

**Рецензия от професор Цанко Дончев Дончев (УАСГ) на
дисертационния труд:
„Диференциални включвания с неизпъкнала дясна част”
представен от госпожица Мира Исак Бивас за придобиване на
научно образователната степен Доктор
в професионално направление
4.5 Математика (Математически анализ)**

1. *Общо представяне на дисертационния труд.*

Дисертацията е написана на английски език и се състои от пет глави, от които първата е увод, а последната заключение. Тя е в обем от 62 страници текст, съдържание и библиография от 41 заглавия.

Авторът има четири публикации по темата, от които 3 самостоятелни и една в съавторство с научния ръководител. Две от статиите са в списания с импакт фактор, от които една в списание от първа група по значимост (съгласно критериите на румънската академия на науките).

По темата на дисертацията са изнесено 6 доклада на конференции – една в САЩ, две в международни конференции и три в сесиите на СУ „Свети Климент Охридски“.

В увода се описва целта на дисертационния труд и се прави кратък обзор на съществуващата литература. По същество дисертацията разглежда три задачи от теорията на диференциални включвания с неизпъкнала дясна част. Да отбележим, че темата е актуална и получените резултати имат редица приложения.

Във втората част се дават основните означения и факти необходими понататък. Може би доказателствата на твърдения 2.2.4, 2.2.5 и 2.2.6 са излишни и по-добре би било да се цитира от къде са взети. Повечето факти могат да бъдат намерени в Deimling [13] или в Hu\& Papageorgiou Handbook of Set Valued Analysis v. I Theory, Kluwer 1997.

Изложението е ясно и тук са дадени почти всички необходими твърдения и дефиниции, което прави труда по-лесно читаем.

Искам да подчертая още в началото, че това е една много добра дисертация, написана на високо научно ниво.

В следващата глава 3 авторът изучава слабата инвариантност на неавтономни системи, т.е.

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), x(t) \in D,$$

където D е (локално) затворено множество. В дисертационния труд D е сечениена отворено и зарворено множество, което е разбира се локално затворено (locally closed). В дисертацията, както и в [13], F е дефинирана в $I \times D$, което прави доказателствата за съществуване на решения по-трудни. Тук е удачно да се каже, че посъщество не се разглеждат задачи за слаба инвариантност (viability) понеже ако съществува решение, то удовлетворява фазовите ограничения.

В параграф 3.1 се въвеждат нови конструкции, понеже задачата се разглежда при по-общии фазови ограничения, което е по същество новостта. Разбира се тук се развива и нова техника приближените инвариантни тройки. В следващия параграф се разглежда общия случай на слаба инвариантност. Дефинират се Green подразделения (Дефиниция 3.2.1). Основният резултат за съществуване на решение е теорема 3.2.4. Подобни резултати са публикувани и доста по-рано в литературата. Тук обаче допусканията са съществено отслабени.

В параграф 3.3 се разглеждат ε полунепрекъснати реалнозначни и многозначни функции. Тук се доказват някои аналози на теоремата на Скорца Драгони. Тези по същество технически резултати се използват в следващия параграф на трета глава за да се докаже Теорема 3.4.1., която се явява един много силен резултата и без особени преувеличения е най-силният такъв за съществуване на решение на диференциално включване със смесени условия, т.е. измерима дясна част, която е полунепрекъсната отгоре, когато е изпъкналозначна и полунепрекъсната отдолу, когато е неизпъкналозначна.

Резултатите тук заслужават суперлативи, като единствената ми критика е, че обзорът на съществуващата литература е относително „рехав“. Не са представени резултатите на Д. Аверна, Д. Аверна и С. Марано и т.н.т.

В глава 4 се разглеждат процесите на измитане и проектиране, представени като диференциални включвания с неизпъкнала и определяема дясна част, както и връзката между тях. Да отбележим, че тези проблеми произлизат от практически задачи в механиката, разпределение на ресурсите и т.н.т. Авторът дефинира проекционен процес и в параграф 4.1 и освен това обсъжда накратко мотивацията за неговото изследване.

В параграф 4.2 се изследва процес на измитане от вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in d(x(t), t) - N_{C(t)}(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \in C(0) \\ x(t) &\in C(t) \end{aligned}$$

При определени предположения се доказва съществуването на решение – теорема 4.2.1. Тук $N_{C(t)}(x(t))$ е конусът на limit normals. Това е основният резултат, който е нов и интересен.

Параграф 4.3. започва с пример, при който диференциално включване, описващо процес на измитане има решение, а съответното му, описващо процес на проектиране няма решение. Теорема 4.3.2 показва, че когато условията на Теорема 4.2.1 са в сила, то и диференциалното включване, описващо съответния процес на проектиране притежава решение.

