21] Griffiths Ph., Harris J.: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley and Sons, 1978.

[22] Grothendieck A.: *Éléments de géométrie algébrique: IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Quatrième partie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S., tome 32, 1967, pp. 5–361.

[23] Hartshorne R.: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer, 1977.

[24] Helgason S.: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, London, Academic Press, 1978.

[25] Hirzebruch F.: Chern numbers of algebraic surfaces: an example, *Math. Ann.*, **266**, 1984, 351–356.

[26] Holzapfel R.P: *The Ball and Some Hilbert Problems*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1995.

[27] Holzapfel R.P (with appendices by A. Pineiro and N. Vladov): Picard-Einstein metrics and class field connected with Apolonius cycle, HU Preprint **98-15**, 1998.

[28] Holzapfel R.P: Jacobi Theta embedding of a hyperbolic 4-space with cusps, In: *Geometry, Integrability and Quantization III*, Mladenov I. and Naber G. (Eds.), Coral Press Sofia, 2002, 11–63.

[29] Holzapfel R.P: Complex hyperbolic surfaces of abelian type, *Serdica Math. J.*, **30**, 2004, 207–238.

[30] Kasparian A., Kotzev B.: Weak form of Holzapfel's Conjecture, *Geometry and Symmetry in Physics*, **19**, 2010, 29–42.

[31] Kasparian A., Sankaran G.: Fundamental groups of toroidal compactifications, *Asian J. Math.*, **22**, 2018, 941–953.

[32] Kasparian A., Sankaran G.: Toroidal compactification: the generalized ball case, In: *Moduli Spaces and Locally Symmetric Spaces*, Ji L. and Yau S. T. (Eds.), Surveys of Modern Mathematics **16**, International Press, 2021, 107–133.

[33] Kobayashi S., Nomizu K.: *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, Interscience Publishers, 1969.

[34] Margulis G.: Arithmeticity of the irreducible lattices in semisimple groups of rank greater than 1, *Invent. Math.*, **76**, 1984, 93–120.

[35] Miyaoka Y.: On the Chern numbers of surfaces of general type, *Inv. Math.*, **42(1)**, 1977, 225–237.

[36] Mok N.: *Metric Rigidity Theorems on Hermitian Locally Symmetric Spaces*, Series in Pure Mathematics, vol. 6, World Scientific, 1989.

[37] Momot A.: On modular ball quotient surfaces of Kodaira dimension one, *Int. Scholarly Research Notices*, 2011, DOI 10.5402/2011/214853.

[38] Mostow D.: On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space, *Pacific J. Math.*, **86**, 1980, 171–276.

[39] Mumford D.: Hirzebruch's Proportionality Theorem in the non-compact case, *Invent. Math.*, **42**, 1977, 239–272.

[40] Nagata M.: On self-intersection number of a section on a ruled surface, *Nagoya Math. J.*, **37(3)**, 1970, 191-196.

[41] Prasad G., Yeing K.: Fake projective planes, *Invent. Math.*, **168**, 2007, 321–370.

[42] Serre J.P: *Lie Algebras and Lie Groups*, Lectures given at Harvard University, New-York-Amsterdam, Benjamin, 1965.

[43] Serre J.P: *Algebres de Lie Semi-Simples Complexes*, New York-Amsterdam, Benjamin, 1966.

[44] Shafarevich I.R.: *Foundations of Algebraic Geometry*, vol. 1, Moscow, Science, 1988.

[45] Stover M.: Volumes of Picard modular surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **139**, 2011, 3045–3056.

[46] Stover M.: Cusp and b_1 growth for ball quotients and maps onto $\mathbb{Z}$ with finitely generated kernel, *Indiana Univ. Math. J.*, **70(1)**, 2021, 213–233.

[47] Uludağ M.: Covering relations between ball quotient orbifolds, *Math. Ann.* , **328(2)**, 2004, 503–523.

[48] Van de Ven A.: On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **55(6)**, 1966, 1624–1627.

[49] Yau S.T.: Calabi's Conjecture and some new results in algebraic geometry *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **74(5)**, 1977, 1798–1799.

[50] Yau S.T.: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, *Commun. Pure and Appl. Math.*, **31(3)**, 1978, 339–411.