Резюмета на научните публикации

на доц. дн Младен Светославов Савов

Резюмета на статии, представени за участие в конкурса:

Следващите 14 статии са официално представени за участие в конкурса и са представени първо на български език и след това на английски език.

От страница 16 започват резюметата на публикации, невключени за участие в този конкурс - отново на български език и на английски език.

1. Kolb, M and Savov, M., *A characterization of the finiteness of perpetual integrals of Lévy processes*, BERNOULLI, 2020, Volume: 26, Pages: 1453–1472, DOI: 10.3150/19-BEJ1167, Published: JAN 2020, ISSN: 1350-7265, IF (1.393 - 2018), **Quartile: Q2 (43/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

В тази статия добиваме аналитичен критерий за проверка на крайността/сходимостта на

$$I = \int_0^\infty f(x + \xi_s)ds,\ x \in \mathbb{R},$$

където $\xi = (\xi_s)_{s\geq 0}$ е преходен процес на Леви и $f \geq 0$ е или непрекъсната, локално ограничена функция или локално ограничена Борелова функция (за този случай се изисква едномерните разпределения на ξ да са абсолютно непрекъснати). Нашият резултат е общ и обхваща предходни частни случаи, но включва потенциалната мярка $U(dx) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi_s \in dx)$, което поставя някои препятствия пред практическото приложение в някои ситуации. Много интересно е да се отбележи, че практически критерият се извежда от доказаната релацията $I < \infty \iff \mathbb{E}[I] < \infty$.

Методологията включва надграждане на техники, разработени от Бати за сходни проблеми за Брауновото движение. Любопитен факт е, че подобряването на тези техники, а не въвеждането на нови, е възможно, защото, въпреки че процесът на Леви за разлика от Брауновото движение е само дясно-непрекъснат, ключови Марковски моменти са огласими и в тях процесът на Леви е почти сигурно непрекъснат.

2. Savov, M. and Toaldo, B., *Semi-Markov processes, integro-differential equations and anomalous diffusion-aggregation*, ANNALS DE L'INSTITUT HENRI POINCARE, PROBABILITES ET STATISTIQUES, ISSN: 0246-0203, eISSN: 1778-7017, **accepted**, IF (1.152 - 2018), **Quartile: Q2 (56/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Още с работата на А. Айнщайн от 1905 започва интезивното използване на Брауновото движение и други дифузии за моделиране на различни процеси от физиката, биологията, икономиката и други. Бързо се установява обаче, че дифузиите имат своите естествени ограничения и много процеси в света около нас проявяват поведение атипично за стандартните дифузионни процеси. Наименованието на тези процеси е *аномални дифузии* и те са богат клас от процеси, които позволяват например инкорпорирането на памет и други зависимости. От аналитична гледна точка поведението на всяка аномална дифузия може да се опише с интегрално-диференциално уравнение, което произхожда от конкретни естествени закони и принципи в зависимост от разглеждания процес. От вероятностна гледна точка аномалните дифузии могат да се представят като стохастичен процес, който най-често е стандартна дифузия или Марковски процес със стохастична промяна на времето. И двата погледа имат своите естествени преимущества и затова една от важните задачи е конретно интегрално-диференциално уравнение да се свърже с очакванията на стохастичен процес и обратното.

В тази статия разглеждаме уравнения на Волтера, чиито ядра допускат пространствена зависимост, т.е.

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \left(q(s,x)-q(0,x)\right)k(t-s,x)ds = Gq(t,x), \quad q(0,x)=u(x), \tag{0.1}$$

където G е генератор на процес на Фелър M и $k(\cdot,\cdot)$ опашка на мярка на Леви на субординатор, която зависи и от пространството, и цялото семейство от мерки е асоциирано с адитивен процес σ. Поставяйки $L=\sigma^{-1}$, доказваме за широк клас генератори G и адитивни процеси σ, зависещи от траекториите на M, че $q(t,x)=\mathbb{E}_x\left[u(M(L(t)))\right]$ са решения на (0.1) от умерен тип (*mild solutions*).

Във втората част на статията разглеждаме едномерна аномална дифузия от вариращ порядък, т.е. $G=\Delta$ е операторът на Лаплас, а $k(s,x)=s^{-\alpha(x)}$, където $\alpha:\mathbb{R}\mapsto(0,1)$. В този смисъл $X_t=B(L(t))$, където B е Брауново движение, а σ е композиция от стабилни субординатори с индекс, определен от позицията на B чрез функцията α. Уравнението (0.1) придобива вида

$$\frac{d^{\alpha(x)}}{dt^{\alpha(x)}}q=\Delta q, \quad q(0,x)=u$$

и се нарича също дробна дифузия от променлив ред.

В статията са доказани редица резултати за феномена на агрегация (процесът прекарва много време в околност на минимума на α). За яснота ще представим само един много частен случай на резултатите в статията. Нека $A=\{x:\alpha(x)=\min\{\alpha(y)\}\}$ е краен интервал и $2\min\{\alpha(y)\}<\liminf_{|x|\to\infty}\alpha(x)$. Тогава

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t 1_{X_s\in A}}{t}=1; \quad \lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\left(X_t\in A\right)=1.$$

Предвид че $X_t=B(L(t))$ можем да си мислим еволюцията на този процес като движение в пореста среда/ среда с капани, които задържат движещата се частица за различен период от време преди да я освободят. Така, ако най-силните капани/ пори (колкото по-малко е α, толкова по-силен е капанът) доминират останалите с определено съотношение, процесът ще бъде преобладаващо наблюдаван в техния регион.

Техниките в статията варират от обща теория на Марковските процеси до закони за повторния логаритъм за процеси на Леви.

3. Dimov, I. and Savov, M., *Probabilistic analysis of the single particle Wigner Monte-Carlo method*, MATHEMATICS AND COMPUTERS IN SIMULATION, 2020, Volume: 173, Pages: 32–50, DOI: 10.1016/j.matcom.2020.01.008, Published: JAN 2020, ISSN: 0378-4754, IF (1.409 - 2018), **Quartile: Q2 (87/254 Mathematics, Applied, JCR-WoS)**, hyperlink

В тази статия разглеждаме уравнението на Вигнер

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,m,t)+Cmt\nabla_x(x,m,t)f=V*_m f(x,m,t), \tag{0.2}$$

където $x\in\mathbb{R}^d$ е позицията, m е вълновото число, C е конкретна физична константа, V е подходящ потенциал, който чрез дискретната конволюция $*_m$ задава промяната на вълновото число. Ако означим с $\bar{f}(x,m,t)=f(x+Cmt,m,t)$, то по характеристиките $x+Cmt$ уравнението се преработва до

$$\bar{f}=\bar{f}_i+\mathcal{K}\bar{f}, \tag{0.3}$$

където $\bar{f}_i$ кодира началните условия, а $\mathcal{K}$ е явен ограничен линеен оператор в $L^2\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{N},[0,\tau]\right)$, $\tau\in(0,\infty]$.

Ако $A(x,m,t)$ е характеристика на системата, която искаме да изчислим, и $\bar{A}(x,m,t)=A(x+Cmt,m,t)$, то с $\mathcal{K}^*$ спрегнатият оператор на $\mathcal{K}$ е вярно, че

$$\langle A,f\rangle=\langle\bar{A},\bar{f}\rangle=\langle\bar{A},\bar{f}_i\rangle+\langle\mathcal{K}^*\bar{A},\bar{f}\rangle.$$

Показва се, че $g=\mathcal{K}^*g+\bar{A} \implies \langle\bar{f},\bar{A}\rangle=\langle\bar{f}_i,g\rangle$. Също така g има представяне в конволюционен ред $g=\sum_{n\geq0}\mathcal{K}^{*n}\bar{A}$ и следователно $\langle\bar{f},\bar{A}\rangle=\langle\bar{f}_i,g\rangle=\sum_{n\geq0}\langle\mathcal{K}^{*n}\bar{A},\bar{f}_i\rangle$.

На следваща стъпка действието на $\mathcal{K}^*$ се представя като еволюцията на частица със случаен знак, вълново число и линейно движение, като тези нейни характеристики се променят в случайни моменти и съгласувано с ядро, зависещо от потенциала V. Така $\langle \mathcal{K}^{*n}\bar{A}, \bar{f}_i\rangle$ може да се представи с очакване на споменатата частица в момента τ (моментът, който ни интересува), стартирана с плътност $\bar{f}_i$ върху фазовото пространство $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}$ и претърпяла точно n промени до τ.

В тази статия, в зависимост от параметрите, изследваме броя на членовете на конволюционния ред, които са необходими, за да се получи сходимост към $\langle A, f\rangle$. Ако τ е времевият хоризонт на симулацията, то показваме, че теоретично не могат да се пренебрегнат $27\tau\gamma^*$ члена. γ^* зависи от масата на потенциала V и е често от порядък 10^{15}, което не може да бъде компенсирано от τ, обикновено от порядъка на мили/нано секунди. Така теоретично обясняваме нестабилността на този метод, която е била наблюдавана при редица практически симулации.

Методите използват оценки на Бери-Есеен от теория на вероятностите, подходяща интерпретация на членовете на конволюционния ред и задаването на проблема в подходящо Хилбертово пространство.

4. Mutafchiev, L. and Savov,M., *On the Maximal Multiplicity of Block Sizes in a Random Set Partition*, RANDOM STRUCTURES AND ALGORITHMS, 2020, Volume: 56, Pages: 867–891, DOI: 10.1002/rsa.20891, Published: MAY 2020, eISSN: 1098-2418, IF (1.008 - 2018), **Quartile: Q2 (90/214 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$. С Σ_n означаваме всички представяния на $[n]$ като обединение на непресичащи се подмножества на $[n]$. Въвеждаме равномерната вероятностна мярка P върху Σ_n. Добре известно е, че при $n \to \infty$ броят подмножества в типично разлагане на $[n]$ е с големина $W(n)$, където W е функцията на Ламбер, зададена чрез $W(n)e^{W(n)} = n$. В тази статия ние разглеждаме максималната мултипликативност на типичното разлагане на $[n]$, т.е., ако $\sigma \in \Sigma_n$, то изучаваме $M_n(\sigma) := \max_j \mu_\sigma(j)$, където $\mu_\sigma(j)$ е броят подмножества с големина j в σ. Нека $f_n = W(n) - \lfloor W(n)\rfloor$, където $\lfloor W(n)\rfloor$ е най-голямото цяло число по-малко от $W(n)$. Тогава, ако за подредица $(n_k)_{k\geq 1}$ е вярно, че $\lim_{k\to\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{4}} \min\{f_{n_k}, 1 - f_{n_k}\}\sqrt{n_k}/\log^{\frac{7}{4}} n_k = u \in [0, \infty]$, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M_{n_k} - R_{n_k}}{\sqrt{R_{n_k}}} \stackrel{d}{=} \max\{Z_1, Z_2 - u\},$$

където Z_1, Z_2 са независими стандартни нормални случайни величини и

$$R_n := \frac{W^{\lfloor W(n)\rfloor}(n)}{\lfloor W(n)\rfloor!}.$$

Методологията включва методът на седлото и представяне на пораждащата функция на разпределенията на M_n, умножени по числата на Бел B_n, чрез безкрайно произведение на функциите на моментите на независими Поасонови случайни величини $V_j, j \geq 1$, с параметри $\lambda_j = W^j(n)/j!$. Методът на седлото се използва при обръщането на тази пораждаща функция, но са необходими доста прецизни оценки на участващите количества, както за различни региони на контура, по който се обръща с формулата на Коши пораждащата функция, така и за отделянето на само тези Поасонови случайни величини, чиято информация е важна при граничния преход.

5. Loeffen, R., Patie, P. and Savov, M., *Extinction Time of Non-Markovian Self-Similar Processes, Persistence, Annihilation of Jumps and the Fréchet Distribution*, JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS, 2019, Volume: 175, Pages: 1022–1041, DOI: 10.1007/s10955-019-02279-3, Published: MAR 2019, ISSN: 0022-4715, eISSN: 1572-9613, IF (1.513 - 2018), **Quartile: Q2 (23/55 Physical, Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

Когато моделираме еволюцията на даден процес, често се интересуваме от това какво е случайното време на изчезване на процеса. Нека развитието на дадена система се задава чрез $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_t)_{t\geq 0}$, тогава моментът на изчезване се задава с $\mathbb{T} = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \leq 0\}$. Какво можем да кажем за $\mathbb{T}$? По принцип повече информация се добива в случаите, когато процесът $\mathbb{X}$ е Марковски и особено когато $\mathbb{X}$ е Марковски себеподобен процес, защото тогава $\mathbb{T}$ се задава с експоненциален функционал на процес на Леви. В тази статия разглеждаме клас от себеподобни процеси и техните времена на изчезване. Това е може би едно от малкото изследвания, които не изискват Марковското свойство за $\mathbb{X}$.

Нека $X = (X_t)_{t\geq 0}$ е себеподобен Марковки процес с индекс на себеподобие $\alpha > 0$, стартиран от $x > 0$ и нека, независимо от X, $\chi = (\chi_t)_{t\geq 0}$ е ненамаляващ себеподобен Марковски процес с индекс $\beta > 0$, стартиран от 0. Нека $\lambda_t = \inf\{s > 0 : \chi_s > t\}$. Тогава конструираме $\mathbb{X}_t = X_{\lambda_t}, t > 0$. Понеже λ_t е ненамаляващ с нива на константност върху скоковете на χ, то тази смяна може да се счита като добавянето на капани, които задържат временно процеса в дадена позиция. Показваме, че $\mathbb{T} \stackrel{d}{=} \chi_T \stackrel{d}{=} \chi_1 \times T^{\frac{1}{\beta}}$, където $T = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 0\}$. Това ни позволява да пресметнем трансформацията на Мелин на $\mathbb{T}$ ($\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$) с помощта на трансформациите на Мелин на χ_1, T. Понеже и χ_1 и T чрез трансформацията на Ламперти за себеподобни Марковски процеси могат да се изразят чрез подходящи експоненциални функционали на процеси на Леви с характеристични експоненти $\Psi_\alpha(z) = -\phi_+^\alpha(-z)\phi_-^\alpha(z), \phi_\beta(z)$, то ние добиваме обща формула за $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ чрез функциите на Бернщайн-Гама $W_{\phi_\beta}, W_{\phi_+^\alpha}, W_{\phi_-^\alpha}$. Това, с помощта на резултатите от Patie, P. and Savov,M. (2018) "*Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes*", *Electronic Journal of Probability*, **23**, 1–101, **IF: 0.994**, позволява да се изучи гладкостта на разпределението на $\mathbb{T}$, неговата асимптотика и да се дадат конкретни примери, когато разпределението на $\mathbb{T}$ се асоциира с разпределението на Фреше.

6. Zaevski, T.S., Kounchev, O. and Savov, M., *Two frameworks for pricing defaultable derivatives*, CHAOS, SOLITONS AND FRACTALS, 2019, Volume: 123, Pages: 309–319, DOI: 10.1016/j.chaos.2019.04.025, Published: APR 2019, ISSN: 0960-0779, IF (3.064 - 2018), **Quartile: Q1 (3/55 Physics, Mathematical, JCR-WoS)**, hyperlink

Целта на тази статия е да се представят две различни схеми за получаването на частни диференциални уравнения (ЧДУ) за цената на т.нар. *дефолтни деривати*. В първата схема цената на актива е зададена като решение на стохастично диференциално уравнение (СДУ), спряно в случайно време. Втората изследва ефекта на добавянето на процес със скокове, предполагайки, че времето за спиране е моментът на пристигане на първия скок. Ние изследваме степента на загуба, която представлява загубата на актива при случай на *дефолт*. И при двете схеми ние изучаваме различни допускания и зависимости между актива, времето на спиране и степента на загуба. Разискваме отделно случаите, когато цената на актива се задава с Брауново движение или с процес на Леви. Даваме метод за решението на ЧДУ за цената на деривата чрез така наречената *дефолт-премия*. Като пример прилагаме затворена форма на формулата на цената *Коко бонд*.

7. Patie, P., Savov, M. and Zhao, Y., *Intertwining, Excursion Theory and Krein Theory of Strings for Non-self-adjoint Markov Semigroups*, ANNALS OF PROBABILITY, 2019, Volume: 47, Pages: 3231–3277, DOI: 10.1214/19-AOP1338, Published: NOV 2019, ISSN: 0091-1798, eISSN: 2168-894X, IF (2.085-2018), **Quartile: Q1 (23/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

През 1966 Кац поставя въпроса: Може ли да чуем формата на барабана? На математически език това означава: може ли, модуло конгруентност, да определим Ω от собствените стойности и техните кратности на оператора на Лаплас $\frac{1}{2}\Delta$ върху Ω? Отговорът в общност е отрицателен, но една негова еквивалентна формулировка чрез преплитане на полугрупи $P_t^{\Omega_j}, t \geq 0$, върху $L^2(\Omega_j), j = 1, 2$,

$$P_t^{\Omega_1}\Lambda = \Lambda P_t^{\Omega_2},$$

където $\Lambda : L^2(\Omega_2) \mapsto L^2(\Omega_1)$ е линеен обратим оператор, показва, че при някои допълнителни изисквания за Λ като позитивност, всъщност преплитането влече конгруентността на Ω_1 и Ω_2. Това преплитане е изследвано и по-общо е показано, че полугрупи със смесени гранични условия на Робин (смес от Дирихле и фон Нойман) не могат да се преплетат.

В тази статия ние разглеждаме по-различен, но все пак сходен проблем. Имаме два силни Марковски процеса X, Y в пространство на Лузин E с гранична точка $b \in E$. Разглеждаме убитите полугрупи $P_t^\dagger f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t), t < T_b]$ и $Q_t^\dagger f(x) = \mathbb{E}_x[f(Y_t), t < T_b]$, където T_b е моментът на достигане на b. Допускаме кое да е разширение през точката b на убитите процеси, т.е. кои да е полугрупи

$P_t f(x) = \mathbb{E}_x [f(X_t)]$ и $Q_t f(x) = \mathbb{E}_x [f(Y_t)]$. Искаме да отговорим на въпроса: ако $P^\dagger, Q^\dagger$ или P, Q се преплитат с линеен затворен и едно-върху-едно оператор Λ, какво можем да заключим за прилежащите Марковски процеси?

Имаме следните релации: $P_t^\dagger \Lambda = \Lambda Q_t^\dagger, \forall t > 0$, влече:

(1) $P_t \Lambda = \Lambda Q_t, \forall t > 0$;
(2) локалните времена (*времето прекарано в* b) на X и Y в точката b съвпадат по разпределение.

При малко повече ограничения за Λ, $P_t \Lambda = \Lambda Q_t, \forall t > 0$, влече:

(1) $P_t^\dagger \Lambda = \Lambda Q_t^\dagger, \forall t > 0$;
(2) локалните времена (*времето прекарано в* b) на X и Y в точката b съвпадат по разпределение.

Също така показваме, че в случая когато $Q^\dagger$ е квази-дифузия, то нейното спектрално разлагане може да се прехвърли до спектрално разлагане на $P^\dagger$, ако имаме гореспоментатото преплитане.

В статията са изложени няколко конкретни примера относно обобщените полугрупи на Лагер, а използваната методология включва общата теория на Марковските процеси и функционален анализ.

