

# Рецензия

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:

*„Variational analysis without variational principles“*

за придобиване на  
образователна и научна степен „доктор“  
от

докторант: **Стоян Райчев Апостолов**

в област на висше образование: **4. Природни науки, математика и информатика,**

професионално направление: **4.5. Математика,**

докторска програма: **Математически анализ на Факултет по математика и информатика (ФМИ) на СУ „Св. Климент Охридски“**

Рецензията е изготвена от проф. дмн Михаил Иванов Кръстанов, в качеството му на член на научното жури, съгласно Заповед № РД 38-309/01.07.2022 г. на Ректора на СУ „Св. Климент Охридски“.

## 1. Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Представените материали са изготвени в съответствие със Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за приложение на ЗРАСРБ, както и с Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности (ПУРПНСЗАД) в СУ “Св. Кл. Охридски“. Те включват: 1) Дисертация на английски език; 2) Автореферат на български; 3) Копие на диплома за бакалавърска степен; 4) Копие на диплома за магистърска степен; 5) Копия на отпечатаните научни публикации по темата на дисертацията; 6) Справка от системата „Авторите“; 7) Списък от научни публикации по темата на дисертацията; 8) Декларация от съавторите за приноса на докторанта в три статии; 9) Автобиография на български; 10) Протокол за проверка на оригиналност и Становище във връзка с процедурата за предотвратяване на плагиатство, подписани от научния ръководител; 11) Отчет от софтуерния продукт StrikePlagiarism.com за липса на плагиатство; 12) Декларация на докторанта за оригиналност и липса на плагиатство.

Дисертационният труд на докторанта Стоян Апостолов е с обем от 72 страници и съдържа увод, предварителни сведения, три глави, в които са изложени получените резултати, заключение и библиография от 61 заглавия. Написан е на английски език. В Увода е дадена мотивация на изследванията в дисертацията и са представени накратко основните резултати. В главата Предварителни сведения са дефинирани някои от основните понятия и твърдения, използвани в дисертационния труд. Трета и четвърта глава са посветени на изследване на свойствата на различни обобщения на понятието трансверзалност, както и на съществуващите връзки между тях. В пета глава се изследват условия,

които водят до непрекъснатост на функцията на Белман за оптимизационни задачи в метрични пространства със свойството, че всяко отворено кълбо е свързано.

Трябва да се отбележи, че в доказателствата на дисертационния труд не са използвани вариационни принципи. Това позволява на автора да се фокусира върху съществените свойства на разглежданите задачи и да получи резултати при естествени предположения.

## **2. Данни и лични впечатления за кандидата**

От представената творческа автобиография се вижда, че Стоян Апостолов е роден на 29.12.1992 г. в град София. Висшето си образование е завършил във Факултета по математика и информатика на Софийския университет, като през 2017 година получава бакалавърска степен, а през 2019 година – магистърска степен. И двете са по специалност “Приложна математика”. Още като студент той печели сребърен медал от 22-то Международно състезание по математика (International Mathematics Competition), проведено от 27 юли до 2 август в Благоевград. От юли 2019 до юни 2022 година е редовен докторант в докторска програма “Математически анализ” на ФМИ, СУ с научен ръководител проф. дн Надежда Рибарска.

Познавам Стоян Апостолов като студент. Направи ми силно впечатление със своята любознателност и бърза мисъл. Опитваше се още по време на лекциите да разбере смисъла на новите понятия, както и идеите, стоящи в основата на доказателствата. Тези негови качества се проявиха в пълна сила по време на курса по „Вариационен анализ“, четен от професор Асен Дончев през 2020 година в нашия факултет за магистрите от магистърска програма „Оптимизация“ и докторантите от докторски програми „Математически анализ“ и „Изследване на операциите“. Във връзка с изпита по този курс Стоян Апостолов трябваше да докаже твърдение, свързано с непрекъснатост на функцията на Белман. Той конструира пример, който показва, че Теорема 5 от секция 1 на глава IX на монографията Well-Posed Optimization Problems на Асен Дончев и Тулио Цолеци не е в сила, ако критерият за оптималност е функция, която е непрекъсната в смисъл на Помпей-Хаусдорф (Pompeiu-Hausdorff). Професор Асен Дончев сподели с мен, че е впечатлен от това наблюдение на Стоян Апостолов и го окуражи да продължи да работи по тази задача. Като следствие от това изследване е написана глава 5 от представения дисертационен труд.