Искам да отбележа, че може би е удачно в литературата да се включи и M.D.P. Monteiro Marques, Differential inclusions and nonsmooth mechanical problems shocks and dry frictions, Birkhauser (1993), където се изучават подобни проблеми с импулси (решенията са функции с ограничена вариация).

Параграф 4.4 е посветен на приложение на резултатите от глава 4 в проблема на движение на тълпата. Всъщност тук се показва, че резултатите от последната глава са приложими при реални задачи. Разгледан е и един пример на такава задача (пример 4.4.1).

2. *Оценка на структурата и съдържанието на дисертационния труд.*

Вижда се, че дисертантът е изучил огромна по обем литература и показва едно много добро владение на теоретичния материал. Едно от основните достойнства на дисертацията е това, че тя съдържа главно оригинални и интересни резултати, т.е. няма „пълнеж“. Освен това представената работа е написана на висок научен език. Представените два примера в глава 4 са интересни и допълват подходящо теорията.

Работата съдържа достатъчен брой нови резултати. Тя освен това допуска продължение, т.е. резултатите могат да бъдат получени и за по-общи системи диференциални включвания. Освен това ако се добави и глава с известните резултати, както и да се разшири литературният обчор, то дисертационният труд може да бъде трансформиран в една кратка монография или поне част от монография. Авторефератът е написан на български език и отразява точно резултатите и приносите на дисертанта.

Тук техническите грешки са минимален брой (някои от тях са посочени по-нататък). Това означава, че госпожица Мира Бивас се е постарала достатъчно. Както се вижда представеният дисертационен труд е на едно изключително добро научно ниво и удовлетворява (и дори надвишава) изискванията на закона за научните степени.

От представените четири публикации една е със съавтор, а останалите три са самостоятелни. Това е едно изключително предимство и показва, че госпожица Бивас може да продължи със самостоятелни научни изследвания. Тук разбира се е подходящо и да се споменат и заслугите на научния и ръководител. Дисертантът има публикации в авторитетни международни списания две, от които ISI и една в ново, но силно международно списание.

В заключението (глава 5) са описани и основните приноси на дисертанта. Те са достатъчно много.

3. **Критики и препоръки.**

Критики в математическо отношение нямам. Тук там има някои езикови неточности и misprints. Например Дефиниция 2.3.5 на едно място C е заменено погрешно с S . По-добре е да се използва символът ∂C , отколкото $bdry C$. В дефиниция 2.3.10 вместо where е написано където и т.н.т. Може би дисертацията щеше да изглежда по-добре с примери в глава 3. Както беше отбелязано по-рано литературният обзор е относително непълен, но пък дисертантът е включил главно работите пряко използвани в предоставения труд.

Разбира се тези бележки не намаляват стойността на представения труд.

Основните ми препоръки към автора са да продължи активната си работа в указаните в дисертацията (пък и нови) направления. Също госпожица Бивас би могла да се опита да обобщи представените тук резултатите в безкрайномерни пространства като се потърси връзка с някои класове параболични частни диференциални включвания. Освен това би било интересно резултати от тип Олех (без фазови ограничения) да се дадат за нелокални задачи на Коши.

Позволявам си на препоръчам на госпожица Бивас да се запознае със следните две монографии на румънски математици:

Burlica M., Necula M., Rosu D., Vrabie I., **Delay Differential Evolutions Subjected to Nonlocal Initial Conditions**. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, New York (2016),
където нелокалните задачи са достатъчно подробно изучени.

Следващата монография е посветена на някои нови аспекти на слабата и силна инвариантност на еднозначни и многозначни еволюционни уравнения в банахови пространства:

Carja O., Necula M., Vrabie I., **Viability, Invariance and Applications**. North-Holland Mathematics Studies. 207, Elsevier Science B.V., Amsterdam (2007).

Смятам, че някои от резултатите в дисертацията допускат продължение и за проблемите изследвани в горните две монографии.

4. **Заклучение.**

От гореизложеното може да се извади заключение, че дисертантът се извява като един талантлив математик с богата научна култура, което ми дава основание да **препоръчам на уважаемото научно жури да присъди на Мира Исак Бивас образователната и научна степен “доктор”**, която тя напълно заслужава. Това ще бъде също и една подходяща оценка за научната и дейност. Аз лично се надявам да видя госпожица Бивас като научен ръководител на дисертанти след няколко години.

София, 03.09.2017

Изготвил:
(проф. д-р Ц. Дончев)