До Факултетния съвет на ФМИ
на СУ "Св. Климент Охридски"

СТАНОВИЩЕ

от: проф. дмн Гено Николов, Факултет по математика и информатика
на СУ "Св. Климент Охридски "

за дисертационния труд на Драгомир Ивов Алексов
"Неравенства от тип на Марков в L_2-норми при тегла на Гегенбауер"
за присъждане на образователната и научна степен *Доктор*
по докторска програма *Изчислителна математика*

Дисертационният труд *Неравенства от тип на Марков в L_2-норми при тегла на Гегенбауер* е с обем от 65 страници и включва пет глави, апробация на резултатите, авторска справка за приносите и декларация за оригиналност на резултатите, благодарности и списък на цитираната литература включващ 51 заглавия.

Неравенствата от тип на Марков са едни от най-важните полиномиални неравенства в Теория на апроксимациите. Те дават оценки отгоре за норма на производната на алгебричните полиноми от дадена степен чрез (не непременно същата) норма на самите полиноми. Класическото неравенство на Андрей и Владимир Маркови се отнася за равномерната норма върху краен интервал и е доказано в края на 19-и век. От тогава до наши дни неравенствата от тип на Марков са предизвикателство за математиците и предмет на многобройни обобщения. Като примери могат да се посочат красивото уточнение на неравенството на братята Маркови, намерено от Дафин и Шефер, което е отправна точка за така наречените неравенства от тип на Дафин и Шефер, неравенствата за полиноми с криволинейни мажоранти и ролята на полиномите-змии в тях, и др.

Интерес представлява намирането на точната константа в неравенствата на Марков, така например, в неравенствата за първата производна, това е константата

$$c_n := \sup_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{\|p'\|}{\|p\|}$$

(тук и по-нататък, с $\mathcal{P}_n$ ще означаваме класа от алгебричните полиноми от степен ненадминаваща n). В общия случай това е много трудна задача, затова най-често се търсят двустранни оценки за константата на Марков c_n, порядъка ѝ по отношение на n когато n расте, и асимптотическата константа на Марков. Напомняме, че ако $c_n = \mathcal{O}(n^\gamma)$ при $n \to \infty$, асимптотическата константа на Марков се задава с

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n^\gamma}\,.$$

В случаите на неравенства на Марков в L_2- норми, точната константа има проста характеризация - тя е най-голямата собствена стойност на определена положително дефинитна матрица. Независимо от това, дори за L_2-нормите породени от класическите функции на тегла на Лагер и Якоби точната константа на Марков, с едно изключение, е неизвестна.

Както е видно и от заглавието, дисертационният труд на Драгомир Алексов е посветен на неравенството на Марков в L_2-нормите, породени от ултрасферичните тегла $w_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda > -1/2$, $x \in [-1,1]$. Асоциираната с w_λ L_2-норма е означена с $\|\cdot\|_{w_\lambda}$, а точната константа на Марков с $c_n(\lambda)$,

$$c_n(\lambda) := \sup_{p\in\mathcal{P}_n} \frac{\|p'\|_{w_\lambda}}{\|p\|_{w_\lambda}}.$$

В случая на константна функция на тегло ($\lambda = 1/2$) е налице силният резултат на Ерхард Шмидт от 1944г., съгласно който при $n > 5$

$$c_n(1/2) = \frac{(n+3/2)^2}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2-3}{12(n+3/2)^2} + \frac{R_n}{(n+3/2)^4}\right)^{-1}, \qquad (1)$$

където $-6 < R_n < 13$.

Следва кратко описание на съдържанието на дисертацията. В уводната първа глава се прави обзор на известните резултати върху неравенствата от тип на Марков, и в частност на неравенства в L_2-норми. Втората глава има спомагателен характер, в нея е дадено доказателство на факта, че точната константа в L_2-неравенствата на Марков е равна на най-голямата собствена стойност на асоциирана положително дефинитна матрица. Изведен е и явният вид на матрицата за случая на тегла на Гегенбауер (различна за случаите на четно и нечетно n).