8. Kolb, M and Savov, M., *Conditional survival distributions of Brownian trajectories in a one dimensional Poissonian environment in the critical case*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2017, Volume: 22, Pages: 1–22, DOI: 10.1214/17-EJP4468, Published: FEB 2017, eISSN: 1083-6489, IF (0.901 - 2017), **Quartile: Q3 (69/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека B е Брауново движение с дрифт $h > 0$ и е даден независим Поасонов точков процес на $\mathbb{R}$ с интензитет ν. Тогава Брауново движение в Поасонов облак от препятствия е дадено като B, убито при първо срещане на точка от Поасоновия точков процес. Нека тази среща се случва в случайния момент T. Тогава е известно, че

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{E}\left[e^{-\nu C_t}\right]$$

и $C_t = \max_{s \le t} B_s - \min_{s \le t} B_s$. Нека

$$\mathbb{Q}_t(\cdot) := \frac{e^{-\nu C_t}}{\mathbb{E}\left[e^{-\nu C_t}\right]} W_t(\cdot)$$

е условната мярка B да оцелее поне до момента t и W_t е Винеровата мярка. Когато $h < \nu$, поведението на процеса спрямо $\mathbb{Q}_t$ е добре изследвано при $t \to \infty$. Ние разглеждаме критичния случай $\nu = h$. Аналогично на случая $h < \nu$ показваме, че спрямо $\mathbb{Q}_t$ процесът се схожда към тримерен Беселов процес, стартиран от независима случайна величина с явно разпределение. Нещо повече, за крайната точка B_t доказваме, че спрямо $\mathbb{Q}_t$, $B_t/\sqrt{t}$ се схожда по разпределение към явна случайна величина и в този смисъл условният процес е под-балистичен. Последното е много интересно, защото в размерност по-голяма или равна на 2 поведението в критичния случай е балистично, т.е. скалира се с $1/t$.

Методологията разчита на формулата на Гирсанов да се сведе до случая $h = 0$, спектрално представяне на преходните вероятности на Брауновото движение, убито при изход от двустранен интервал, както и сумиране на Поасон за изследване на различни количества и тнт.

9. Kolb, M. and Savov, M., *Transience and recurrence of a Brownian path with limited local time*, ANNALS OF PROBABILITY, 2016, Volume: 44, Pages: 4083–4132, DOI: 10.1214/15-AOP1069, Published: NOV 2016, ISSN: 0091-1798, eISSN: 2168-894X, IF (1.940- 2010), **Quartile: Q1 (16/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека B_t е едномерно Брауново движение с локално време в нулата

$$L_t = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1_{|B_s| \le \epsilon} ds.$$

В тази статия отговаряме на отворени проблеми, поставени от Бенджамини и Берестики относно сходимостта на условните мерки

$$\mathbb{Q}_t(\cdot) = \mathbb{P}\left(\cdot \middle| L_s \le f(s), s \le t\right)$$

и свойствата на граничния процес в зависимост от f, ако той съществува. Ако

$$I(f)=\int_1^\infty \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt<\infty \tag{0.4}$$

и с някои минимални допускания за f, в Benjamini, I and Berestycki, N. (2011)"An integral test for the transience of a Brownian path with limited local time", Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. Volume 47, Number 2, 539-558, е показано, че $(\mathbb{Q}_t)_{t\geq 0}$ прекомпактна и всяка възможна граница отговаря на преходен случаен процес (не посещава 0 безкрайно далеч във времето). В тази работа доказваме, че $\mathbb{Q}=\lim_{t\to\infty}\mathbb{Q}_t$ и граничният процес е преходен. Нещо повече, до случаен момент от време $\mathcal{C}$, съвпадащ с последното посещение в нулата, граничният процес е Брауново движение с изискването $\{L_s\leq f(s), s\leq \mathcal{C}\}$ и след момента $\mathcal{C}$ слепваме тримерен Беселов процес със случаен знак $\pm$, избран с вероятност 1/2.

Когато $I(f)=\infty$, виж (0.4), и с допълнителни, но естествени ограничения за f, доказваме, че $\mathbb{Q}=\lim_{t\to\infty}\mathbb{Q}_t$ и граничният процес е възвратен. Това отговаря на един отворен проблем.

Бенджамини и Берестики забелязват нестрого, че когато граничният процес е възвратен, то не само $\mathbb{Q}(L_t\leq f(t))=1$, но и $\lim_{t\to\infty}\mathbb{Q}(L(t)\leq w(t)f(t))=1$ за някои $\lim_{t\to\infty}w(t)=0$. Този феномен е наречен *ентропично отблъскване*, защото условието завръщането в нулата да не е по-често от f изисква процесът да не се завръща по-често от fw или локалното време в нулата трябва да остане далеч от допустимата граница f. В тази статия ние описваме изцяло за кои функции w е вярно, че $\lim_{t\to\infty}\mathbb{Q}(L(t)\leq w(t)f(t))=1$. Това е доста по-точно от хипотезата на Бенджамини и Берестики, които учудващо добре улучват колко бързо w трябва да се схожда към нула, за да е изпълнено $\lim_{t\to\infty}\mathbb{Q}(L(t)\leq w(t)f(t))=1$.

Методологията се базира на обикновено диференциално уравнение и принципа на единия голям скок в смисъл, че за да удовлетвори $\{L_s\leq f(s), s\leq t\}$, то процесът с доминираща вероятност трябва да прави една все по-дълга екскурзия отвъд нулата.

10. Savov, M. and Wang, S., *Fluctuation limits of a locally regulated population and generalized Langevin equations*, INFINITE DIMENSIONAL ANALYSIS, QUANTUM PROBABILITY AND RELATED TOPICS, 2015, Volume: 18, Pages: 23 pages, DOI: 10.1142/S0219025715500095, Published: JUN 2015, ISSN: 0219-0257, eISSN: 1793-6306, IF (0.682 - 2015), **Quartile: Q3 (78/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

В тази статия се разглежда процес на популация с раждане, умиране, мутация (наличие на фенотип) и конкуренция. Най-общо допускаме, че имаме начална конфигурация $\nu_0=\sum_{j=1}^{I(0)}\delta_{X_j(0)}$ или точкова мярка върху компактното множество $\mathcal{X}\subseteq\mathbb{R}^d$, което описва фенотипа на популацията. Всички компоненти на еволюцията на тази система (раждане, смърт, конкуренция, мутация) могат да зависят от конкретния фенотип. Ако $\nu_0/n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{I_n(0)}\delta_{X_j(0)}$ се схожда към крайна мярка върху $\mathcal{X}$ с втори момент, то при общи условия за механизма на еволюция е известно, че $\nu_t/n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{I_n(0)}\delta_{X_j(t)}$ се схожда към крайна мярка $X(t)$ върху $\mathcal{X}$. В тази статия с някои рестриктивни изисквания доказваме, че $Y_t^n:=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\nu_t-X_t\right)$ се схожда в смисъл на Шварц (мерките са разпределение в теорията на Шварц) към разпределение в пространството на Шварц. Границата е решение на обобщено уравнение на Ланжеван. Така добихме централна гранична теорема за тези обекти.

Методологията включва разглеждането на $\langle Y_t^n,\phi\rangle$ за всяка тестова функция ϕ и доказателството, че $\lim_{n\to\infty}\langle Y_t^n,\phi\rangle=\langle Y_t,\phi\rangle$ е вярно в смисъл на крайномерните разпределения.

11. Aurzada, F., Kramm, T., and Savov, M., *First passage times of Lévy processes over a one-sided moving boundary*, MARKOV PROCESSES AND RELATED FIELDS, 2015, Volume: 21, Pages: 1024–2953, Published: MAR 2015, ISSN: 1024-2953, IF (0.484 - 2015), **Quartile: Q4 (100/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека X е едномерен процес на Леви. В тази статия изучаваме асимптотиката на количества от вида

$$\mathbb{P}\left(X_t\leq 1\pm f(t), 0\leq t\leq T\right),$$

където се налагат някои естествени ограничения за монотонната функция f, $f(0) < 1$. По-точно, ако знаем, че съществува $\delta > 0$, така че

$$\mathbb{P}\left(X_t \leq 1, 0 \leq t \leq T\right) = T^{-\delta + o(1)} \tag{0.5}$$

ние искаме да разберем за кои f също е вярно, че

$$\mathbb{P}\left(X_t \leq 1 \pm f(t), 0 \leq t \leq T\right) = T^{-\delta + o(1)}.$$

Количеството δ се нарича експонента на оцеляване, защото пресмята скоростта на намаляване на вероятността да останем под дадени криви когато $T \to \infty$.

Когато $||f'||_\infty < \infty, \int_1^\infty \left(f'(s)\right)^2 ds < \infty$, f' намаляваща и X има поне отрицателни скокове доказваме, че (0.5) води до

$$\mathbb{P}\left(X_t \leq 1 - f(t), 0 \leq t \leq T\right) = T^{-\delta + o(1)}.$$

Частен случай е $f(t) = t^\gamma, \gamma < \frac{1}{2}$, което подобрява някои предходни резултати, изискващи условието на Крамер за прилежащия процес на Леви.

Когато $||f'||_\infty < \infty, \int_1^\infty \left(f'(s)\right)^2 ds < \infty$ и X има двустранни скокове доказваме, че (0.5) води до

$$\mathbb{P}\left(X_t \leq 1 + f(t), 0 \leq t \leq T\right) = T^{-\delta + o(1)}.$$

Така когато е вярно условието на Спитцер за X с $\rho < \frac{1}{2}$, се знае, че асимптотичната релация е вярна за $f(t) = t^\gamma, \gamma < \rho$. Ние усилваме резултата до $\gamma < \frac{1}{2}$.

Методологията използва смяна на мярката на адитивни процеси и много тежка итеративна процедура с цел границата $1 \pm f(t)$ да се сведе до тривиалната граница зададена от константата 1.

Тази работа вече има подобрения от автори като Вахтел, Денисов и други, виж например за случайно блуждаене Denisov, D. and Wachtel, V. (2016) "*Exact asymptotics for the instant of crossing a curve boundary by an asymptotically stable random walk*", Probab. Theory Appl., 60 No.3, 481–500

12. Kolb, M. and Savov, M., *Exponential ergodicity of killed Lévy processes in a finite interval*, ELECTRONIC COMMUNICATIONS IN PROBABILITY, 2014, Volume: 14, Pages: 1–9, DOI: 10.1214/ECP.v19-3006, Published: MAY 2014, eISSN: 1083-589X, IF IF (0.619 - 2014), **Quartile: Q3 (89/122 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека X е едномерен процес на Леви и $T_a = \inf\left\{t > 0 : X_t \notin (0, a)\right\}, a > 0$. Разглеждаме полугрупата на процеса на Леви, убит при напускането на $(0, a)$, т.е. $\mathbb{P}\left(x + X_t \in \cdot, T_a > t\right)$ или еквивалентно $P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(x + X_t) 1_{T_a > t}\right]$ върху Банаховото пространство на всички ограничени непрекъснати функции на $(0, a)$ с условието $f(a) = f(0) = 0$. При относително минимални изисквания върху процеса на Леви X, доказваме, че P_t са компактни оператори върху това Банахово пространство. Благодарение на това и общата теория на неразложимите, позитивни полугрупи показваме, че за всяко $t > 0$, P_t има най-голяма собствена стойност с кратност 1 от вида $e^{-\rho_1 t}, \rho_1 > 0$, и положителна собствена функция W, така че $P_t W = e^{-\rho_1 t} W$. Нещо повече $P_t f = e^{-\rho_1 t} W \langle f, \tilde{W} \rangle \left(1 + o(e^{-t(Re(\rho_2) - \rho_1)})\right)$, където $\tilde{W}(x) = W(a - x)$ е кособствената функция на P_t, $Re(\rho_2) > \rho_1$ е реалната част на втората собствена стойност и $\langle f, g \rangle = \int_0^a f(x) g(x) dx$.

Тази бележка е съществено подобрение на добре известната статия Bertoin, J. (1997) "*Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Lévy processes in a finite interval*", Ann. Appl. Probab. Volume 7, Number 1 (1997), 156-169, която разглежда само процеси на Леви с отрицателни скокове и разчита на далеч по-общата, но съответно по-рестриктивна теория на Мейн и Туиди.

13. Aurzada, F., Doering, L. and Savov, M., *Small time Chung-type LIL for Lévy processes*, BERNOULLI, 2013, Volume: 19, Pages: 115–136, DOI: 10.3150/11-BEJ395, Published: JAN 2013, ISSN: 1350-7265, IF (1.296 - 2013), **Quartile: Q2 (34/119 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека X е процес на Леви. В този труд ние идентифицираме клас от функции $b_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$, които се изчисляват с помощта само на мярката на Леви Π на процеса X
(случаят $\sigma^2 > 0$, т.е. процесът на Леви е сумата на Брауново движение плюс скокове, е класически)

такива, че $\exists 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$, така че

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t} X_s}{b_{\lambda_1}(t)} \le 1 \le \liminf_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t} X_s}{b_{\lambda_2}(t)}.$$

Този тип закони се наричат "закони на Чънг за повторния логаритъм". За голям клас от процеси на Леви намираме $0 < \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2 < \infty$

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t} X_s}{b_{\lambda}(t)} = 1.$$

Техниките се базират на резултати в статията Aurzada, F. and Dereich, S. (2009). Small deviations of general Lévy processes. *Ann. Probab.*, **37**, 2066–2092., но по характера си са класически и използват оценки на малките девиации, подобрени леми на Борел-Кантели и др.

Резултатите са по-добри от съществуващите, тъй като условията за определянето на b_λ са аналитични, т.е. се пресмятат с помощта на Π, докато предходните зависят от израза $\liminf_{t\to 0} \mathbb{P}(X_t > 0) = \rho \in (0,1)$, който не беше лесно да се провери с помощта на Π по времето на изготвянето на тази публикация.

14. Kolb, M., Savov, M. and Wübcker, A., *(Non-) Ergodicity of a Degenerate Diffusion Modeling the Fiber Lay Down Process*, SIAM JOURNAL ON MATHEMATICAL ANALYSIS, 2013, Volume: 45, Pages: 1–13, DOI: 10.1137/120870724, Published: JAN 2013, ISSN: 0036-1410, eISSN: 1095-7154, IF (1.396 - 2013), **Quartile: Q1 (44/251, JCR-WoS)**, hyperlink

Тази разработка разглежда задача от индустрията, която поставя оптимизационни проблеми. При производството на филтри и материали за изолация често се използва следният подход: в турбулентен въздушен поток от височина се изпускат влакна от полимери (неподлежащи на тъкане), които падат върху стационарна или движеща се повърхност, като се усукват и образуват нерегулярна мрежа. Естествените въпроси са свързани с това дали добитата мрежа ще е достатъчно финна, за да филтрира или изолира добре. Ясно е, че тази нерегулярност води до по-голям разход на материал за по-финна мрежа спрямо обикновената мрежа, но простотата на методологията и по-големия набор от материали, които могат да се използват, компенсират цената.

Процесът на първо приближение се моделеира чрез уравненията:

$$d\xi_t = \tau(\alpha_t)dt + ve_1 dt; \quad d\alpha_t = \sigma dB_t - \nabla\varphi(\xi_t)\cdot\tau^{\perp}(\alpha_t)dt,$$

където $\tau(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Имаме, че ξ е кривата върху конвейра, която описва влакното, и v скоростта на повърхността. B е Брауново движение, описващо турбулентния въздушен поток. В статията изследваме различни свойства на Марковския процес (ξ, α) и добиваме общи условия за неговата геометрична ергодичност. Тя гарантира, че процесът ще се се завръща около центъра на координатната система (конвейра) и така ще се получи добро наслагване на влакната и съответно добър филтър/изолационен материал. Методите, които ползваме са класически и разчитат основно на намирането на точна функция на Ляпунов.

Summaries of papers included in the competition:

1. Kolb, M and Savov, M., *A characterization of the finiteness of perpetual integrals of Lévy processes*, BERNOULLI, 2020, Volume: 26, Pages: 1453–1472, DOI: 10.3150/19-BEJ1167, Published: JAN 2020, ISSN: 1350-7265, IF (1.393 - 2018), **Quartile: Q2 (43/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

In this paper we derive an analytic criterion for checking the finiteness/convergence of

$$I = \int_0^\infty f(x+\xi_s)ds, \ x \in \mathbb{R},$$

where $\xi = (\xi_s)_{s\ge 0}$ is a transient Lévy process and $f \ge 0$ is either a continuous locally bounded function or a locally bounded Borel function (in this case the one-dimensional distributions of ξ need to be absolutely continuous). Our results is general and encompasses previous studies but it involves the potential measure

$U(dx) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi_s \in dx)$ which presents some difficulties to practical application in all cases. It is worth mentioning that the criterion stems from the relation $I < \infty \iff \mathbb{E}[I] < \infty$ which we prove in the paper.

The methodology includes a non-trivial generalization of the techniques developed by Batty for similar problems related to the Brownian motion. Since in contrast to the Brownian motion the Lévy process is only right-continuous it is quite rare that the improvement of these techniques and not the development of new ones is sufficient for our results but the explanation lies in the fact that key stopping times are announceable and at them the Lévy process is almost surely continuous.

2. Savov, M. and Toaldo, B., *Semi-Markov processes, integro-differential equations and anomalous diffusion-aggregation*, ANNALS DE L'INSTITUT HENRI POINCARE, PROBABILITES ET STATISTIQUES, ISSN: 0246-0203, eISSN: 1778-7017, **accepted**, IF (1.152 - 2018), **Quartile: Q2 (56/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Starting with the work of Einstein in 1905 the Brownian motion and other diffusions are widely used in the modelling of different processes in physics, biology, economics, etc. However, it quickly becomes apparent that diffusions have their natural limitations and many real world processes exhibit behaviour atypical for standard diffusions. These processes are usually called *anomalous diffusions* and form a rich class which allows for the incorporation of memory and other dependencies. From analytical standpoint the behaviour of each anomalous diffusion can be described via an integro-differential equation which stems from particular laws of nature and modelling principles. From probabilistic standpoint the anomalous diffusions can be represented as a stochastic process, which most often is of the type of standard diffusion or Markov processes with random time change. Both viewpoints have their natural advantages and thus one of the main tasks is a particular integro-differential equation of interest to be linked with the expectations of a stochastic process and vice versa.

In this paper we consider Volterra equations, whose kernels are space dependent, that is

$$\frac{d}{dt}\int_0^t (q(s,x) - q(0,x))\, k(t-s,x)ds = Gq(t,x), \quad q(0,x) = u(x), \tag{0.6}$$

where G is the generator of a Feller process M and k is the tail of a Lévy measure which may be space dependent and the whole family of such measures is associated to an additive process σ. Setting $L = \sigma^{-1}$, we prove for a large class of generators G and additive processes that depend on the paths of M that $q(t,x) = \mathbb{E}_x[u(M(L(t)))]$ are the *mild solutions* to (0.1).

In the second part of the paper we consider the one-dimensional anomalous diffusion of variable order that is: $G = \Delta$ is the Laplacian and $k(s,x) = s^{-\alpha(x)}$ where $\alpha : \mathbb{R} \mapsto (0,1)$. In this case $X_t = B(L(t))$ where B is a Brownian motion and σ is a collection of stable subordinators with index depending on the position of B via α. Equation (0.1) takes the form

$$\frac{d^{\alpha(x)}}{dt^{\alpha(x)}} q = \Delta q, \quad q(0,x) = u.$$

In this paper we have proved a number of results concerning the aggregation phenomenon (the process spends a lot of time about the region where α attains its minimum). For clarity we will present a special case of the results in this work. Let $A = \{x : \alpha(x) = \min\{\alpha(y)\}\}$ be a finite interval and $2\min\{\alpha(y)\} < \limsup_{|x|\to\infty} \alpha(x)$. Then

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{X_s \in A}}{t} = 1; \quad \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t \in A) = 1.$$

Since $X_t = B(L(t))$ we can think of the evolution of this process as a motion in porous milieux/milieux with traps which withhold the particle for different time intervals before releasing it. Thus, if the strongest traps/pores (the smaller α the stronger the trap) sufficiently dominate the others the process will mostly linger in the vicinity of these traps.

The methods of the paper range from general theory of Markov processes to laws of iterated logarithms for Lévy processes.