## **3. Съдържателен анализ на научните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени в процедурата**

В увода на представения дисертационен труд е направен кратък исторически преглед на известните до този момент резултати в областта и са представени основните резултати, получени от автора. Трябва да подчертая, че Стоян Апостолов много добре познава състоянието на тематиката на дисертационния труд. Може би тук играе роля и фактът, че неговият научен ръководител, заедно с други нейни ученици, активно работи в същата област и вече са получени съществени научни резултати. Това ми дава основание да предположа, че след време ще можем да говорим за влияние на българската математика в развитието на това съвременно направление на вариационния анализ.

Във втора глава са въведени понятия и твърдения, които се използват в изложението по-нататък.

Трета глава е съдържа шест раздела. В първия раздел е получена характеристика на понятието субтрансверсалност. Тази характеристика се основава на едно техническо твърдение (Лема 3.1.3) за линейно намаляване на разстоянието между две затворени множества при подходящи предположения. Доказано е с използване на трансфинитна индукция. Според мен, това е много удачно, защото позволява по естествен начин да се придобие геометрична интуиция за неговия смисъл. В първия раздел е получена и характеристика на свойството субтрансверсалност в термините на наклона на така наречената "сдвояваща функция" (Твърдение 3.1.6). Вторият раздел е посветен на свойството трансверсалност. Използвайки резултатите от първия раздел, са получени характеристика на свойството трансверзалност в термините на "транслирана" субтрансверзалност (Твърдение 3.2.1) и на "транслирана" тангенциална субтрансверзалност (Твърдение 3.2.2). Получена е и характеристика на свойството трансверсалност в термините на наклона на "сдвояващата функция" (Твърдение 3.2.5). В третия раздел се изследва свойството присъща трансверзалност. Първото твърдение в този раздел е характеристика на свойството тангенциална трансверсалност в термините на наклона на "сдвояващата функция" (Твърдение 3.3.1). В статия на Дружвятски, Йоффе и Люис от 2015 година е получена метрична характеристика на свойството присъща трансверзалност, също в термините на наклона на "сдвояващата функция". Тази характеристика е използвана в дисертацията за дефиниция свойството присъща трансверзалност в произволни метрични пространства (Дефиниция 3.3.2). В дисертационния труд е доказана характеристика на свойството присъща трансверзалност. От тази характеристика следва, че свойствата присъща трансверзалност и тангенциална трансверсалност са много близки в следния смисъл: За тангенциална трансверзалност между две затворени множества  $A$  и  $B$  в обща точка  $x$  се иска да е изпълнено определено неравенство за всички точки от двете множества  $A$  и  $B$ , които се намират в подходяща околност на точката  $x$ . За свойството присъща трансверзалност се иска да е в сила същото, само че за точките от множествата  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ . Като следствие от този резултат се получава, че свойствата тангенциална трансверзалност, присъща трансверзалност и субтрансверзалност съвпадат за случая на изпъкнали множества. В края на трети раздел е показано, че получената метрична характеристика на присъщата трансверзалност е еквивалентна в хилбертови пространства на характеристика, предложена в статия на Тао, Буи, Чонг и Верхаген (Thao, Bui, Cuong и Verhaegen) от 2020 година. В четвърти раздел е показано, че свойството субрегулярност на многозначно изображение между две метрични пространства в точка от графиката може да бъдат характеризирани в термините на свойството субтрансверзалност на две подходящо дефинирани затворени множества, едното от които е графиката на многозначното изображение (Теорема 3.4.1). Като следствие от тази теорема е получено, че свойството регулярност на многозначно изображение със затворена графика между две нормирани пространства в точка от графиката може да бъдат характеризирани в термините на свойствата трансверзалност на същите две затворени множества. В пети раздел е получена характеристика на свойството субрегулярност на многозначно изображение между две пълни метрични пространства (Теорема 3.5.2). Тази характеристика дава нов поглед на резултати на Йоффе (2017 година) и Кругер (2015 година). Доказателството се основава получената по-рано характеристика на свойството субтрансверзалност. В последния раздел е доказана характеристика на свойствата регулярност на многозначно изображение със

затворена графика между две пълни метрични пространства в термините на „линейна скорост на намаляване“. От този резултат са получени две следствия: Първото е характеристика на метричната регулярност на многозначно изображение между две пълни метрични пространства чрез неговата контингентна вариация (contingent variation) (Следствие 3.6.2), а второто е характеристика на метричната регулярност на многозначно изображение между две банахови пространства чрез неговата контингентна производна (contingent derivative) (Следствие 3.6.3).

