Р Е Ц Е Н З И Я

на дисертационен труд

за придобиване на образователна и научна степен „доктор”

в професионално направление: 4.5 Математика,

по научна специалност Изчислителна математика

Автор: Ана Александрова Авджиева

Тема: Някои асимптотически оптимални квадратурни формули

Научен ръководитл: проф д.м.н. Гено Николов

Изготвил рецензията: проф. д.м.н. Стефка Николаева Димова

Съдържателен анализ на научните и научно-приложни постижения в дисертационния труд. Характеризиране на основните постижения.

Представеният дисертационен труд е в областта на числените методи и конкретно в един много важен и развиващ се дял – конструиране и изследване на нови класове квадратурни формули. Численото интегриране има както самостоятелно значение като изчислителна процедура с приложения в много практически изследвания, така и като спомагателна и многократно повтряща се процедура в такива широко използвани методи като Метода на крайните елементи и Метода на граничните елементи. Там изборът на подходящи квадратурни формули допринася за ефективността на целия изчислителен процес – на точността и на скоростта му.

Дисертационният труд съдържа 84 страници, разпределени в 6 глави, формулировка на основните научни приноси, декларация и Литература с 34 заглавия.

Първата глава е уводна. В нея са систематизирани основните понятия, с които се работи в дисертацията: алгебрическа степен на точност, оптималност в даден клас, дефинитност на квадратурните формули, редици от асимптотически оптимални квадратурни формули. При това и тук, и в следващите глави са цитирани работите на други автори в тези направления, което показва, че кандидатката е запозната обстойно с литературата в областта на дисертацията. Накрая в увода е направен преглед на съдържанието на дисертацията.

Глава втора съдържа някои предварителни сведения за ядрата на Пеано за дадена квадратурна формула и полиномите на Бернули (функциите $C_\nu(x)$, формула (2.5)). Някои известни техни свойства и връзки са формулирани и за пълнота доказани в Теорема

1. - Теорема 4. Сумационните формули на Маклорен, които се използват съществено при конструирането на асимптотически оптималните квадратурни формули, са формулирани като Лема 1. Приведени са и константите в грешките на съставните формули на трапеците и на правоъгълниците в периодичните Соболеви класове W_p^s, $s = 3,4,\ p = 1,2,\infty$..

Глава 3 е посветена на числено конструиране на Гаусови квадратурни формули за пространства от кубични сплайни с равноотстоящи възли. При предположение за взаимното разположение на възлите на квадратурната формула и на сплайните (Предположение 1.) е предложен оригинален алгоритъм за последователно пресмятане на възлите и теглата на квадратурни формули от вида (3.8), (3.9). Той се основава на изведените тук уравнения (3.11) - (3.14); (3.15), (3.16) при четен и (3.15'), (3.16') при нечетен брой n възли на квадратурната формула. Това е система нелинейни кубични уравнения и за численото и' решаване удачно е реализиран метод на стрелбата.

С предложения алгоритъм са пресметнати и приведени възлите и теглата на квадратурни формули от вида (3.8), (3.9) за $3 \le n \le 16$.. Кубични сплайни с равноотстоящи възли се използват в много приложения, така че получените тук формули представляват интерес и от тази гледна точка. При числените експерименти са направени и полезни наблюдения за началните стойности на параметрите в метода на стрелбата.

В **Глава 4** са конструирани асимптотически оптимални квадратурни формули в непериодичните Соболеви класове W_p^3 и W_p^4. Идеята е следната – в сумационните формули на Маклорен (2.11) и (2.12) за *s*=3 и *s*=4 производните на подинтегралната функция в краищата на интервала на интегриране се апроксимират с формули за числено диференциране. Така с изключение на малки околности на краищата на интеграционния интервал ядрата на Пеано на новополучените квадратурни формули съвпадт с ядрата на Пеано за квадратурните формули на трапеците и на правоъгълниците в периодичния случай.

В п. 4.1 това е направено за s=3, като в 4.1.1. те са базирани на квадратурната ф-ла на трапеците. Използвани са три различни триточкови формули за числено диференциране, точни за полиноми от втора степен. Показано е, че КФ (4.6), (4.7) е асимптотически оптимална в W_∞^3 и в W_2^3. КФ (4.9), Таблица 3., е асимптотически оптимална и в W_1^3. Получените в п. 4.1.2. квадратурни формули са базирани на квадратурната ф-ла на правоъгълниците. Използвани са четири различни триточкови формули за числено диференциране. Първите три дават квадратурни формули, асимптотически оптимални в W_∞^3 и в W_2^3, четвъртата – квадратурни формули, асимптотически оптимални в $W_p^3, 1 \le p \le \infty$. Направено е сравнение на константите на грешката на получените квадратурни формули.

В п. 4.2 на същия принцип са получени асимптотически оптимални квадратурни формули в W_p^4. Тук се налага да се апроксимират и третите производни на подинтегралната функция в краищата на интервала на интегриране и използваните четириточкови ф-ли за числено диференциране са точни за полиноми от трета степен. На основата на квадратурната формула на трапеците в п. 4.2.1 са получени по три редици от асимптотически оптимални квадратурни формули в $W_p^4,\ p = 2,\infty$. На основата на квадратурната формула на правоъгълниците в п. 4.2.2 са получени по три редици от асимптотически оптимални квадратурни формули в $W_p^4,\ p = 2,\infty$. В п. 4.2.3. са получени две редици асимптотически оптимални квадратурни формули в W_1^4 с използване на квадратурните формули на трапеците и на правоъгълниците.

Ще отбележа, че за получаване на резултатите в Глава 4 са преодолени много трудности и макар някъде да е използвана системата MATHEMATICA, положеният труд е огромен.