3. Dimov, I. and Savov, M., *Probabilistic analysis of the single particle Wigner Monte-Carlo method*, MATHEMATICS AND COMPUTERS IN SIMULATION, 2020, Volume: 173, Pages: 32–50, DOI: 10.1016/j.matcom.2020.01.008, Published: JAN 2020, ISSN: 0378-4754, IF (1.409 - 2018), **Quartile: Q2 (87/254 Mathematics, Applied, JCR-WoS)**, hyperlink

In this paper we consider the Wigner equation

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,m,t) + Cmt\nabla_x(x,m,t)f = V *_m f(x,m,t), \tag{0.7}$$

where $x \in \mathbb{R}^d$ is the position, m is the wave number, C is a particular physical constant, V is a suitable potential which via the discrete convolution $*_m$ describes the change in the wave number should it occur. If we denote by $\bar{f}(x,m,t) = f(x+Cmt,m,t)$ then along the characteristics $x+Cmt$ the equation is reformulated as

$$\bar{f} = \bar{f}_i + \mathcal{K}\bar{f}, \tag{0.8}$$

where $\bar{f}_i$ encodes the initial conditions and $\mathcal{K}$ is an explicit bounded linear operator in the Hilbert space $L^2\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{N}, [0,\tau]\right)$,$\tau \in (0,\infty]$.

If $A(x,m,t)$ is an observable of the system that we wish to compute and $\bar{A}(x,m,t) = A(x+Cmt,m,t)$ then with $\mathcal{K}^*$ being the adjoint operator of $\mathcal{K}$ it is true that

$$\langle A, f\rangle = \langle \bar{A}, \bar{f}\rangle = \langle \bar{A}, \bar{f}_i\rangle + \langle \mathcal{K}^*\bar{A}, \bar{f}\rangle.$$

We prove that $g = \mathcal{K}^*g + \bar{A} \implies \langle \bar{f}, \bar{A}\rangle = \langle \bar{f}_i, g\rangle$. Also g has the representation in convolution series $g = \sum_{n\geq 0}\mathcal{K}^{*n}\bar{A}$ and therefore $\langle \bar{f}, \bar{A}\rangle = \langle \bar{f}_i, g\rangle = \sum_{n\geq 0}\langle \mathcal{K}^{*n}\bar{A}, \bar{f}_i\rangle$.

At the next step we study the action of $\mathcal{K}^*$ which is shown to be equivalent to the evolution of a particle with random sign, random wave number and linear motion whose characteristics change at random times and in accordance with a kernel depending on the potential V. Henceforth, $\langle \mathcal{K}^{*n}\bar{A}, \bar{f}_i\rangle$ can be represented by an expectation of the particle at time τ (the moment we are interested in) initiated from random position and wave number according to $\bar{f}_i$ and having undergone n changes up to τ.

In this paper depending on the parameters we investigate the number of terms in the convolution series one needs so that a good approximation of $\langle A, f\rangle$ is achieved. If τ is the time horizon of the simulation we show that theoretically we cannot discard $27\tau\gamma^*$ number of terms. γ^* depends on the mass of the potential V and is frequently of order 10^{15} which cannot be compensated by τ that is usually of the order of mili/nano seconds. Thus, we theoretically explain the instability of this method which had been observed in simulations.

Our methods employ the Berry-Esseen bounds from probability theory, suitable interpretation of the terms of the convolution series and the right embedding of the problem in the correct Hilbert space.

4. Mutafchiev, L. and Savov,M., *On the Maximal Multiplicity of Block Sizes in a Random Set Partition*, RANDOM STRUCTURES AND ALGORITHMS, 2020, Volume: 56, Pages: 867–891, DOI: 10.1002/rsa.20891, Published: MAY 2020, eISSN: 1098-2418, IF (1.008 - 2018), **Quartile: Q2 (90/214 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

Let $[n] = \{1,2,\cdots,n\}$. We denote by Σ_n all the representations of $[n]$ as unions of non-intersecting subsets of $[n]$. We introduce the uniform probability measure P in Σ_n. It is well-known that as $n\to\infty$ the number of the subsets in the typical decomposition of $[n]$ is of size $W(n)$ where W is the Lamber function given by $W(n)e^{W(n)} = n$. In this paper we consider the maximal multiplicity of the typical decomposition of $[n]$ that is if $\sigma \in \Sigma_n$ we study $M_n(\sigma) := \max_j \mu_\sigma(j)$ where $\mu_\sigma(j)$ is the number of subsets with j elements in σ. Let $f_n = W(n) - \lfloor W(n)\rfloor$, where $\lfloor W(n)\rfloor$ is the largest integer smaller than $W(n)$. Then if over a subsequence $(n_k)_{k\geq 1}$, it holds that $\lim_{k\to\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{4}}\min\{f_{n_k}, 1-f_{n_k}\}\sqrt{n_k}/\log^{\frac{7}{4}} n_k = u \in [0,\infty]$ then

$$\lim_{k\to\infty}\frac{M_{n_k} - R_{n_k}}{\sqrt{R_{n_k}}} \overset{d}{=} \max\{Z_1, Z_2 - u\},$$

where Z_1, Z_2 are independent standard normal random variables and

$$R_n := \frac{W^{\lfloor W(n) \rfloor}(n)}{\lfloor W(n) \rfloor!}.$$

The methodology we employ includes the saddle point method and a representation of the generating function of the distribution of M_n multiplied by Bell's numbers B_n via an infinite product of moment generating functions of independent Poisson random variables $V_j, j \geq 1$ with parameters $\lambda_j = W^j(n)/j!$. The saddle point method is utilized when the generating function is inverted and one needs very precise estimates of the quantities involved both for different regions of the contour along which the generating function is inverted using the Cauchy formula and for the discovering those Poisson random variables that play a role in the limit.

5. Loeffen, R., Patie, P. and Savov, M., *Extinction Time of Non-Markovian Self-Similar Processes, Persistence, Annihilation of Jumps and the Fréchet Distribution*, JOURNAL OF STATISTICAL PHYSICS, 2019, Volume: 175, Pages: 1022–1041, DOI: 10.1007/s10955-019-02279-3, Published: MAR 2019, ISSN: 0022-4715, eISSN: 1572-9613, IF (1.513 - 2018), **Quartile: Q2 (23/55 Physical, Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

When we model the evolution of a given process we are often interested in what the extinction time of the process is. Let the development of a system be given by $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_t)_{t \geq 0}$, then the extinction time is given by $\mathbb{T} = \inf\{t \geq 0 : \mathbb{X}_t \leq 0\}$. What can we say about $\mathbb{T}$? In principle more information can be obtained when the process $\mathbb{X}$ is Markov and especially when $\mathbb{X}$ is a self-similar Markov process since then $\mathbb{T}$ can be expressed in terms of an exponential functional of Lévy process. In this paper we consider a class of non-Markovian stochastic processes and their extinction times. This is one of the very few papers that do not impose the Markov property for $\mathbb{X}$.

Let $X = (X_t)_{t \geq 0}$ be a self-similar Markov process with an index of self-similarity $\alpha > 0$, started from $x > 0$ and let independently from X, $\chi = (\chi_t)_{t \geq 0}$ be a non-decreasing self-similar Markov process with an index of self-similarity $\beta > 0$, started from 0. Set $\lambda_t = \inf\{s > 0 : \chi_s > t\}$. Then we construct $\mathbb{X}_t = X_{\lambda_t}, t > 0$. Since λ_t is non-decreasing with a period of constancies depending on the jumps of χ then this time change can be thought of as the addition of traps to the system which hold the process fixed for some units of time. We prove that $\mathbb{T} \stackrel{d}{=} \chi_T \stackrel{d}{=} \chi_1 \times T^{\frac{1}{\beta}}$, where $T = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 0\}$. This allows us to evaluate the Mellin transform of $\mathbb{T}$ ($\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$) via the Mellin transforms of χ_1, T. Since χ_1 and T via the Lamperti representation can be linked to suitable exponential functionals of Lévy processes with characteristic exponents $\Psi_\alpha(z) = -\phi_+^\alpha(-z)\phi_-^\alpha(z), \phi_\beta(z)$ we find a general form for $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ in terms of the Bernstein-Gamma functions $W_{\phi_\beta}, W_{\phi_+^\alpha}, W_{\phi_-^\alpha}$. This with an application of Patie, P. and Savov,M. (2018) "*Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes*", *Electronic Journal of Probability*, **23**, 1–101, **IF: 0.994** allows the study of the smoothness of the law of $\mathbb{T}$, its asymptotics and to present particular examples when $\mathbb{T}$ is associated to the Frechet distribution.

6. Zaevski, T.S., Kounchev, O. and Savov, M., *Two frameworks for pricing defaultable derivatives*, CHAOS, SOLITONS AND FRACTALS, 2019, Volume: 123, Pages: 309–319, DOI: 10.1016/j.chaos.2019.04.025, Published: APR 2019, ISSN: 0960-0779, IF (3.064 - 2018), **Quartile: Q1 (3/55 Physics, Mathematical, JCR-WoS)**, hyperlink

The purpose of this paper is to present two essentially different schemes for deriving the partial differential equations (PDE) for the price of the so-called defaultable derivatives. In the first one the asset price is represented as a solution to a stochastic differential equation (SDE), stopped at stochastic time. The second one explores the idea of adding a jump process assuming that the stopping time is the moment of its first jump. We investigate also the role of the loss rate which represents the loss of the asset at the default moment. In both cases we examine various assumptions and dependencies between the underlying asset, the stopping time and the loss rate. We separately examine the cases when the underlying asset price is driven by a Brownian motion or by a Lévy process. We give a method to solve the PDEs for the derivative prices by the use of the so-called default premium. As an example we derive a closed form formula for the price of a contingent convertible bond.

7. Patie, P., Savov, M. and Zhao, Y., *Intertwining, Excursion Theory and Krein Theory of Strings for Non-self-adjoint Markov Semigroups*, ANNALS OF PROBABILITY, 2019, Volume: 47, Pages: 3231–3277, DOI: 10.1214/19-AOP1338, Published: NOV 2019, ISSN: 0091-1798, eISSN: 2168-894X, IF (2.085- 2018), **Quartile: Q1 (23/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

In 1966 Kac asks the unexpected question: Can we hear the shape of the drum? Mathematically, it means: is it possible, modulo to congruency, to uniquely determine Ω from the eigenvalues with their multiplicity of the Laplace operator $\frac{1}{2}\Delta$ on Ω? The answer to this question is in general negative but one of its equivalent formulations via intertwining of semigroups $P_t^{\Omega_j}, t \geq 0$, on $L^2(\Omega_j), j = 1, 2$,

$$P_t^{\Omega_1}\Lambda = \Lambda P_t^{\Omega_2},$$

where $\Lambda : L^2(\Omega_2) \mapsto L^2(\Omega_1)$ is linear invertible operator shows that under some additional assumptions for Λ such as positivity, Ω_1 and Ω_2 must be congruent. The intertwining has been studied from a more general standpoint and it has been shown that semigroups with Robin boundary conditions (mixture of Dirichlet and von Neumann) cannot intertwine.

In this paper we consider somewhat different yet related problem. We have two strong Markov processes X, Y in a Lusin space E with a boundary point $b \in E$. We consider the killed semigroups $P_t^\dagger f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_t), t < T_b\right]$ and $Q_t^\dagger f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(Y_t), t < T_b\right]$ where T_b is the moment of hitting b. We allow for whichever extension of the killed semigroups across b and $Q_t f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(Y_t)\right]$. We wish to answer the question: if $P^\dagger, Q^\dagger$ or P, Q intertwine with linear closed and injective operator Λ what can we establish for the associated Markov processes?

We have the following relations: $P_t^\dagger\Lambda = \Lambda Q_t^\dagger, \forall t > 0$, implies:

(1) $P_t\Lambda = \Lambda Q_t, \forall t > 0$;
(2) the local times (*the time spend at* b) of X and Y at b coincide in law.

Under some additional assumptions on Λ, $P_t\Lambda = \Lambda Q_t, \forall t > 0$ implies:

(1) $P_t^\dagger\Lambda = \Lambda Q_t^\dagger, \forall t > 0$;
(2) the local times (*the time spend at* b) of X and Y at b coincide in law.

We also show that in the case when $Q^\dagger$ is quasi-diffusion its spectral expansion can be transferred to the one of $P^\dagger$ provided we have the aforementioned intertwining.

In the paper we provede several examples related to the generalized Laguerre semigroups and the methodology we employ invokes the general theory of Markov processes and functional analysis.

8. Kolb, M and Savov, M., *Conditional survival distributions of Brownian trajectories in a one dimensional Poissonian environment in the critical case*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2017, Volume: 22, Pages: 1–22, DOI: 10.1214/17-EJP4468, Published: FEB 2017, eISSN: 1083-6489, IF (0.901 - 2017), **Quartile: Q3 (69/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let B be a Brownian motion with drift $h > 0$ and let us have a Poisson point process on $\mathbb{R}$ with intensity ν. Then a Brownian motion in a Poissonian cloud of obstacles is given by B killed upon the first hit of a point from the Poisson process. Let the killing time be denoted by T. Then it is known that

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{E}\left[e^{-\nu C_t}\right]$$

and $C_t = \max_{s \leq t} B_s - \min_{s \leq t} B_s$.
Set

$$\mathbb{Q}_t(\cdot) := \frac{e^{-\nu C_t}}{\mathbb{E}\left[e^{-\nu C_t}\right]} W_t(\cdot)$$

the conditional measure of B to survive up to time t where W_t is the Wiener measure. When $h < \nu$ the behaviour of the processes under $\mathbb{Q}_t$ is well studied as $t \to \infty$. We consider the critical case $\nu = h$. Analogously, to the case $h < \nu$ we show that under $\mathbb{Q}_t$ the process converges to a Bessel three process mixed with explicit and independent of it random variable. Moreover, for the endpoint process B_t, we establish that under $\mathbb{Q}_t$, $B_t/\sqrt{t}$ converges in distribution to explicit random variable and in this sense the process is sub-ballistic. The latter is very interesting, because in dimension larger or equal than 2, the behaviour in the critical case is ballistic, i.e. it scales with $1/t$.

The methodology utilizes Girsanov's transform to reduce the case to $h = 0$, spectral representations of the transition probabilities of the Brownian motion killed upon exit from two-sided interval, Poisson summation for subtle analysis of different quantities, etc.

9. Kolb, M. and Savov, M., *Transience and recurrence of a Brownian path with limited local time*, ANNALS OF PROBABILITY, 2016, Volume: 44, Pages: 4083–4132, DOI: 10.1214/15-AOP1069, Published: NOV 2016, ISSN: 0091-1798, eISSN: 2168-894X, IF (1.940- 2010), **Quartile: Q1 (16/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let B_t be a one-dimensional Brownian motion with local time at zero

$$L_t = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t 1_{|B_s|\leq \epsilon} ds.$$

In this paper we give answers to open questions left unsolved by Benjamini and Berestycki regarding the convergence of the conditional measures

$$\mathbb{Q}_t\left(\cdot\right) = \mathbb{P}\left(\cdot \middle| L_s \leq f(s), s \leq t\right)$$

and the properties of the limit process depending on f, provided that it exists. If

$$I(f) = \int_1^\infty \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt < \infty \tag{0.9}$$

and with some minimal conditions on f, in Benjamini, I and Berestycki, N. (2011)"An integral test for the transience of a Brownian path with limited local time", Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. Volume 47, Number 2, 539-558, it is shown that $(\mathbb{Q}_t)_{t\geq 0}$ is tight and each possible limit corresponds to a transient process (does not visit 0 infinitely often far off in time). In this paper we prove that $\mathbb{Q} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{Q}_t$ and that the limit process is transient. Moreover, the process up to a random time $\mathcal{C}$ is basically the Browian motion conditioned on $\{L_s \leq f(s), s \leq \mathcal{C}\}$ and after the moment of final return to zero, that is $\mathcal{C}$, we splice a three dimensional Bessel process with a random sign $\pm$ chosen with probability 1/2.

When $I(f) = \infty$, see (0.4), and with some further, but natural restrictions for f, we prove that $\mathbb{Q} = \lim_{t\to\infty} \mathbb{Q}_t$ and that the limit process is recurrent. This answers a particular conjecture.

Benjamini and Berestycki non-rigorously observe that whenever the limit process is recurrent then not only $\mathbb{Q}(L_t \leq f(t)) = 1$ but $\lim_{t\to\infty} \mathbb{Q}(L(t) \leq w(t)f(t)) = 1$ for some $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$. This phenomenon is called *entropic repulsion* because the condition on the local time to be bounded by f in fact necessitates that the local time is bounded by fw or the local time has to stay away from the allowed upper bound for its growth f. In this paper we fully describe the functions w for which it is true that $\lim_{t\to\infty} \mathbb{Q}(L(t) \leq w(t)f(t)) = 1$. This goes deeper than the conjecture by Benjamini and Berestycki who guess the possible rate of decay of w so that $\lim_{t\to\infty} \mathbb{Q}(L(t) \leq w(t)f(t)) = 1$.

The methodology is based on an ordinary differential equation and the one large jump principle, that is: to satisfy $\{L_s \leq f(s), s \leq t\}$ the process with dominating probability has to make one longer and longer excursion away from zero.

10. Savov, M. and Wang, S., *Fluctuation limits of a locally regulated population and generalized Langevin equations*, INFINITE DIMENSIONAL ANALYSIS, QUANTUM PROBABILITY AND RELATED TOPICS, 2015, Volume: 18, Pages: 23 pages, DOI: 10.1142/S0219025715500095, Published: JUN 2015, ISSN: 0219-0257, eISSN: 1793-6306, IF (0.682 - 2015), **Quartile: Q3 (78/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

This paper considers a population process with birth, death, mutation (phenotype availability) and competition. In general, we assume we have the initial configuration $\nu_0 = \sum_{j=1}^{I(0)} \delta_{X_j(0)}$ or the point mass on the compact set $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ which encodes the phenotype of the inviduals. All characteristics of the evolution of the system (birth, death, mutation and competition) may depend on the particular phenotype. If $\nu_0/n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{I_n(0)} \delta_{X_j(0)}$ converges to a finite measure on $\mathcal{X}$ with finite second moment, then under general assumptions for the mechanism of evolution it is well-known that $\nu_t/n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{I_n(0)} \delta_{X_j(t)}$ converges to a finite measure $X(t)$ on $\mathcal{X}$. In this paper under some more restrictive conditions we prove that $Y_t^n := \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\nu_t - X_t\right)$ converges in the sense of Schwarz (measures are distributions in the Schwarz theory) to the a Schwarz distribution. The limit is a solution to a general Langevin equation. In this sense we have obtained a central limit theorem for these objects.

The methodology includes the study of $\langle Y_t^n, \phi\rangle$ for each test function ϕ and the proof that $\lim_{n\to\infty}\langle Y_t^n, \phi\rangle = \langle Y_t, \phi\rangle$ holds in the sense of finite dimensional distributions.

11. Aurzada, F., Kramm, T., and Savov, M., *First passage times of Lévy processes over a one-sided moving boundary*, MARKOV PROCESSES AND RELATED FIELDS, 2015, Volume: 21, Pages: 1024–2953, Published: MAR 2015, ISSN: 1024-2953, IF (0.484 - 2015), **Quartile: Q4 (100/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let X be a one-dimensional Lévy process. In this paper we study the asymptotic of the quantities of the type

$$\mathbb{P}\left(X_t \le 1 \pm f(t), 0 \le t \le T\right),$$

where some natural restrictions are imposed on the non-decreasing function f, $f(0) < 1$. In more detail if we know of the existence of $\delta > 0$, such that

$$\mathbb{P}\left(X_t \le 1, 0 \le t \le T\right) = T^{-\delta + o(1)} \tag{0.10}$$

we wish to establish for which f it is also true that

$$\mathbb{P}\left(X_t \le 1 \pm f(t), 0 \le t \le T\right) = T^{-\delta + o(1)}.$$

The quantity δ is called the survival exponent, since it evaluates the speed of decay of the probability to stay below given curves when $T \to \infty$.

When $||f'||_\infty < \infty, \int_1^\infty \left(f'(s)\right)^2 ds < \infty$, f' is decreasing and X has at least negative jumps we show that (0.10) yields to

$$\mathbb{P}\left(X_t \le 1 - f(t), 0 \le t \le T\right) = T^{-\delta + o(1)}.$$

In particular, when $f(t) = t^\gamma, \gamma < \frac{1}{2}$, we improve upon previous results, which require the validity of the Cramer's condition for the underlying Lévy process.

