Р Е Ц Е Н З И Я

от чл.-кор. Олег Кръстев Мушкаров,
Институт по математика и информатика, БАН

по конкурс за заемане на академичната длъжност **доцент** в Област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика: професионално направление 4.5 Математика(Геометрия), за нуждите на Софийски университет "Св. Климент Охридски"(СУ), Факултет по математика и информатика (ФМИ), обявен в ДВ бр. 21 от 13.03.2020 г. и на интернет страниците на ФМИ и СУ, с удължен срок за подаване на документи 14.07.2020 г..

Представям рецензията си по този конкурс като член на Научно жури, назначено със Заповед No. РД 38-266/10.07.2020 на ректора на СУ "Св. Кл. Охридски"проф. дфн Анастас Герджиков. Тя е изготвена според изискванията на:

• Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ);

• Правилника за прилагане на ЗРАСРБ (ППЗРАСРБ);

• Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в СУ (ПУРПНСЗАДСУ);

За участие в конкурса е представил документи един кандидат:
гл.ас. д-р Александър Владимиров Петков, катедра „Геометрия” на ФМИ, СУ "Св. Кл. Охридски".

I. Общо описание на представените материали

1. Представените от кандидата документи по конкурса съответстват на изискванията на ЗРАСРБ, ППЗРАСРБ и ПУРПНСЗАДСУ. За участие в конкурса Ал. Петков е представил списък от общо 6 статии, техните резюмета и цитирания, списъци на семинарите, конференциите и договорите за научни изследвания, в които е участвал, справка за изпълнение на минималните национални изисквания по т. 2б от ЗРАСРБ, трудов договор и уверение за стаж от СУ и останалите изисквани документи в Чл. 107. на ПУРПНСЗАДСУ. Считам, че всички представени документи са изготвени коректно .

2. Професионални и биографични данни за кандидата.

Гл. ас. Ал. Петков е роден на 17.12.1985 г. в гр. Монтана. През 2004 г. той завършва Финансово-стопанската гимназия в града и същата година е приет за студент във ФМИ на СУ. Завършва висшето си образование през 2010 г. с магистърска степен, специалност "Динамични системи и геометрия". От 2011г. до 2014 г. е докторант към катедра "Геометрия"на ФМИ. През 2014 г. защитава дисертация на тема "Риманови и суб-Риманови многообразия със структури"и получава ОНС "доктор"по математика (професионално направление "Геометрия"). През м. февруари 2014 г. е назначен за математик в катедра "Геометрия"на ФМИ, а от м. юли същата година е гл. асистент в същата катедра. През 2017 г. е бил постдокторант към Института по математика на Факултета по математика на Виенския университет, а през януари-март 2018 г. и септември-декември 2019 г. е бил гостуващ изследовател съответно в Департамента по математика и Института по математически науки на Америките в Университета на Маями, САЩ.

Гл. ас. Ал. Петков има публикувани общо 8 научни статии. В предоставената справка са отбелязани 24 техни цитирания, от които 10 са в категорията "самоцитирания"и 13 са в списания с импакт-фактор. В периода 2011-2020 г. той е докладвал свои научни резултати на 7 научни семинара във ФМИ, ИМИ-БАН, Международния университет на Флорида, Университета на Маями и на над 30 международни научни конференции у нас и в чужбина. Участник е в 3 научни проекта с Фонд научни изследвания, 1 с МОН и 8 със СУ "Св. Кл. Охридски".

3. Обща характеристика на научните трудове и постижения на кандидата.

Гл. ас. Ал. Петков е представил за участие в конкурса 6 научни статии, които не са използвани за придобиване на ОНС „доктор“. Всички те са посветени на актуални геометрични и аналитични въпроси за кватернионно-контактни многообразия. Ще отбележа, че 5 от статиите са публикувани в списания с IF (Доклади на БАН-2, Nonlinear Analysis-1, Journal of Geometric Analysis-1, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees-1) и 1 в Годишника на СУ. От представените научни статии 3 са написани самостоятелно, 2 са съвместни със Ст. Иванов и Д. Василев и 1 е съвместна със Ст. Иванов. Считам, че при общите публикации приносът на кандидата е равностоен на съавторите. Гл. ас. Ал. Петков е приложил списък от 8 цитирания на представените за конкурса трудове, като всички са в списания с импакт-фактор. Представените научните трудове отговарят на минималните национални изисквания (по чл. 2б, ал. 2 и 3 на ЗРАСРБ) и на допълнителните изисквания на СУ "Св. Кл. Охридски"за заемане на академичната длъжност "доцент"в научната област и професионално направление на конкурса. Няма доказано по законоустановения ред плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

4. Учебно-педагогическа дейност на кандидата.