В първите два раздела на глава 4 са дадени дефинициите на понятия и са формулирани твърдения, които се използват в следващите раздели на същата глава. Основният резултат на четвърта глава е формулиран в третия раздел. Същността на този резултат се състои в това, че две подходящи вариационни условия са достатъчни за тангенциална трансверзалност на две затворени множества в банахово пространство. Формулирани са два варианта на този абстрактен резултат раздел (Теорема 4.3.1 и 4.3.2). Интересни са следствията, които се получават от него: Нека едното затворено множество е множеството от всички точки, които са допустими за дадена минимизационна задача, а второто нека е епиграфиката на разглежданата функция (критерия на задачата) в дадена референтна точка. Разгледани са три случая: 1. Допустимото множество е графиката на непрекъснат линеен оператор, функцията е полунепрекъсната отдолу по отношение на двете променливи и удовлетворява локално условието на Липшиц по отношение на първата променлива, равномерно спрямо втората и съществува равномерно допирателно множество, пораждащо допирателния конус на Кларк към епиграфиката на разглежданата функция в референтната точка (Теорема 4.4.3). 2. Функцията удовлетворява условието на Обен (Aubin) в референтната точка и допустимото множество е графика на компактен линеен оператор (Теорема 4.4.6); 3. Епиграфиката на функцията и допустимото множество са масивни в съвкупност в референтната точка (Твърдение 4.4.8). Тогава, като следствие от абстрактния резултат, при всяко едно от тези условия доказва теорема за множителите на Лагранж в случай, че референтната точка е решение на минимизационната задача. Тук искам да отбележа, че разгледаното условие на Обен представлява безкрайнономерен вариант на поточковото условие на Обен. А то е основно предположение в едно от най-общите необходими условия за оптималност на основната задача на вариационното смятане. Това условие е доказано от Кларк (Clarke) през 2005 година.

В пета глава на дисертационния труд се изследва непрекъснатостта на функцията на Белман

$$S(p) = \inf \{g(y): y \in D(p)\}$$

в метричното пространство  $Y$ , в което всяко отворено кълбо е свързано. В първия раздел се дават две дефиниции на топологична полунепрекъснатост отгоре (отдолу) и полунепрекъснатост отгоре (отдолу) спрямо метриката на Помпей-Хаусдорф. Във втория раздел е представен пример, за който множеството от допустимите точки  $D(p)$ , зависещо от параметъра  $p$  е непрекъснато в смисъл на Помпей-Хаусдорф в точката  $p$ , докато функцията на Белман не е непрекъсната в същата точка  $p$ . В същия раздел е дефинирано понятието отслабена равномерна непрекъснатост (relaxed uniform continuity assumption - RUCA) на двойката  $(D, g)$ . Доказано е в Теорема 5.2.3, че ако множеството  $D(p)$  от допустимите точки е непрекъснато в смисъл на Помпей-Хаусдорф в точката  $p$ , функцията  $g$  е непрекъсната в множеството  $D(p)$  и двойката  $(D, g)$  удовлетворява условието (RUCA), то функцията на Белман  $S$  е непрекъсната в точката  $p$ . В третия раздел са представени две достатъчни условия за непрекъснатост на функцията на

Белман. В първото твърдение (Теорема 5.3.1) се предполага, множеството  $D(p)$  от допустимите точки е непрекъснато в топологичен смисъл в точката  $p$  и функцията  $g$  е непрекъсната в множеството  $D(p)$ , а във второто (Теорема 5.3.2) се иска множеството  $D(p)$  от допустимите точки да е непрекъснато в смисъл на Помпей-Хаусдорф в точката  $p$  и функцията  $g$  да е равномерно непрекъсната в множеството  $D(p)$ . Интересен факт е, че предположението (RUCS) е необходимо за получаване на непрекъснатост на функцията на Белман в следния смисъл: Едно многозначно изображение  $F$  е топологично непрекъснато в точката  $x$ , точно тогава, когато двойката  $(f, F)$  удовлетворява условието (RUCS) за всяка функция  $f$ , която е непрекъсната върху множеството  $F(x)$  (Теорема 5.3.4).

Използваните литературни източници (61 на брой) показват отлично познаване на научната област на дисертацията от докторанта. Използвана е стандартната лексикографична наредба във възходящ ред по отношение на фамилиите на първия автор.