When $||f'||_\infty < \infty, \int_1^\infty \left(f'(s)\right)^2 ds < \infty$ and X possesses two-sided jumps we establish that (0.10) leads to

$$\mathbb{P}\left(X_t \le 1 + f(t), 0 \le t \le T\right) = T^{-\delta + o(1)}.$$

Thus, when the Spitzer's condition for X is valid with $\rho < \frac{1}{2}$ the asymptotic relation is known for $f(t) = t^\gamma, \gamma < \rho$. We strengthen the result to $\gamma < \frac{1}{2}$.

The methodology includes a change of measure of additive processes and a very technical iterative procedure in order to reduce the boundary $1 \pm f(t)$ to case when the boundary is simply 1.

This work has already been improved by a number of researchers such as Wachtel, Denisov and others, see e.g. for random walks Denisov, D. and Wachtel, V. (2016) "*Exact asymptotics for the instant of crossing a curve boundary by an asymptotically stable random walk*", Probab. Theory Appl., 60 No.3, 481–500, IF: 0.52.

12. Kolb, M. and Savov, M., *Exponential ergodicity of killed Lévy processes in a finite interval*, ELECTRONIC COMMUNICATIONS IN PROBABILITY, 2014, Volume: 14, Pages: 1–9, DOI: 10.1214/ECP.v19-3006, Published: MAY 2014, eISSN: 1083-589X, IF IF (0.619 - 2014), **Quartile: Q3 (89/122 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let X be a one-dimensional Lévy process and $T_a = \inf\{t > 0 : X_t \notin (0, a)\}, a > 0$. Take the semigroup of the Lévy process killed upon exit from $(0, a)$, i.e. $\mathbb{P}(x + X_t \in \cdot, T_a > t)$ or equivalently $P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(x + X_t)1_{T_a > t}\right]$ on the Banach space of all bounded, continuous functions on $(0, a)$ with boundary conditions $f(a) = f(0) = 0$. Under minimal assumptions on the Lévy process X, we prove that P_t are compact operators on the aforementioned Banach space. Thanks to the latter and the general theory of irreducible, positive semi-groups we show that for each $t > 0$, P_t has a largest simple eigenvalue of the form $e^{-\rho_1 t}, \rho_1 > 0$, and a positive eigenfunction W, such that $P_t W = e^{-\rho_1 t} W$. Moreover, $P_t f = e^{-\rho_1 t} W \langle f, \tilde{W} \rangle \left(1 + o(e^{-t(Re(\rho_2)-\rho_1)})\right)$, where $\tilde{W}(x) = W(a-x)$ is the co-eigenfunctions of P_t, $Re(\rho_2) > \rho_1$ is the real part of the second eigenvalue and $\langle f, g \rangle = \int_0^a f(x)g(x)dx$.

This short note is a significant improvement of the well-known paper Bertoin, J. (1997) "*Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Lévy processes in a finite interval*", Ann. Appl. Probab. Volume 7, Number 1 (1997), 156-169, which tackles only spectrally negative Lévy processes and employs the far more general, but much more restrictive theory of Meyn and Tweedie.

13. Aurzada, F., Doering, L. and Savov, M., *Small time Chung-type LIL for Lévy processes*, BERNOULLI, 2013, Volume: 19, Pages: 115–136, DOI: 10.3150/11-BEJ395, Published: JAN 2013, ISSN: 1350-7265, IF (1.296 - 2013), **Quartile: Q2 (34/119 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let X be a Lévy process. In this paper we have identified a class of functions $b_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$ which can be computed solely via the Lévy measure Π of the process X (the case when $\sigma^2 > 0$, that is the Lévy process is a sum of a Brownian motion and a jump process, is classical) such that $\exists 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$, for which it holds true that

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t} X_s}{b_{\lambda_1}(t)} \le 1 \le \liminf_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t} X_s}{b_{\lambda_2}(t)}.$$

Results of this type ($\liminf$) are called Chung type of the law of the iterated logarithm.
For a large class of Lévy processes we determine $0 < \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2 < \infty$ such that

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t} X_s}{b_\lambda(t)} = 1.$$

The main techniques are based on the work Aurzada, F. and Dereich, S. (2009). Small deviations of general Lévy processes. *Ann. Probab.*, **37**, 2066–2092. but in principle the methods are classical and use small deviation estimates, improved versions of the Borel-Cantelli lemma and others.

The results of this paper are better than previous ones since the conditions for the existence of b_λ are analytical, that is they are computed with the help of Π, whereas previous conditions involve the probabilistic limit $\liminf_{t\to 0} \mathbb{P}(X_t > 0) = \rho \in (0,1)$ which could not be easily verified by the input data Π at the time of this publication.

14. Kolb, M., Savov, M. and Wübcker, A., *(Non-) Ergodicity of a Degenerate Diffusion Modeling the Fiber Lay Down Process*, SIAM JOURNAL ON MATHEMATICAL ANALYSIS, 2013, Volume: 45, Pages: 1–13, DOI: 10.1137/120870724, Published: JAN 2013, ISSN: 0036-1410, eISSN: 1095-7154, IF (1.396 - 2013), **Quartile: Q1 (44/251, JCR-WoS)**, hyperlink

This paper stems from an industrial problem which presents a couple of interesting questions. The production of filters and insulation materials is often done by the following process: in a turbulent air flow at some height fibers of some polymers (not suitable for weaving) are released, those fibers land on stationary or moving surface whilst interweaving between each other and forming a irregular net. The question which naturally arises is whether the produced net is fine enough so that it serves the purpose of insulation or filtering. It is clear that the irregularity of these nets leads to the increase of the input material compared to regular nets, but this is compensated by the simplicity of the industrial process and the fact that wider range of materials can be utilized.

The industrial process is described by the equation:

$$d\xi_t = \tau(\alpha_t)dt + ve_1 dt; \quad d\alpha_t = \sigma dB_t - \nabla\varphi(\xi_t)\cdot\tau^\perp(\alpha_t)dt,$$

where $\tau(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. We have that ξ is the curve that the fiber attains on the surface and v is the speed of the conveyor. B is a Brownian motion describing the turbulent air flow. In the paper we study the properties of the Markov process (ξ, α) and we obtain general conditions for its geometric ergodicity. The latter guarantees that the process will return about the center of the coordinate system (conveyor) which will result in a good overlapping of the fiber and thereby in the formation of a good filter or insulation material. The methods are classical and revolve around the identification of a suitable Lyapunov function.

Резюмета на статии, непредставени за участие в конкурса:

1. Savov, M., *Curve crossing for the reflected Lévy process at zero and infinity*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2008, Volume: 13, Pages: 157–172, DOI: 10.1214/EJP.v13-483, Published: JAN 2008, eISSN: 1083-6489, IF(1.131 - 2008), **Quartile: Q2 (36/92 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

За едномерен процес на Леви $(X_t)_{t\geq 0}$ с отразен процес $R_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s - X_t$ се разглеждат времевите моменти на пресичане на траекторията на R_t на полиномни криви, т.е. $\tau_\kappa(r) = \inf\{t \geq 0 : R_t > r(t+1)^\kappa\}, \kappa \geq 0$. Основният резултат гласи, че

$$\tau_\kappa(r) < \infty \ a.s. \iff \mathbb{E}\left[X_1^-\right]^{1/\kappa} = \infty,\, \kappa > 1$$

$$\tau_\kappa(r) < \infty \ a.s. \iff \mathbb{E}\left[X_1^-\right]^{1/\kappa} = \infty, \text{ или } \liminf_{t\to\infty} \frac{X_t}{t^\kappa} = \infty, \kappa \leq 1,$$

където $X_1^- = \max\{-X_1, 0\}$. Както се вижда, необходимите и достатъчни условия (НДУ) зависят от поведението на X и се отнасят за далеч по-сложния проблем, касаещ $\tau_\kappa(r)$. Също така, критерии, зависещи само от случайната величина X_1, са намерени за $\mathbb{E}\left[\tau_{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}\left[X_1^2\right] r)\right] < \infty, r > 0$ и $\mathbb{E}\left[\tau_1(r)\right] < \infty, r > 0$.

Количеството $\limsup_{t\to 0} \frac{R_t}{t^\kappa} = a_\kappa \in [0, \infty]$ е пресметнато за всички процеси на Леви. Припомняме, че $\overline{\Pi}_-(\cdot) = \int_{-\infty}^{\cdot} \Pi(dx)$. Когато процесът на Леви е с крайна вариация, a_κ зависи от дрифта $d \geq 0$ и дали $\int_0^1 \overline{\Pi}_-(x^\kappa)\, dx \in [0, \infty]$ е крайно число или не. Когато процесът на Леви е с неограничена вариация, то a_κ зависи от това дали $\int_0^1 \overline{\Pi}_-(x^\kappa)\, dx \in [0, \infty]$ е крайно число или не и от крайността на $\liminf_{t\to 0} \frac{X_t}{t^\kappa}$.

В периода 2004-2008 имаше доста засилен интерес към това как процеси на Леви и отразените процеси на Леви , R_t, пресичат криви. Резултатът е основен, особено в частта си, когато $t \to 0$, тъй като в този случай процесът на Леви не може да се приближи със случайно блуждаене.

2. Savov, M. *Small time two-sided LIL behaviour for Levy processes at zero*, PROBABILITY THEORY AND RELATED FIELDS, 2009, Volume: 144, Pages: 79–98, DOI: 10.1007/s00440-008-0142-1, Published: Mar 2008, ISSN: 0178-8051, eISSN: 1432-2064, IF(1.373 - 2009), **Quartile: Q2 (29/100 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

За даден процес на Леви X с основни параметри (σ^2, γ, Π), σ^2 - Браунов коефициент, γ - дрифт и Π - $\sigma-$крайната мярка, описваща скоковете на процеса, и функция $b : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ с някои естествени, но слаби ограничения основният резултат на статията е семейство от интегрални критерии $I(a) := I(a; b, \sigma, \gamma, \Pi), a > 0$, за които е вярно, че

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = \inf\{c : I(c) < \infty\} \in [0, \infty] \iff \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt < \infty$$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = \infty \text{, ако } \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt = \infty.$$

Този резултат има две основни предимства: той е общ и се прилага към огромен клас от функции b и $I(a)$ зависи само от (σ^2, γ, Π). Така фундаменталният вероятностен проблем за изчислението на $\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} \in [0, \infty]$ се свежда до аналитичната задача да се пресметне $I(a)$ и $\int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt$. Така за дадена детерминистична функция b можем да установим директно как X расте спрямо b.

Нещо повече, използвайки

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = \inf\{a : I(a) < \infty\} \in [0, \infty] \iff \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt < \infty$$

, ние можем да конструираме функцията $b^*(t)$, така че $\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = 1$. Това става чрез избор на $b(t)$, така че $\inf\{a : I(a) < \infty\} = 1$. За съжаление това не е валидно за всеки процес X, тъй като понякога $\int_0^1 \overline{\Pi}(b^*(t))dt = \infty$. Намирането в явен вид на b^*, така че $\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b^*(t)} = 1$, е все още отворен проблем, макар че съществуват НДУ за нейното съществуване.

3. Doney, R., Maller, R. and Savov, M., *Renewal theorems and stability for the reflected process*, STOCHASTIC PROCESSES AND THEIR APPLICATIONS, 2009, Volume: 119, Pages: 1270–1297, DOI: 10.1016/j.spa.2008.06.009, Published: APR 2009, ISSN: 0304-4149, IF(1.543 - 2009), **Quartile: Q2 (26/100 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1$, е случайно блуждаене със стъпка X и $R_n = \max_{k\leq n}\{S_k\} - S_n$ е отразеният процес. Нека $\tau(r) = \min\{n \geq 1 : R_n > r\}, r > 0$, е първият момент на преминаване над ниво $r > 0$ на процеса R_n.

Когато $\mathbb{E}[X] < 0, \mathbb{E}[|X|] < \infty$ или $\mathbb{E}[X] = 0, \mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ доказваме, че

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[R_{\tau(r)}\right]}{r} = 1.$$

В първия случай допълнително $\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}[\tau(r)]/r = -1/\mathbb{E}[X]$ и във втория

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathbb{E}[\tau(r)]}{r^2} = \frac{1}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Също така се разискват и други ситуации, когато някое от условията $\mathbb{E}[X] < 0, \mathbb{E}[|X|] < \infty$ или $\mathbb{E}[X] = 0, \mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ е нарушено.

Означавайки $e_{-a,b}(r) = \mathbb{P}\left(S_{T_{[-a,b]}(r)} < 0\right), a > 0, b > 0$, където $T_{[-a,b]}(r) = \min\{n \geq 1 : S_n \notin [-ar, br]\}$ с условието $e_{-a,a}(\lambda r) \asymp e_{-a,a}(r), \forall \lambda > 1$, се добива резултата, че

$$A := \limsup_{r\to\infty} \frac{R_{\tau(r)}}{r} \in [\max\{1, c\}, 1 + c],$$

където $c \geq 0$ може да се пресметне явно. От особен интерес е случаят, когато $c = 0$ или $c = \infty$, тъй като тогава A може да се пресметне точно съответно 1 или ∞. Основният, но може би непреодолим недостатък е изискването $e_{-a,a}(\lambda r) \asymp e_{-a,a}(r), \forall \lambda > 1$, т.е. $\exists 0 < C_1(\lambda) < C_2(\lambda) < \infty$, такива че $C_1(\lambda)e_{-a,a}(r) \leq e_{-a,a}(\lambda r) \leq C_2(\lambda)e_{-a,a}(r)$ за достатъчно големи r.

Теоремите от този труд не са класически. Резултати относно позицията на случайното блуждаене, след като премине ниво $r > 0$, т.е. поведението на $S_{T(r)}, T(r) = \min\{n \geq 1 : S_n > r\}$, са известни. Те зависят от фундаменталните свойства на случайното блуждаене - независими и стационарни нараствания. В случая с R_n тези свойства са нарушени и методите са доста по-сложни. Това налага и изискването $e_{-a,a}(\lambda r) \asymp e_{-a,a}(r), \forall \lambda > 1$. В допълнение ще уточним, че проблеми свързани с пресмятането на $e_{-a,a}(r)$ са едни от най-сложните в теория на случайните разходки и затова по-нататъчен качествен напредък по изчислението на $A = \limsup_{r\to\infty} \frac{R_{\tau(r)}}{r}$ изглежда невъзможен.

4. Doney, R. and Savov, M., *The asymptotic behaviour of densities related to the supremum of a stable process*, ANNALS OF PROBABILITY, 2010, Volume: 38, Pages: 316–326, DOI: doi:10.1214/09-AOP479, Published: JAN 2010, ISSN: 0091-1798, eISSN: 2168-894X, IF(1.470- 2010), **Quartile: Q2 (28/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека X е устойчив процес на Леви с индекс $\alpha \in (0, 2)$ и $S_1 = \sup_{s\leq 1} X_s$. Ако $f(x) = \mathbb{P}(S_1 \in dx)/dx, x > 0$, то основен и труден въпрос е да се определи асимптотичното поведение на $f(x), x \to 0, x \to \infty$. Знае се поведението на $\mathbb{P}(S_1 > x) \sim A\alpha^{-1}x^{-\alpha}, x \to \infty$ и $\mathbb{P}(S_1 \leq x) \sim Bx^{\alpha\rho}$, където $\rho = \mathbb{P}(X_1 > 0)$ е коефициента на позитивност. Тези резултати са класически приложения на Тауберовите теореми. Производната $f(x)$ е много по-трудна за изучаване. Използвайки теория на екскурзиите (excursion theory) на процеса извън минимума и максимума, ние добихме уравнения, представящи $f(x)$ чрез основни количества от теория на екскурзиите и оттам - асимтотиката.

Тази работа за момента 2008-2010 беше в основата на поредица от изследвания на максимума на общия процес на Леви и по-задълбочени разработки върху S_1 за устойчиви процеси на Леви. Броят на цитатите е атестат за това.

Трябва да се отбележи, че използвайки дълбок комплексен анализ, Кузнецов (2011), виж по-долу, успява да добие асимптотично развитие в ред на $f(x)$ и дори за клас от параметри α - да добие развитие в ред на $f(x)$. Нашият вероятностен метод дава по-ограничени резултати, но е доста по-общ. Това се вижда от разработките на Шомон (2013) и Шомон и Малечки (2013+), които обобщават и използват нашата методология за общи процеси на Леви, когато фактът, че много количества са неявни не позволява използването на комплексен анализ.

Тъй като S_1 може да се представи като явна трансформация на конкретен експоненциален функционал на процеси на Леви и предвид развитието на общата теория на експоненциалните функционали, проблемите, свързани с S_1, вече са просто частен случай на тази теория, която в най-пълния си вид е разработена в Пати и Савов, виж по-долу.

Библиографична справка:

(1) Kuznetsov, A. (2011) "*On extrema of stable processes*", *Ann. Probab.* **39**, No.3, 1027–1060, **IF: 1.79**
(2) Chaumont, L. (2013) "*On the law of the supremum of Lévy processes*", *Ann. Probab.* **41**, No.3A, 1191-–1217, **IF: 1.79**
(3) Chaumont , L. and Malecki, J. (2013) "*The asymptotic behavior of the density of the supremum of Lévy processes*", arXiv preprint arXiv:1310.1587
(4) Patie, P. and Savov,M. (2018) "*Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes*", *Electronic Journal of Probability*, **23**, 1–101, **IF: 0.901**

5. Doney, R. and Savov, M., *Right inverses of Lévy processes*, ANNALS OF PROBABILITY, 2010, Volume: 38, Pages: 1390–1400, DOI: 10.1214/09-AOP515, Published: JUL 2010, ISSN: 0091-1798, eISSN: 2168-894X, IF (1.470- 2010), **Quartile: Q2 (28/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека X_t е процес на Леви. В тази статия ние характеризираме всички процеси на Леви, които притежават дясно-непрекъснат процес, т.е. за даден X съществува нарастващ процес на Леви $(K_x)_{x\geq 0}$, така че $X_{K_x} = x$ поне за $x \in [0, \varsigma]$, където $\varsigma > 0$ п.с. . Проблемът за съществуването се свързва директно с потенциалната теория на Марковските процеси и НДУ за неговото съществуване са дадени във Винкел (2002). Големият недостатък на тези НДУ е, че те зависят от количества, които са практически неизчислими при зададени основни характеристики на X, т.е. (σ^2, γ, Π). В нашата статия ние доказваме, използвайки теория на флуктуациите на процесите на Леви, че когато $\sigma^2 = 0$

$$\exists (K_x)_{x\geq 0} \iff \int_0^1 \frac{x^2}{\left(\int_0^x \int_y^1 \overline{\Pi}_-(s)dsdy\right)^2}\Pi(dx) < \infty,$$

където $\overline{\Pi}_-(x) = \Pi(\{-\infty, -x\}), x > 0$. В случая, когато $\sigma^2 > 0$ се знае, че $\exists K_x$. Така проблемът за съществуването на дясно-непрекъснат процес се свежда до изчислението на конкретен интеграл, зависещ само от Π.

Библиографична справка:

(1) Winkel, M. (2002) "*Right inverses of non-symmetric Lévy processes*", *Ann. Prob.*, **30**, 382-415

6. Doering, L. and Savov, M., *An application of renewal theorems to exponential moments of local times*, ELECTRONIC COMMUNICATIONS IN PROBABILITY, 2010, Volume: 38, Pages: 263–269, DOI: 10.1214/ECP.v15-1558, Published: JUN 2010, eISSN: 1083-589X, IF (0.559 - 2010), **Quartile: Q4 (88/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Тази кратка статия използва стандартни резултати, за да подобри асимптотични резултати за трансформацията на Лаплас на времето на престой в дадена точка на даден Марковски процес. Ако

L_t^i е акумулираното посещение на състояние i, започвайки от i, то ние разглеждаме $\mathbb{E}\left[e^{\gamma L_t^i}\right]$ за $\gamma \geq 0$ и показваме, че в зависимост от γ асимптотиката на $\mathbb{E}\left[e^{\gamma L_t^i}\right]$ при $t \to \infty$ може да се пресметне с помощта на вероятностите на преход $p_s(i,i)$, т.е. вероятностите да стратираме от i и да бъдем в i след s единици от време.