Гл. ас. Ал. Петков има активна учебно-педагогическа дейност. Той е чел лекции и е водил упражнения по Математика, спец. Геология, Аналитична геометрия, спец. Статистика и спец. Математика и Информатика (задочно обучение). Той е водил упражнения и по Диференциална геометрия, спец. Математика, Геометрия, спец. Софтуерно инженерство и спец. Компютърни науки, ЛААГ, спец. Химия и спец. Физика (Квантова и космическа теоретична физика). До момента той не е имал дипломанти и специализанти. Нямам преки впечатления от учебно-педагогическата дейност на Ал. Петров, но мнението на негови колеги е, че тя е на високо ниво.

5. Анализ на научните постижения на кандидата

Научните интереси на гл. ас. Ал. Петков са в областта на Диференциалната геометрия и Геометричния анализ и по-точно в Геометрията на хипер–Келеровите многообразия с торзия и кватернионно-контактните (QC) многообразия, Суб-Римановата геометрия, Теорията на струните и свързаните с нея геометрични структури и Комплексната алгебрична геометрия.

Представените за конкурса 6 статии са посветени на актуални въпроси от геометричен и аналитичен характер за кватернионно–контактните многообразия. Работите [1, 2, 3] са мотивирани от класическите резултати на Lichnerowicz и Obata, даващи съответно точна долна граница за първото собствено число на оператора на Лаплас на компактно Риманово многообразие при условие за кривината на Ричи и характеризиращи случая на равенство. По-точно, според теоремата на Lichnerowicz (1958 г.) за всяко компактно n-мерно Риманово многообразие, чиято кривина на Ричи е по-голяма от тази на n-мерната сфера $\mathbb{S}^n(1)$ първото собствено число на оператора на Лаплас е по-голямо от първото собствено число на оператора на Лаплас на сферата. По-късно Obata (1962 г.) изследва случая на равенство и показва, че той се достига само когато многообразието е изометрично на сфера. През последните години се наблюдава повишен интерес към изследването на въпроса за намиране на оптимални долни граници за суб-Лапласиана на суб-Риманови многообразия. Най-изследваният случай е този на CR-многообразия, като първият аналог на теоремата на Lichnerowicz е получен от Greenleaf през 1985 г. при условия за кривината на Ричи и торзията на свързаността на Tanaka–Webster в размерности ≥ 7. По-късно неговите резултати са обобщени и прецизирани от редица автори като Li-Luk (2004 г.), Barletta (2007 г.), Chang-Chiu (2007 г.), Chang-Wu (2010 г.), Aribi-Dragomir-El Soufi (2014 г.), Baudoin-Wang (2014 г.) и др.

Основният резултат в статията [3] (съвместна със С. Иванов и Д. Василев) е следната версия на теоремите на Lichnerowicz и Greenleaf за случая на QC-многообразия. Тук ролята на свързаността на Tanaka–Webster се играе от свързаността на Biquard.

Теорема 1. Нека $(M, g, \mathbb{Q})$ е компактно QC-многообразие от размерност $4n + 3 > 7$. Ако тензорите на Ричи и торзията на свързаността на Biquard изпълняват неравенството

$$Ric(X,X) + \frac{2(4n+5)}{2n+1}T_0(X,X) + \frac{6(2n^2+5n-1)}{(n-1)(2n+1)}U(X,X) \geq k_0 g(X,X)$$

за някаква положителна константа k_0, то всяко положително собствено число λ на суб-Лапласиана изпълнява неравенството

$$\lambda \geq \frac{n}{n+2}k_0.$$

Доказателството на тази теорема използва класическата идея на Lichnerowicz, като за целта е доказана формула от типа на Bochner–Weitzenbock за QC-многообразия. Ще отбележим, че оценката в горната теорема е точна, защото се достига в случая на 3-Сасакиева сфера. Въпросът за равенството (кватернионно-контактния аналог на теоремата на Obata) е изследван напълно в случая на компактни 3-Сасакиеви многообразия.

Теорема 2. Нека $(M, g, \mathbb{Q})$ *е компактно* QC*-Айнщайново многообразие от размерност* $4n + 3 > 7$ *с*

$$Scal = 16n(n+2), Ric(X,Y) = \frac{1}{4n} Scal g(X,Y) = 4(n+2)g(X,Y).$$

Първото собствено число на суб-Лапласиана е равно на $4n$ *тогава и само тогава, когато* $(M, g, \mathbb{Q})$ *е* QC*- еквивалентно на* 3*-Сасакиева сфера от размерност* $4n + 3 > 7$*. В частност, едно компактно* 3*-Сасакиево многообразие от размерност* > 7 *изпълнява това условие тогава и само тогава, когато е* QC*-еквивалентно на* 3*-Сасакиева сфера.*

В статията са получени също априорни неравенства от типа на Cordes за хоризонталния Хесиан и суб-Лапласиана на функции с компактен носител. Като приложение е получена точна граница за суб–Хесиана на гладка функция чрез нейния суб–Лапласиан върху кватернионната група на Heisenberg. Тези резултати са важни във връзка с решаването на въпроса за $\mathcal{C}^{1,\delta}$-регулярността на p суб-Лапласиана за числа p близки до 2. В статията е намерен точния интервал за числата p, за които това е изпълнено.