#### 4. Аprobация на резултатите

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в 3 статии, всичките в реномирани списания с импакт фактор:

**S. Apostolov**, M. Krastanov and N. Ribarska, Sufficient Condition for Tangential Transversality, *Journal of Convex Analysis*, 27, 2020, 19-30, WoS Mathematics Q3 (2020)

**S. Apostolov**, On continuity of optimal value map, *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, Vol 74, 2021, No 4, 506-513, WoS Multidisciplinary sciences Q4 (2021)

**S. Apostolov**, M. Bivas, and N. Ribarska, Characterizations of Some Transversality-Type Properties, *Set-Valued and Variational Analysis*, 30, 2022, Issue 3, 1041-1060, WoS Mathematics applied Q2 (2021)

Прави ми впечатление, че една от тези статии е самостоятелна. За другите две статии има Декларация на съавторите, че всички автори имат равностоен принос.

Наукометричните показатели на тези статии, сравнени с минималните изисквания за образователна и научна степен „доктор“, съгласно Постановление № 26 от 13 февруари 2019 г. за изменение и допълнение на Правилника за прилагане на Закона за развитието на академичния състав в Република България, приет с Постановление № 202 на Министерския съвет от 2010 г. (обн., ДВ, бр. 75 от 2010 г.; изм. и доп., бр. 19 от 2011 г., бр. 9 от 2012 г., бр. 62 от 2013 г., бр. 60 от 2014 г., бр. 57 от 2015 г. и бр. 56 от 2018 г.) са както следва: Всички публикации попадат в Група Г7 и събират общо 141 точки, при минимални изисквания от 30 точки за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в научната област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика. Първата публикация е в Q3 и се оценява с 45 точки, втората е в Q4 и се оценява с 36 точки, а третата е в Q2 и се оценява с 60 точки. Получените 141 точки значително (повече от 4,5 пъти) надвишават минималните изисквания за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в научната област и професионално направление на процедурата

Въз основа на представените материали, рецензентът приема, че няма доказано по законоустановения ред плагиатство в представения дисертационен труд и научни трудове по тази процедура.

Резултатите от дисертацията са представени от автора досега със следните доклади:

1. "Sufficient conditions for tangential transversality", 47th Winter School in Abstract Analysis, Svratka, Czech Republic, 2019, <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~lhota/> (based on a joint work with Mikhail Krastanov and Nadezhda Ribarska)
2. "Intrinsic transversality and tangential transversality", 15-th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics, June 28 - July 2, 2021, Borovets, Bulgaria, <http://www.math.bas.bg/~bio/WP21/> (based on a joint work with Mira Bivas and Nadezhda Ribarska)
3. "Intrinsic transversality and tangential transversality", The 13th International Conference on Large-Scale Scientific Computations LSSC 2021, June 7 - 11, 2021, Sozopol, Bulgaria (based on a joint work with Mira Bivas and Nadezhda Ribarska)
4. "Intrinsic transversality and tangential transversality", Spring Scientific Session, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 27 March 2021 (based on a joint work with Mira Bivas and Nadezhda Ribarska)
5. "On continuity of optimal value map", Spring Scientific Session, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 26 March 2022

## 5. Качества на автореферата

Авторефератът е написан на български език в обем от 39 страници. Той точно отразява съдържанието на дисертационния труд и съответства на изискванията на ЗРАСРБ и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в СУ „Климент Охридски“.

За съжаление, номерацията на твърдения, дефиниции, литературни източници и други в автореферата не съвпада с номерацията им в дисертацията. На няколко места има сбъркани номера на глави и раздели. Срещат се и правописни грешки. Има несъответствия със справката от системата „Авторите“. Всичко това затруднява четенето и пречи на установяване на съответствие с дисертацията.

## 7. Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го публикации и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни резултати, **потвърждавам**, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението на ЗРАСРБ и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности (ПУРПНСЗАД) в СУ за придобиване от кандидата на образователната и научна степен „доктор“ в научната област: **4. Природни**

**науки, математика и информатика** , професионално направление: **4.5. Математика (Математически анализ)**. Искам да подчертая, че качествата на дисертационния труд значително превишават минималните национални изисквания в професионалното направление. Тук трябва да отбележа, че не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, **убедено препоръчвам** на научното жури да присъди на **Стоян Райчев Апостолов** образователната и научна степен „доктор“ в научна област:  
**4. Природни науки, математика и информатика**, професионално направление:  
**4.5. Математика (Математически анализ)**.

27.09. 2022. г.

Изготвил рецензията:

/проф. дмн Михаил Иванов Кръстанов/