Резултатите илюстрират силата на теория на възстановяването за доказването на нови или подобряването на известни резултати. Основната цел на публикацията е популяризирането на теория на възстановяването за опростяване на доказателствата на редица проблеми, които иначе използват спектрална теория.

7. Bertoin, J. and Savov, M., *Some applications of duality for Lévy processes in a half-line*, BULLETIN OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY, 2010, Volume: 43, Pages: 97–111, DOI: 10.1112/blms/bdq084, Published: OCT 2010, eISSN: 1469-2120 , IF (0.63 - 2010), **Quartile: Q2 (122/279 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека ξ_t е процес на Леви с $\infty > \mathbb{E}[\xi_1] \geq 0$ (плюс естествено техническо ограничение, което няма да въвеждаме за яснота). Нека $T_x = \inf\{t \geq 0 : \xi_t \geq x\}, x > 0$. Знае се, че

$$\lim_{x\to\infty}\left(\xi_{T_x} - x, x - \xi_{T_x-}\right) \stackrel{d}{=} (O, U),$$

където O, U се наричат съответно *"надвишаващо ниво на преминаване"* (*overshoot*) и *"отстояние преди преминаване"* (*undershoot*). Нека също $\xi_t^{\uparrow}(x)$ означава консервативния Марковски процес (т.е. с безкраен "живот"), който описва процеса на Леви ξ, стартиран от $x \geq 0$ с условие да приема само положителни стойности (*conditioned to stay positive*), виж Бертоан (1996) за цялостна експозиция на теорията на процесите на Леви.

С означенията по-горе нека означим процеса

$$\eta_t = \begin{cases} \xi_t + O & t \geq 0 \\ -\xi_{-t}^{\uparrow}(U) & t < 0 \end{cases},$$

където $\xi, \xi^{\uparrow}, (O, U)$ са независими копия на величините и процесите въведени по-горе. Тоест при зададени (O, U) стартираме надясно обикновен процес на Леви и прилепяме за отрицателни времена t процеса $-\xi_{-t}^{\uparrow}(U)$. В нашата статия ние изследваме свойствата на процеса η. Процесът има следните забележителни свойства:

- **I:** ако T_x е отново моментът на преход над x на η, то $(\eta_{T_x+t})_{t\in\mathbb{R}} \stackrel{w}{=} (x + \eta_t)_{t\in\mathbb{R}}$, т.е. времевата транслация с количество T_x е еквивалентна на пространствената транслация с количество x;
- **II:** $\eta_t \stackrel{d}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\xi_{t-T_x}^x - x\right), t \in \mathbb{R}$, т.е. η е слабата граница на траекториите на първоначалния процес на Леви, транслиран във времето в момента на преминаване на ниво x и в последствие нивото се устремява към безкрайност;
- **III:** предходните свойства позволяват фундаменталното представяне на положителните себеподобни Марковски процеси, започващи от 0 като смяна на времето и трансформация на η. Нека X_t^x е себеподобен положителен Марковски процес, т.е. за всяко $c > 0, x \geq 0$ имаме $(X_t^{cx})_{t\geq 0} \stackrel{d}{=} \left(cX_{tc^{-\alpha}}^x\right)_{t\geq 0}$, за някое $\alpha > 0$. Тогава имаме забележителното представяне

$$X_t^0 = e^{\eta_{\tau_t}},$$

  където τ_t е подходяща смяна на времето.

Последното свойство е от особено значение, тъй като дава пълнота на така наречените представяния на Ламперти на положителните себеподобни Марковски процеси, **стартиращи от** $x > 0$. Този резултат дава и случая $x = 0$.

В момента са налични редица статии, които се занимават с представянията на Ламперти на реалнозначни себеподобни Марковски процеси на много променливи. В тези случаи липсва представянето им в изчистена форма, каквато е $X_t^0 = e^{\eta_{\tau_t}}$.

Библиографична справка:

(1) Bertoin, J. (1996) *Lévy Processes.* Cambridge University Press.
(2) Larbi Alili, L., Chaumont, L., Graczyk, P. and Żak, T. (2017) "*Inversion, duality and Doob h-transforms for self-similar Markov processes*", ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, **22**, No. 22, 18 pages, **IF:0.901**

8. Savov, M., *Small time one-sided LIL behaviour for Lévy processes at zero*, JOURNAL OF THEORETICAL PROBABILITY, 2010, Volume: 23, Pages: 209–236, DOI: 10.1007/s10959-008-0202-6, Published: MAR 2010, ISSN: 0894-9840, eISSN: 1572-9230, IF (0.600 - 2010), **Quartile: Q3 (81/110 Statistics and Probability)**, hyperlink

Естественото продължение на проблемите в Savov, M. (2009) "*Small time two-sided LIL behavior for Levy processes at zero*", *Probab. Theory and Related Fields* **144**, No.1-2, 79–98, **IF: 1.39** е да се изследва количеството

$$L(b) := \limsup_{t\to 0} \frac{X_t}{b(t)} \in [0,\infty]$$

или с други думи да изучаваме *едностранния закон за повторния логаритъм* за процеси на Леви X. В тази статия ние постигаме следните нови резултати, които се отнасят за поведението, когато $t \to 0$:

I: дефинираме конкретна функция b_0 с помощта на на мярката на Леви Π и доказваме, че

$$\limsup_{t\to 0} \frac{X_t}{b_0(t)} \in [1, 1.8] \iff \int_0^1 \Pi\left(\{b_0(t),\infty\}\right) dt < \infty;$$

II: тъй като b_0 не винаги е правилната функция, която да описва ръста на X, виж I, то ние разработваме интегрален критерий, който за произволна функция $b(t)$ (с някои дребни стандартни ограничения), ни показва дали $L(b) = 0$, $L(b) \in (0,\infty)$ или $L(b) = \infty$.

Основните трудности при тези задачи е да се изработи техника, специфична за процесите на Леви, тъй като поведението, когато $t \to 0$, няма аналог при случайното блуждаене. Връзката със случайното блуждаене дава индикации за свойствата на процесите на Леви, когато $t \to \infty$, и методологията обикновено се базира на добре известно влагане на случайно блуждаене в разглеждания процес на Леви. Например, $(X_n)_{n\geq 1} = (X_1 + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_n - X_{n-1}))_{n\geq 1}$ дефинира случайно блуждаене.

По принцип *едностранния закон за повторния логаритъм* е по-сложен от двустранния закон за повторния логаритъм, разгледан в Savov, M. (2009) "*Small time two-sided LIL behavior for Levy processes at zero*", *Probab. Theory and Related Fields* **144**, No.1-2, 79–98, **IF: 1.39**. Това се отразява в самите резултати, които са по-неточни и не позволяват изчислението на $L(b)$.

9. Savov, M. and Winkel, M., *Right inverses of Lévy processes: the excursion measure in the general case*, ELECTRONIC COMMUNICATIONS IN PROBABILITY, 2010, Volume: 38, Pages: 572–584, DOI: 10.1214/ECP.v15-1590, Published: DEC 2010, eISSN: 1083-589X, IF (0.559 - 2010), **Quartile: Q4 (88/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

В тази кратка статия ние развиваме идеите от Doney, R. and Savov, M. (2010) "*Right inverses of Lévy processes*", *Ann. of Probab.* **38**, No.4, 1390–1400, **IF: 1.47**. Нека примомним проблема. Нека X_t е процес на Леви. В споменатата статия характеризираме всички процеси на Леви, които притежават дясно-непрекъснат процес, т.е. за даден X съществува нарастващ процес на Леви K_x така че $X_{K_x} = x$ поне за $x \in [0, \varsigma]$, където $\varsigma > 0$ п.с..

Следваща естествена стъпка е характеризирането на процеса K_x, който е и нарастващ процес на Леви (*субординатор*). Целта на тази статия е да опише мярката на Леви, асоциирана с K_x. Доказваме, че скоковете на K_x са сумата от следните количества: вземаме една екскурзия на процеса X извън максимума (т.е. ***времето до достигането*** на нов максимум на X, след като попаднем в текущ максимум); пресмятайки разликата от новия максимум на X, реализиран чрез тази екскурзия и предходния максимум, да приемем, че разликата е T; стартираме процес на Леви от ниво T

и вземаме ***времето до първо завръщане в нулата***. Събирайки дължините на двете времена получаваме типичния скок на K_x. Погледнато през призмата на случайните разходки, резултатът е естествен, но добиването му за процеси на Леви изисква по-трудна техника.

10. Chan, T., Kyprianou A. and Savov, M., *Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes*, PROBABILITY THEORY AND RELATED FIELDS, 2011, Volume: 150, Pages: 691–708, DOI: 10.1007/s00440-010-0289-4, Published: APR 2010, ISSN: 0178-8051, eISSN: 1432-2064, IF (1.870 - 2011), **Quartile: Q1 (25/116 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека, както е обикновено, X е процес на Леви. Нека допуснем, че X има само отрицателни скокове. Тогава казваме, че процесът е спектрално-отрицателен процес на Леви. Тъй като този процес има скокове, само когато се движи надолу, то доста количества имат полуявен вид. В основата на много свойства на тези процеси стои така наречената *скалираща функция* (*scale function*). Вероятностно, ролята на тази функция най-добре се вижда в съотношението

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_{(a,\infty)} < \tau_{(-\infty,0)}\right) = \frac{W(x)}{W(a)},$$

където $\tau_B = \inf\{t > 0 : X_t \in B\}$ и $a \geq x \geq 0$. Тоест функцията описва вероятността на процеса X, стартиран от позиция x, да премине a преди да премине под 0.

Функцията W присъства в много други количества и съотношения. Нейните свойства са от интерес не само за теорията, но и за приложенията, особено за теория на застраховането, където случайните процеси на приходи и разходи естествено се моделират със спектрално-отрицателни процеси на Леви.

За да се използва скалиращата функция в редица изследвания, е необходимо да се знае гладкостта й. В този труд ние изледваме гладкостта на скалиращата функцията в зависимост от трите основни характеристики на процеса на Леви (σ^2, γ, Π). Почти изчерпателно показваме, че

$$W \in C^{n+3}([0,\infty)) \iff \Pi\left(\{-\infty, -x)\right\} \in C^n([0,\infty)), \text{ ако } \sigma^2 > 0,$$

включително и че винаги $W \in C^2([0,\infty))$, когато $\sigma^2 > 0$. Също така разискваме и случая, когато $\Pi\left(\{-\infty, 0\}\right) < \infty$ и показваме, че при някои допълнителни условия

$$W \in C^{n+1}([0,\infty)) \iff \Pi\left(\{-\infty, -x\}\right) \in C^n([0,\infty)) \text{ ако } \sigma^2 = 0,\ \Pi\left(\{-\infty, 0\}\right) < \infty.$$

Методът ни се основава на факта, че W удовлетворява уравнение на Волтера от втори вид, базирано на мярката на Леви Π. Макар и добре изучени, защото решенията на тези уравнения се развиват в ред на фон Нойман, когато $\Pi\left(\{-\infty, 0\}\right) = \infty$, изледването на този ред е технически нелека задача. Използвайки различни основни техники от анализа, ние получаваме горните резултати.

Когато $\sigma^2 = 0, \Pi\left(\{-\infty, 0\}\right) = \infty$, уравненията на Волтера са от първи вид и изледването им е доста по-трудно. За този случай нямаме добити резултати и съществуват няколко хипотези за зависимостта на гладкостта на W от гладкостта на Π.

11. Doering, L. and Savov, M., *(Non) Differentiability and asymptotics for renewal densities of subordinators*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2011, Volume: 16, Pages: 470–503, DOI: 10.1214/EJP.v16-860, Published: MAR 2011, eISSN: 1083-6489, IF (0.713 - 2011), **Quartile: Q3 (71/116 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека ξ_s е нарастващ Леви процес с положителен дрифт, т.е. $\xi_s = \delta s + \sum_{v \leq s} \Delta_v$ е сума на линеен дрифт и положителни скокове. Нека

$$U^q(dx) = \int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{P}\left(\xi_t \in dx\right) dt,\ q \geq 0$$

са $q-$потенциалите. Когато $\delta > 0$ знаем, че $U^q(dx) = u^q(x)dx$ и е в сила уравнението

$$\delta u^q(x) = 1 - \int_0^x u^q(x-y)\left(\bar{\Pi}(x) + q\right) dy, \tag{0.11}$$

където Π е мярката на Леви на скоковете на ξ и $\bar{\Pi}(x) = \Pi\{x, \infty\}, x > 0$. Използвайки (0.11), ние доказваме, че u^q се развива в ред от конволюции на $\bar{\Pi}(x) + q$

$$u^q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\delta^{n+1}} \left(1 * (\bar{\Pi}(x) + q)\right)^{*n}(x).$$

Това уравнение и неговата трансформация на Фурие позволяват в детайл да се изследва гладкостта на u^q в зависимост от гладкостта на $\bar{\Pi}$. Най-забележителният резултат е, че $(u^q)'$ е непрекъсната в x тогава и само тогава когато x не е атом на Π, т.е. $\Pi(\{x\}) = 0$. В противен случай $(u^q)'(x+) - (u^q)'(x-) = \delta^{-2}\Pi(\{x\})$.

12. Kuznetsov A., Pardo J.C. and Savov, M., *Distributional properties of exponential functionals of Lévy processes*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2012, Volume: 17, Pages: 1–35, DOI: 10.1214/EJP.v17-1755, Published: JAN 2012, eISSN: 1083-6489, IF (0.785 - 2012), **Quartile: Q3 (70/119 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека ξ, η са два независими процеса на Леви. Дефинираме формално

$$I := I(\xi, \eta) = \int_0^\infty e^{\xi_{s-}} d\eta_s.$$

Когато $\eta_s = s$, то имаме стандартен експоненциален функционал, тъй като $\xi_s = \xi_{s-}, ds-$ почти сигурно. Нека $m(dx) := \mathbb{P}(I \in dx)$.

Тъй като I е стационарното разпределение на класа стационарни процеси на Орнщайн-Уленбек с генератор $\mathcal{L}$, имаме за всяко $f \in Domain(\mathcal{L})$

$$0 = \langle \mathcal{L}f, m\rangle = \langle f, \mathcal{L}^* m\rangle,$$

където $\mathcal{L}^*$ е генераторът на дуалния процес на Орнщайн-Уленбек. След това с помощта на теория на разпределенията на Шварц доказваме, че дори $\mathcal{L}^* m = 0$, което дава интегро-диференциално уравнение за разпределението на I, т.е. $m(dx)$.

Във втората част на статията изследваме $m(dx) = \kappa(x)dx$ в случая когато $\eta_s = \sigma B_s + \mu s$, т.е. когато имаме Брауново движение. Доказваме различни свойства за $\kappa(x)$ като поведението при $x \to 0, x \to \pm\infty$, гладкостта на функцията κ и дори нейното развитие в ред. За изследването използваме трансформацията на Мелин $\mathcal{M}(s) = \mathbb{E}\left[I^{s-1}, I > 0\right]$. Доказваме редица нейни представяния и с помощта на хипергеометричните функции изучаваме нейните свойства като аналитична функция, нейното поведение по протежение на комплексните прави, т.е. поведението на $\mathcal{M}(x + i\theta), \theta \in \mathbb{R}$. Последващо обръщане на трансформацията на Мелин ни дава възможност да получим свойсвата на $\kappa(x)$, изброени по-горе.

13. Pardo, J.C., Patie, P. and Savov, M., *A Wiener-Hopf type of factorization for the exponential functional of Lévy processes*, JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY, 2012, Volume: 96, Pages: 930–956, DOI: 10.1112/jlms/jds028, Published: SEP 2012, ISSN: 0024-6107, eISSN: 1469-7750, IF (0.804 - 2012), **Quartile: Q1 (69/296 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека ξ_t е процес на Леви. Да дефинираме експоненциалните функционали (с неявно допускане за крайност, т.е. $\lim_{t\to\infty} \xi_t = -\infty$) на безкраен хоризонт

$$I = \int_0^\infty e^{\xi_s} ds.$$

Нека

$$\Psi(z) = \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right]\right) = bz + \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{zy} - 1 - zy1_{|y|<1}\right)\Pi(dy).$$

Да означим с $\mathcal{M}(s) = \mathbb{E}\left[I^{s-1}\right]$ транформацията на Мелин на I, която е добре дефинирана поне за $s = 1 + i\mathbb{R}$. Знае се, че, когато $\Psi(z)$ е аналитична функция поне на ивицата $\Re(z) \in (0, a)$ и $\Psi(\Re(z)) < 0$, за $\Re(z) \in (0, a)$, то

$$\mathcal{M}(z + 1) = -\frac{z}{\Psi(z)}\mathcal{M}(z), \text{ за } \Re(z) \in (0, a). \quad (0.12)$$

Използвайки общата факторизацията на Винер-Хопф за Ψ,

$$\Psi(z) = -\phi_+(z)\phi_-(z), \tag{0.13}$$

където $\phi_\pm$ са свързани функциите на Бернщайн, (0.12) се записва като

$$\mathcal{M}\,(z+1) = \frac{z}{\phi_+(z)\phi_-(z)}\mathcal{M}\,(z) \text{ за } \Re(z) \in (0,a). \tag{0.14}$$

Ясно е, че решенията на системата

$$\mathcal{M}_1(z+1) = \frac{1}{\phi_+(z)}\mathcal{M}_1(z); \quad \mathcal{M}_2(z+1) = \frac{z}{\phi_-(z)}\mathcal{M}_2(z) \tag{0.15}$$

дават, че $\mathcal{M}_1(z) \times \mathcal{M}_2(z)$ е решение на (0.12). Предимството на (0.15) се състои във факта, че уравненията са дефинирани върху полуравнините $\Re(z) < a, \Re(z) > 0$, като и двете имат решение поне върху $\Re(z) \in (0,a)$. При допускането, че $\Pi(dy)1_{y>0} = \pi(y)dy1_{y>0}$ и π - ненарастваща, се показва, че $1/\phi_+(z) = -z/\psi(z)$, където $\psi(z) = \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{zY_1}\right]\right)$ и Y е Леви процес само с положителни скокове. Така, използвайки формата на (0.12), зад уравненията в (0.15) стоят трансформациите на Мелин на експоненциален функционал на Y ($\mathcal{M}_1$) и на експоненциален функционал на субординатора, описващ процеса на намаляване на ξ ($\mathcal{M}_2$), да кажем I_1 и I_2. Ако решението на (0.12) е единствено в пространството на трансформациите на Мелин на положителните случайни величини, то моментално $\mathcal{M}(z) = \mathcal{M}_1(z) \times \mathcal{M}_2(z)$ и е вярна факторизацията $I \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$, където I_1 е независима от I_2.

Да се докаже единственост на решението на (0.12), се използва факта, че I е *единствено* стационарно разпределение на стационарен Орнщайн-Уленбек процес и $I_1 \times I_2$ дефинира такова. Допускането, че $\Psi(z)$ е аналитична функция поне на ивицата $\Re(z) \in (0,a)$ и $\Psi(\Re(z)) < 0$, за да е изпълнено (0.12), се премахва благодарение на гранична процедура. Големите скокове на ξ над ниво $A > 0$ се орязват; след това за прилежащия експоненциален функционал се показва факторизацията $I(A) \stackrel{d}{=} I_1(A) \times I_2(A)$ и накрая се демонстрира, че, когато $A \to \infty$, количествата $I(A), I_1(A), I_2(A)$ се схождат по разпределение към I, I_1, I_2. Така $I \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$ е в сила.

Понеже I_1, I_2 са много по-лесни за изучаване, то с помощта на $I \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$ добихме много нови резултати и опростихме значително съществуващи доказателства. Така например подточка на Следствие 2.1 съдържа изцяло статията "Law of the absorption time of positive self-similar Markov processes P. Patie, публикувана в Annals of Probability.