Асимптотически оптимални положително и отрицателно дефинитни квадратурни формули са конструирани в **Глава 5**. Когато подинтегралната функция е r – изпъкнала, дефинитните квадратурни формули от ред r апроксимират интеграла едностранно, и намирането на двойка положително и отрицателно дефинитни формули от ред r дава двустранно приближение на интеграла. Това е много полезно при получаване на апостериорни оценки на грешката. За съжаление при $r \geq 3$ явният вид на оптималните дефинитни квадратурни формули не е известен (при $r = 2$ това са съставните формули на правоъгълниците - положително дефинитна и на трапеците - отрицателно дефинитна). Затова намирането на **асимптотически** оптимални дефинитни квадратурни формули е важен проблем.

В п. 5.1 са получени редици от отрицателно дефинитни асимптотически оптимални квадратурни формули от ред 4, базирани на квадратурната формула на трапеците, а в п. 5.2 – базирани на квадратурната формула на правоъгълниците. В п. 5.3 и п. 5.4 са конструирани съответно редици от положително дефинитни асимптотически оптимални квадратурни формули от ред 4. Общата процедура е отново основана на сумационните формули на Ойлер-Маклорен (2.11) и (2.12), като производните (първи и трети) в краищата на интервала на интегриране се апроксимират с подходящи формули за числено диференциране. На няколко места в тази глава цитирането на формулите (2.11) и (2.12) е разменено.

Ще отбележа специално необходимите и достатъчни условия, получени в термините на четвъртите ядра на Пеано, за отрицателна (положителна) дефинитност от ред 4 на КФ, формулирани като **Твърдения 1. -4.** И в тази глава е положен много и квалифициран труд за конструиране на това разнообразие от дефинитни асимптотически оптимални квадратурни формули от ред 4 .

Без да умаловажавам представените до тук резултати, според мен в **Глава 6** са най-значимите резултати в дисертацията. Формулирана е и е доказана **Теорема 5.** за остатъците на двойка положително (отрицателно) дефинитни формули от ред r. Твърдението *(i)* на теоремата е твърдение за монотонността на остатъците на квадратурните формули, а твърденията *(ii)* и *(iii)* са априорни оценки на грешките на всяка от формулите от двойката и имат голямо практическо значение.

Теорема 5. е приложена към двойки отрицателно дефинитни (**Теорема 6**) и положително дефинитни (**Теорема 7**) квадратурни формули, получени в Глава 5. В Таблици 16. и 17. съответно са посочени двойките КФ с най-добрата константа *c*, за които е в сила Теорема 5.

В п. 6.3 са представени резултатите от числени експерименти за пресмятане на интеграли от две функции, изпъкнали от 4-ти ред. Направени са коментари за ефективността на априорните оценки *(ii)* и *(iii)*. Таблици 18. и 19. съдържат горните граници на грешките на квадратурните формули с една и съща дефинитност според тези оценки, а Таблици 20. и 21. - коефициента на свръхоценяване на грешката от пресмятането на интеграла от функцията $f(x) = e^x$.

Основните приноси на разработения от Ана Александрова Авджиева дисертационен труд са във важен раздел на числените методи – конструиране и изследване на специални класове квадратурни формули, а именно: числено са получени Гаусови квадратурни формули за пространства от кубични сплайни с равноотстоящи възли; конструирани са асимптотически оптимални квадратурни формули в непериодичните Соболеви класове W_p^3 и W_p^4 и асимптотически оптимални положително и отрицателно дефинитни квадратурни формули, когато подинтегралната функция е *r* – изпъкнала; получени са априорни оценки на грешките за двойки дефинитни квадратурни формули. Получените резултати имат както теоретичен, така и съществен приложен характер – те могат да бъдат използвани като елемент от комплексни методи (МКЕ, МГЕ) при изследване и решаване на реални проблеми.

Общо описание на публикациите, които отразяват дисертационния труд.

По темата на дисертационния труд е публикувана 1 работа в Годишника на СУ, **102**, 2015 г., 145-169; 1 работа в сборника BGSIAM’12, 2012 г., 28-38; 1 работа в MIE 2014 Proceedings, 2014, 3-21; една работа е приета за печат в JCAM. Така изискванията на ФМИ за публикационна активност са изпълнени. Работите са съвместни с научния ръководител, като считам, че приносът на Ана Авджиева е поне равностоен. Резултатите са докладвани на международни конференции в България. Забелязан е един цитат на работата в сборника BGSIAM’12.

Авторефератът е на 27 стр. Написан е акуратно и методично и отразява правилно съдържанието на дисертационния труд.

Забележки и препоръки. Има много малко печатни грешки в текста на дисертацията.

Лични впечатления. Познавам Ана Авджиева от 2010 г., когато постъпи на работа във ФМИ. Тя е внимателен и отзивчив колега, отличен преподавател. Вземала е участие в ESGI в България - 2014, 2015 и 2016 г., в Оксфорд - 2015 г. и в Дания - 2016 г., което показва нейните широки интереси.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Оценката ми за дисертационния труд, автореферата, научните публикации и научните приноси на Ана Александрова Авджиева е изцяло положителна.

Представеният дисертационен труд отговаря напълно на съвкупността от критерии и показатели за придобиване на образователна и научна степен **„доктор”** съгласно изискванията на ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени на Софийския университет и на Факултета по математика и информатика на СУ.

Постигнатите резултати ми дават основание да предложа **да бъде присъдена на Ана Александрова Авджиева образователната и научна степен „доктор”** в професионално направление: 4.5 Математика, научна специалност Изчислителна математика.

10.10.2016 г. Подпис:

София / проф. д.м.н. Стефка Николаева Димова/