В статиите [1] и [2] се изследва 7-мерния случай на кватернионно-контактни многообразия, който не се обхваща от резултатите в [3]. В тях точните долни граници за собствените числа на суб-Лапласиана са доказани при по-силни условия от тези в [3], като в [1] се изисква още положителност на P-функцията за всяка собствена функция на суб-Лапласиана. Трябва да се отбележи, че въведените в тази статия P–форма, P–функция и C–оператор са мотивирани от така наречените оператори на Paneitz в Римановата и CR-геометрията. В [1] е доказана и теорема от типа на Obata за компактно 7–мерно 3–Сасакиево многообразие, според която долната граница се достига само за 7–мерната 3–Сасакиева сфера. В [2] е получена точната оценка от [1] при условия включващи тензорите на Ричи и торзията на свързаността на Biquard и ковариантни производни на торзията. Като следствие са получени точни оценки за QC-скаларната кривина на компактно 7–мерно QC-многообразие в екстремалния случай при допълнителни условия върху торзията на свързаността на Biquard. Доказателството на основната Теорема 1.2 в [2] използва подходящ вертикален вариант на формулата на Bochner.

В статията [5] е получена формула за ентропията на QC-уравнението на топлопроводимостта, която се използва за доказване на важния факт, че QC-функционалът на енергията е нерастящ, при условия от типа на използваните в статиите [1] и [3] съответно в размерност 7 и по-голяма от 7. Тези резултати са аналогични на получените от Chang и Wu за CR-многообразия. Други приложения на тази формула за ентропията са направени в статията [6]. Първото е подобряване на оценките в [1, 2, 3] и е свързано с така наречената "съществена положителност"на въведения в [1] C-оператор. Второто приложение е даденото ново единно доказателство на основните резултати в [1] и [3].

Статията [4] е посветена на проблема на Yamabe в QC-геометрията. Класическият проблем на Yamabe гласи, че ако (M, g) е компактно Риманово многообразие от размерност ≥ 3, то съществува метрика в конформния клас на g, която има постоянна скаларна кривина. Решаването на този проблем, дължащ се на работите на математици като Yamabe, Trudinger, Oben и Schoen, е крайъгълен камък в развитието на теорията на нелинейните частни диференциални уравнения. В комплексния случай аналогът на проблема на Yamabe е за строго псевдоизпъкнали CR-многообразия, като в този случай ролята на метрика се изпълнява от формата на Levi, тази на конформна метрика- от контактна форма, която анулира разпределениео на Levi (*псевдоермитова структура*), а ролята на скаларна кривина-от въведената през 1978 г. независимо от Tanaka и Webster скаларна кривина на псевдоермитова структура. В тези термини CR-проблемът на Yamabe е поставен и решен по същество от Jerison и Li през 1987 г.. Проблемът на Yamabe за QC-многообразия е кватернионен аналог на този за CR-многообразия, като в случая става дума за съществуване на конформна смяна на каноничната контактна $\mathbb{R}^3$-значна 1-форма, чиято свързаност на Biquard има постоянна скаларна кривина. Този проблем е решен от Wang в 2005г. в суб-критичния случай, когато константата на Yamabe на QC-многообразието е строго по-малка от тази на каноничната QC-структура на кватернионната група на Хайзенберг със същата размерност. Основният резултат в [4] е намереното асимптотично развитие на QC-функционала на Yamabe върху специален клас от „тест" функции, от което следва, че константата на Yamabe на компактно QC-многообразие, което не е локално сферично е строго по–малка от съответната константа на стандартната 3–Сасакиева сфера. Този факт, заедно със споменатия резултат на Wang, решава проблема на Yamabe в несферичния случай.

В заключение ще отбележа, че за получаване на резултатите в представените за конкурса статии Ал. Петков е преодолял редица трудности от идеен и технически характер. Той използва голяма част от апарата на съвременната диференциална геометрия и геометричния анализ, а така също и редица нови идеи с потенциални приложения за решаване на други интересни отворени геометрични и аналитични въпроси в суб-Римановата геометрия.

6. Критични бележки и препоръки

Нямам критични бележки към рецензираните трудове

7. Лични впечатления за кандидата

Познавам гл. ас. Ал. Петков още като докторант и съм с отлични впечатления от неговите математически и чисто човешки качества.

II. Заключение.

Представените от гл. ас. д-р Александър Владимиров Петков материали по конкурса показват, че той изпълнява изискванията на ЗРАСРБ, ППЗРАСРБ и ПУРПНСЗАДСУ. Няма данни за забелязан плагиаризъм. Оценявам много високо научния и преподавателски труд на гл. ас. д-р Александър Владимиров Петков и давам своята положителна оценка на неговата кандидатура. Всичко това ми дава основания убедено да препоръчам на уважаемото жури да предложи на Факултетния съвет на Факултета по математика и информатика на СУ "Св. Кл. Охридски"да избере гл. ас. д-р Александър Владимиров Петков за „доцент"в Област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика: професионално направление 4.5 Математика(Геометрия).

04.09.2020 г. Подпис:

(чл.-кор. Олег Мушкаров)