14. Patie, P. and Savov, M., *Extended factorizations of exponential functionals of Lévy processes*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2012, Volume: 17, Pages: 1–22, DOI: 10.1214/EJP.v17-2057, Published: MAY 2012, eISSN: 1083-6489, IF (0.785 - 2012), **Quartile: Q3 (67/117 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека ξ_t е процес на Леви. Да дефинираме експоненциалните функционали

$$I_{e_q} = \int_0^{e_q} e^{-\xi_s} ds,$$

където e_q, $q > 0$, е независима от ξ експоненциално разпределена случайна величина. Нека

$$\Psi(z) = \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{zX_1}\right]\right) = bz + \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{zy} - 1 - zy1_{|y|<1}\right)\Pi(dy).$$

Да означим с $\mathcal{M}_q\,(s) = \mathbb{E}\left[I_{e_q}^{s-1}\right]$ трансформацията на Мелин на I_{e_q}, която е валидна поне за $s = 1 + i\mathbb{R}$. Знае се, че, когато $\Psi(z)$ е аналитична функция поне на ивицата $\Re(z) \in (0,a)$ и $\Psi(\Re(z)) < 0$, за $\Re(z) \in (0,a)$, то

$$\mathcal{M}_q\,(z+1) = -\frac{z}{\Psi(z) - q}\mathcal{M}_q\,(z)\,, \text{ за } \Re(z) \in (0,a). \tag{0.16}$$

В резултат на факторизацията на Винер-Хопф, която е валидна и за $\Psi(z) - q$, стигаме да същата система (0.15) като в Pardo, J.C., Patie, P. and Savov, M. (2012) "*A Wiener-Hopf type of factorization for the exponential functional of Lévy processes*", *J. of London Math. Soc.* **96** (2), 930–956, **IF: 0.80**.

Проблемът е, че макар да имаме същите допускания за Π, за да покажем, че $\mathcal{M}(z) = \mathcal{M}_1(z) \times \mathcal{M}_2(z)$ и да изведем валидността на факторизацията $I_{e_q} \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$, където I_1 е независима от I_2, сега не можем да използваме, че I_{e_q} е стационарно разпределение на обобщен процес на Орнщайн-Уленбек. Това се разрешава с така наречените T_β-трансформации на $\Psi(z) - q$, дефинирани чрез $T_\beta\left(\Psi(z) - q\right) = \frac{z}{z+\beta}\left(\Psi(z+\beta) - q\right)$, които позволяват I_{e_q}, I_1, I_2 да се доближат, когато $\beta \to 0$, с редица експонециални функционали на процеси на Леви на *безкраен хоризонт*, чиито процеси на Леви имат характеристични експоненти $\Psi_\beta = T_\beta\left(\Psi(z) - q\right)$ и техните респективни факторизации. Така се показва, че $I_{e_q} \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$. В статията са доказани редица нови свойства за разпределението на I_{e_q}.

15. Patie, P. and Savov, M., *Exponential functional of Lévy processes: Generalized Weierstrass products and Wiener-Hopf factorization*, COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE, 2013, Volume: 351, Pages: 393–396, DOI: 10.1016/j.crma.2013.04.023, Published: MAY 2013, ISSN: 1631-073X, IF (0.425 - 2013), **Quartile: Q3 (221/302 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

Тази публикация играе ролята на анонс за статията Patie, P. and Savov, M. (2018) "*Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes*", *Electronic Journal of Probability*, **23**, 1–101, **IF: 0.994**, която се явява естествения завършек на развитието на теорията на експоненциалните функционали на процеси на Леви.

16. Savov, M., *On the range of subordinators*, ELECTRONIC COMMUNICATIONS IN PROBABILITY, 2014, Volume: 19, Pages: 1–10, DOI: 10.1214/ECP.v19-3629, Published: DEC 2014, eISSN: 1083-589X, IF (0.619 - 2014), **Quartile: Q3 (89/122 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Нека X е нарастващ процес на Леви (субординатор) с безкраен брой скокове на краен интервал от време. Нека $N(t,\delta)$ е минималният брой интервали с дължина най-много $\delta > 0$, които покриват траекторията $\{X_s : s \leq t\}$. Да означим рекурсивно $T_1(\delta) = \inf\{s > 0 : X_s > \delta\}$, $T_{k+1}(\delta) = \inf\left\{s > T_k(\delta) : X_s - X_{T_k(\delta)} > \delta\right\}$. Тогава, за $k \geq 1$, $\{N(t,\delta) \geq k\} = \{T_k(\delta) \leq t\}$. Количествата

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\ln(N(1,\delta))}{\ln(\delta^{-1})}; \quad \limsup_{\delta \to 0} \frac{\ln(N(1,\delta))}{\ln(\delta^{-1})},$$

се наричат респективно долна и горна размерност на кутийките. За субординатори те са пресметнати чрез поведението на безкрайност на $\Phi(\lambda) = -\ln\left(\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_1}\right]\right)$. Понеже Φ по принцип се счита известно, то всичко, свързано с тези размерности, е практически пресметнато на логаритмично ниво, т.е. $\ln(N(1,\delta))$.

Оказва се, че обаче, че разполагаме с много по-точна информация на истинската скала или за $N(1,\delta)$. Нека $U(\delta) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(X_t \leq \delta\right) dt$. Тогава в тази кратка статия показваме, че почти сигурно

$$\lim_{\delta \to \infty} U(\delta) N(1,\delta) = 1,$$

където $U(\delta) \asymp \frac{1}{\Phi(\delta^{-1})}$. В частния случай, когато $\Phi(\lambda) \sim \lambda^\alpha$, имаме, че $N(1,\delta) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\delta^\alpha}$. На логаритмична скала константата $\Gamma(1+\alpha)$ ще бъде загубена.

Методологията е базирана на класически вероятностни неравенства, лема на Борел-Кантели и закони за големите числа. Тази работа е подобрена в Barker, Adam "Fractal-Dimensional Properties of Subordinators", Journal of Theoretical Probability Volume 32, Issue 3, Pages 1202-1219, 2019, където е показана и централна гранична теорема за $N(1,\delta)$.

17. Patie, P. and Savov, M., *Cauchy problem of the non-self-adjoint Gauss-Laguerre semigroups and uniform bounds of generalized Laguerre polynomials*, JOURNAL OF SPECTRAL THEORY, 2017, Volume: 7, Pages: 797–846, DOI: 10.4171/JST/178, Published: SEP 2017, ISSN: 1664-039X, eISSN: 1664-0403, IF (0.844 - 2017), **Quartile: Q2 (108/302 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

Операторът $L : f(x) \mapsto xf''(x) + (1-x)f(x), x > 0$, е генераторът на класическата полугрупа на Лагер $(Q_t)_{t\geq 0}$. Тя е стационарна със стационарна мярка $\mathbf{e}(x)dx = e^{-x}dx, x > 0$ и L е самоспрегнат в

Хилбертовото пространство $L^2(\mathbf{e})$. За всяко $f \in L^2(\mathbf{e})$ е вярно спектралното разлагане

$$Q_t f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \mathcal{L}_n(x) \langle f, \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}},$$

където $\mathcal{L}_n, n \geq 0$, са полиномите на Лагер. В статията въвеждаме семейство от несамоспрегнати интегрално-диференциални генератори $L_{\alpha,\beta}, \alpha \in (0,1), \beta \geq 1 - \frac{1}{\alpha}$. Наричаме ги оператори на Гаус-Лагер. В статията показваме, че с всеки от тях е асоцииран стационарен Фелеров процес със стационарна мярка $\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(x)dx = \frac{x^{\frac{1}{\alpha}+\beta-1} e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}}}{\Gamma(\alpha\beta+1)} dx$. Ако означим с $(P_t)_{t\geq 0}$ тези полугрупи, то доказваме, че за всеки набор от α, β съществува позитивен ограничен линеен необратим оператор Λ, така че за всяко $t > 0$

$$\Lambda Q_t = P_t \Lambda.$$

Това ни позволява да пресметнем собствените и кособствените функции на $(P_t)_{t\geq 0}$ и да докажем, че съществува $T_\alpha > 0$ такова, че за $t > T_\alpha$ и всяко $f \in L^2(\mathbf{e}_{\alpha,\beta})$,

$$P_t f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \Lambda \mathcal{L}_n(x) \langle f, \Lambda^* \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}_{\alpha,\beta}}.$$

Този резултат е крайъгълен в статията Patie, P. and Savov, M. (2020+) "*Spectral expansions for generalized Laguerre semigroups*", *Memoirs of American Mathematical Society*, 179 pages, **accepted** и илюстрира следния любопитен феномен: спектралните разлагания на несамоспрегнати полугрупи може да са валидни след положителен праг, в случая T_α.

Основните техники са от функционалния и комплексния анализ, както и включват много техническо приложение на метода на седлото, за да се оценят равномерно кособствените функции в необходимите норми.

18. Patie, P. and Savov, M., *Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2018, Volume: 23, Pages: 1–101, DOI: 10.1214/18-EJP202, Published: JUL 2018, eISSN: 1083-6489, IF (0.994 - 2018), **Quartile: Q3 (66/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Тази статия е кулминацията ни по развиването на теорията на експоненциалните функционали на процеси на Леви. Понеже статията надвишава сто страници, ще направим кратък обзор на най-важните резултати.

За всяка функция на Бернщайн ϕ се знае, че уравнението

$$f(x+1) = \phi(x) f(x), \quad f(1) = 1, \quad x > 0$$

има единствено решение в пространството на трансформации на Мелин на положителни случайни величини. То се означава с W_ϕ. Ние разширяваме W_ϕ до $\Re(z) \geq 0$; намираме нейно представяне във вид на безкрайно произведение и поради формата на уравнението, което удовлетворява, я наричаме функция на Бернщайн-Гама. След това изследваме комплексно-аналитичните свойства W_ϕ и добиваме нейната асимптотика от тип на Стърлинг по протежение на $x > 0$ и на комплексните прави $z \in a + i\mathbb{R}$. Благодарение на факта, че в класа на функциите на Бернщайн-Гама попадат Гама функцията, двойната Гама функция и други, ние имаме общ вид на техните асимптотики, които имат геометрично обяснение с това доколко $\phi : \{\Re(z) > 0\} \mapsto \{\Re(z) > 0\}$ свива/изкривява $\{\Re(z) > 0\}$.

За всяка негативно дефинитна функция Ψ, която е дефинирана поне върху $i\mathbb{R}$, е разгледано уравнението

$$M(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)} M(z) \text{ върху } \{z = i\beta, \beta \in \mathbb{R} : \Psi(-i\beta) \neq 0\}, \quad M(1) = 1. \tag{0.17}$$

Понеже всяко Ψ има факторизация на Винер-Хопф

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z), \text{ поне върху } z \in i\mathbb{R}, \tag{0.18}$$

където $\phi_\pm$ са функции на Бернщайн, то ние показваме, че $M(z) = \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)} W_{\phi_-}(1-z)$ поне върху $\{0 < \Re(z) < 1\}$. Изследваме свойствата на M като мероморфна функция в домейн, зависещ от областта на аналитичност на Ψ, и намираме точната граница N_Ψ, така че

$$\lim_{|\beta|\to\infty} |M(a+i\beta)|\,|\beta|^{N_\Psi-\epsilon} = 0; \quad \lim_{|\beta|\to\infty} |M(a+i\beta)|\,|\beta|^{N_\Psi+\epsilon} = \infty.$$

В почти всички случаи $N_\Psi = \infty$ и намаляването е поне субекспоненциално.

В най-важната част на статията развиваме теорията на експоненциалните функционали на процеси на Леви. Припомняме, че за всеки потенциално убит процес на Леви $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$ те се задават с

$$I = \int_0^{\mathbf{e}_q} e^{-\xi_t} dt,$$

където q е скоростта на убиване, а $\mathbf{e}_q$ е независима от ξ експоненциална случайна величина. Когато $q = 0$, то процесът е с безкраен живот и $\mathbf{e}_0 = \infty$. Има биекция между всички процеси на Леви и множеството от негативно дефинитни функции Ψ. Всъщност поне за $z \in i\mathbb{R}$

$$\Psi(z) = \log\left(\mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right]\right) = \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \gamma z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{zy} - 1 - izy1_{|y|\leq 1}\right)\Pi(dy) - q.$$

За да е изпълнено $I < \infty$, е необходимо и достатъчно $\phi_-(0) > 0$ за ϕ_- в (0.18). Тогава доказваме в обобщен смисъл, че $\mathbb{E}\left[I^{z-1}\right] = M_\Psi(z)$ решава (0.17) и се задава с $M_\Psi(z) = \phi_-(0)M(z)$. В резултат на това представяне ние практически възстановяваме и подобряваме почти всички резултати, известни в литературата относно разпределението на I. Доказваме и някои отворени въпроси като например каква е гладкостта на функцията на разпределение на I. Показваме, че тя зависи от N_Ψ и когато $N_\Psi = \infty$, плътността е безкрайно диференцируема. Разработваме и асимптотиката на безкрайност на тази плътност, нещо което свежда Doney, R. and Savov, M. (2010) "*The asymptotic behavior of densities related to the supremum of a stable process*", *Ann. of Probab.* **38**, No.1, 316–326, **IF: 1.470** и Kuznetsov, A. (2011) "*On extrema of stable processes*", *Ann. Probab.* **39**, No.3, 1027–1060, **IF: 1.79** до частни случаи на по-обща теория. Разискваме малката асимптотика, моментите и развитие в ред. В статията също е дискутирана и асимптотиката на разпределенията на $\int_0^T e^{-\xi_t} dt, T \to \infty$.

Методологията е смесица от вероятностни техники, комплексен анализ и малко нормирани алгебри.

19. Patie, P. and Savov, M., *Spectral expansions for generalized Laguerre semigroups*, MEMOIRS OF AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 2020+, Pages: 179 pages, IF (2.297 - 2018), **Quartile: Q1 (13/214 Mathematics, JCR-WoS)**, **accepted**

Добиваме спектрални разлагания в претеглено Хилбертово пространство на голям клас от стационарни, несамоспрегнати и нелокални Марковски оператори, които се срещат в гранични теореми на положителни Марковски процеси. Показваме, че този клас е в биекция с подмножество на негативно дефинитните функции и го наричаме клас на обобщените полугрупи на Лагер. Нашият подход, който излиза далеч отвъд класическата теория на пертурбациите, е базиран на всеобхватен анализ на релация на преплитане ($P_t\Lambda = \Lambda Q_t$), която установяваме между този клас и една класическа самоспрегната Марковска полугрупа, чието спектрално разлагане е дадено чрез полиномите на Лагер. Добиваме свойства като спектрални разлгания на обобщените полугрупи, гладкост на решенията на проблема на Коши за тези полугрупи и много други резултати. Нашата методология разкрива различни феномени, включително и хипокоерсивност, относно скоростта на сходимост на тези полугрупи към стационарност и ни позволява да изразим тези наблюдения чрез ръста на нормите на спектралните проекции в подходящо Хилбертово пространство. В зависимост от аналитичните свойства на гореспоментатите негативно дефинитни функции ни се налага да използваме широк набор от стратегии и нови методи, за да добием оценки на тези норми.

Summaries of papers not included in the competition:

1. Savov, M., *Curve crossing for the reflected Lévy process at zero and infinity*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2008, Volume: 13, Pages: 157–172, DOI: 10.1214/EJP.v13-483, Published: JAN 2008, eISSN: 1083-6489, IF(1.131 - 2008), **Quartile: Q2 (36/92 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

For one dimensional Lévy process $(X_t)_{t\geq 0}$ with reflected process $R_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s - X_t$ we consider the moments in time when the paths of R_t cross polynomial boundaries, that is $\tau_\kappa(r) = \inf\{t\geq 0 : R_t > r(t+1)^\kappa\}, \kappa\geq 0$. The main result of this work states that

$$\tau_\kappa(r) < \infty \; a.s. \iff \mathbb{E}\left[X_1^-\right]^{1/\kappa} = \infty, \, \kappa > 1$$

$$\tau_\kappa(r) < \infty \; a.s. \iff \mathbb{E}\left[X_1^-\right]^{1/\kappa} = \infty, \text{ or } \liminf_{t\to\infty} \frac{X_t}{t^\kappa} = \infty, \kappa\leq 1,$$

where $X_1^- = \max\{-X_1, 0\}$. It is clear that the necessary and sufficient conditions depend only on X and answer the harder problem involving the finiteness of $\tau_\kappa(r)$. In a similar fashion, criteria, depending solely on X_1, about $\mathbb{E}\left[\tau_{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}\left[X_1^2\right] r)\right] < \infty, r > 0$ and $\mathbb{E}\left[\tau_1(r)\right] < \infty, r > 0$ are deduced.

The quantity $\limsup_{t\to 0} \frac{R_t}{t^\kappa} = a_\kappa \in [0,\infty]$ is computed for all Lévy processes. Recall that $\overline{\Pi}_-(\cdot) = \int_{-\infty}^{\cdot} \Pi(dx)$. When the process is with finite variation, a_κ depends on the drift $d\geq 0$ and on whether $\int_0^1 \overline{\Pi}_-\left(x^\kappa\right) dx \in [0,\infty]$ is finite or not. When the Lévy process is with unbounded variation, then a_κ can be determined by checking whether $\int_0^1 \overline{\Pi}_-\left(x^\kappa\right) dx \in [0,\infty]$ is finite or not and by the finiteness of $\liminf_{t\to 0} \frac{X_t}{t^\kappa}$.

During the period of 2004-2008 there was a strong interest in the scientific community in problems related to how Lévy processes and their reflected processes R_t cross deterministic curves. The result is central in the topic, especially at small times ($t\to 0$), since in this case the Lévy process cannot be approximated by a random walk.

2. Savov, M. *Small time two-sided LIL behaviour for Levy processes at zero*, PROBABILITY THEORY AND RELATED FIELDS, 2009, Volume: 144, Pages: 79–98, DOI: 10.1007/s00440-008-0142-1, Published: Mar 2008, ISSN: 0178-8051, eISSN: 1432-2064, IF(1.373 - 2009), **Quartile: Q2 (29/100 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

For a given Lévy process X with Lévy triplet (σ^2,γ,Π), σ^2 - Brownian coefficient, γ - linear term and Π - $\sigma-$finite measure determining the jumps of the process, and a function $b : [0,1]\mapsto\mathbb{R}$ with some natural but weak restrictions the main result of the paper is the family of integral criteria $I(a) := I(a; b,\sigma,\gamma,\Pi), a > 0$ for which it is valid that

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = \inf\{c : I(c) < \infty\} \in [0,\infty] \iff \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt < \infty$$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = \infty \text{ if } \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt = \infty.$$

This result has two main advantages: first, it is general and is applicable to an enormous class of functions b; second, $I(a)$ depends only on (σ^2,γ,Π). Thus, the fundamental probabilistic problem of computing $\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} \in [0,\infty]$ is reduced to the analytical task of the evaluation of $I(a)$ and $\int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt$. Thus, for a given b, we can determine the growth of X against b.

Even more, using that

$$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = \inf\{a : I(a) < \infty\} \in [0,\infty] \iff \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt < \infty$$

we can construct the function $b^*(t)$ such that $\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b(t)} = 1$. This is achieved with the choice of $b(t)$, such that $\inf\{a : I(a) < \infty\} = 1$. Unfortunately, this construction is does not yield the precise rate of growth for all X since it may happen that $\int_0^1 \overline{\Pi}(b^*(t))dt = \infty$. To describe explicitly b^* such that

$\limsup_{t\to 0} \frac{|X_t|}{b^*(t)} = 1$ is still an open problem even though there are necessary and sufficient conditions for the existence of b^*.

3. Doney, R., Maller, R. and Savov, M., *Renewal theorems and stability for the reflected process*, STOCHASTIC PROCESSES AND THEIR APPLICATIONS, 2009, Volume: 119, Pages: 1270–1297, DOI: 10.1016/j.spa.2008.06.009, Published: APR 2009, ISSN: 0304-4149, IF(1.543 - 2009), **Quartile: Q2 (26/100 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1$, be a random walk with step X and $R_n = \max_{k\leq n}\{S_k\} - S_n$ be its reflected process. Let $\tau(r) = \min\{n \geq 1 : R_n > r\}, r > 0$, be the first crossing of the level $r > 0$ by the process R_n.