В Глава 3 от дисертацията са получени двустранни оценки за константата в L_2-неравенството на Марков в случая на константна функция на тегло. В този случай неравенствата на Шмидт (1) дават точната стойност на асимптотическата константа на Марков (π^{-1}), и, освен за малки стойности на n, трудно могат да се очакват съществени подобрения. Целта в тази глава е да се изследва какви резултати дава в този случай един подход, предложен от Николов през 2003г. за случаите на Чебишовите тегла $(1-x^2)^{\pm 1/2}$. Основният резултат в тази глава, Теорема 1.3, е получен с трудоемки пресмятания, в които е прибегнато и до използване на възможностите на системата *Mathematica*.

В Глава 4 от дисертацията е получена оценка отгоре за константата на Марков $c_n(\lambda)$, валидна за всички допустими стойности на n и λ. Тази оценка (Теорема 4.1) е с точния порядък по отношение на n, а именно, $\mathcal{O}(n^2)$, и почива на факта, че най-голямата собствена стойност на положително определена матрица се мажорира от следата на матрицата. Постиженията тук са: 1) пресмятането в явен вид на следите на съответните матрици, различни в случаите на четно и нечетно n, и 2) доказателството на факта, че екстремалният полином в L_2-неравенството на Марков при тегла на Гегенбауер е четен при четно n и нечетен при нечетно n. Последният резултат е естествен и би могъл да се предположи, но не следва тривиално във всеки конкретен случай.

По мое мнение, най-впечатляващите резултати в дисертацията са тези от Глава 5. Тук са получени двустранни оценки за константата на Марков $c_n(\lambda)$, валидни за всички допустими стойности на n и λ (Теореми 5.1 и 5.2). Оценките отдолу са с точния порядък както по отношение на n, така и по отношение на λ когато тези параметри клонят към безкрайност. Те дават леко подобрение на подобни оценки, получени обаче с друг подход от Николов и Шадрин.

Оценките отгоре са с точния порядък по n, и подобряват подобни оценки получени от Дро и Елхами през 1999г. Макар да не са с точния порядък по отношение на λ, за умерено големи стойности на λ ($\lambda \leq 25$) оценките отгоре в Теореми 5.1 и 5.2 са по-добри от получените в последно време оценки от Николов и Шадрин. Друго впечатляващо постижение в тази глава е намерената връзка между точната константа на Марков и най-малката положителна нула на асоцииран ортогонален полином (Теорема 5.4). Доказателството на тази връзка не се основава на специфични свойства на ултрасферичните полиноми и показва, че тази характеризация е валидна за много по-широк клас от екстремални задачи.

Резултатите от дисертацията са отразени в 3 публикации на дисертанта. Едната от тях е самостоятелна и публикувана в Годишника на Софийския университет. Другите две са публикувани в списанието с импакт фактор *J. Approx. Theory* през 2016 и 2018 г., като първата с двама съавтори – научния му ръководител Гено Николов и Алексей Шадрин от университета в Кеймбридж, Великобритания, а втората е в съавторство с научния ръководител на дисертанта. Тук е мястото да декларирам равностойния принос на Драгомир Алексов с неговите съавтори в тези две статии.

Макар и публикувани съвсем наскоро, статиите от *J. Approx. Theory* вече са цитирани в работата на Мирослав Баран и Агниешка Ковалска *Generalized Nikolskii's property and asymptotic exponent in Markov's* *inequality*, arXiv:1706.07175v1[math.CA].

Авторефератът на дисертационния труд е в обем от 17 страници, и отразява правилно съдържанието на дисертацията. Същото важи и за приложената там *Авторска справка* за приносите в дисертацията.

Заключение.

Дисертационният труд "Неравенства от тип на Марков в L_2-норми при тегла на Гегенбауер" на Драгомир Ивов Алексов отговаря напълно на изискванията на ЗРАСРБ и на Правилника на ФМИ - СУ за придобиване на образователната и научна степен *Доктор*. Дисертантът е усвоил методи за оценяване на екстремалните собствени стойности на положително дефинитни матрици, преодолял е значителни технически трудности, някои от които и с помощта на компютърна алгебра, за да получи стойностни двустранни оценки за точните константи в L_2- неравенството на Марков при теглата на Гегенбауер, които подобряват много от известните досега резултати.

Въз основа на изложеното по-горе убедено предлагам на членовете на уважаемото жури да гласуват "ЗА" присъждането на образователната и научна степен "Доктор" по Докторска програма "Изчислителна математика" на Драгомир Ивов Алексов.

София, 16 февруари, 2018 г. Подпис на рецензента:

(проф. дмн Гено Николов)