When $\mathbb{E}[X] < 0, \mathbb{E}[|X|] < \infty$ or $\mathbb{E}[X] = 0, \mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ we show that

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[R_{\tau(r)}\right]}{r} = 1.$$

In the first case we additionally have $\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}[\tau(r)]/r = -1/\mathbb{E}[X]$ and in the second

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathbb{E}[\tau(r)]}{r^2} = \frac{1}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Also, we have considered cases in which the conditions $\mathbb{E}[X] < 0, \mathbb{E}[|X|] < \infty$ or $\mathbb{E}[X] = 0, \mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ are violated.

Setting $e_{-a,b}(r) = \mathbb{P}\left(S_{T_{[-a,b]}(r)} < 0\right), a > 0, b > 0$, where $T_{[-a,b]}(r) = \min\{n \geq 1 : S_n \notin [-ar, br]\}$ with the condition $e_{-a,a}(\lambda r) \asymp e_{-a,a}(r), \forall\lambda > 1$, we obtain the result

$$A := \limsup_{r\to\infty} \frac{R_{\tau(r)}}{r} \in [\max\{1, c\}, 1 + c],$$

where $c \geq 0$ can be computed explicitly. The cases when $c = 0$ or $c = \infty$ are of particular interest since then A can be computed precisely, that is $A = 1$ or $A = \infty$. The main drawback of our result is the requirement $e_{-a,a}(\lambda r) \asymp e_{-a,a}(r), \forall\lambda > 1$, that is $\exists 0 < C_1(\lambda) < C_2(\lambda) < \infty$ such that $C_1(\lambda)e_{-a,a}(r) \leq e_{-a,a}(\lambda r) \leq C_2(\lambda)e_{-a,a}(r)$, for all r large enough.

The main theorems are not classical. Results regarding the position of the random walk after it crosses $r > 0$, namely the behaviour of $S_{T(r)}, T(r) = \min\{n \geq 1 : S_n > r\}$, are well-known. They depend on the fundamental properties of the random walk - stationary and independent increments. In the case of the reflected process R_n these properties are not at hand and the methods are considerably more complicated. This requires that we impose $e_{-a,a}(\lambda r) \asymp e_{-a,a}(r), \forall\lambda > 1$. In addition, we mention that the computation of $e_{-a,a}(r)$ is one of the hardest problems in the area of random walks and for this reason a further significant progress in the computation of $A = \limsup_{r\to\infty} \frac{R_{\tau(r)}}{r}$ seems well beyond our current methods and knowledge.

4. Doney, R. and Savov, M., *The asymptotic behaviour of densities related to the supremum of a stable process*, ANNALS OF PROBABILITY, 2010, Volume: 38, Pages: 316–326, DOI: doi:10.1214/09-AOP479, Published: JAN 2010, ISSN: 0091-1798, eISSN: 2168-894X, IF(1.470- 2010), **Quartile: Q2 (28/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let X be a stable Lévy process with index $\alpha \in (0, 2)$ and set $S_1 = \sup_{s\leq 1} X_s$. If $f(x) = \mathbb{P}(S_1 \in dx)/dx, x > 0$ then a main and a difficult question is to determine the asymptotic behaviour of $f(x), x \to 0, x \to \infty$. The behaviour $\mathbb{P}(S_1 > x) \sim A\alpha^{-1}x^{-\alpha}, x \to \infty$, and $\mathbb{P}(S_1 \leq x) \sim Bx^{\alpha\rho}$, where $\rho = \mathbb{P}(X_1 > 0)$ is the positivity coefficient, is well-known in the literature. These results are classical applications of Tauberian theorems. The density $f(x)$ is much more harder to understand. Using *excursion theory* of the reflected stable processes, we derived equations representing $f(x)$ via main quantities from *excursion theory* and thereby we obtained the asymptotic.

This work was accomplished in 2008-2010 and is at the heart of a sequence of deeper investigations of S_1 for stable Lévy processes. The number of citations attests to this fact.

We have to note out that using deep complex analysis, Kuznetsov (2011), see below, managed to obtain the asymptotic series decomposition of $f(x)$ and even for some α to derive the series expansion of $f(x)$. Our probabilistic approach yields more limited results but it is significantly more general. This can be seen from the papers of Chaumont (2013) and Chaumont and Malecki (2013+) which use and generalize our methodology for general Lévy processes when implicitness of many quantities precludes the application of complex analysis.

Since S_1 can be represented as an explicit transformation of an exponential functional of Lévy processes and in view of the recent developments in the theory of exponential functionals the problems related to S_1 are now a mere particular case of this theory which is most completely developed in Patie and Savov, see below.

References:

(1) Kuznetsov, A. (2011) "*On extrema of stable processes*", *Ann. Probab.* **39**, No.3, 1027–1060, **IF: 1.79**
(2) Chaumont, L. (2013) "*On the law of the supremum of Lévy processes*", *Ann. Probab.* **41**, No.3A, 1191-–1217, **IF: 1.79**
(3) Chaumont , L. and Malecki, J. (2013) "*The asymptotic behavior of the density of the supremum of Lévy processes*", arXiv preprint arXiv:1310.1587
(4) Patie, P. and Savov,M. (2018) "*Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes*", *Electronic Journal of Probability*, **23**, 1–101, **IF: 0.994**

5. Doney, R. and Savov, M., *Right inverses of Lévy processes*, ANNALS OF PROBABILITY, 2010, Volume: 38, Pages: 1390–1400, DOI: 10.1214/09-AOP515, Published: JUL 2010, ISSN: 0091-1798, eISSN: 2168-894X, IF (1.470- 2010), **Quartile: Q2 (28/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let X_t be a Lévy process. In this paper we characterize all Lévy processes, which possess a right-inverse processes, that is for given X there is an increasing Lévy process $(K_x)_{x\geq 0}$, such that $X_{K_x} = x$ at least for $x \in [0, \varsigma]$, where $\varsigma > 0$ almost surely. The problem for the existence of the right-inverse is directly linked with the potential theory of Markov processes and a necessary and sufficient condition for its existence is given by Winkel(2002). The major drawback of these conditions are that they depend on quantities which cannot be computed from the main characteristics of X, that is (σ^2, γ, Π). In our paper using the fluctuation theory of Lévy processes we show that when $\sigma^2 = 0$

$$\exists (K_x)_{x\geq 0} \iff \int_0^1 \frac{x^2}{\left(\int_0^x \int_y^1 \overline{\Pi}_-(s)dsdy\right)^2}\Pi(dx) < \infty,$$

where $\overline{\Pi}_-(x) = \Pi(\{-\infty, -x\}), x > 0$. In the case when $\sigma^2 > 0$ it is well-known that $\exists K_x$. Thus, the problem about the existence of the right-inverse is reduced to the computation of a particular integral which depends only on Π.

References:

(1) Winkel, M. (2002) "*Right inverses of non-symmetric Lévy processes*", *Ann. Prob.*, **30**, 382-415

6. Doering, L. and Savov, M., *An application of renewal theorems to exponential moments of local times*, ELECTRONIC COMMUNICATIONS IN PROBABILITY, 2010, Volume: 38, Pages: 263–269, DOI: 10.1214/ECP.v15-1558, Published: JUN 2010, eISSN: 1083-589X, IF (0.559 - 2010), **Quartile: Q4 (88/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

This short note uses classical results in order to improve asymptotic results for the Laplace transform of the time of sojourn of Markov processes at a given point. If L^i_t is the time spend at position i starting from i then we consider $\mathbb{E}\left[e^{\gamma L^i_t}\right]$ for $\gamma \geq 0$ and show that depending on γ the asymptotic of $\mathbb{E}\left[e^{\gamma L^i_t}\right]$ as $t \to \infty$ can be computed with the help of the transition probabilities $p_s(i,i)$, that is the probability to start from i and be at i in s units of time.

The results illustrate the power of the renewal theory for derivation of new results or for improvement of classical statements. The main aim of the publication is the popularization of the renewal theory which can be used for simplification of the proofs of a number of problems which otherwise appeals to spectral theory.

7.Bertoin, J. and Savov, M., *Some applications of duality for Lévy processes in a half-line*, BULLETIN OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY, 2010, Volume: 43, Pages: 97–111, DOI: 10.1112/blms/bdq084, Published: OCT 2010, eISSN: 1469-2120 , IF (0.63 - 2010), **Quartile: Q2 (122/279 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

Let ξ_t be a Lévy process with $\infty > \mathbb{E}[\xi_1] \geq 0$ (and a natural restriction which we omit for clarity). Set $T_x = \inf\{t \geq 0 : \xi_t \geq x\}, x > 0$. It is well-known that

$$\lim_{x\to\infty} (\xi_{T_x} - x, x - \xi_{T_x-}) \stackrel{d}{=} (O, U)\,,$$

where O, U are called the overshoot and the undershoot. Let $\xi^{\uparrow}_t(x)$ denotes the conservative Markov process, namely a Markov process with infinite life-time which describes the Lévy process ξ started from $x \geq 0$ conditioned to stay positive, see Bertoin (1996), for exposition of the theory of Lévy processes.

With the notation above let us set

$$\eta_t = \begin{cases} \xi_t + O & t \geq 0 \\ -\xi^{\uparrow}_{-t}(U) & t < 0 \end{cases},$$

where $\xi, \xi^{\uparrow}, (O, U)$ are mutually independent copies of the random variables and stochastic processes introduced above. That is given (O, U) we start to the right a standard Lévy process and splice for the negative times t the process $-\xi^{\uparrow}_{-t}(U)$. In our paper we investigate the properties of η. It has the following remarkable properties:

- **I:** if T_x is the passage time across x of η then $(\eta_{T_x+t})_{t\in\mathbb{R}} \stackrel{w}{=} (x + \eta_t)_{t\in\mathbb{R}}$, that is the time shift with T_x is equivalent to the space translation with x;
- **II:** $\eta_t \stackrel{d}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\xi^x_{t-T_x} - x\right), t \in \mathbb{R}$, that is η is the weak limit of the paths of the initial Lévy process translated in time at the time it crosses x and then taking limit in x;
- **III:** the previous properties allow for the derivation of the fundamental representation of the positive self-similar Markov processes started from 0 as a time change and transformation of the process η. Let X^x_t be a positive self-similar Markov process, that is for each $c > 0, x \geq 0$ we have that $(X^{cx}_t)_{t\geq 0} \stackrel{d}{=} \left(cX^x_{tc^{-\alpha}}\right)_{t\geq 0}$ for some $\alpha > 0$. Then we have the remarkable representation

  $$X^0_t = e^{\eta_{\tau_t}},$$

  where τ_t is a suitable change of time.

The last property is quite important since it gives the full picture concerning the Lamperti representation of the positive self-similar Markov processes. So far the Lamperti representation was only valid for processes **starting from** $x > 0$. This result adds on the case $x = 0$.

Recently, there have been a number of papers dealing with Lamperti representations of real-valued and multi-dimensional self-similar Markov processes, see for example Alili et al. In these cases there lacks such a neat form as $X^0_t = e^{\eta_{\tau_t}}$.

References:

(1) Bertoin, J. (1996) *Lévy Processes*. Cambridge University Press.

(2) Larbi Alili, L., Chaumont, L., Graczyk, P. and Żak, T. (2017) "*Inversion, duality and Doob h-transforms for self-similar Markov processes*", ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, **22**, No. 22, 18 pages, **IF:0.901**

8. Savov, M., *Small time one-sided LIL behaviour for Lévy processes at zero*, JOURNAL OF THEORETICAL PROBABILITY, 2010, Volume: 23, Pages: 209–236, DOI: 10.1007/s10959-008-0202-6, Published: MAR 2010, ISSN: 0894-9840, eISSN: 1572-9230, IF (0.600 - 2010), **Quartile: Q3 (81/110 Statistics and Probability)**, hyperlink

A fruitful continuation of the problems considered in Savov, M. (2009) "*Small time two-sided LIL behavior for Levy processes at zero*", *Probab. Theory and Related Fields* **144**, No.1-2, 79–98, **IF: 1.39** is to investigate the quantity

$$L(b) := \limsup_{t\to 0} \frac{X_t}{b(t)} \in [0,\infty]$$

or in other words to study the so-called *one-sided law of the iterated logarithm* for Lévy processes X. In this paper we obtain novel results which deal with the behaviour, when $t \to 0$:

I: we define a particular function b_0 that depends explicitly on the Lévy measure Π and we prove that

$$\limsup_{t\to 0} \frac{X_t}{b_0(t)} \in [1, 1.8] \iff \int_0^1 \Pi\left(\{b_0(t),\infty\}\right) dt < \infty;$$

II: since b_0 may not always be the right function to describe the growth of, see I, we develop an integral criterion which for arbitrary function $b(t)$ (with some minor restrictions) shows whether $L(b) = 0$, $L(b) \in (0,\infty)$ or $L(b) = \infty$.

The main difficulties when tackling these problems is to develop a technique which is specific for Lévy processes since the behaviour when $t \to 0$ has no analogue in the random walk theory. The link to random walks gives hints for the properties of Lévy processes when $t \to \infty$ and the methodology is usually based on established embedding of random walks into the Lévy process in consideration. For example, $(X_n)_{n\geq 1} = (X_1 + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_n - X_{n-1}))_{n\geq 1}$ defines a random walk.

In general *the one-sided law of the iterated logarithm* is more complicated than the two-sided law of the iterated logarithm considered in Savov, M. (2009) "*Small time two-sided LIL behavior for Levy processes at zero*", *Probab. Theory and Related Fields* **144**, No.1-2, 79–98, **IF: 1.39**. This is reflected in the results which are cruder and do not allow for the precise evaluation of $L(b)$.

9. Savov, M. and Winkel, M., *Right inverses of Lévy processes: the excursion measure in the general case*, ELECTRONIC COMMUNICATIONS IN PROBABILITY, 2010, Volume: 38, Pages: 572–584, DOI: 10.1214/ECP.v15-1590, Published: DEC 2010, eISSN: 1083-589X, IF (0.559 - 2010), **Quartile: Q4 (88/110 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

In this short paper we develop the ideas from Doney, R. and Savov, M. (2010) "*Right inverses of Lévy processes*", *Ann. of Probab.* **38**, No.4, 1390–1400, **IF: 1.47**. Let us recall the problem. Let X_t be a Lévy process. In the aforementioned paper we have characterized all Lévy processes which possess a right-inverse process, that is for given X there exists a non-decreasing Lévy process K_x such that $X_{K_x} = x$ at least for $x \in [0, \varsigma]$ where $\varsigma > 0$ almost surely.

The next step is to characterize the process K_x itself which is an increasing Lévy process (*subordinator*). The aim of this paper is to describe the Lévy measure of the process K_x. We prove that the jumps of K_x are the sum of the following quantities: we take an excursion of X away from the maximum (namely ***the time of attaining*** a new maximum of X after the current one); computing the difference between the new maximum of X achieved by the latest excursion and the previous one, let us assume that it is T; then we start a Lévy process from T and take the ***time of first return to zero***. Summing the lengths of both times we obtain the typical jump of K_x. Looking from the standpoint of random walks the result is natural but the derivation for Lévy processes requires a higher level of technical results.

10. Chan, T., Kyprianou A. and Savov, M., *Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes*, PROBABILITY THEORY AND RELATED FIELDS, 2011, Volume: 150, Pages: 691–708, DOI:

10.1007/s00440-010-0289-4, Published: APR 2010, ISSN: 0178-8051, eISSN: 1432-2064, IF (1.870 - 2011), **Quartile: Q1 (25/116 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let X be a Lévy process. Let us assume that X has only negative jumps. We then say that the processes is a spectrally-negative Lévy process. Since this process only jumps downwards then many of its fundamental quantities have explicit form. At the heart of many of the properties of these processes is the scale function. The probabilistic role of this function is best illustrated by the relation

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_{(a,\infty)} < \tau_{(-\infty,0)}\right) = \frac{W(x)}{W(a)},$$

where $\tau_B = \inf\{t > 0 : X_t \in B\}$ and $a \geq x \geq 0$. That is the function describes the probability of the process X started from x to cross a before it falls below 0.

The function W is present at various other quantities and relations. Its properties are of interest not only for the theory but for the applications too especially in risk theory in insurance mathematics where the random processes of incomes and costs are suitably modelled by spectrally negative Lévy processes.

In order to apply the scale function in a number of studies it is vital to know its smoothness. In this paper we investigate the differentiability of W depending on the Lévy triplet (σ^2, γ, Π). Under very minor assumptions we demonstrate that

$$W \in C^{n+3}([0,\infty)) \iff \Pi\left(\{-\infty,-x)\right\} \in C^n([0,\infty)), \text{ if } \sigma^2 > 0,$$

and that in all cases $W \in C^2([0,\infty))$, provided $\sigma^2 > 0$. We also discuss the case when $\Pi\left(\{-\infty,0\}\right) < \infty$ and we show that under some minor assumptions

$$W \in C^{n+1}([0,\infty)) \iff \Pi\left(\{-\infty,-x\}\right) \in C^n([0,\infty)) \text{ if } \sigma^2 = 0,\ \Pi\left(\{-\infty,0\}\right) < \infty.$$

Our appoach is based on the fact that the scale function W satisfies a Voterra equation of the second kind which involves only the Lévy measure Π. Although the solutions of these equations are in many cases well studied because they are given in terms of von Neumann series the case when $\Pi\left(\{-\infty,0\}\right) = \infty$ is technically not simple. The results above are obtained via different analytical techniques.

When $\sigma^2 = 0, \Pi\left(\{-\infty,0\}\right) = \infty$, the equations for W are Volterra of the first kind and their study is significantly harder. In this case we do not have any results and there are several conjectures regarding the dependence of the smoothness of W on the smoothness of Π.

11. Doering, L. and Savov, M., *(Non) Differentiability and asymptotics for renewal densities of subordinators*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2011, Volume: 16, Pages: 470–503, DOI: 10.1214/EJP.v16-860, Published: MAR 2011, eISSN: 1083-6489, IF (0.713 - 2011), **Quartile: Q3 (71/116 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let ξ_s be a non-decreasing Lévy process with a positive drift, that is $\xi_s = \delta s + \sum_{v \leq s} \Delta_v$ is the sum of a linear function and positive jumps. Set

$$U^q(dx) = \int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{P}\left(\xi_t \in dx\right) dt,\ q \geq 0$$

for the $q-$potentials. When $\delta > 0$ we know that $U^q(dx) = u^q(x)dx$ and the following equation holds

$$\delta u^q(x) = 1 - \int_0^x u^q(x-y)\left(\bar{\Pi}(x) + q\right) dy \tag{0.19}$$

where Π is the Lévy measure of ξ and $\bar{\Pi}(x) = \Pi\{x,\infty\}, x > 0$. Using (0.19) we prove that u^q can be expanded in an infinite series of convolutions involving $\bar{\Pi}(x) + q$, that is

$$u^q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\delta^{n+1}}\left(1 * (\bar{\Pi}(x) + q)\right)^{*n}(x).$$

This equation and its Fourier transform allow for the detailed study of the smoothness of u^q depending on the smoothness of $\bar{\Pi}$. The most noteworthy result is that $(u^q)'$ is continuous at x if and only if when x is not an atom for Π, i.e. $\Pi\left(\{x\}\right) = 0$. Otherwise, $(u^q)'(x+) - (u^q)'(x-) = \delta^{-2}\Pi\left(\{x\}\right)$.

12. Kuznetsov A., Pardo J.C. and Savov, M., *Distributional properties of exponential functionals of Lévy processes*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2012, Volume: 17, Pages: 1–35, DOI: 10.1214/EJP.v17-1755, Published: JAN 2012, eISSN: 1083-6489, IF (0.785 - 2012), **Quartile: Q3 (70/119 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let ξ, η be two independent Lévy processes. Define formally

$$I := I(\xi, \eta) = \int_0^\infty e^{\xi_{s-}} d\eta_s.$$

When $\eta_s = s$ we then have standard exponential functional since $\xi_s = \xi_{s-}$ almost surely. Set $m(dx) := \mathbb{P}(I \in dx)$.

Since I is the stationary distribution to the stationary Ornstein-Uhlenbeck process with infinitesimal generator $\mathcal{L}$ we have for each in $f \in Domain(\mathcal{L})$

$$0 = \langle \mathcal{L}f, m\rangle = \langle f, \mathcal{L}^* m\rangle,$$

where $\mathcal{L}^*$ is the infinitesimal generator of the dual Ornstein-Uhlenbeck process. Then with the help of Schwarz theory of distributions we show that even $\mathcal{L}^* m = 0$ which yields integro-differential equation for the distribution of I, that is $m(dx)$.

In the second part of the paper we investigate $m(dx) = \kappa(x)dx$ in the case when $\eta_s = \sigma B_s + \mu s$, that is when η is a Brownian motion. We prove different properties for $\kappa(x)$ such as the asymptotic behaviour when $x \to 0, x \to \pm\infty$, the smoothness of κ and its series expansion. For the study we employ the Mellin transform $\mathcal{M}(s) = \mathbb{E}\left[I^{s-1}, I > 0\right]$. We derive a couple of representations for $\mathcal{M}$ and with the help of the hypergeometric functions we study its complex-analytical properties, its asymptotics along complex lines, i.e. the behaviour of $\mathcal{M}(x + i\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Using Mellin inversion we obtain the properties of κ listed above.

13. Pardo, J.C., Patie, P. and Savov, M., *A Wiener-Hopf type of factorization for the exponential functional of Lévy processes*, JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY, 2012, Volume: 96, Pages: 930–956, DOI: 10.1112/jlms/jds028, Published: SEP 2012, ISSN: 0024-6107, eISSN: 1469-7750, IF (0.804 - 2012), **Quartile: Q1 (69/296 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

Let ξ_t be a Lévy process. Let us define the exponential functionals (with the assumption for finiteness, that is $\lim_{t\to\infty} \xi_t = -\infty$) on infinite horizon

$$I = \int_0^\infty e^{\xi_s} ds.$$

Set

$$\Psi(z) = \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right]\right) = bz + \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{zy} - 1 - zy1_{|y|<1}\right)\Pi(dy).$$

Let us denote by $\mathcal{M}(s) = \mathbb{E}\left[I^{s-1}\right]$ the Mellin transform of I which is well-defined at least for $s = 1 + i\mathbb{R}$. It is well-known that when $\Psi(z)$ is analytic at least on the strip $\Re(z) \in (0, a)$ and $\Psi(\Re(z)) < 0$, for $\Re(z) \in (0, a)$ then

$$\mathcal{M}(z+1) = -\frac{z}{\Psi(z)}\mathcal{M}(z), \text{ for } \Re(z) \in (0, a). \tag{0.20}$$

Using the Wiener-Hopf factorization for Ψ,

$$\Psi(z) = -\phi_+(z)\phi_-(z), \tag{0.21}$$

where $\phi_\pm$ are linked to the Bernstein functions, (0.20) can be written as

$$\mathcal{M}(z+1) = \frac{z}{\phi_+(z)\phi_-(z)}\mathcal{M}(z) \text{ за } \Re(z) \in (0, a). \tag{0.22}$$

It is clear that the solutions to the system

$$\mathcal{M}_1(z+1) = \frac{1}{\phi_+(z)}\mathcal{M}_1(z); \quad \mathcal{M}_2(z+1) = \frac{z}{\phi_-(z)}\mathcal{M}_2(z) \tag{0.23}$$

give that $\mathcal{M}_1(z) \times \mathcal{M}_2(z)$ is a solution to (0.20). The advantage of (0.23) lies in the fact that, the respective equations are defined on the half-planes $\Re(z) < a, \Re(z) > 0$ and both have a solution on the strip

$\Re(z) \in (0,a)$. Under the assumption that $\Pi(dy)1_{y>0} = \pi(y)dy1_{y>0}$ and π non-increasing it is proved that $1/\phi_+(z) = -z/\psi(z)$ where $\psi(z) = \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{zY_1}\right]\right)$ and Y is a spectrally positive Lévy process. Thus, using the form of (0.20) we see that the equations in (0.23) represent the Mellin transforms of the exponential functional of Y ($\mathcal{M}_1$) and of exponential functional of the downgoing ladder height subordinator ($\mathcal{M}_2$), that is I_1 and I_2. If the solution to (0.20) is unique in the space of Mellin transforms of positive random variables then immediately $\mathcal{M}(z) = \mathcal{M}_1(z) \times \mathcal{M}_2(z)$ and the factorization $I \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$ holds with I_1 independent of I_2.

To prove the uniqueness of the solution to (0.20) we use the fact that I is the *unique* stationary distribution of a generalized Ornstein-Uhlenbeck process and that $I_1 \times I_2$ is also such stationary law. The assumption that $\Psi(z)$ is analytic on the strip $\Re(z) \in (0,a)$ and $\Psi(\Re(z)) < 0$, so that (0.20) holds, can be relaxed via a limiting procedure. The large jumps of ξ above $A > 0$ are truncated then for the resulting exponential functional the factorization $I(A) \stackrel{d}{=} I_1(A) \times I_2(A)$ is proved and finally it is demonstrated that as $A \to \infty$, the quantities $I(A), I_1(A), I_2(A)$ converge in distribution to I, I_1, I_2. Hence, $I \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$ holds.

Since I_1, I_2 are easier to study then with the help of $I \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$ we obtained a number of new results and simplified significantly some existing proofs. Thus, for example a part of Corollary 2.1 recovers the whole paper P. Patie. "Law of the absorption time of positive self-similar Markov processes"published in Annals of Probability.

14. Patie, P. and Savov, M., *Extended factorizations of exponential functionals of Lévy processes*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2012, Volume: 17, Pages: 1–22, DOI: 10.1214/EJP.v17-2057, Published: MAY 2012, eISSN: 1083-6489, IF (0.785 - 2012), **Quartile: Q3 (67/117 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let ξ_t be a Lévy process. Define the exponential functionals

$$I_{e_q} = \int_0^{e_q} e^{-\xi_s} ds,$$

where e_q, $q > 0$, is an independent of ξ exponentially distributed random variable.
Set

$$\Psi(z) = \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{zX_1}\right]\right) = bz + \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{zy} - 1 - zy1_{|y|<1}\right)\Pi(dy).$$

Denote by $\mathcal{M}_q(s) = \mathbb{E}\left[I_{e_q}^{s-1}\right]$ the Mellin transform of I_{e_q} which is valid at least for $s = 1 + i\mathbb{R}$. It is well-known that when $\Psi(z)$ is analytic on the strip $\Re(z) \in (0,a)$ and $\Psi(\Re(z)) < 0$, for $\Re(z) \in (0,a)$ then

$$\mathcal{M}_q(z+1) = -\frac{z}{\Psi(z) - q}\mathcal{M}_q(z), \text{ for } \Re(z) \in (0,a). \tag{0.24}$$

As a result of the Wiener-Hopf factorization of $\Psi(z) - q$ we obtain the same system as in (0.23) discussed for the paper Pardo, J.C., Patie, P. and Savov, M. (2012) "*A Wiener-Hopf type of factorization for the exponential functional of Lévy processes*", *J. of London Math. Soc.* **96** (2), 930–956, **IF: 0.80**. The problem here is that despite the fact that we have the same assumptions for Π to prove that $\mathcal{M}(z) = \mathcal{M}_1(z) \times \mathcal{M}_2(z)$ and therefore obtain the factorization $I_{e_q} \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$ where I_1 is independent of I_2 now we cannot use that I_{e_q} is the stationary distribution of generalized Ornstein-Uhlenbeck process. This is overcome via the so-called T_β-transformations of $\Psi(z) - q$ which are defined by the relation $T_\beta(\Psi(z) - q) = \frac{z}{z+\beta}(\Psi(z+\beta) - q)$ and which allow for I_{e_q}, I_1, I_2 to be approximated when $\beta \to 0$ by a sequence of exponential functionals of Lévy processes on an *infinite horizon* whose Lévy processes have the characteristic exponents $\Psi_\beta = T_\beta(\Psi(z) - q)$ and their respective factorizations. Thus, we conclude that $I_{e_q} \stackrel{d}{=} I_1 \times I_2$. In the paper we have obtained a number of new properties for the distribution of I_{e_q}.

15. Patie, P. and Savov, M., *Exponential functional of Lévy processes: Generalized Weierstrass products and Wiener-Hopf factorization*, COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE, 2013, Volume: 351, Pages: 393–396, DOI: 10.1016/j.crma.2013.04.023, Published: MAY 2013, ISSN: 1631-073X, IF (0.425 - 2013), **Quartile: Q3 (221/302 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

This note announces the paper Patie, P. and Savov, M. (2018) "*Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes*", *Electronic Journal of Probability*, **23**, 1–101, **IF: 0.994** which is the completion of the development of the theory of exponential functionals of Lévy processes.

16. Savov, M., *On the range of subordinators*, ELECTRONIC COMMUNICATIONS IN PROBABILITY, 2014, Volume: 19, Pages: 1–10, DOI: 10.1214/ECP.v19-3629, Published: DEC 2014, eISSN: 1083-589X, IF (0.619 - 2014), **Quartile: Q3 (89/122 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

Let X be a non-decreasing Lévy process (subordinator) with infinite activity of the jumps. Let $N(t,\delta)$ be the minimal number of intervals of lengths at most $\delta > 0$ which cover the range $\{X_s : s \leq t\}$. We recursively denote $T_1(\delta) = \inf\{s > 0 : X_s > \delta\}$, $T_{k+1}(\delta) = \inf\left\{s > T_k(\delta) : X_s - X_{T_k(\delta)} > \delta\right\}$. Then for $k \geq 1$, $\{N(t,\delta) \geq k\} = \{T_k(\delta) \leq t\}$. The quantities

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{\ln(N(1,\delta))}{\ln(\delta^{-1})}; \quad \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln(N(1,\delta))}{\ln(\delta^{-1})},$$

are called the lower and upper box dimensions respectively. For subordinators they are computed in terms of the behaviour at infinity of $\Phi(\lambda) = -\ln\left(\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_1}\right]\right)$. Since Φ is our input data then all information regarding these dimensions are computed at logarithmic scale, that is for $\ln(N(1,\delta))$.

However, it turns out that we dispose with much more precise information for $N(1,\delta)$ on the real scale. Let $U(\delta) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \leq \delta)\, dt$. Then in this short note we prove almost surely that

$$\lim_{\delta\to\infty} U(\delta)N(1,\delta) = 1,$$

where $U(\delta) \asymp \frac{1}{\Phi(\delta^{-1})}$. In the special case when $\Phi(\lambda) \sim \lambda^\alpha$ we have that $N(1,\delta) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\delta^\alpha}$. At logarithmic scale the constant $\Gamma(1+\alpha)$ would be hidden.

The methodology is based on classical probability inequalities, the Borel-Cantelli lemma and laws of large numbers. This work has been improved in Barker, Adam "Fractal-Dimensional Properties of Subordinator", Journal of Theoretical Probability, Volume 32, Issue 3, Pages 1202-1219, 2019, wherein a central limit theorem for $N(1,\delta)$ has been established.

17. Patie, P. and Savov, M., *Cauchy problem of the non-self-adjoint Gauss-Laguerre semigroups and uniform bounds of generalized Laguerre polynomials*, JOURNAL OF SPECTRAL THEORY, 2017, Volume: 7, Pages: 797–846, DOI: 10.4171/JST/178, Published: SEP 2017, ISSN: 1664-039X, eISSN: 1664-0403, IF (0.844 - 2017), **Quartile: Q2 (108/302 Mathematics, JCR-WoS)**, hyperlink

The operator $L : f(x) \mapsto xf''(x) + (1-x)f(x), x > 0$, is the generator of the classical Laguerre semigroup $(Q_t)_{t\geq 0}$. It is stationary with invariant measure $\mathbf{e}(x)dx = e^{-x}dx, x > 0$ and L is self-adjoint in the Hilbert space $L^2(\mathbf{e})$. For each $f \in L^2(\mathbf{e})$ the following spectral expansion is valid

$$Q_t f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \mathcal{L}_n(x) \langle f, \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}},$$

where $\mathcal{L}_n, n \geq 0$, are the Laguerre polynomials. In this paper we introduce the family of non-selfadjoint integro-differential generators $L_{\alpha,\beta}, \alpha \in (0,1), \beta \geq 1 - \frac{1}{\alpha}$. We call them Gauss-Laguerre generators. In the paper we show that with each of them there is an associated stationary Feller process with an invariant measure $\mathbf{e}_{\alpha,\beta}(x)dx = \frac{x^{\frac{1}{\alpha}+\beta-1} e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}}}{\Gamma(\alpha\beta+1)} dx$. If we denote by $(P_t)_{t\geq 0}$ those semigroups we prove that for each pair α, β there is a positive, bounded, linear, non-invertible operator Λ such that for each $t > 0$

$$\Lambda Q_t = P_t \Lambda.$$

This allows us to find the eigenfunctions and the coeigenfunctions of $(P_t)_{t\geq 0}$ and to prove that there is $T_\alpha > 0$ such that for $t > T_\alpha$ and each $f \in L^2(\mathbf{e}_{\alpha,\beta})$,

$$P_t f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \Lambda \mathcal{L}_n(x) \langle f, \Lambda^* \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}_{\alpha,\beta}}.$$

This result is very important for Patie, P. and Savov, M. (2020+) "*Spectral expansions for generalized Laguerre semigroups*", *Memoirs of American Mathematical Society*, 179 pages, **accepted** and illustrates a curious phenomenon that the spectral expansion for non-selfadjoint semigroups may be valid after some positive threshold, in this case T_α.

The main techniques are borrowed from functional and complex analysis and a very technical saddle point method is applied so as to estimate the coeigenfunctions in the required norms.

18. Patie, P. and Savov, M., *Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes*, ELECTRONIC JOURNAL OF PROBABILITY, 2018, Volume: 23, Pages: 1–101, DOI: 10.1214/18-EJP202, Published: JUL 2018, eISSN: 1083-6489, IF (0.994 - 2018), **Quartile: Q3 (66/123 Statistics and Probability, JCR-WoS)**, hyperlink

This paper is the culmination of the development of the theory of exponential functionals of Lévy processes. Since the paper exceeds a hundred pages we will make a brief review of the main results.

For each Bernstein function ϕ we know that the equation

$$f(x+1) = \phi(x) f(x), \quad f(1) = 1, \quad x > 0$$

has a unique solution in the space of Mellin transforms of positive random variables. It is denoted by W_ϕ. We extend W_ϕ to $\Re(z) \geq 0$ we find its infinite product representation and because of the recurrent equation it solves we call it a Bernstein-Gamma function. We then investigate the complex-analytical properties of W_ϕ and we obtain its Stirling type asymptotic along $x > 0$ and along the complex lines $z \in a + i\mathbb{R}$. Thanks to the fact the Gamma function, the Double Gamma function and other well-known functions fall in the class of Bernstein-Gamma function we have a general representation of their asymptotic, which has a geometric intepretation in the way how $\phi : \{\Re(z) > 0\} \mapsto \{\Re(z) > 0\}$ distorts $\{\Re(z) > 0\}$.

For each negative definite function Ψ which is defined at least on $i\mathbb{R}$ we consider

$$M(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)} M(z) \text{ on } \{z = i\beta, \beta \in \mathbb{R} : \Psi(-i\beta) \neq 0\}, \quad M(1) = 1. \tag{0.25}$$

Since each Ψ possesses a Wiener-Hopf factorization

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z), \text{ at least on } z \in i\mathbb{R}, \tag{0.26}$$

where $\phi_\pm$ are Bernstein functions, we show that $M(z) = \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)} W_{\phi_-}(1-z)$ at least on $\{0 < \Re(z) < 1\}$. We investigate the properties of as a meromorphic function on domain depending on the region of analyticity of Ψ and we find the precise boundary N_Ψ such that

$$\lim_{|\beta|\to\infty} |M(a+i\beta)|\, |\beta|^{N_\Psi - \epsilon} = 0; \quad \lim_{|\beta|\to\infty} |M(a+i\beta)|\, |\beta|^{N_\Psi + \epsilon} = \infty.$$

In almost all cases $N_\Psi = \infty$ and therefore the decay is subexponential.

In the most important part of the paper we develop the general theory of exponential functionals of Lévy processes. We recall that for every potentially killed Lévy process $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$ the exponential functionals are given by

$$I = \int_0^{\mathbf{e}_q} e^{-\xi_t} dt,$$

where q is the killing rate and $\mathbf{e}_q$ is independent of ξ exponential random variable. When $q = 0$ then ξ is with infinite lifetime and $\mathbf{e}_0 = \infty$. There is a bijection between the Lévy processes and the set of negative definite functions Ψ. In fact at least on $z \in i\mathbb{R}$

$$\Psi(z) = \log\left(\mathbb{E}\left[e^{z\xi_1}\right]\right) = \frac{\sigma^2}{2} z^2 + \gamma z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{zy} - 1 - izy 1_{|y|\leq 1}\right) \Pi(dy) - q.$$

In order to have $I < \infty$ it is necessary and sufficient that $\phi_-(0) > 0$ for ϕ_- in (0.18). Then in some generalized sense we prove that $\mathbb{E}\left[I^{z-1}\right] = M_\Psi(z)$ solves (0.17) and it is given by $M_\Psi(z) = \phi_-(0)M(z)$. As a result of this representation we recover and improve most of the results in the literature concerning the law of I. We settle some open problems such as the description of the smoothness of the distribution of I. We demonstrate that it does depend on N_Ψ and if $N_\Psi = \infty$ then the law is infinitely differentiable. We deduce the asymptotic at infinity for the density of I which basically reduces Doney, R. and Savov, M. (2010) "*The asymptotic behavior of densities related to the supremum of a stable process*", *Ann. of Probab.* **38**, No.1, 316–326, **IF: 1.470** and Kuznetsov, A. (2011) "*On extrema of stable processes*", *Ann. Probab.* **39**, No.3, 1027–1060, **IF: 1.79** to particular cases of this theory. We disciss the small asymptotic, the moments and series expansions. We also study the asymptotic of the distributions of $\int_0^T e^{-\xi_t}dt, T \to \infty$.

The methodology is a mixture of probability and complex-analytical techniques backed up sometimes with normed algebras.

19. Patie, P. and Savov, M., *Spectral expansions for generalized Laguerre semigroups*, MEMOIRS OF AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 2020+, Pages: 179 pages, IF (2.297 - 2018), **Quartile: Q1 (13/214 Mathematics, JCR-WoS)**, **accepted**

We provide the spectral expansion in a weighted Hilbert space of a substantial class of invariant non-self-adjoint and non-local Markov operators which appear in limit theorems for positive-valued Markov processes. We show that this class is in bijection with a subset of negative definite functions and we name it the class of generalized Laguerre semigroups. Our approach which goes beyond the framework of perturbation theory is based on an in-depth and original analysis of an intertwining relation ($P_t\Lambda = \Lambda Q_t$) that we establish between this class and a self-adjoint Markov semigroup whose spectral expansion is expressed in terms of the classical Laguerre polynomials. As a by-product we derive spectral expansions of these generalized semigroups, the smoothness properties for the solution to the associated Cauchy problem as well as for the heat kernel and many other results. Our methodology also reveals a variety of possible decays, including the hypocoercivity type phenomena, for the speed of convergence to equilibrium for this class and enables us to provide an interpretation of these in terms of the rate of growth of the weighted Hilbert space norms of the spectral projections. Depending on the analytic properties of the aforementioned negative definite functions we are led to implement several strategies which require new developments in a variety of contexts, to derive precise upper bounds for these norms.

Дата: 21.05.2020

Младен Савов
Подпис: