СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА ВЕРОЯТНОСТИ, ОПЕРАЦИОННИ ИЗСЛЕДВАНИЯ И СТАТИСТИКА

АВТОРЕФЕРАТ

НА ДИСЕРТАЦИЯ ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА ОБРАЗОВАТЕЛНА И НАУЧНА СТЕПЕН ДОКТОР ПО МАТЕМАТИКА

Професионално направление: 4.5 Математика
Докторска програма: Теория на вероятностите и математическа статистика

Разклоняващи се процеси - оптимизация и приложения

Калоян Николаев Витанов

Научен ръководител: проф. дмн Марусия Славчова-Божкова

СОФИЯ, БЪЛГАРИЯ
2022

Съдържание

ГЛАВА 1

Въведение

1.1 Кратка история на разклоняващите се процеси

Разклоняващите се процеси са клас стохастични процеси, които успяват да отразят в себе си някои от фундаменталните аспекти на процесите на делене и размножаване, които се наблюдават в природата. Разклоняващите се процеси моделират еволюцията на популация от обекти (тези обекти могат да са например елементарни частици, фотони, електрони, атоми, молекули, клетки, вируси, бактерии, животни, хора, информация, финанси, и други) във времето и изучават различни характеристики на тази еволюция. Не е изненадващо, че областите на приложение на разклоняващите се процеси са многобройни и разнообразни - физика, химия, биология, демография, екология, икономика и др. Това разнообразие от области на приложение благоприятства развитието на различните видове разклоняващи се процеси с цел изследването на конкретни въпроси представляващи интерес в някоя от областите. На лице е богато разнообразие от различни видове разклоняващи се процеси: процеси в дискретно време и непрекъснато време, с един или множество видове обекти/частици/клетки, процеси със случайна имиграция, разклоняващи се дифузионни процеси, регулирани разклоняващи се процеси и други.

Изучаването на разклоняващите се процеси започва около средата на 19 век с търсенето на обяснение за изчезването на аристократични родови линии в Европа. През 1845 г. френският математик и статистик Биенеме пръв изследва процеса на изчезване на френските благороднически семейства, [83], и създава първия модел на разклоняващ се процес. За съжаление, тъй като Биенеме не оставя ученици, името му както и резултатите му постепенно биват забравени. Няколко десетилетия по-късно, през 1873 г., въпросът свързан с изчезването на благороднически фамилни имена се повдига отново сред научната общност с известната работа на Галтън и Уотсън, [85]. Въпреки грешката в окончателното заключение на Галтън и Уотсън, [85] се счита от мнозина за началото на теорията на разклоняващите се процеси. Изминават повече от 50 години преди правилното решение на задачата изследвана от Галтън и Уотсън да бъде публикувано от датския математик Стефенсен в [88] през 1930 г. Минават още 40 години преди Хейди и Сенета, да забележат през 1972 г., че Биенеме е разполагал с правилното решение още през 1845 г. (виж [84]).

След Втората световна война, разклоняващите се процеси и техните приложения във физиката се изследват интензивно, което води до бързото развитие на областта. Счита се, че самият термин *разклоняващ се процес* е въведен от А. Н. Колмогоров и Н. А. Дмитриев в тяхната работа [89] през 1947 г. Сред най-влиятелните монографии в областта на разклоняващите се процеси са тези на Харис [58] (1963), Севастянов [8] (1971) и [57] от Атрея и Ней (1972). С времето фокусът на въпросите и приложенията изследвани чрез разклоняващи се процеси постепенно се измесва от физиката и се насочва към проблематика в областта на биологията - виж [14] (2002), [10] (2007), [104] (2015), [36] (2016).

1.2 Неформално описание на Оптимизационните Задачи с Последователно Взимане на Решения (SDP)

В рамките на Глава 3 на дисертацията ще изследваме стохастични Оптимизационни Задачи с Последователно Взимане на Решения - Sequential Decision Problems (SDPs) - в контекста на системи с динамика, зададена от разклоняващ се процес. Тук даваме кратко неформално описание на това какво е „оптимизационна задача с последователно взимане на решения".

Да приемем, че разглеждаме динамична система, с която можем да взаимодействаме. Ние наблюдаваме системата в определени моменти от време, наречени *епохи на взимане на решения*. Ще обозначим набора от тези епохи с $\hat{t}_T$, $\hat{t}_T = \{0 = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_T = \hat{T}\}$, разстоянието между две съседни епохи може да варира, но не може да бъде 0 или ∞. Във всяка епоха на взимане на решения $t_i \in \hat{t}_T$, с изключение на $t_T = \hat{T}$ ние взимаме решение (взаимодействие със системата), което влияе върху това как системата се развива от t нататък. При взимане на решение ние събираме награди (или правим разходи), с изключение на $t_T = \hat{T}$, където само събираме предварително определени награди (или правим предварително определени разходи). *Оптимизационната задача с последователно взимане на решения* представлява задача за избора на такива решения, така че кумулативната очаквана стойност на събраните награди, след събирането на наградите в $t_T = \hat{T}$, да бъде максимизирана (или кумулативният очакван разход да бъде минимизиран). Задачата може да бъде детерминистична или стохастична.

1.3 Концептуална организация на дисертацията

Тази дисертация е концептуално разделена на две теми, изследвани съответно в Глава 2 и Глава 3. В Глава 2 дефинираме новия Многотипов Разклоняващ се Процес на Севастянов изразен чрез вероятности за Мутация между типовете - Multi-type Sevastyanov Branching Process through probabilities of Mutation between types (MSBPM) - и получаваме резултати, представляващи интерес в контекста на популации, избягващи измиране/израждане. Глава 3 е посветена на включването на разклоняващи се процеси, включително и на MSBPM, в оптимизационни задачи известни като Оптимизационни Задачи с Последователно Взимане на Решения - Sequential Decision Problems (SDPs).

Новият MSBPM от Глава 2 може да се разглежда като близък роднина на класическия многотипов разклоняващ се процес на Севастянов, за който обаче всички релевантни уравнения и твърдения са записани посредством вероятности за мутация между типовете. Използването на вероятности за мутация прави MSBPM подходящ за моделиране на биологични популации под стрес, които избягват израждане. В Глава 2 са получени системи от уравнения както за самия MSBPM така и за величини, представляващи интерес в контекста на популации, които избягват израждане. Доколкото ни е известно, изследване на тематиката в подобна дълбочина (изключвайки предишните ни разглеждания в [7] както и предхождащите статии [1] - [6]) не е правено за многотипов разклоняващ се процес в непрекъснато време. В рамките на Главата, ние разглеждаме не само случая, когато MSBPM започва с една частица на възраст 0, но и случая когато MSBPM започва с една частица на възраст a, $a \neq 0$. Доколкото ни е известно, случая на разклоняващ се процес, започващ с частица на възраст a, $a \neq 0$, не е бил систематично изследван преди. В Глава 2 също така са разработени и числени схеми, чрез които могат да бъдат пресметнати всички получени системи от уравнения.

В Глава 3 разглежданията ни започват с въвеждането на „Универсалната рамка за моделиране” разработена от Уорън Б. Пауъл в [82] (2022). Изборът на рамка за моделиране, посредством която ще дефинираме интересуващите ни SDP, е от огромно значение както за нашата перспектива спрямо системите, които се опитваме да моделираме, така и за лекотата, с която евентуални бъдещи разширения на получените в дисертацията резултати, ще могат да бъдат направени. Избраната от нас рамка позволява използването на уравнението за оптималност на Белман при търсенето на решение на SDP, стига разбира се нашите модели да удовлетворяват допусканията на рамката за моделиране. Нашите нови резултати в тази Глава се състоят в следното. Ние преформулираме оптимизационната задача базирана на многотиповия разклоняващ се процес на Биенеме-Галтън-Уотсън (БГУ), която се разглежда в [77], като SDP в „Универсалната рамка за моделиране”. В Теорема 3.2 от подсекция 3.4.3 от дисертацията, даваме ново доказателство на Теорема 3.1 от [77], което е базирано на уравнението за оптималност на Белман. Теорема 3.2 ни предоставя начин за ефективно намиране на решението на SDP с динамика, зададена от БГУ. Продължавайки нататък, включваме многотиповия разклоняващ се процес на Белман-Харис с експоненциални времена на живот, както и Многотипов Разклоняващ се Процес на Белман-Харис изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (MBHBPM; частен случай на MSBPM) с експоненциални времена на живот, в SDP и показваме, че е в сила резултат подобен на резултата от Теорема 3.2. След това доказваме, че с помощта на новоконструирано от нас пространство на състоянията, MSBPM, както и многотиповия процес на Севастянов, също могат да бъдат включени в SDP. За съжаление за тези процеси не е наличен аналог на Теорема 3.2. Въпреки това, уравнението за оптималност на Белман ни позволява да обмислим като възможен подход прилагането на Динамично Програмиране чрез Апроксимации - Approximate Dynamic Programming (ADP) - с цел намирането на решение на конструираната SDP. Накрая завършваме нашите разглеждания с очертаването на общ ADP алгоритъм базиран на променливите на състоянието след взимане на решение (post-decision state variables), който може да служи като отправна точна за бъдеща разработка на специализиран ADP алгоритъм за намиране на решения на SDP с динамика, зададена от разклоняващ се процес.

По-детайлно описание на структурата на Глава 2 и Глава 3, заедно с релевантни бележки и дискусии, могат да бъдат намерени в съответните секциите озаглавени „Обзор и организация на Главата”.

ГЛАВА 2

Многотипови разклоняващи се процеси в непрекъснато време изразени чрез вероятности за мутация между типовете

2.1 Обзор и организация на Главата

В текущата Глава дефинираме новия разклоняващ се процес в непрекъснато време, който заема централно място в рамките на дисертацията - Многотиповия Разклоняващ се Процес на Севастянов изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (Multi-type Sevastyanov Branching Process through probabilities of Mutation between types (MSBPM)). MSBPM може да се разглежда като родственик на класическия многотипов разклоняващ се процес на Севастянов дефиниран в Глава VIII в [8]. Новият момент, който разграничава MSBPM от класическата дефиниция, е използването на вероятности за мутация (една частица е „мутант” ако е с тип, който се различава от типа на майчината ѝ частица) между типовете. По-конкретно, използването на вероятности за мутация по същество ни позволява да декомпозираме класическите вероятност $p^i_{\boldsymbol{\alpha}}(u)$ за това една частица от тип i на възраст u да се трансформира в $\boldsymbol{\alpha}$ частици в края на своя живот (виж стр. 229 в [8] или Подсекция 1.3.1 от дисертацията) в следните два компонента: 1) Вероятности $p_{ik}(u)$ за общия брой k частици в поколението, независимо от типа на частиците, на частица от тип i на възраст u; 2) Вероятности за мутация, на частица от поколението на частица от тип i, към тип j, u_{ij}.

Използването на вероятности за мутация прави MSBPM непосредствено приложим в много области на биологията. MSBPM е добре пригоден за моделиране на биологични популации под стрес, които са застрашени от измиране/израждане. Такива популации биха могли да избегнат израждане ако настъпи „благоприятна” мутация (или комбинация от мутации), която да доведе до надкритично поведение. Подобни постановки представляват интерес в области като моделиране и лечение на ракови заболявания, разпространение на вируси, ваксинационни кампании, контрол на вредители в земеделието, и други (виж [61], [62], [63], [64], [65], [66], [104], [1] - [7]). В биологичен контекст, оценяването на вероятностите за общия брой частици в поколението, $p_{ik}(u)$, както и на вероятностите за мутация u_{ij}, използвани в рамките на MSBPM, е по-лесно отколкото оценяването на по-абстрактните $p^i_{\boldsymbol{\alpha}}(u)$ използвани в рамките на класическия многотипов процес на Севастянов. Използването на $p_{ik}(u)$ и u_{ij} също така често ни дава модел с по-ясни и непосредствени интерпретации.

В текущата Глава концентрираме усилията си по посока получаването на резултати представляващи интерес в контекста на популации, които избягват израждане, в рамките на MSBPM. Други автори, виж [64], [65], [66], разглеждат тематика подобна на тази в дисертацията, техните разглеждания обаче са базирани на многотиповия разклоняващ се процес на Биенеме-Галтън-Уотсън (БГУ). БГУ е процес в дискретно време, докато MSBPM е в непрекъснато - това е съществено по-трудна теоретична постановка. [61], [62], [64], [65], разглеждат популации, избягващи израждане при предположението, че вероятностите за мутация са малки величини. Подобно предположение не се прави при получаването на резултатите ни за MSBPM, което прави модела по-общ от гледна точна на възможни приложения. Авторите на [61] и [62] при получаването на своите резултати допускат Поасоново и геометрично разпределение на броя частици в поколението. Резултатите, които ние получаваме за MSBPM не зависят от предположения за разпределенията на броя частици в поколението. Публикациите [64], [65] разглеждат единствен надкритичен тип, от друга страна в рамките на MSBPM могат да се разглеждат произволен брой надкритични типове, в допълнение на това почти всички наши резултати не зависят от критичността на типовете. Също така почти всички наши резултати за MSBPM не зависят от предположение за неразложимост на процеса, което предположение е от съществена важност за много резултати валидни за класическия многотипов разклоняващ се процес на Севастянов. Ще отбележим още, че нашите резултати за MSBPM не разчитат на предположения за разпределенията на времената на живот на отделните типове частици. Всички изброени до тук характеристики на MSBPM, както и самите резултати получени в тази Глава, демонстрират гъвкавостта и широката приложимост на MSBPM при моделирането на популации, избягващи израждане. Не трябва да забравяме обаче, че MSBPM не е приложим единствено в биологията - моделът може да бъде приложен и в други области, при наличието на подходяща интерпретация за u_{ij}.

Текущата Глава представлява продължение и обобщение на нашата предходна работа в [1] - [7], където фокусът е върху моделирането на ракови заболявания и избягването на израждане. По-точно, спрямо последната ни публикация Vitanov & Slavtchova-Bojkova [7] (2022), MSBPM представлява разширение в следните направления: 1) MSBPM може да бъде неразложим; 2) Класът от типове частици, който „излъчва" частици, може да се пресича с класа от типове частици, към който биват „излъчвани" частици. Процесът разглеждан в [7] е частен случай на MSBPM, по-точно това е разложимият MSBPM (DMSBPM) разгледан в Подсекция 2.3.1 на дисертацията. DMSBPM представлява особен интерес при моделирането на мутации тъй като моделът описва необратима посока в еволюцията на популацията от частици. Ще отбележим, че възникването на резистентност на раковите заболявания към дадено лечение в много случаи се дължи на биологични мутации. Поради това MSBPM, както и неговите разложими варианти, представляват подходящи кандидати за моделирането на риска от завръщане на едно раково заболяване в случая на успешно провеждано лечение. Отбелязваме, че нашите разглеждания в

Глава 3 могат също да се разбират като продължение на [1] - [7]. Реален пример за оптимизационна задача с последователно взимане на решения (такива задачи разглеждаме в Глава 3) представлява планирането във времето на лечение на рак предвид съображения за очакван положителен резултат и цена на лечението. Въпреки, че резултатите изложени в Глава 3 не са достатъчно развити за справяне с реалните обстоятелства съпътстващи описания пример, Глава 3 може да се разбира като стъпка по посока на решаването именно на такива задачи.

В настоящата Глава получаваме системи от интегрални уравнения както за вероятностните пораждащи функции (в.п.ф.) на MSBPM, така и за вероятностите за израждане в рамките на процеса. Получаваме в.п.ф. за броя породени частици от един клас от типове частици към друг клас. В общия случай породените частици не е задължително да са мутанти. В частни случаи на DMSBPM, се концентрираме само върху пораждането на мутанти. DMSBPM може да бъде използван за моделирането на „благоприятна” мутация, която е достъпна само след като определени предхождащи мутации вече са настъпили (виж Фигура 2.12 и Figure 2 в [61]). Получаваме разпределението на случайната величина „време до появя на първата успешна частица”/„време до появя на първия успешен мутант” в рамките на MSBPM, т.е., времето до появата на първата частица или първият мутант, инициираци неизраждащ се процес. Получаваме и изрази за функцията на риска дефинирана спрямо появята на първата „успешна” частица или първият „успешен” мутант. Ще подчертаем, че нашите доказателства в рамките на тази Глава не зависят от предположение дали процесът е разложим или не (отбелязваме, че все пак някои от твърденията са валидни само за разложим процес), разложимостта се третира като частен случай, в който някаква част от вероятностите за мутация между типовете са равни на 0.

В допълнение на резултатите за случая когато MSBPM започва с една частица на възраст 0, разглеждаме и нови варианти на получените резултати валидни за случая, когато процесът започва с една частица на възраст a, $a \neq 0$. Към текущия момент не сме попадали на други автори, които разглеждат начални частици с ненулева възраст. Както се вижда от фигурите, изложени в дисертацията, налична е забележима разлика в поведението на изследваните величини при стойности на t, които са близо до началото на процеса. Това наблюдение има потенциала да бъде много полезно от гледна точна на бъдещи изследвания произтичащи от Глава 3, където се разглеждат оптимизационни задачи свързани с взимането на решения.

Всички системи от уравнения получени в текущата Глава могат да бъдат пресмятани посредством новоразработените, в Подсекция 2.2.7 на дисертацията, Числена Схема 1 и Числена Схема 2.

Текущата глава е организирана по следния начин: В Секция 2.2 дефинираме Многотиповия Разклоняващ се Процес на Севастянов изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (MSBPM) и получаваме системи от уравнения относно величини представляващи интерес в контекста на популации, които избягват израждане. По-конкретно в Подсекция 2.2.1 дефинираме MSBPM. След това получаваме система от интегрални уравнения за в.п.ф. на процеса в Подсекция 2.2.2 както и резултати за вероятностите за израждане в Подсекция 2.2.3. В Подсекция 2.2.4 изследваме в.п.ф. за броя на породените частици, в рамките на процеса, от един клас от типове частици към всички типове частици. В Подсекция 2.2.5 продължаваме с резултати относно появата на първата „успешна” частица, породена от някой от типовете от интересуващ ни клас от типове в MSBPM. В Подсекция 2.2.6 получаваме изрази за функцията на риска дефинирана спрямо времето до поява на първата „успешна” частица. В Подсекция 2.2.7 разработваме две числени схеми, които могат да бъдат използвани за пресмятане на получените в рамките на Главата системи от уравнения. Завършваме Секцията със задаването на няколко примерни MSBPM, които използваме заедно с разработените числени схеми, за да демонстрираме получените резултати. В Секция 2.3 изследваме два частни случая на MSBPM. В Подсекция 2.3.1 разглеждаме разложимия MSBPM (DMSBPM). В Подсекцията получаваме както варианти на резултатите за MSBPM, които са валидни за DMSBPM, така и изследваме допълнителни нови резултати, произтичащи от наложената разложимост. В Подсекция 2.3.2 разглеждаме частен случай на DMSBPM, при който няма зависимост между репродуктивните способности на частиците и тяхната възраст.

2.2 Многотипови Разклоняващи се Процеси на Севастянов изразени чрез вероятности за Мутация между типовете (MSBPM)

Текущата Секция съдържа нови, все още непубликувани, резултати които представляват разширение на нашата скорошна публикация Vitanov & Slavtchova-Bojkova [7] (март 2022).

2.2.1 Въвеждане на означения и дефиниране на MSBPM

Започваме нашите разглеждания с въвеждането на някои от означенията, които широко използваме в рамките на дисертацията:

1. Нека $\mathbb{W} = \{1, 2, \ldots, n\}$. $\mathbb{W}$ обозначава набора от възможни типове частици.

2. Означаваме $\boldsymbol{\delta}^i = \left(\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i\right)^\top$, където $\delta_j^i = 0$ ако $i \neq j$ и $\delta_j^i = 1$ ако $i = j$. Ще използваме $\boldsymbol{\delta}^i$ при задаването на начална частица от тип i, която е на възраст 0. За начална частица от тип i, която е на възраст a, $a \neq 0$, ще използваме $\boldsymbol{\delta}_a^i$, където $\boldsymbol{\delta}_a^i = \left(\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i\right)^\top$ с $\delta_j^i = 0$ ако $i \neq j$ и $\delta_j^i = 1$ ако $i = j$. Индексът „a” в $\boldsymbol{\delta}_a^i$ указва възрастта на началната частица.

3. Ще означаваме кумулативната функция на разпределение на времето на живот на частици от тип i, на възраст 0, с $G_i(t)$. Ако частица от тип i е на възраст a, ще означаваме съответната кумулативна функция на разпределение на времето на живот, обусловена от възрастта на частицата, с $G_{i,a}(t)$.

4. Ако X е случайна величина (сл.в.) ще означаваме с $\widetilde{X}$ идентично и независимо копие на X. Също така, ако $\boldsymbol{X} = \left(X_1, \ldots, X_n\right)^\top$ е случаен вектор, то $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ е идентично и независимо копие на $\boldsymbol{X}$.

5. Вероятностната пораждаща функция (в.п.ф.) на дискретна сл.в. X е $\mathbb{E}\big[s^X\big] = \sum_{x=0}^{\infty} p_x s^x$, където $|s| \leq 1$. В.п.ф. на случаен вектор $\boldsymbol{X} = \big(X_1, \ldots, X_n\big)^\top$, състоящ се от дискретни сл.в., е

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} s_i^{X_i}\right] = \sum_{x_1,\ldots,x_n=0}^{\infty} \left[p(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} s_i^{x_i}\right],$$

където $max\{|s_1|, \ldots, |s_n|\} \leq 1$. Последното изискване може да бъде записано като $|\boldsymbol{s}| \leq 1$, където $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)^\top$.

Дефинираме новия разклоняващ се процес, който заема централно място в разглежданията на дисертацията:

Дефиниция 2.1. *Дефинираме Многотиповия Разклоняващ се Процес на Севастянов изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (Multi-type Sevastyanov Branching Process through probabilities of Mutation between types (MS-BPM)) като многотипов разклоняващ се процес, който удовлетворява:*

1. *Всеки тип частица е уникално асоцииран с цяло число от $\mathbb{W}$ и за него са в сила:*

   (а) *Продължителността на живот на частиците от тип i, $i \in \mathbb{W}$ се моделира от (непрекъснатата) сл.в. τ_i. Съответната кумулативна функция на разпределение означаваме с $G_i(t) = \mathbb{P}(\tau_i \leq t)$, $G_i(0^+) = 0$.*

   (б) *Броят на частиците в потомството на частица от тип i, $i \in \mathbb{W}$, на възраст a се моделира чрез (дискретна) сл.в. $\nu_i(a)$. Означаваме с $p_{ik}(a)$ вероятността частица от тип i на възраст a да има k, $k \in \mathbb{N}_0$, дъщерни частици (независимо от техния тип). По този начин, $\nu_i(a)$ се определя от дадени $\big\{p_{ik}(a)\big\}_{k=0}^{\infty}$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(a) = 1$. Означаваме съответната в.п.ф. на $\nu_i(a)$ с $f_i(a; s) = \mathbb{E}\big[s^{\nu_i(a)}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(a) s^k$, $|s| \leq 1$.*

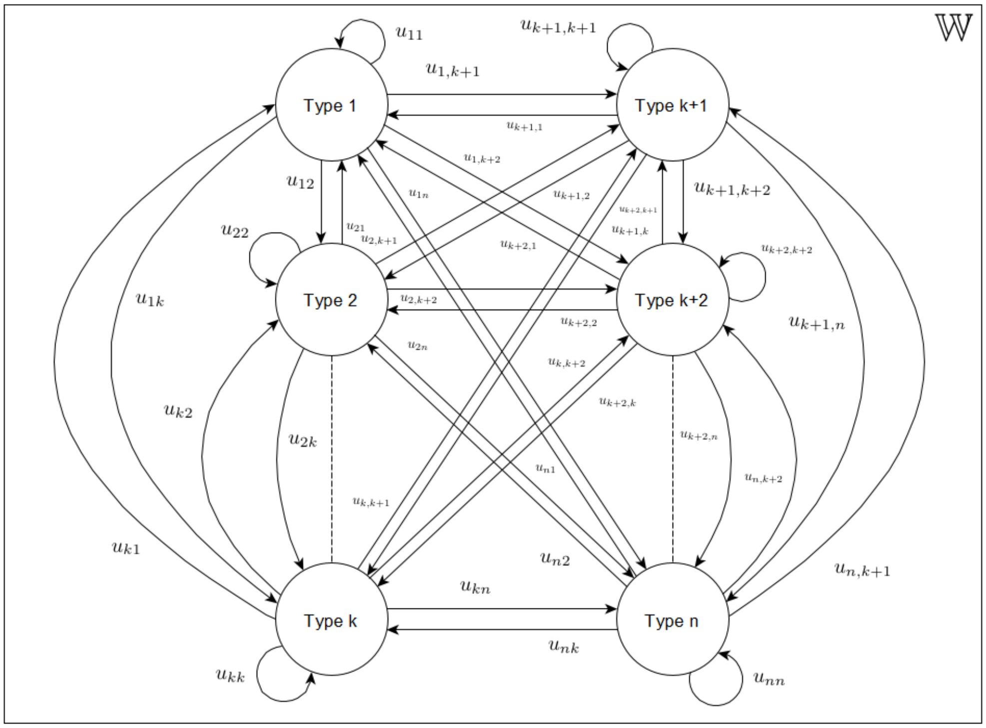
2. *Всяка дъщерна частица на частица от тип i може да бъде от тип $j \in \mathbb{W}$. Типът на дъщерната частица се определя при нейното възникване. Ако $i \neq j$ казваме, че възниква „мутация”. Вероятността дъщерна частица на частица от тип i да бъде от тип j се означава с u_{ij}, $u_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 1$. Освен това:*

   (а) *Ако тип i не може да има дъщерни частици от тип j считаме съответната u_{ij} за $u_{ij} = 0$.*

   (б) *На частиците не е позволено да променят типа си в рамките на своя живот.*

3. *Всички частици от всички типове еволюират независимо една от друга, независимо от поколението, към което принадлежат.*

4. *Формално* $\left\{\boldsymbol{Z}(t) = \big(Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_n(t)\big)^\top\right\}_{t\geq 0}$*, където* $\boldsymbol{Z}(t)$ *обозначава MSBPM в момента* t*, а* $Z_i(t)$ *означава броя на частиците от тип* i*, които съществуват в момента* t*.*



Фигура 2.1: Диаграма на MSBPM, изобразяваща всички възможни пътища на мутация в процеса. Някои u_{ij} могат да са равни на 0 в зависимост от разглеждания контекст.

От Дефиниция 2.1 можем да видим връзката между MSBPM и многотиповия разклоняващ се процес на Севастянов, дефиниран в Глава VIII от [8]. Посредством $p_{ik}(a)$ и u_{ij}, зададени в Дефиниция 2.1, можем да конструираме аналог на $p^i_{\boldsymbol{\alpha}}(a)$ (виж Глава VIII от [8] стр. 229 или Подсекция 1.3.1 от дисертацията) със същата интерпретация. Това се осъществява като зададем $\sum_{j=1}^n \alpha_j = k$ и $p^i_{\boldsymbol{\alpha}}(a) := p_{ik}(a)\frac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}u_{i1}^{\alpha_1}\ldots u_{in}^{\alpha_n}$. За повече детайли относно естеството на връзката между двата модела читателя се препраща към дискусията след Дефиниция 2.1 в дисертацията.

2.2.2 Вероятностни пораждащи функции за MSBPM

Дефиниция 2.2. *Означаваме в.п.ф. за MSBPM, започващ с една частица от тип* i*,* $i \in \mathbb{W}$*, която е на възраст* 0*, с:*

$$F_i(t;\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j\in\mathbb{W}} s_j^{Z_j(t)} |\ \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i\Big),$$

където $|\boldsymbol{s}| \leq 1$. *Означаваме в.п.ф. за MSBPM, започващ с една частица от тип* i, $i \in \mathbb{W}$, *която е на възраст* a, $a \neq 0$, *с*

$$F_{i,a}(t;\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j\in\mathbb{W}} s_j^{Z_j(t)} |\ \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_a^i\Big),$$

където $|\boldsymbol{s}| \leq 1$.

Теорема 2.1. *Следната система от интегрални уравнения е валидна за MSBPM,* $i \in \mathbb{W}$*:*

$$F_i(t;\, \boldsymbol{s}) = s_i\big(1 - G_i(t)\big) + \int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}F_r(t-y;\, \boldsymbol{s})\Big) dG_i(y). \tag{2.1}$$

Следствие 2.1. *Нека MSBPM започва с една частица от тип* i, $i \in \mathbb{W}$, *която е на възраст* a, $a \neq 0$. *Тогава*

$$F_{i,a}(t;\, \boldsymbol{s}) = s_i\big(1 - G_{i,a}(t)\big) + \int_0^t f_i\Big(a + y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}F_r(t-y;\, \boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y). \tag{2.2}$$

2.2.3 Вероятности за измиране/израждане за MSBPM

Дефиниция 2.3. *Дефинираме вероятността за измиране/израждане до момента* t *за MSBPM, започващ с една частица от тип* i, $i \in \mathbb{W}$, *която е на възраст* 0, *чрез:*

$$q_i(t) = \mathbb{P}\left(\sum_{j\in\mathbb{W}} Z_j(t) = 0 \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i\right).$$

Аналогично, ако първоначалната частица е на възраст a, $a \neq 0$*:*

$$q_{i,a}(t) = \mathbb{P}\left(\sum_{j\in\mathbb{W}} Z_j(t) = 0 \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_a^i\right).$$

Теорема 2.2. *Следната система от интегрални уравнения е валидна за MSBPM,* $i \in \mathbb{W}$*:*

$$q_i(t) = \int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}q_r(t-y)\Big) dG_i(y). \tag{2.5}$$

Следствие 2.2. *Следната система от интегрални уравнения е валидна за MSBPM,* $i \in \mathbb{W}$*:*

$$q_{i,a}(t) = \int_0^t f_i\Big(a + y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}q_r(t-y)\Big) dG_{i,a}(y). \tag{2.6}$$

Дефиниция 2.4. *Дефинираме вероятността за измиране/израждане на MS-BPM, започващ с една частица от тип i, $i \in \mathbb{W}$, която е на възраст 0, чрез:*

$$q_i = \mathbb{P}\Bigg(\sum_{j\in\mathbb{W}} Z_j(t) = 0 \text{ за някои } t > 0 \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i\Bigg).$$

Аналогично, ако първоначалната частица е на възраст a, $a \neq 0$:

$$q_{i,a} = \mathbb{P}\Bigg(\sum_{j\in\mathbb{W}} Z_j(t) = 0 \text{ за някои } t > 0 \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i_a\Bigg).$$

Дефиниция 2.5. *Дефинираме* $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{t\to\infty} q_i(t-y) = q_i$ *и* $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{t\to\infty} q_{i,a}(t-y) = q_{i,a}$.

Дефиниция 2.5 е необходима за да се елиминира двусмислието налично в израза $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{t\to\infty} q_i(t-y)$. Алтернативата на Дефиниция 2.5 е да се приеме $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{t\to\infty} q_i(t-y) = q_i(b)$, където изборът на b е произволен.

Теорема 2.3. *Следната система от интегрални уравнения е валидна за MSBPM, $i \in \mathbb{W}$:*

$$q_i = \int_0^\infty f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} q_r\Big) dG_i(y). \tag{2.7}$$

Следствие 2.3. *Следната система от интегрални уравнения е валидна за MS-BPM, $i \in \mathbb{W}$:*

$$q_{i,a} = \int_0^\infty f_i\Big(a + y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} q_r\Big) dG_{i,a}(y). \tag{2.8}$$

Следствие 2.4. *В частния случай където няма зависимост между репродуктивните способности на частиците и тяхната възраст, т.е., $f_i(y;s) = f_i(s)$, $i \in \mathbb{W}$, системите от интегрални уравнения* (2.7) *и* (2.8) *преминават в следната система от уравнения, $i \in \mathbb{W}$:*

$$q_i = q_{i,a} = f_i\Big(\sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} q_r\Big). \tag{2.9}$$

2.2.4 Брой частици породени от $\mathbb{W}_e$ към $\mathbb{W}$ в рамките на MS-BPM

Нека $\mathbb{W}_e \subseteq \mathbb{W}$ е подмножество от типове в MSBPM (индексът „e” означава „emit”). Позволяваме $\mathbb{W}_e = \mathbb{W}$. Броят на възникналите мутанти от $\mathbb{W}_e$ към типове в $\mathbb{W} \setminus \mathbb{W}_e$ е величина от критична важност в контекста на популации, избягващи израждане, тъй като типовете частици с надкритични репродуктивни характеристики обикновено се моделират като типове извън $\mathbb{W}_e$. Ние разглеждаме пораждането на мутанти от $\mathbb{W}_e \subset \mathbb{W}$ към $\mathbb{W}_0 = \mathbb{W} \setminus \mathbb{W}_e$ в Подсекция 2.3.1 и Подсекция 2.3.2. В текущата Подсекция разработваме по-общи резултати. Тези общи резултати касаят общото пораждане на частици, т.е., частиците породени от $\mathbb{W}_e$ могат да бъдат от всеки тип в $\mathbb{W}$ и не е задължително да са мутанти. Частни случаи на тази резултати, съответстващи на пораждане на частици от $\mathbb{W}_e$, към който и да е подклас на $\mathbb{W}$ в рамките на MSBPM, могат да бъдат директно получени чрез подходящо задаване на $u_{ij} = 0$, подходящо задаване на координати от $\boldsymbol{s}$ да са равни на 1, както и чрез установяването в някои случаи, че $s^X = 1$ поради това, че релевантната случайна величина X е винаги равна на 0.

Дефиниция 2.6. *Означаваме с $I_j^{\mathbb{W}_e}(t)$ броя на частиците (мутанти или не) от тип j, $j \in \mathbb{W}$, породени от частици с типове от $\mathbb{W}_e$ до момента t в рамките на MSBPM. Не причисляваме първоначалната частица към нито една от $I_j^{\mathbb{W}_e}(t)$. За MSBPM, започващ с една частица от тип i, $i \in \mathbb{W}$, която е на възраст 0, означаваме с $h_i^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s})$ следната в.п.ф.*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j\in\mathbb{W}} s_j^{I_j^{\mathbb{W}_e}(t)} \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i\Big),$$

където $|\boldsymbol{s}| \leq 1$. Означаваме съответната в.п.ф., когато MSBPM започва с една частица от тип i, $i \in \mathbb{W}$, която е на възраст a, $a \neq 0$, с

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j\in\mathbb{W}} s_j^{I_j^{\mathbb{W}_e}(t)} \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_a^i\Big),$$

където $|\boldsymbol{s}| \leq 1$.

Отбелязваме, че за разлика от $F_i(t;\boldsymbol{s})$, които съдържат информацията за броя на частиците, по типове, които съществуват *в* момента t, то $h_i^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s})$ съдържат информация относно броя на частиците, които са били породени *до* момента t (спрямо t някои от породените частици може вече да не съществуват).

Теорема 2.4. *Следната система от интегрални уравнения е валидна в рамките на MSBPM:*

1. *За $i \in \mathbb{W}_e$*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s}) = \big(1 - G_i(t)\big) + \int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}_e}(t-y;\boldsymbol{s})\Big) dG_i(y). \tag{2.10}$$

2. *За $i \notin \mathbb{W}_e$*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s}) = \big(1 - G_i(t)\big) + \int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} h_r^{\mathbb{W}_e}(t-y;\boldsymbol{s})\Big) dG_i(y). \tag{2.11}$$

Следствие 2.5. *Нека $\mathbb{W}_e = \mathbb{W}$. Следната система от интегрални уравнения е валидна в рамките на MSBPM, $i \in \mathbb{W}$:*

$$h_i^{\mathbb{W}}(t;\boldsymbol{s}) = \big(1 - G_i(t)\big) + \int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}}(t-y;\boldsymbol{s})\Big) dG_i(y). \tag{2.12}$$

Следствие 2.6. *Нека MSBPM започва с една частица от тип i, $i \in \mathbb{W}$, която е на възраст a, $a \neq 0$. Тогава е в сила следната система от интегрални уравнения:*

1. *За $i \in \mathbb{W}_e$*

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s}) = \big(1 - G_{i,a}(t)\big) + \int_0^t f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}_e}(t-y;\boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y). \tag{2.13}$$

2. *За $i \notin \mathbb{W}_e$*

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s}) = \big(1 - G_{i,a}(t)\big) + \int_0^t f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} h_r^{\mathbb{W}_e}(t-y;\boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y). \tag{2.14}$$

Следствие 2.7. *Нека $\mathbb{W}_e = \mathbb{W}$. Следната система от интегрални уравнения е валидна в рамките на MSBPM, $i \in \mathbb{W}$:*

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}}(t;\boldsymbol{s}) = \big(1 - G_{i,a}(t)\big) + \int_0^t f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}}(t-y;\boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y). \tag{2.15}$$

Преминаваме към изследване на $I_j^{\mathbb{W}_e}(t)$ и $h_i^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s})$, когато $t \to \infty$.

Дефиниция 2.7. *Означаваме с $I_j^{\mathbb{W}_e}$ броя на частиците (мутанти или не) от тип j, $j \in \mathbb{W}$, породени от частици с типове от $\mathbb{W}_e$ в рамките на целия MSBPM. Не причисляваме началната частица към нито една от $I_j^{\mathbb{W}_e}$. За MSBPM, започващ с една частица от тип i, $i \in \mathbb{W}$, която е на възраст 0, означаваме с $h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})$ следната в.п.ф.*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j\in\mathbb{W}} s_j^{I_j^{\mathbb{W}_e}} | \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i\Big),$$

където $|\boldsymbol{s}| \leq 1$. Означаваме съответната в.п.ф. когато MSBPM започва с една частица от тип i, $i \in \mathbb{W}$, която е на възраст a, $a \neq 0$, с

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j\in\mathbb{W}} s_j^{I_j^{\mathbb{W}_e}} \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_a^i\Big),$$

където $|\boldsymbol{s}| \leq 1$.

Забележка 2.9. *От Дефиниция 2.7 е ясно, че $I_j^{\mathbb{W}_e} := \lim_{t\to\infty} I_j^{\mathbb{W}_e}(t)$ почти сигурно. Имайки предвид това както и факта, че има взаимно еднозначно съответствие между сл.в. и в.п.ф., следва, че $h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = \lim_{t\to\infty} h_i^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s})$ и $h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = \lim_{t\to\infty} h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s})$.*

Дефиниция 2.8. *Дефинираме* $\lim_{y\to\infty}\lim_{t\to\infty} I_j^{\mathbb{W}_e}(t-y) = I_j^{\mathbb{W}_e}$. *Съответно* $\lim_{y\to\infty}\lim_{t\to\infty} h_i^{\mathbb{W}_e}(t-y;\boldsymbol{s}) = h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})$ *и* $\lim_{y\to\infty}\lim_{t\to\infty} h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(t-y;\boldsymbol{s}) = h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})$.

Дефиниция 2.8 е необходима за да се елиминира двусмислието налично в израза $\lim_{y\to\infty}\lim_{t\to\infty} I_j^{\mathbb{W}_e}(t-y)$. Алтернативата на Дефиницията 2.8 е да се приеме $\lim_{y\to\infty}\lim_{t\to\infty} I_j^{\mathbb{W}_e}(t-y) = I_j^{\mathbb{W}_e}(b)$, където изборът на b е произволен.

Теорема 2.5. *Следната система от уравнения е валидна в рамките на MSBPM,* $i \in \mathbb{W}$*:*

1. *Нека* $i \in \mathbb{W}_e$*. Тогава*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = \int_0^\infty f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big) dG_i(y). \tag{2.18}$$

2. *Нека* $i \notin \mathbb{W}_e$*. Тогава*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = \int_0^\infty f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big) dG_i(y). \tag{2.19}$$

Следствие 2.8. *Нека* $\mathbb{W}_e = \mathbb{W}$*. Следната система от интегрални уравнения е валидна в рамките на MSBPM,* $i \in \mathbb{W}$*:*

$$h_i^{\mathbb{W}}(\boldsymbol{s}) = \int_0^\infty f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}}(\boldsymbol{s})\Big) dG_i(y). \tag{2.20}$$

Следствие 2.9. *Нека MSBPM започва с една частица от тип* i*,* $i \in \mathbb{W}$*, която е на възраст* a*,* $a \neq 0$*. Тогава е в сила следната система от интегрални уравнения:*

1. *Нека* $i \in \mathbb{W}_e$*. Тогава*

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = \int_0^\infty f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y). \tag{2.21}$$

2. *Нека* $i \notin \mathbb{W}_e$*. Тогава*

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = \int_0^\infty f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y). \tag{2.22}$$

Следствие 2.10. *Нека* $\mathbb{W}_e = \mathbb{W}$*. Следната система от интегрални уравнения е валидна в рамките на MSBPM,* $i \in \mathbb{W}$*:*

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}}(\boldsymbol{s}) = \int_0^\infty f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}}(\boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y). \tag{2.23}$$

Следствие 2.11. *В частния случай, където няма зависимост между репродуктивните способности на частиците и тяхната възраст, т.е.* $f_i(y; s) = f_i(s)$, $i \in \mathbb{W}$, *системите от интегрални уравнения* (2.18), (2.19) *от Теорема 2.5 и системите от интегрални уравнения* (2.21), (2.22) *от Следствие 2.9 преминават в:*

1. *Нека* $i \in \mathbb{W}_e$. *Тогава*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = f_i\Big(\sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big). \tag{2.24}$$

2. *Нека* $i \notin \mathbb{W}_e$. *Тогава*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}) = f_i\Big(\sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big). \tag{2.25}$$

2.2.5 Време до появата на първата „успешна" частица породена от $\mathbb{W}_e$ към $\mathbb{W}$ в рамките на MSBPM

Наричаме частица породена от $\mathbb{W}_e$ към $\mathbb{W}$ *„успешна"*, ако тя инициира неизраждащ се MSBPM.

Дефиниция 2.9. *Означаваме с* $T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e}$ *сл.в., която представлява времето до появата на първата „успешна" частица, породена от тип в рамките на* $\mathbb{W}_e$ *към тип в рамките на* $\mathbb{W}$ *в MSBPM, започващ с някаква комбинация от частици с типове в рамките на* $\mathbb{W}_e$. *Без ограничение на общността задаваме началният брой частици за тип* $r \in \mathbb{W}_e$ *да бъде* k_r *и началният брой частици за тип* $r \in \mathbb{W}\setminus\mathbb{W}_e$ *да бъде* 0. *Означаваме така определеното начално състояние на процеса чрез* $\boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\alpha}^*$. *Дефинираме* $T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e} = \infty$ *като събитието, при което не са породени „успешни" частици от* $\mathbb{W}_e$ *към* $\mathbb{W}$ *в MSBPM, започващ с начално състояние* $\boldsymbol{\alpha}^*$. *Предвид това, можем да запишем* $T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e} \in (0, \infty]$. *Ако MSBPM започва с една частица от тип* i, $i \in \mathbb{W}_e$, *на възраст* 0, *използваме за нотация* $T_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e}$. *Ако първоначалната частица е на възраст* a, $a \neq 0$, *използваме* $T_{\mathbb{W},i,a}^{\mathbb{W}_e}$.

Теорема 2.6. *Нека MSBPM започва с* k_r *частици от тип* r, $r \in \mathbb{W}_e$. *Нека всички частици от* $\boldsymbol{\alpha}^*$ *имат възраст* 0. *Разпределението на* $T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e}$ *има следните свойства:*

(i) $\mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e} > t \,|\, \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\alpha}^*\Big) = \prod_{r\in\mathbb{W}_e} \Big[h_r^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{q})\Big]^{k_r}$.

(ii) $\mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e} = \infty \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\alpha}^*\Big) = \prod_{r\in\mathbb{W}_e} \Big[h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q})\Big]^{k_r}$.

(iii) Ако поне един тип частици в рамките на $\mathbb{W}$ *е надкритичен, имаме*

$$\mathbb{E}\Big[T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e} \mid T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e} < \infty,\ \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\alpha}^*\Big] =$$
$$= \frac{1}{1 - \prod_{r\in\mathbb{W}_e}\Big[h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q})\Big]^{k_r}} \int_0^\infty \Bigg[\prod_{r\in\mathbb{W}_e}\Big[h_r^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{q})\Big]^{k_r} - \prod_{r\in\mathbb{W}_e}\Big[h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q})\Big]^{k_r}\Bigg] dt,$$

ако ли не, то тогава очакването не съществува.

Теорема 2.7. *Нека MSBPM започва с k_r частици за тип r, $r \in \mathbb{W}_e$, нека началните частици в $\boldsymbol{\alpha}^*$ имат възрасти $a_{r,c}$, $c \in \{1, 2, \ldots, k_r\}$, където $a_{r,c}$ е възрастта на c-тата частица от тип r. Допускаме $a_{r,c}$ да бъдат 0. Разпределението на $T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e}$ има следните свойства:*

(i) $\mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e} > t|\ \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\alpha}^*\Big) = \prod_{r\in\mathbb{W}_e}\Big[\prod_{c=1}^{k_r} h_{r,a_{r,c}}^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{q})\Big]$.

(ii) $\mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e} = \infty \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\alpha}^*\Big) = \prod_{r\in\mathbb{W}_e}\Big[\prod_{c=1}^{k_r} h_{r,a_{r,c}}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q})\Big]$.

(iii) Ако поне един тип частици в рамките на $\mathbb{W}$ е надкритичен, имаме

$$\mathbb{E}\Big[T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e}|\ T_{\mathbb{W}}^{\mathbb{W}_e} < \infty,\ \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\alpha}^*\Big] =$$

$$= \frac{1}{1 - \prod_{r\in\mathbb{W}_e}\Big[\prod_{c=1}^{k_r} h_{r,a_{r,c}}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q})\Big]} \int_0^\infty \Bigg[\prod_{r\in\mathbb{W}_e}\Big[\prod_{c=1}^{k_r} h_{r,a_{r,c}}^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{q})\Big] - \prod_{r\in\mathbb{W}_e}\Big[\prod_{c=1}^{k_r} h_{r,a_{r,c}}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q})\Big]\Bigg]dt,$$

ако ли не, то тогава очакването не съществува.

2.2.6 Непосредствен риск от пораждане на „успешна" частица от $\mathbb{W}_e$ към $\mathbb{W}$ в рамките на MSBPM

Ще изследваме непосредствения риск от пораждане на „успешна" частица от $\mathbb{W}_e$ към $\mathbb{W}$ чрез следната функция на риска (hazard function):

Дефиниция 2.10. *Дефинираме за начална частица от тип i, $i \in \mathbb{W}_e$, следните функции на риска (hazard functions):*

1. *Ако началната частица е с възраст 0*

$$g_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e}(t)dt = \mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e} \in (t, t+dt] \mid T_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e} > t\Big). \tag{2.26}$$

2. *Ако началната частица е с възраст a, $a \neq 0$*

$$g_{\mathbb{W},i,a}^{\mathbb{W}_e}(t)dt = \mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W},i,a}^{\mathbb{W}_e} \in (t, t+dt] \mid T_{\mathbb{W},i,a}^{\mathbb{W}_e} > t\Big). \tag{2.27}$$

Ясно е, че за $i \in \mathbb{W}_e$

$$g_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e}(t)dt = \frac{\mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e} \in (t, t+dt],\, T_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e} > t\Big)}{\mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e} > t\Big)}.$$

Следователно

$$g_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e}(t) = \frac{F^{(1)}_{T_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e}}(t)}{\mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W},i}^{\mathbb{W}_e} > t\Big)}, \tag{2.28}$$

където $F^{(1)}_{T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W},i}}(t)$ е плътността на $T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W},i}$. Аналогично можем да получим

$$g^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W},i,a}(t) = \frac{F^{(1)}_{T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W},i.a}}(t)}{\mathbb{P}\Big(T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W},i,a} > t\Big)}. \tag{2.29}$$

2.2.7 Числени схеми за пресмятане на получените системи от интегрални уравнения за MSBPM

Систематизираме получените до момента интегрални уравнения в две таблици. Таблица 2.1 съдържа всички интегрални уравнения, съответстващи на MSBPM, започващ с частица на възраст 0. Допълнително поставяме в Таблица 2.1 резултата от Теорема 2.8, т.е. уравнение (2.53), тъй като има същата форма. Нека да обозначим $B_i(t; \boldsymbol{s}) = \int_0^t f_i\Big(y;\, C_i(t-y; \boldsymbol{s})\Big)dG_i(y)$, където $C_i(t-y; \boldsymbol{s})$ е съответният втори аргумент на f_i спрямо разглеждан ред от Таблица 2.1. Чрез Числена Схема 1, изложена по-долу, предоставяме общ числен метод, приложим към изброените интегрални уравнения. Отбелязваме, че Числена Схема 1 може да проследи произхода си до [2], където се разглежда модел, състоящ се от два типа частици.

Уравнение	$L_i(t;\boldsymbol{s})$		$A_i(t;\boldsymbol{s})$		$B_i(t;\boldsymbol{s})$	
(2.1)	$F_i(t;\boldsymbol{s})$	=	$s_i\big(1-G_i(t)\big)$	+	$\int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}F_r(t-y;\boldsymbol{s})\Big)dG_i(y)$	$i\in\mathbb{W}$
(2.5)	$q_i(t)$	=	0	+	$\int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}q_r(t-y)\Big)dG_i(y)$	$i\in\mathbb{W}$
(2.7)	q_i	=	0	+	$\int_0^\infty f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}q_r\Big)dG_i(y)$	$i\in\mathbb{W}$
(2.10)	$h_i^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s})$	=	$\big(1-G_i(t)\big)$	+	$\int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}s_r h_r^{\mathbb{W}_e}(t-y;\boldsymbol{s})\Big)dG_i(y)$	$i\in\mathbb{W}_e$
(2.11)	$h_i^{\mathbb{W}_e}(t;\boldsymbol{s})$	=	$\big(1-G_i(t)\big)$	+	$\int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}h_r^{\mathbb{W}_e}(t-y;\boldsymbol{s})\Big)dG_i(y)$	$i\notin\mathbb{W}_e$
(2.12)	$h_i^{\mathbb{W}}(t;\boldsymbol{s})$	=	$\big(1-G_i(t)\big)$	+	$\int_0^t f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}s_r h_r^{\mathbb{W}}(t-y;\boldsymbol{s})\Big)dG_i(y)$	$i\in\mathbb{W}$
(2.18)	$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})$	=	0	+	$\int_0^\infty f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}s_r h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big)dG_i(y)$	$i\in\mathbb{W}_e$
(2.19)	$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})$	=	0	+	$\int_0^\infty f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big)dG_i(y)$	$i\notin\mathbb{W}_e$
(2.20)	$h_i^{\mathbb{W}}(\boldsymbol{s})$	=	0	+	$\int_0^\infty f_i\Big(y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir}s_r h_r^{\mathbb{W}}(\boldsymbol{s})\Big)dG_i(y)$	$i\in\mathbb{W}$
(2.53)	$V_i(t)$	=	0	+	$\int_0^t f_i\Bigg(y; \Big[\sum_{m\in\mathbb{W}_e} u_{im}V_m(t-y)\Big] + \Big[\sum_{r\in\mathbb{W}_0} u_{ir}q_r\Big]\Bigg)dG_i(y)$	$i\in\mathbb{W}_e$

Таблица 2.1: Системи от интегрални уравнения за случая на MSBPM, започващ с частица на възраст 0.

Числена Схема 1. *Нека $L_i(t; \boldsymbol{s})$ е от Таблица 2.1. Съответната система от интегрални уравнения може да бъде числено пресметната чрез следните стъпки:*

1. *Нека $t = 0$. За всяко i, което участва в съответната система от интегрални уравнения, изчисляваме началната точка $L_i(0; \boldsymbol{s}) = A_i(0; \boldsymbol{s})$.*

2. *Нека $t = kh$, $k = 1, 2, \dots$, където h е избрания размер на стъпката. За всяко i, което участва в съответната система от интегрални уравнения, се изчислява*

$$L_i(kh; \boldsymbol{s}) \approx A_i(kh; \boldsymbol{s}) + \sum_{j=1}^{k} f_i\Big(jh;\, C_i\big((k-j)h; \boldsymbol{s}\big)\Big) \cdot \Big(G_i\big(jh\big) - G_i\big((j-1)h\big)\Big).$$

Таблица 2.2, съдържа всички интегрални уравнения, които съответстват на MSBPM, започващ с частица на възраст a, $a \neq 0$. Допълнително поставяме в Таблицата 2.2 и резултата от Следствие 2.22, т.е., уравнение (2.54), тъй като има същата форма. Означаваме $B_{i,a}(t; \boldsymbol{s}) = \int_0^t f_i\Big(a+y;\, C_i(t-y; \boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y)$ като подчертаваме, че всички $C_i(t-y; \boldsymbol{s})$ съответстват на Таблица 2.1. Числена Схема 2, изложена по-долу, е приложима за всички интегрални уравнения, изброени в Таблица 2.2.

Уравнение	$L_{i,a}(t; \boldsymbol{s})$		$A_{i,a}(t; \boldsymbol{s})$		$B_{i,a}(t; \boldsymbol{s})$	
(2.2)	$F_{i,a}(t; \boldsymbol{s})$	$=$	$s_i\big(1 - G_{i,a}(t)\big)$	$+$	$\int_0^t f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} F_r(t-y; \boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y)$	$i \in \mathbb{W}$
(2.6)	$q_{i,a}(t)$	$=$	0	$+$	$\int_0^t f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} q_r(t-y)\Big) dG_{i,a}(y)$	$i \in \mathbb{W}$
(2.8)	$q_{i,a}$	$=$	0	$+$	$\int_0^\infty f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} q_r\Big) dG_{i,a}(y)$	$i \in \mathbb{W}$
(2.13)	$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{s})$	$=$	$\big(1 - G_{i,a}(t)\big)$	$+$	$\int_0^t f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}_e}(t-y; \boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y)$	$i \in \mathbb{W}_e$
(2.14)	$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{s})$	$=$	$\big(1 - G_{i,a}(t)\big)$	$+$	$\int_0^t f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} h_r^{\mathbb{W}_e}(t-y; \boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y)$	$i \notin \mathbb{W}_e$
(2.15)	$h_{i,a}^{\mathbb{W}}(t; \boldsymbol{s})$	$=$	$\big(1 - G_{i,a}(t)\big)$	$+$	$\int_0^t f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}}(t-y; \boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y)$	$i \in \mathbb{W}$
(2.21)	$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})$	$=$	0	$+$	$\int_0^\infty f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y)$	$i \in \mathbb{W}_e$
(2.22)	$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})$	$=$	0	$+$	$\int_0^\infty f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} h_r^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y)$	$i \notin \mathbb{W}_e$
(2.23)	$h_{i,a}^{\mathbb{W}}(\boldsymbol{s})$	$=$	0	$+$	$\int_0^\infty f_i\Big(a+y; \sum_{r\in\mathbb{W}} u_{ir} s_r h_r^{\mathbb{W}}(\boldsymbol{s})\Big) dG_{i,a}(y)$	$i \in \mathbb{W}$
(2.54)	$V_{i,a}(t)$	$=$	0	$+$	$\int_0^t f_i\Bigg(a+y; \Big[\sum_{m\in\mathbb{W}_e} u_{im} V_m(t-y)\Big] + \Big[\sum_{r\in\mathbb{W}_0} u_{ir} q_r\Big]\Bigg) dG_{i,a}(y)$	$i \in \mathbb{W}_e$

Таблица 2.2: Системи от интегрални уравнения за случая на MSBPM, започващ с частица на възраст a, $a \neq 0$.

Числена Схема 2. *Нека $L_{i,a}(t; \boldsymbol{s})$ е от Таблица 2.2. Съответната система от интегрални уравнения може да бъде числено пресметната чрез следните стъпки:*

1. *Нека $t = 0$. За всяко i, което участва в съответната система от интегрални уравнения, изчисляваме началната точка $L_{i,a}(0; \boldsymbol{s}) = A_{i,a}(0; \boldsymbol{s})$.*

2. *Нека $t = kh$, $k = 1, 2, \dots$, където h е избрания размер на стъпката. За всяко i, което участва в съответната система от интегрални уравнения, се изчислява*

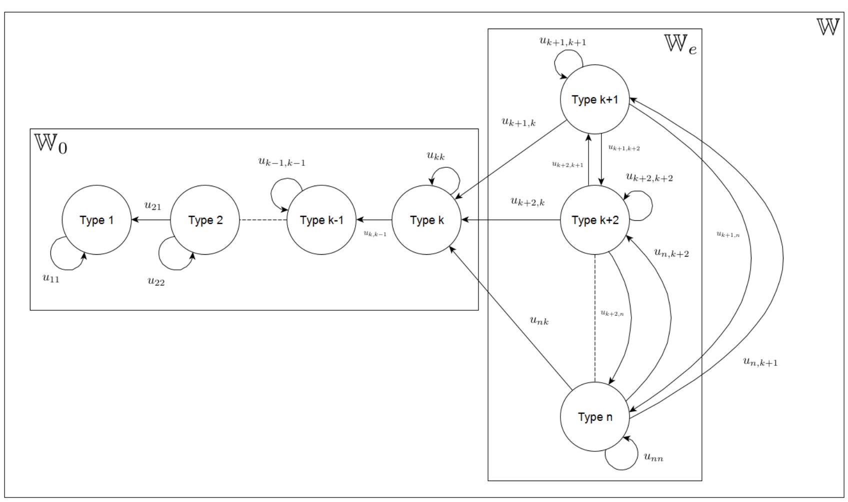
$$L_{i,a}(kh; \boldsymbol{s}) \approx$$
$$\approx A_{i,a}(kh; \boldsymbol{s}) + \sum_{j=1}^{k} f_i\Big(a + jh;\, C_i\big((k-j)h); \boldsymbol{s}\big)\Big) \cdot \Big(G_{i,a}\big(jh\big) - G_{i,a}\big((j-1)h\big)\Big).$$

2.3 Частни случаи на MSBPM

В тази Секция ще разгледаме Разложимия Многотипов Разклоняващ се Процес на Севастянов изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (Decomposable Multi-type Sevastyanov Branching Process through probabilities of Mutation between types (DMSBPM)) и Разложимия Многотипов Разклоняващ се Процес на Белман-Харис изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (Decomposable Multi-type Bellman-Harris Branching Process through probabilities of Mutation between types (DMBHBPM)). DMSBPM е всъщност процесът разгледан от нас в Vitanov & Slavtchova-Bojkova [7] (2022), докато DMBHBPM представлява разширение на процеса от Slavtchova-Bojkova & Vitanov [5] (2019). Както DMSBPM, така и DMBHBPM, са частни случаи на MSBPM, при които процесът е разложим.

2.3.1 Разложим Многотипов Разклоняващ се Процес на Севастянов изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (DMSBPM)

В рамките на текущия Автореферат ще се ограничим само с представянето на по-важните дефиниции и резултати, свързани с DMSBPM. Дефиницията на DMSBPM е сходна с тази на MSBPM с тази разлика, че при DMSBPM разглеждаме два класа от типове частици - клас $\mathbb{W}_0 \subset \mathbb{W}$ и клас $\mathbb{W}_e = \mathbb{W} \setminus \mathbb{W}_0$. Частици с типове от $\mathbb{W}_e$ могат да пораждат частици с типове от $\mathbb{W}$ докато частици с типове от $\mathbb{W}_0$ могат да пораждат само частици, които отново са с тип принадлежащ на $\mathbb{W}_0$. Пълната формална формулировка на DMSBPM е изложена в Дефиниция 2.11 в Подсекция 2.3.1.1 на дисертацията. DMSBPM може да се използва за моделирането на необратими посоки в еволюцията на популация, избягваща израждане.



Фигура 2.12: Частен случай на DMSBPM, при който тип 1 е достижим след като са възникнали мутации водещи до тип k, тип $k-1$, ..., тип 2 (допускаме, че процесът започва с частици с типове от $\mathbb{W}_e$). Подслучай от особен интерес е наличен когато типът 1 е единственият надкритичен тип - типовете от $\mathbb{W}_e$ могат да моделират зле адаптирана популация, която е застрашена от израждане, същевременно последователността от мутации водеща към типа 1, съставена от типове от $\mathbb{W}_0$, евентуално би могла да спаси популацията.

За да избегнем възможни неясноти, без ограничение на общността, налагаме следната наредба - ако $|\mathbb{W}_0| = b$, тогава $\mathbb{W}_0 = \{1, 2, \ldots, b\}$ и $\mathbb{W}_e = \{b+1, b+2, \ldots, n\}$. Също така ще използваме означенията $\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0} = (s_1, \ldots, s_b, 1, \ldots, 1)^\top$ и $\boldsymbol{q}_{\mathbb{W}_0} = (q_1, \ldots, q_b, 1, \ldots, 1)^\top$. В разглежданията ни по-долу ще считаме, че i-тата координата на $\boldsymbol{s}$ е винаги равна на i-тата координата на $\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}$, $i \in \mathbb{W}_0$. Аналогично, i-тата координата на $\boldsymbol{q}$ е винаги равна на i-тата координата на $\boldsymbol{q}_{\mathbb{W}_0}$, $i \in \mathbb{W}_0$.

В контекста на DMSBPM, от съображения за яснота и удобство, даваме следната дефиниция.

Дефиниция 2.12. *Имайки Дефиниция 2.2, означаваме в.п.ф. за DMSBPM, започващ с една частица от тип $i \in \mathbb{W}$ с*

1. *За $i \in \mathbb{W}_e$*
$$F_i(t; \boldsymbol{s}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j \in \mathbb{W}} s_j^{Z_j(t)} | \; \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i \Big),$$
$$F_{i,a}(t; \boldsymbol{s}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j \in \mathbb{W}} s_j^{Z_j(t)} | \; \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_a^i \Big),$$
където $|\boldsymbol{s}| \leq 1$.

2. *За $i \in \mathbb{W}_0$, поради факта, че не може да има мутации от $\mathbb{W}_0$ към $\mathbb{W}_e$*
$$F_i(t; \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j \in \mathbb{W}_0} s_j^{Z_j(t)} | \; \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i \Big),$$
$$F_{i,a}(t; \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j \in \mathbb{W}_0} s_j^{Z_j(t)} | \; \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_a^i \Big),$$
където $|\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}| \leq 1$.

Следствие 2.12. *За DMSBPM е валидна следната система от интегрални уравнения:*

1. *За $i \in \mathbb{W}_e$*
$$F_i(t;\, \boldsymbol{s}) = s_i\big(1 - G_i(t)\big) + \int_0^t f_i\Bigg(y;\, \Big[\sum_{m \in \mathbb{W}_e} u_{im} F_m(t-y;\, \boldsymbol{s})\Big] + \Big[\sum_{r \in \mathbb{W}_0} u_{ir} F_r(t-y;\, \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0})\Big]\Bigg) dG_i(y). \tag{2.30}$$

2. *За $i \in \mathbb{W}_0$*
$$F_i(t;\, \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = s_i\big(1 - G_i(t)\big) + \int_0^t f_i\Bigg(y; \sum_{r \in \mathbb{W}_0} u_{ir} F_r(t-y;\, \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0})\Bigg) dG_i(y). \tag{2.31}$$

Дефиниция 2.13. *Имайки Дефиниция 2.6, за DMSBPM, започващ с една частица от тип i, $i \in \mathbb{W}$, означаваме в.п.ф. за броя на мутантите, породени от $\mathbb{W}_e$ към $\mathbb{W}_0$ до t, с*

1. *За* $i \in \mathbb{W}_e$

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j \in \mathbb{W}_0} s_j^{I_j^{\mathbb{W}_e}(t)} \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i \Big),$$

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j \in \mathbb{W}_0} s_j^{I_j^{\mathbb{W}_e}(t)} \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_a^i \Big),$$

където $|\boldsymbol{s}| \leq 1$.

2. *За* $i \in \mathbb{W}_0$, *поради факта, че не може да има мутации от* $\mathbb{W}_0$ *към* $\mathbb{W}_e$

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = 1.$$

Следствие 2.18. *За DMSBPM е валидна следната система от интегрални уравнения:*

1. *За* $i \in \mathbb{W}_e$

(2.40)

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = \big(1 - G_i(t)\big) + \int_0^t f_i\Bigg(y; \Big[\sum_{m \in \mathbb{W}_e} u_{im} h_m^{\mathbb{W}_e}(t - y; \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) \Big] + \Big[\sum_{r \in \mathbb{W}_0} u_{ir} s_r \Big] \Bigg) dG_i(y).$$

2. *За* $i \in \mathbb{W}_0$

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(t; \boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = 1.$$

Дефиниция 2.14. *Имайки Дефиниция 2.7, за DMSBPM, започващ с една частица от тип i, $i \in \mathbb{W}$, означаваме в.п.ф. за броя на мутантите, породени от $\mathbb{W}_e$ към $\mathbb{W}_0$ по време на целия процес, с*

1. *За* $i \in \mathbb{W}_e$

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j \in \mathbb{W}_0} s_j^{I_j^{\mathbb{W}_e}} \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}^i \Big),$$

$$h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = \mathbb{E}\Big(\prod_{j \in \mathbb{W}_0} s_j^{I_j^{\mathbb{W}_e}} \mid \boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\delta}_a^i \Big),$$

където $|\boldsymbol{s}| \leq 1$.

2. *За* $i \in \mathbb{W}_0$, *поради факта, че не може да има мутации от* $\mathbb{W}_0$ *към* $\mathbb{W}_e$

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = 1.$$

Следствие 2.20. *Следната система от уравнения е валидна в рамките на DMS-BPM, $i \in \mathbb{W}$:*

1. *За $i \in \mathbb{W}_e$*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = \int_0^\infty f_i\Bigg(y; \Big[\sum_{m\in\mathbb{W}_e} u_{im} h_m^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0})\Big] + \Big[\sum_{r\in\mathbb{W}_0} u_{ir} s_r\Big]\Bigg) dG_i(y). \tag{2.42}$$

2. *За $i \in \mathbb{W}_0$*

$$h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{s}_{\mathbb{W}_0}) = 1. \tag{2.43}$$

Твърдение 2.1. *Нека всеки тип частици от $\mathbb{W}_e$ в рамките на DMSBPM е докритичен или критичен. Тогава за $i \in \mathbb{W}_e$*

$$q_i = h_i^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q}_{\mathbb{W}_0}) = \int_0^\infty f_i\Bigg(y; \Big[\sum_{m\in\mathbb{W}_e} u_{im} h_m^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q}_{\mathbb{W}_0})\Big] + \Big[\sum_{r\in\mathbb{W}_0} u_{ir} q_r\Big]\Bigg) dG_i(y) \tag{2.45}$$

и

$$q_{i,a} = h_{i,a}^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q}_{\mathbb{W}_0}) = \int_0^\infty f_i\Bigg(a + y; \Big[\sum_{m\in\mathbb{W}_e} u_{im} h_m^{\mathbb{W}_e}(\boldsymbol{q}_{\mathbb{W}_0})\Big] + \Big[\sum_{r\in\mathbb{W}_0} u_{ir} q_r\Big]\Bigg) dG_{i,a}(y). \tag{2.46}$$

Дефиниция 2.15. *Означаваме с $T_{\mathbb{W}_0}^{\mathbb{W}_e}$ сл.в., която представлява времето до появата на първият „успешен" мутант породен от тип в рамките на $\mathbb{W}_e$ към тип в рамките на $\mathbb{W}_0$ в DMSBPM, започващ с някаква комбинация от частици с типове в рамките на $\mathbb{W}_e$. Без ограничение на общността, задаваме началният брой частици за тип $r \in \mathbb{W}_e$ да бъде k_r и означаваме началното състояние на процеса чрез $\boldsymbol{Z}(0) = \boldsymbol{\alpha}^* = \big(0, \dots, 0, Z_{b+1}(0) = k_{b+1}, \dots, Z_n(0) = k_n\big)^\top$. В $\boldsymbol{\alpha}^*$, без ограничение на общността, сме задали $|\mathbb{W}_0| = b$ и сме подсигурили, че първите b координати съответстват на типовете от $\mathbb{W}_0$. Дефинираме $T_{\mathbb{W}_0}^{\mathbb{W}_e} = \infty$ като събитието, при което не възникват „успешни" мутанти по време на DMSBPM, започващ с първоначално състояние $\boldsymbol{\alpha}^*$. Предвид това, можем да запишем $T_{\mathbb{W}_0}^{\mathbb{W}_e} \in (0, \infty]$. Ако DMSBPM започва с една частица от тип i, $i \in \mathbb{W}_e$, която е на възраст 0, използваме $T_{\mathbb{W}_0,i}^{\mathbb{W}_e}$ като означение. Ако първоначалната частица е на възраст a, $a \neq 0$, използваме $T_{\mathbb{W}_0,i,a}^{\mathbb{W}_e}$.*

Дефиниция 2.17. *Дефинираме за начална частица от тип i, $i \in \mathbb{W}_e$, следните модифицирани функции на риска (modified hazard functions):*

1. *Ако началната частица е с възраст 0*

$$\hat{g}_{\mathbb{W}_0,i}^{\mathbb{W}_e}(t)dt = \mathbb{P}\Big(T_{\mathbb{W}_0,i}^{\mathbb{W}_e} \in (t, t+dt] \mid T_{\mathbb{W}_0,i}^{\mathbb{W}_e} > t, \sum_{c\in\mathbb{W}_e} Z_c(t) > 0\Big).$$

2. Ако началната частица е с възраст a, $a \neq 0$

$$\hat{g}^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W}_0,i,a}(t)dt = \mathbb{P}\Big(T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W}_0,i,a} \in (t, t+dt] \mid T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W}_0,i,a} > t,\ \sum_{c \in \mathbb{W}_e} Z_c(t) > 0\Big).$$

Получаваме

$$\hat{g}^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W}_0,i}(t) = \frac{F^{(1)}_{T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W}_0,i}}(t)}{\mathbb{P}\Big(T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W}_0,i} > t\Big) - \mathbb{P}\Big(T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W}_0,i} > t,\ \sum_{c \in \mathbb{W}_e} Z_c(t) = 0\Big)}.$$

Дефиниция 2.18. *За $i \in \mathbb{W}_e$ означаваме*

$$V_i(t) = \mathbb{P}\Big(T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W}_0,i} > t,\ \sum_{c \in \mathbb{W}_e} Z_c(t) = 0\Big),$$

$$V_{i,a}(t) = \mathbb{P}\Big(T^{\mathbb{W}_e}_{\mathbb{W}_0,i,a} > t,\ ,\sum_{c \in \mathbb{W}_e} Z_c(t) = 0\Big).$$

Теорема 2.8. *Вероятността $V_i(t)$ за съвместното събитие, че първият „успешен" мутант не възниква преди или в момента t и няма останали частици от $\mathbb{W}_e$ в t, за DMSBPM започващ с частица на възраст 0, удовлетворява следната система от интегрални уравнения:*

$$V_i(t) = \int_0^t f_i\Big(y; \Big[\sum_{m \in \mathbb{W}_e} u_{im} V_m(t-y)\Big] + \Big[\sum_{r \in \mathbb{W}_0} u_{ir} q_r\Big]\Big) dG_i(y), \quad i \in \mathbb{W}_e. \tag{2.53}$$

Следствие 2.22. *Вероятността $V_{i,a}(t)$ за съвместното събитие, че първият „успешен" мутант не възниква преди или в момента t и няма останали частици от $\mathbb{W}_e$ в t, за DMSBPM започващ с частица на възраст a, $a \neq 0$, удовлетворява следната система от интегрални уравнения:*

$$V_{i,a}(t) = \int_0^t f_i\Big(a + y; \Big[\sum_{m \in \mathbb{W}_e} u_{im} V_m(t-y)\Big] + \Big[\sum_{r \in \mathbb{W}_0} u_{ir} q_r\Big]\Big) dG_{i,a}(y), \quad i \in \mathbb{W}_e. \tag{2.54}$$

2.3.2 Разложим Многотипов Разклоняващ се Процес на Белман-Харис изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (DMBHBPM)

DMBHBPM е частен случай на DMSBPM, където няма зависимост между репродуктивните способности на частиците и тяхната възраст. Пълната формална формулировка на DMBHBPM е изложена в Дефиниция 2.19 в Подсекция 2.3.2.1. на дисертацията. Резултатите за DMBHBPM са аналогични на резултатите за DMSBPM с тази разлика, че зависимостта от възрастта на първоначалната частица отпада в рамките на f_i.

ГЛАВА 3

Оптимизационни задачи с последователно взимане на решения с динамика зададена от разклоняващи се процеси

3.1 Обзор и организация на главата

В тази глава осъществяваме включването няколко вида разклоняващи се процеси в оптимизационни задачи известни като Оптимизационни Задачи с Последователно Взимане на Решения - Sequential Decision Problems (SDPs). За моделирането на SDP използваме така наречената „Универсална рамка за моделиране", разработена от Уорън Б. Пауъл в [82] (2022). Мотивите ни за избора на тази рамка за моделиране се състоят в следното: 1) „Универсалната рамка за моделиране" представлява опит да се обединят 15 общности, обсъдени във Въведението на дисертацията (Секция 1.5, страници 23 - 24). Това обстоятелство може да се окаже полезно в рамките на бъдещи изследвания, където е възможно да разгледаме по-сложни SDP с динамика, зададена от разклоняващи се процеси; 2) „Универсалната рамка за моделиране" е пряко свързана с Динамичното Програмиране чрез Апроксимации - Approximate Dynamic Programming (ADP) - виж [74], [76], [78], както и с Обучението с Утвърждение - Reinforcement Learning (RL) - виж [203], [82]. ADP и RL разчитат на симулации при намирането на решения на сложни SDP. Нашето разбиране за евентуалните бъдещи изследвания, произтичащи от тази дисертация, свързани с SDP с динамика, зададена от разклоняващи се процеси, е че тези изследвания също ще бъдат базирани на симулации; 3) Спрямо нашите цели, „Универсалната рамка за моделиране" е концептуално и нотационно близка до разглежданията в областта на Марковските Процеси с Взимане на Решения (Markov decision processes), виж [70] (2005). Това е добра отправна точка за нашите разглеждания на SDP с динамика, зададена от многотипов разклоняващ се процес на Биенеме-Галтън-Уотсън (БГУ), тъй като БГУ е Марковски спрямо стандартната си дефиниция.

Нашето моделиране на SDP в рамките на тази дисертация е базирано на идеите, разработени в [82] и [78], и поради това споделя както силните така и слабите страни на „Универсалната рамка за моделиране". Отбелязваме, че с оглед на нашите цели, правим няколко малки допълнения към изложеното в [82], по-точно тези допълнения са Твърдение 3.1 и Твърдение 3.2 от Подсекция 3.2.7, както и добавянето на дисконтовия фактор γ в някои уравнения и твърдения.

В Секция 3.2 и Секция 3.3 представяме „Универсалната рамка за моделиране” като адаптираме части от изложението в [82]. В Секция 3.4, Секция 3.5, и Секция 3.6, получаваме нови резултати, които включват няколко вида разклоняващи се процеси в SDP в рамките на „Универсалната рамка за моделиране”. Резултатите от Секция 3.4, Секция 3.5, и Секция 3.6, все още не са публикувани. В Секция 3.7 очертаваме, но не прилагаме или изследваме, общ ADP алгоритъм, който може да послужи като начало за разработването на специализиран ADP алгоритъм за намиране на решения на разглежданата в Секция 3.6 SDP. Подчертаваме, че в рамките на дисертацията не разглеждаме стохастични диференциални уравнения в оптимизационните задачи.

Стандартната дефиниция за „състояние” на един разклоняващ се процес постулира, че „състоянието” на разклоняващия се процес в момента t представлява броят на частиците, по типове, които съществуват в t. Спрямо тази дефиниция на „състояние”, БГУ както и разклоняващия се процес на Белман-Харис с експоненциални времена на живот, са Марковски. Оскъдната литература посветена на комбинирането конкретно на разклоняващи се процеси и SDP, виж [77], [199], [200], [201], [202], концентрира своето внимание върху разклоняващи се процеси, които са Марковски спрямо стандартната дефиниция за „състояние”. Изброените статии по същество разглеждат многотипови БГУ. Нашата нова идея в Секция 3.6 е да разгледаме нова дефиниция за „състояние” на MSBPM (MSBPM в общия случай не е Марковски спрямо стандартната дефиниция понеже възпроизводството на частиците може да зависи от тяхната възраст). Спрямо тази нова дефиниция, ние доказваме, че MSBPM е Марковски. Този резултат, както и съображенията изложени в Секция 3.6, формално ни позволяват да прилагаме ADP и RL за намиране на решение за интересуващата ни SDP.

Отбелязваме, че в [202] се разработва RL алгоритъм за SDP с динамика породена от БГУ, който не се базира на конкретно задаване на параметрите на БГУ. Нашата концепция за включването на разклоняващи се процеси в SDP е диаметрално противоположна на [202] - ние се опитваме да се възползваме от конкретно дефиниран разклоняващ се процес (например MSBPM) във възможно най-голяма степен. Ще отбележим, че докато често RL алгоритмите не са базирани на конкретно зададен модел, то ADP алгоритмите обикновено се опитват да се възползват от наличен конкретен модел. Именно поради тази причина ние очертаваме един общ ADP алгоритъм в Секция 3.7 на дисертацията, като илюстрация за възможни бъдещи изследвания - въпреки, че в рамките на дисертацията ние успешно включваме MSBPM в SDP в контекста на „Универсалната рамка за моделиране”, разработването на алгоритми за намиране на решение изисква съществени бъдещи изследвания. Надяваме се, че възможността за пресмятане на релевантни характеристики на MSBPM посредством Числена Схема 1 и Числена Схема 2, заедно с другите теоретични резултати получени в рамките на дисертацията, ще осигурят бъдещ успех.

В Секция 3.4 от дисертацията, преразглеждаме резултати от статията на S. R. Pliska от 1976 година, [77]. В [77] се разглежда SDP с динамика породена от БГУ и е получена теорема, която позволява ефективното намиране на решение на разглежданата, в Секция 2 и Секция 3 от статията, SDP с краен хоризонт. Получената теорема по същество задава алгоритъм, който може да бъде причислен към Динамичното Програмиране (виж [67], [68], [69], [70]). Въпреки че в [77] се споменава, че полученият алгоритъм се причислява към Динамичното Програмиране, доказателството на Теорема 3.1 от [77] използва условни математически очаквания и не използва уравнението за оптималност на Белман (виж Секция 3.3). В Секция 3.4 ние преформулираме изложението в [77] спрямо по-съвременната „Универсалната рамка за моделиране" и даваме ново доказателство на Теорема 3.1 от [77], което е базирано на уравнението за оптималност на Белман.

В Секция 3.5 разглеждаме Многотиповия Разклоняващ се Процес на Белман-Харис изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (MBHBPM; частен случай на MSBPM), за който всички времена на живот са експоненциално разпределени. MBHBPM с експоненциални времена на живот е Марковски спрямо класическата дефиниция за състояние на един разклоняващ се процес. Нашият нов принос за този случай е, че формално включваме процеса в SDP в контекста на „Универсалната рамка за моделиране" и показваме, че е в сила резултат, който е аналогичен на Теорема 3.1 от [77].

Ще подчертаем, че алгоритмите, получени в Секция 3.4 и Секция 3.5, които ни позволяват ефективно да намираме решения на съответните SDP дефинирани в секциите, имат ограничен обхват на приложимост. По-точно, тези алгоритми лесно могат да станат практически неприложими при въвеждането на допълнителни (подходящо моделирани спрямо „Универсалната рамка за моделиране") зависимости в разглежданата SDP. Дори в такива случаи, обаче, за тези по-сложни SDP все още имаме на разположение похватите на ADP и RL.

Отбелязваме, че Регулируемите Разклоняващи се Процеси - Controlled Branching Processes (CBP), виж [115], [124], [181], [182], [120], [121] - разглеждат някои идеи, които са близо до идеите, разглеждани в дисертацията относно оптимизационните задачи с последователно взимане на решения. Връзката между SDP и CBP е следната - CBP, бивайки разклоняващи се процеси, могат да се разглеждат като задаващи динамиката в една SDP.

Текущата Глава може да се разглежда като продължение на нашите усилия в [1]-[7], както и на тези в Глава 2, да моделираме ракови заболявания както и други популации, които избягват израждане. Това моделиране може да бъде съществено облагодетелствано от приобщаването на SDP, тъй като SDP предоставят начин за предварително планиране на нашите действия. Това може да е много полезно, например, при предписването и насрочването във времето на терапии за лечение на ракови заболявания, тъй като различните терапии и тяхната честота водят след себе си различни очаквани резултати и също така имат различна цена. SDP моделират последиците от решенията, които взимаме, и поради това, в зависимост от целите ни, имат потенциала да бъдат полезен инструмент за намирането на най-добрия начин за тласкане на една популация към израждане/измиране или пък за максимизиране на вероятността ѝ за оцеляване.

Глава 3 е организирана както следва. В Секция 3.2 въвеждаме релевантни концепции от „Универсалната рамка за моделиране" разработена от Уорън Б. Пауъл в [82]. В Секция 3.3 разглеждаме уравнението за оптималност на Белман. В Секция 3.4 преформулираме модела разглеждан в [77] съгласно „Универсалната рамка за моделиране” и възползвайки се от уравнението за оптималност на Белман даваме ново доказателство на Теорема 3.1 от [77]. В Секция 3.5 разглеждаме MBHBPM с експоненциални времена на живот, конструираме съответна SDP и доказваме за този случай резултат аналогичен на Теорема 3.1 от [77]. В Секция 3.6 конструираме SDP с динамика, зададена от MSBPM. В Секция 3.7 от дисертацията очертаваме ADP подход да намиране на решение на конструираната SDP с динамика, зададена от MSBPM. Завършваме нашите разглеждания с Секция 3.8, където излагаме илюстративни примери на SDP в динамика, зададена от разклоняващи се процеси.

3.2 Моделиране на Оптимизационни Задачи с Последователно Взимане на Решения (SDP)

В текущата Секция въвеждаме „Универсалната рамка за моделиране” разработена от Уорън Б. Пауъл в [82] (2022) и [80]. В изложението си следваме предимно Глава 9 (стр. 467) от [82], като предвид целите ни сме извършили известна реорганизация на текста.

Нека си припомним 15-те математически общности, разгледани в Секция 1.5 от дисертацията, които се занимават с някакъв вариант на SDP. Всяка от тези общности има своя специфична перспектива, както и набор от похвати и методологии, относно извършването на детерминистична и/или стохастична оптимизация. Поради това изборът на общност или общности, с които да асоциираме нашето моделиране, е от съществено значение. „Универсалната рамка за моделиране” си поставя за цел да обхване специфичностите на всичките 15 общности, които разглеждат SDP. Това обстоятелство може да се окаже способстващо по-лесното интегриране на различни идеи от различните общности в рамките на наши бъдещи изследвания, които продължават работата в дисертацията. Освен това „Универсалната рамка за моделиране” (както и изложението в [82] и [78]) е ориентирана към използването на компютърни симулации - според нас този подход за намиране на решения на трудни за решаване SDP има съществен потенциал предвид факта, че решения в затворена форма рядко са налични за SDP.

Имайки предвид изложеното в Секция 1.2 от Автореферата (което съответства на Описание 1.1 в Секция 1.5 от дисертацията), за разглежданията, които следват, ще направим следната уговорка:

Избор на Обозначение 1. Индексираме епохите на взимане на решения с t, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Всяка променлива, индексирана с t, се разбира като променлива, съответстваща на епохата на взимане на решения с индекс t. Когато говорим за интервали, например интервала $(t, t + 1)$, разбираме интервала между епохите с индекс t и индекс $t + 1$. Приемаме, че разстоянието между две епохи на взимане на решения може да варира между всеки две съседни епохи, но не може да бъде 0 или ∞. Ако има финална епоха, нейният индекс е T.

Следвайки [82] (стр. 479), при моделирането на SDP е необходимо да се дефинират

5 елемента: 1) Променливи на екзогенната информация; 2) Променливи на решение/действие/контрол; 3) Функция на прехода; 4) Променливи на състоянието; 5) Целева функция. За целите на Автореферата, тук ще предоставим само бърз преглед на тези елементи. За повече детайли и пояснения насочваме читателя към Секция 3.2 в дисертацията или Глава 9 от [82].

1. *Променливите на екзогенната информация* съдържат в себе си целия стохастичен компонент на системата, която моделираме, с възможното изключение на евентуално налична стохастичност в началното състояние на система. Съвкупността от променливите на екзогенната информация ще обозначаваме с W_t.
2. *Променливите на решение/действие/контрол* моделират нашите възможни въздействия върху системата. Бележим решенията взети в t с x_t, а пространството на възможните решения с $\mathcal{X}$ (или $\mathcal{X}_t$). Взетите решения могат да влияят на бъдещата еволюция на системата. *Политика* π, $\pi \in \Pi$, където Π е съвкупността от всички политики, дефинира функция $X^\pi(\cdot)$ (или $X^\pi_t(\cdot)$), която връща решение x_t при зададено състояние на системата S_t.
3. *Функцията на прехода* моделира как динамичната система еволюира между съседни епохи на взимане на решения.
4. *Променливите на състоянието* съдържат в себе си цялата информация, която е необходима, за да може еволюцията на системата да удовлетворява Марковското свойство. Означаваме състоянието в t с S_t. Означаваме пространството на възможните състояния с $\mathcal{S}$ (или $\mathcal{S}_t$).
5. *Целевата функция* задава релевантна за системата метрика. Записваме целевата функция посредством *функцията на принос* $C(S_t, x_t)$ (или $C_t(S_t, x_t)$), която връща резултата, предвид зададената метрика, от прилагането на решение x_t върху състояние S_t. Нека γ е дисконтов фактор ($\gamma \leq 1$). Ако началното състояние S_0 е стохастично, целевата функция може да бъде записана като

$$F^\pi(S_0) = \mathbb{E}_{S_0}\mathbb{E}_{W_t,\dots,W_T|S_0}\left\{\sum_{t=0}^{T}\gamma^t C_t\big(S_t, X^\pi_t(S_t)\big)|S_0\right\},$$

ако не е, тогава можем да запишем

$$F^\pi(S_0) = \mathbb{E}_{W_t,\dots,W_T|S_0}\left\{\sum_{t=0}^{T}\gamma^t C_t\big(S_t, X^\pi_t(S_t)\big)|S_0\right\},$$

или по-компактно

$$F^\pi(S_0) = \mathbb{E}\left\{\sum_{t=0}^{T}\gamma^t C_t\big(S_t, X^\pi_t(S_t)\big)|S_0\right\}. \tag{3.1}$$

Готови сме да формализираме нашата дефиниция за SDP. Дефиниция 3.2, която даваме по-долу, представлява агрегация на изложеното в Глава 9 от [82]. При записването на Дефиниция 3.2 имаме предвид Избор на Обозначение 1.

Дефиниция 3.2. *Оптимизационната Задача с Последователно Взимане на Решения с краен хоризонт (finite-horizon SDP) в контекста на „Универсалната рамка за моделиране", с финална епоха на взимане на решения T, се характеризира с последователността*

$$(S_0, x_0, W_1, S_1, \ldots, S_t, x_t, W_{t+1}, S_{t+1}, \ldots, S_T).$$

За SDP с краен хоризонт търсим политика, която удовлетворява

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{S_0} \mathbb{E}_{W_1,\ldots,W_T|S_0} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \gamma^t C_t\big(S_t, X_t^\pi(S_t)\big) | S_0 \right\}.$$

Оптимизационната Задача с Последователно Взимане на Решения с безкраен хоризонт (infinite-horizon SDP) в контекста на „Универсалната рамка за моделиране", се характеризира с последователността

$$(S_0, x_0, W_1, S_1, \ldots, S_t, x_t, W_{t+1}, S_{t+1}, \ldots).$$

За SDP с безкраен хоризонт търсим политика, която удовлетворява

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{S_0} \mathbb{E}_{W_1,W_2,\ldots|S_0} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t C_t\big(S_t, X_t^\pi(S_t)\big) | S_0 \right\}.$$

Ако множеството от всички политики, Π, е безкрайно, използваме "sup" вместо "max".

В рамките на дисертацията ще разглеждаме само SDP с краен хоризонт. Въпросът за включването на разклоняващи се процеси в SDP с безкраен хоризонт оставяме за бъдещи изследвания.

Подчертаваме, че съгласно [82], стр. 482, (vi), Дефиниция 3.1 (за променливите на състоянието) дадена в дисертацията (т.е., „policy-dependent" версията на Дефиниция 9.4.1 от [82]) по същество постулира, че всяка динамична система моделирана в контекста „Универсалната рамка за моделиране" е Марковска по построение.

Следващите Твърдение 3.1 и Твърдение 3.2 са получени независимо от разглежданията в [82]. Ние активно използваме тези твърдения, както и съображенията изложени след тях, в рамките на Глава 3.

Твърдение 3.1. *При прилагането на коя да е фиксирана политика π, SDP в „Универсалната рамка за моделиране" представлява (евентуално нестационарна) Марковска верига в дискретно време спрямо $t = 0, 1, \ldots, T$.*

В сила е и

Твърдение 3.2. *Една (евентуално нестационарна) Марковска верига в дискретно време спрямо $t = 0, 1, \ldots, T$, може да се разглежда като SDP в „Универсалната рамка за моделиране".*

Един от най-трудните моменти при моделирането на динамична система като SDP в „Универсалната рамка за моделиране” е потвърждаването, че дефинираните променливи на състоянието, променливите на решение, променливите на екзогенната информация, функцията на принос и целевата функция, и функцията на преход, удовлетворяват вкупом допусканията за SDP налични в „Универсалната рамка за моделиране”. По-точно, показването, че за функцията на преход между t и $t+1$ е в сила Марковското свойство, т.е., че функцията на преход не зависи нито от състоянията на системата преди t нито от взетите решения преди t, може да бъде особено проблематично в общия случай. Твърдение 3.1 и Твърдение 3.2 ни предоставят начин за проверка дали нашият модел наистина е SDP спрямо „Универсалната рамка за моделиране” - това, което трябва да направим е да проверим, че за всяка фиксирана политика π резултатният процес представлява Марковска верига в дискретно време спрямо $t = 0, 1, \dots, T$.

3.3 Уравнение за оптималност на Белман за SDP в контекста на „Универсалната рамка за моделиране”

В тази Секция адаптираме разглежданията в Глава 14 от [82] и Глава 3 от [78]. Подобно на изложението в Секция 4.3 в [70], първо ще дефинираме уравнението за оптималност на Белман в контекста на „Универсалната рамка за моделиране” и след това ще покажем неговата роля при намирането на решение на SDP. В текущата Секция ще се концентрираме само върху това, което ще ни е нужно при включването на разклоняващи се процеси в SDP.

Дефиниция 3.3. *За SDP зададена чрез Дефиниция 3.2, дефинираме (формата използваща очакване на) уравнението за оптималност на Белман (Bellman's optimality equation) в t с*

$$V_t(S_t) = \max_{x_t \in \mathcal{X}_t} \Big(C_t(S_t, x_t) + \gamma \mathbb{E}\big\{ V_{t+1}(S_{t+1}) | S_t, x_t \big\} \Big). \tag{3.2}$$

$V_t(S_t)$ е известна още като *функция на стойността* (value function) и *функция на Белман.* Ако разпишем (3.2) за последователни t се вижда, че наличието на Марковското свойство се подразбира, което и следва да се очаква предвид това, че динамичните системи разглеждани в „Универсалната рамка за моделиране” са Марковски. При използването на (3.2) имаме предвид, че екзогенната информация, ако има такава, може да зависи (или да не зависи) от S_t и x_t (и не зависи от решения и състояние в моменти преди t). Ако има екзогенна информация, която оказва влияние на системата, то нейното влияние се отразява от математическото очакване в (3.2).

Означаваме

$$F_t^\pi(S_t) = \mathbb{E}\left\{ \sum_{t'=t}^{T-1} \gamma^{t'-t} C_{t'}\big(S_{t'}, X_{t'}^\pi(S_{t'})\big) + \gamma^{T-t} C_T(S_T) | S_t \right\}$$

и

$$F_t^*(S_t) = \max_{\pi \in \Pi} F_t^\pi(S_t).$$

Следващата теорема, без наличието на γ, може да бъде намерена в Подсекция 14.12.1 от [82]. В дисертацията, ние добавяме γ в рамките на доказателството дадено в [82].

Теорема 3.1. *Нека $V_t(S_t)$ е решение на уравнението за оптималност на Белман* (3.2)

$$V_t(S_t) = \max_{x_t \in \mathcal{X}_t} \Big(C_t(S_t, x_t) + \gamma \mathbb{E}\big\{ V_{t+1}(S_{t+1}) | S_t, x_t \big\} \Big).$$

Тогава, за SDP с краен хоризонт

$$F_t^*(S_t) = V_t(S_t).$$

Алгоритми, базирани на уравнението за оптималност на Белман често (но не винаги) страдат от така наречените „проклятия на размерността”. По-конкретно, в зависимост от постановката, неспециализираните алгоритми може да изискват от нас итериране на всички възможни състояния и/или решения. Едно такова изискване може бързо да направи такъв алгоритъм непрактичен в случая на многомерни дискретни пространства на състоянията и решенията, и прави такива алгоритми неприложими когато се разглеждат пространства на непрекъснати състояния или решения. Предвид това, трябва да се внимава при включването на разклоняващи се процеси в SDP, тъй като стандартната дефиниция за „състояние” на един разклоняващ се процес (т.е., броя на частиците, по типове, които съществуват в t) задава пространство на състоянията, което е изброимо безкрайно и евентуално многомерно.

3.4 SDP с динамика зададена от разклоняващ се процес на Биенеме-Галтън-Уотсън (БГУ)

Доколкото ни е известно, стохастични оптимизационни задачи с последователно взимане на решения, където динамиката е зададена посредством разклоняващ се процес (по-точно разгледан е разклоняващият се процес на Биенеме-Галтън-Уотсън), за първи път се изследват в [77] (1976). Нашите приноси в рамките на тази Секция са: 1) Преформулираме разглежданията от [77] в SDP в контекста „Универсалната рамка за моделиране”; 2) Предоставяме ново доказателство на Теорема 3.1 от [77], което е базирано на уравнението за оптималност на Белман. Изброените приноси все още не са публикувани.

Дефиниция на SDP Модел 1. Дефинираме SDP Модел 1 като Оптимизационна Задача с Последователно Взимане на Решения с краен хоризонт, която удовлетворява:

1. Наблюдаваме разклоняващ се процес на БГУ в последователни моменти индексирани с $t = 0, 1, 2, \ldots, T$.

2. Нека броят на типовете частици в разклоняващия се процес на БГУ е k. Пространството на състоянията $\mathcal{S}_t$ се състои от всички k-мерни вектори, чиито координати са цели неотрицателни числа. Индексът t в $\mathcal{S}_t$ означава, че има вероятностни разпределения и в.п.ф. асоциирани с всеки тип, които могат да се променят с t (след взимането на решение). Състоянието на процеса в t се дава с $\boldsymbol{S}_t = (S_{1,t}, S_{2,t}, \ldots, S_{k,t})^\top$, където всички $S_{i,t}$ са със стойности в $\mathbb{N}_0$ и $S_{i,t}$ означава броя частици от тип i, които съществуват в t. Началното състояние $\boldsymbol{S}_0$ е детерминистично.

3. Всеки тип частици i има асоциирано със себе си определено, крайно, множество от възможни решения $\widetilde{\mathcal{X}}_i$. Пространството на решенията се дава от $\mathcal{X} = \widetilde{\mathcal{X}}_1 \times \widetilde{\mathcal{X}}_2 \times \cdots \times \widetilde{\mathcal{X}}_k$. Означаваме решенията взети за всеки тип в t с $\boldsymbol{x}_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{k,t})^\top$.

4. Нека $c_i(x_{i,t})$ е индивидуалният принос (награда), получен за частица от тип i след взимане на решение $x_{i,t}$ валидно за всички частици от тип i в t. Допускаме, че $-\infty < c_i(x_{i,t}) < \infty$ за всички i и че $c_i(\cdot)$ не зависят от t. Ако запишем $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_t) = \big(c_1(x_{1,t}), \ldots, c_k(x_{k,t})\big)^\top$, то приносът генериран от всички частици в t е $C_t\big(\boldsymbol{S}_t, \boldsymbol{x}_t) = \sum_{i=1}^{k} S_{i,t} \cdot c_i(x_{i,t}) = \boldsymbol{S}_t^\top \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_t)$. В $t = T$ не се взимат решения, вместо това се събират предварително дефинирани приноси $\boldsymbol{c}_T = \big(c_1, \ldots, c_k\big)^\top$. Следователно приносът в $t = T$ е $C_T(\boldsymbol{S}_T) = \boldsymbol{S}_T^\top \boldsymbol{c}_T$.

5. Взетото за една частица решение влияе върху броя на потомството ѝ, по типове, в следващото поколение.

    (а) За всеки k-мерен вектор $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_k)^\top$ от неотрицателни цели числа, нека $p_i(\boldsymbol{q}, x_{i,t})$ е вероятността за това една частица от тип i, чието съответно решение е $x_{i,t}$, да породи точно q_1 на брой потомство от тип 1, …, q_k на брой потомство от тип k, $\sum_{\boldsymbol{q}} p_t(\boldsymbol{q}, x_{i,t}) = 1$.

    (б) На всяка $p_i(\cdot, x_{i,t})$ съответства векторът-ред $\boldsymbol{m}_i(x_{i,t}) = \big(m_{i1}(x_{i,t}), \ldots, m_{ik}(x_{i,t})\big)$, където $m_{ij}(x_{i,t})$ е броя на очакваното потомство от тип j породено от една частица от тип i при взето решение $x_{i,t}$. Приемаме, че $m_{ij}(x_{i,t}) < \infty$ за всички $x_{i,t} \in \widetilde{\mathcal{X}}_i$ и $i, j = 1, \ldots, k$. При зададено $\boldsymbol{x}_t \in \mathcal{X}$, можем да организираме очакванията в матрицата $M(\boldsymbol{x}_t) = (\boldsymbol{m}_1(x_{1,t}), \ldots, \boldsymbol{m}_k(x_{k,t}))^\top$.

6. Означаваме отделните политики с π. Множеството от всички възможни политики, предвид $\mathcal{X}$, е Π. За t означаваме с $X_t^\pi(\cdot)$ съответната функция, която връща при зададено състояние резултатно решение.

7. Даден е дисконтов фактор γ.

8. Искаме да намерим максималната очаквана дисконтирана печалба зададена от

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}\Bigg\{ \sum_{t=0}^{T-1} \gamma^t C_t(\boldsymbol{S}_t, X_t^\pi(\boldsymbol{S}_t)) + \gamma^T C_T(\boldsymbol{S}_T) | \boldsymbol{S}_0 \Bigg\}.$$

Дефиниция 3.4. *Нека* $\boldsymbol{X}$ *е* k*-мерен вектор. Дефинираме оператора на максимален принос* $\mathcal{R}$ *чрез*

$$\mathcal{R}\boldsymbol{X} = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} \left\{ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) + \gamma M(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X} \right\}.$$

Означаваме n*-кратната композиция на* $\mathcal{R}$ *с* $\mathcal{R}^n$*.* $\mathcal{R}^0$ *се разбира като оператора на идентитет.*

В Теорема 3.2 по-долу даваме ново доказателство на Теорема 3.1 от [77], използвайки уравнението за оптималност на Белман (3.2). Ще отбележим, че оригиналното доказателството на Теорема 3.1 от [77] е базирано на условни математически очаквания.

Теорема 3.2. *За SDP Модел 1,* $V_t(\boldsymbol{S}_t)$ *удовлетворява*

$$V_t(\boldsymbol{S}_t) = \boldsymbol{S}_t^\top \mathcal{R}^{T-t}\boldsymbol{c}_T, \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{3.9}$$

Политика π*, със съответна* $X_t^\pi(\cdot)$*, която връща решения* $\boldsymbol{x}_t$*, удовлетворяващи*

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_t) + \gamma M(\boldsymbol{x}_t)\mathcal{R}^{T-t-1}\boldsymbol{c}_T = \mathcal{R}^{T-t}\boldsymbol{c}_T, \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{3.10}$$

е оптимална.

3.5 SDP с динамика зададена от МВНВРМ с експоненциални времена на живот

Нашите приноси в тази Секция са: 1) Предоставяме доказателство, че многотиповият разклоняващ се процес на Белман-Харис с експоненциални времена на живот, както и МВНВРМ с експоненциални времена на живот, представляват Марковски вериги в дискретно време спрямо $t = 0, 1, \ldots, T$; 2) За тези процеси конструираме SDP в контекста на „Универсалната рамка за моделиране"; 3) Показваме, че за новопостроените SDP е в сила теорема, която е сходна с Теорема 3.2. Изброените приноси все още не са публикувани.

Твърдение 3.4. *Многотиповият разклоняващ се процес на Белман-Харис с експоненциални разпределения на продължителността на живот за всички типове частици, със състояния дефинирани като броя на частиците, по типове, които съществуват в момента* t*, представлява Марковска верига в дискретно време по отношение на моментите във времето индексирани с* $t = 0, 1, \ldots, T$*.*

Дефиниция на SDP Модел 2. Дефинираме SDP Модел 2 като SDP с краен хоризонт, която съответства на дефиницията на SDP Модел 1, върху която са приложени следните модификации:

1. Наблюдаваме МВНВРМ в епохи индексирани с t, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$. Независимо от t, разпределението на продължителността на живота на частиците от всеки тип трябва да бъде експоненциално.

2. Нека броят на типовете частици в МВНВРМ е k. Пространството на състоянията $\mathcal{S}_t$ се състои от всички k-мерни вектори, чиито координати са цели неотрицателни числа. Индексът t в $\mathcal{S}_t$ означава, че има вероятностни разпределения и в.п.ф. асоциирани с всеки тип, които могат да се променят с t (след взимането на решение). Въпреки че разпределенията на продължителността на живот могат да променят своите параметри, те трябва да продължат да бъдат експоненциални. Състоянието на процеса в t се дава с $\boldsymbol{S}_t = (S_{1,t}, S_{2,t}, \dots, S_{k,t})^\top$, където всички $S_{i,t}$ са със стойности в $\mathbb{N}_0$ и $S_{i,t}$ означава броя частици от тип i, които съществуват в t. Началното състояние $\boldsymbol{S}_0$ е детерминистично.

5. Избраното решение $\boldsymbol{x}_t$ оказва влияние върху разпределенията на продължителността на живот (но разпределенията остават експоненциални), разпределенията на броя на частиците в потомството, както и на вероятностите за мутация в потомството, на всички частици, които съществуват в t. По този начин типовете на всички частици, които съществуват в t, се променят в резултат на $\boldsymbol{x}_t$. Частиците, които съществуват в t могат да създават само частици, които са от модифицираните типове. По този начин единствено модифицираните типове се възпроизвеждат до $t+1$.

   (a) На i-тата координата на $\boldsymbol{x}_t$ съответства векторният ред $\boldsymbol{m}_i(x_{i,t}) = \big(m_{i1}(x_{i,t}), \dots, m_{ik}(x_{i,t})\big)$, където $m_{ij}(x_{i,t})$ означава очаквания брой частици от тип j в $t+1$ породени в рамките на МВНВРМ, с експоненциални разпределения на продължителността на живот, започващ в t с една частица от тип i, за която е в сила $x_{i,t}$. Приемаме, че $m_{ij}(x_{i,t}) < \infty$ за всички $x_{i,t} \in \widetilde{\mathcal{X}}_i$ и $i,j = 1,\dots,k$. При зададено $\boldsymbol{x}_t \in \mathcal{X}$, можем да организираме очакванията в матрицата $M(\boldsymbol{x}_t) = (\boldsymbol{m}_1(x_{1,t}), \dots, \boldsymbol{m}_k(x_{k,t}))^\top$.

Твърдение 3.5. *SDP Модел 2 е SDP в контекста на „Универсалната рамка за моделиране”.*

Теорема 3.3. *За SDP Модел 2, $V_t(\boldsymbol{S}_t)$ удовлетворява*

$$V_t(\boldsymbol{S}_t) = \boldsymbol{S}_t^\top \mathcal{R}^{T-t} \boldsymbol{c}_T, \qquad t = 0, 1, \dots, T-1. \tag{3.16}$$

Политика π, със съответна $X_t^\pi(\cdot)$, която връща решения $\boldsymbol{x}_t$, удовлетворяващи

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_t) + \gamma M(\boldsymbol{x}_t)\mathcal{R}^{T-t-1}\boldsymbol{c}_T = \mathcal{R}^{T-t}\boldsymbol{c}_T, \qquad t = 0, 1, \dots, T-1, \tag{3.17}$$

е оптимална.

3.6 SDP с динамика зададена от MSBPM

Нашите приноси в тази Секция са: 1) Конструираме ново пространство на състоянията и показваме, че спрямо него многотиповият разклоняващ се процес на Севастянов, както и MSBPM, представляват Марковска верига в дискретно време относно $t = 0, 1, \ldots, T$; 2) За посочените разклоняващи се процеси конструираме SDP в контекста на „Универсалната рамка за моделиране”. Изброените приноси все още не са публикувани.

Дефиниция 3.5. *Нека имаме k типа частици. За всеки тип нека означим с $\mathcal{D}_i$ множеството от всички наредени двойки имащи следния вид:*

1. *Първият елемент от наредената двойка е цяло число. Означаваме това цяло число с r, $r \in \mathbb{N}_0$.*
2. *Вторият елемент от наредената двойка е наредена r-торка. Означаваме тази наредена r-торка с $\boldsymbol{l}$. Всеки елемент l_i от $\boldsymbol{l}$ е неотрицателно реално число, т.е., $l_i \in \mathbb{R}_+$. Числата в $\boldsymbol{l}$ са подредени от най-малкото към най-голямото. Допуска се дублиране, в който случай дублиращите се числа се нареждат едно до друго.*

В t асоциираме с всяко $\mathcal{D}_i$ вероятностни разпределения. Ние няма да изписваме тези разпределения експлицитно, но ще ги считаме за имплицитно известни. Означаваме $\mathcal{D}_i$ с асоциирани вероятностни разпределения в t с $\mathcal{D}_{i,t}$. Означаваме $\mathcal{D}^k_t = \mathcal{D}_{1,t} \times \mathcal{D}_{2,t} \times \cdots \times \mathcal{D}_{k,t}$.

Твърдение 3.6. *Многотиповият разклоняващ се процес на Севастянов, със състояния, дефинирани чрез елементите на $\mathcal{D}^k_t$, представлява Марковска верига в дискретно време спрямо $t = 0, 1, \ldots, T$.*

Дефиниция на SDP Модел 3. Дефинираме SDP Модел 3 като SDP с краен хоризонт, която съответства на дефиницията на SDP Модел 1, върху която са приложени следните модификации:

1. Наблюдаваме MSBPM от Дефиниция 2.1 в епохи индексирани с t, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$.
2. Нека броят на типовете частици в MSBPM е k. Пространството на състоянията е $\mathcal{D}^k_t$. Индексът t в $\mathcal{D}^k_t$ означава, че има вероятностни разпределения и в.п.ф. асоциирани с всеки тип, които могат да се променят с t (след взимането на решение). Състоянието на процеса в t се дава с $\boldsymbol{S}_t = (S_{1,t}, S_{2,t}, \ldots, S_{k,t})^\top$, където $S_{i,t} \in \mathcal{D}_{i,t}$. Интерпретацията на първият компонент на $S_{i,t}$ е, че това е броят на частиците от тип i, които съществуват в t, а интерпретацията на вторият компонент на $S_{i,t}$ е, че това е съвкупността от възрастите на всички частици от тип i, които съществуват в t. Началното състояние $\boldsymbol{S}_0$ е детерминистично.
5. Избраното решение $\boldsymbol{x}_t$ оказва влияние върху разпределенията на продължителността на живот, разпределенията на броя на частиците в потомството, както и на вероятностите за мутация в потомството, на всички

частици, които съществуват в t. По този начин типовете на всички частици, които съществуват в t, се променят в резултат на $\boldsymbol{x}_t$. Частиците, които съществуват в t могат да създават само частици, които са от модифицираните типове. По този начин единствено модифицираните типове се възпроизвеждат до $t+1$. $\boldsymbol{x}_t$ не влияе на възрастта на съществуващите в t частици.

Твърдение 3.7. *SDP Модел 3 е SDP в контекста на „Универсалната рамка за моделиране".*

За съжаление за SDP Модел 3 не е наличен аналог на Теорема 3.2, който да предоставя ефективен начин за намиране на решение. Към момента единствените алгоритми на разположение са общите алгоритми на динамичното програмиране, които изискват итериране на целите пространства на състоянията и решенията. Тъй като пространството на състоянията, асоциирано с Дефиниция 3.5 съдържа информация за възрастта на частиците, то итерирането на всички възможни състояние е практически невъзможно.

Подчертаваме, че стохастичните SDP (и по-общо казано стохастичните задачи) са един от най-трудните оптимизационни задачи в областта на оптимизацията. Решения с добри свойства и компактен вид се срещат рядко, отделните задачи често се нуждаят от разработването на специализирани алгоритми предназначени единствено за тяхното решаване. Самото съществуване на 15-те фрагментирани общности, изброени в Секция 1.5 на дисертацията, които разглеждат SDP, представлява потвърждение за липсата на общ похват, който да може да се справи успешно с достатъчно голям клас от задачи. В този контекст успешното включване на MS-BPM (и други разклоняващи се процеси) в SDP в контекста на „Универсалната рамка за моделиране" представлява съществено постижение понеже ни предоставя като допълнителен възможен инструмент, при търсенето на решения, уравнението за оптималност на Белман.

Валидността на уравнението за оптималност на Белман в рамките на „Универсалната рамка за моделиране" ни позволява да се ориентираме към подходи за намиране на решение като Динамичното Програмиране чрез Апроксимации (Approximate Dynamic Programming (ADP; [78])). В дисертацията очертаваме общ ADP алгоритъм базиран на „състоянията след взимане на решение". Този алгоритъм може да послужи като начална точка за развитието на по-специализиран ADP алгоритъм насочен към намирането на решения за SDP с динамика, зададена от разклоняващи се процеси.

Заключение

Апробация

Резултатите от дисертацията са представени на: Пролетна научна сесия на ФМИ (март 2019, 2021, София, България), Национален семинар по стохастика (юни 2019 г., София, България), 21-ва европейска среща на младите статистици (21st EYSM, 29 юли - 2 август 2019 г., Белград, Сърбия), Конференция за млади изследователи на Софийския университет (февруари 2020 г., София, България), 19-та конференция на Международното общество за приложни стохастични модели и анализ на данни ASMDA2021 (юни 2021, Атина, Гърция), Петият международен семинар за разклоняващи се процеси и техните приложения - IWBPA 2021 (април 2021, Бадахос, Испания).

По време на работата върху дисертацията са написани следните публикации:

1. M. Slavtchova-Bojkova, K. Vitanov. Modelling cancer evolution by multi-type age-dependent branching processes. Comptes rendus de l'Acade'mie bulgare des Sciences, **71**, 10, 1297-1305, (2018).
2. M. Slavtchova-Bojkova, K. Vitanov. Multi-type age-dependent branching processes as models of metastasis evolution. Stochastic Models, **35**, 284-299, (2019), https://doi.org/10.1080/15326349.2019.1600410.
3. K. Vitanov, M. Slavtchova-Bojkova. On decomposable multi-type Bellman-Harris branching process for modeling cancer cell populations with mutations. 21st European Young Statisticians meeting - Proceedings, 113-118, (2019).
4. K. Vitanov, M. Slavtchova-Bojkova. Modeling escape from extinction with decomposable multi-type Sevastyanov branching processes. Stochastic Models, (2022), https://doi.org/10.1080/15326349.2022.2041037.

Научни приноси

В рамките на тази дисертация се разработва новият Многотипов Разклоняващ се Процес на Севастянов изразен чрез вероятности за Мутация между типовете -

Multi–type Sevastyanov Branching Processes through probabilities of Mutation between types (MSBPM) - и се изследват негови характеристики в контекста на популации, избягващи измиране/израждане.

За разлика от предишни трудове с подобна тематика, новият MSBPM и получените резултати не зависят от предположения, че мутациите са малки величини или че са в сила специфични разпределения за продължителността на живот. Също така не зависят и от предположения за неразложимост на процеса или от предположения за специфични характеристики на възпроизводството на частиците. Поради това, MSBPM и получените за него нови резултати, представляват разширение в непрекъснато време и/или обобщение на по-рано получени резултати от други автори за популации, които избягват израждане (виж [61], [62], [64]). Получените резултати представляват и продължение на нашата работа в Vitanov & Slavtchova-Bojkova [7] (2022), както и на разглежданията в предходните ни статии [1] - [6]. Получени са различни системи от уравнения - системи от уравнения за в.п.ф. на процеса, за вероятностите за израждане, за в.п.ф. на пораждането на частици от един клас типове частици към друг. Получени са и резултати относно времето до появата на първата „успешна” частица, както и за непосредствения риск от поява на „успешна” частица. Доколкото ни е известно, подобно задълбочено изследване на тематиката не е правено досега за многотипов разклоняващ се процес в непрекъснато време (тук изключваме предишната ни работа в [1] - [7]). Посочените по-горе резултати са получени както за случая на MSBPM, започващ с една частица на възраст 0, така и за случая на MSBPM, започващ с една частица на възраст a, $a \neq 0$. Доколкото ни е известно, случаят на разклоняващ се процес започващ с една частица на възраст различна от 0 не е бил систематично разглеждан досега. Конкретни случаи на разложим MSBPM също са изследвани по гореописания начин. Разработени са числени схеми за изчисляване на всички получени системи от уравнения.

Многотиповият разклоняващ се процес на Биенеме-Галтън-Уотсън (БГУ), многотиповият разклоняващ се процес на Белман-Харис с експоненциални разпределения на продължителността на живота, многотиповият разклоняващ се процес на Севастянов, както и MSBPM и неговите варианти, са успешно включени в Оптимизационни Задачи с Последователно Взимане на Решения (SDP) в контекста на „Универсалната рамка за моделиране” разработена в [82]. Доколкото ни е известно, с изключение на БГУ, разклоняващи се процеси не са били разглеждани досега в контекста на SDP (дефинирани спрямо „Универсалната рамка за моделиране” или друга рамка). Осъщественото в дисертацията включване формално отваря пътя за възможността за прилагането на ADP и RL към SDP с динамика, зададена от разклоняващи се процеси. Изведено е ново доказателство на Теорема 3.1 от [77], която предоставя алгоритъм за ефективното намиране на решение на SDP с динамика, зададена от многотипов БГУ, което използва уравнението за оптималност на Белман. Доказан е аналогичен нов резултат за случая на многотиповия разклоняващ се процес на Белман-Харис с експоненциални времена на живот, както и за случая на Многотипов Разклоняващ се Процес на Белман-Харис изразен чрез вероятности за Мутация между типовете (MBHBPM) с експоненциални времена на живот. Конструирано е ново пространство на състоянията, чрез което са успешно включени MSBPM и многотиповият разклоняващ се процес на Севастянов в SDP в контекста на „Универсалната рамка за моделиране”.

Бележка относно използвания софтуер

Всички изчисления в рамките на дисертацията са извършени посредством код написан на Python 3.8.13 [209]. В кода са използвани библиотеките NumPy 1.20.3 [210] и SciPy 1.6.2 [211]. Фигурите, които не представляват графи, са създадени посредством Matplotlib 3.5.1 [212]. Фигурите, които представляват графи, са създадени чрез yEd 3.20.1 [213].

Декларация за оригиналност на получените резултати

Декларирам, че настоящата дисертация „Разклоняващи се процеси – оптимизация и приложения” съдържа оригинални резултати, получени като продукт на моите изследвания (подкрепени от моя научен ръководител). Резултатите, които са получени, публикувани или описани от други учени, са цитирани по подходящ начин в библиографията.

Дисертацията не е използвана с цел получаване на научна степен в друго училище, университет или научен институт.

Благодарности

Искам да благодаря на моя научен ръководител проф. дмн Марусия Славчова-Божкова, за нашите дискусии, ползотворен обмен на идеи, както и за подкрепата оказана през годините! Благодарен съм и на моите колеги от Факултета по Математика и Информатика на СУ „Св. Климент Охридски” за това, че са винаги добронамерени и готови да помогнат при нужда!

Библиография

[1] M. Slavtchova-Bojkova. On two-type decomposable branching processes in continuous time and time to escape extinction. In Branching Processes and their Applications, Lecture Notes in Statistics, **219**, Puerto, I.M., et al. Eds., Springer International Publishing: Switzerland, 319-329, (2016).

[2] M. Slavtchova-Bojkova, P. Trayanov, S. Dimitrov. Branching processes in continuous time as models of mutations: Computational approaches and algorithms. Computational Statistics and Data Analysis, **113**, 111–124, (2017).

[3] K. Vitanov, M. Slavtchova-Bojkova. Multitype branching processes in continuous time as models of cancer. Annuaire de l'Universite de Sofia "St. Kl. Ohridski", Fac. Math and Inf., **104**, 193-200, (2017).

[4] M. Slavtchova-Bojkova, K. Vitanov. Modelling cancer evolution by multi-type age-dependent branching processes. Comptes rendus de l'Acade'mie bulgare des Sciences, **71**, 10, 1297-1305, (2018).

[5] M. Slavtchova-Bojkova, K. Vitanov. Multi-type age-dependent branching processes as models of metastasis evolution. Stochastic Models, **35**, 284-299, (2019), https://doi.org/10.1080/15326349.2019.1600410.

[6] K. Vitanov, M. Slavtchova-Bojkova. On decomposable multi-type Bellman-Harris branching process for modeling cancer cell populations with mutations. 21st European Young Statisticians meeting - Proceedings, 113-118, (2019).

[7] K. Vitanov, M. Slavtchova-Bojkova. Modeling escape from extinction with decomposable multi-type Sevastyanov branching processes. Stochastic Models, (2022), https://doi.org/10.1080/15326349.2022.2041037.

[8] B. A. Sevastyanov. Branching processes. Mir, Moscow, (1971) (in Russian).

[10] P. Haccou, P. Jagers, V. Vatutin. Branching processes: Variation, Growth and Extinction of Populations. Cambridge University Press, (2007).

[14] M. Kimmel, D. Axelrod. Branching Processes in Biology. Springer: New York, (2002).

[36] E. Pardoux. Probabilistic Models of Population Evolution. Springer International Publishing: Switzerland, (2016).

[57] K. Athreya, P. Ney. Branching Processes. Springer: New York, (1972).

[58] T. Harris. The Theory of Branching Processes. Springer: Berlin, (1963).

[61] Y. Iwasa, F. Michor, M. Nowak. Evolutionary dynamics of escape from biomedical intervention. Proc. Biol. Sci. B, **270**, 2573-2578, (2003).

[62] Y. Iwasa, F. Michor, M. Nowak. Evolutionary dynamics of invasion and escape. J. Theor. Biol., **226**, 2, 205-214, (2004).

[63] P. Haccou, V. Vatutin. Establishment success and extinction risk in autocorrelated environments. Theoretical Population Biology, **64**, 303–314, (2003).

[64] M. Serra, P. Haccou. Dynamics of escape mutants. Theor. Popul. Biol., **72**, 167-178, (2007).

[65] S. Sagitov, M. Serra. Multitype Bienaymé–Galton–Watson processes escaping extinction. Advances in Applied Probability, 41(1), 225-246 (2009).

[66] A. Ghosh, M. Serra, P. Haccou. Quantifying stochastic introgression processes in random environments with hazard rates. Theoretical Population Biology, **100**, 1-5 (2015).

[67] R. Bellman. On the theory of dynamic programming. Proceedings of the National Academy of Sciences **38** (8): 716–719 (1952).

[68] R. Bellman. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, NJ (1957).

[69] R. Howard. Dynamic programming and Markov processes. Cambridge, MA: MIT Press (1960).

[70] M. L. Puterman. Markov Decision Processes, 2nd ed. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, (2005).

[74] K. Judd. Numerical Methods in Economics. MIT Press (1998).

[76] J. Si, A. Barto, W. Powell, and D. Wunsch. Learning and Approximate Dynamic Programming: Scaling up to the Real World. New York: John Wiley and Sons (2004).

[77] S. R. Pliska. Optimization of multitype branching processes. Management Science, **23**, 2, 117-124, (1976), http://www.jstor.org/stable/2629818.

[78] W. B. Powell. Approximate Dynamic Programming: Solving the Curses of Dimensionality, Second Edition. John Wiley & Sons, (2011), DOI:10.1002/9781118029176.

[80] W. B. Powell. A unified framework for stochastic optimization. European Journal of Operational Research, **275**, 3, 795-821, (2019), https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.07.014.

[81] W. B. Powell. From Reinforcement Learning to Optimal Control: A unified framework for sequential decisions. In: Handbook on Reinforcement Learning and Optimal Control, Studies in Systems, Decision and Control, 29–74 (2021).

[82] W. B. Powell. Reinforcement Learning and Stochastic Optimization. Wiley (2022).

[83] I. J. Bienayme. De la loi de multiplication et de la duree des familles. Soc. Philomath. Paris, Extraits, Ser. 5, 37 – 39 (1845).

[84] C. C. Heyde, E. Seneta. I. J. Bienaymé: Statistical theory anticipated. Springer, New York (1977).

[85] H. W. Watson, F. Galton. On the probability of the extinction of families. The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland **4**, 138 - 144 (1875).

[88] J. F. Steffenson. On Sandsynligheden for at Afkommet uddor. Matem. Tiddskr. B, 19-23 (1930).

[89] A. Kolmogorov, N. Dmitriev. Branching random processes. Dokl. Acad. Nauk SSSR, **56**, No. 1, 7 – 10 (See, English transl., Selected works of A. N. Kolmogorov, vol. II: Probability theory and Mathematical Statistics, Kluwer, Dordrecht, 1992), 1947.

[104] R. Durrett. Branching process models of cancer. Springer, New York (2015).

[115] B. A. Sevastyanov, A. M. Zubkov. Controlled branching processes. Theory Probab. Appl. **19**, 14-24 (1974).

[120] M. G. Velasco, I. García, G. P. Yanev. Controlled Branching Processes. John Wiley & Sons (2018).

[121] M. González, I. Del Puerto, N. Yanev, G. Yanev. Controlled branching processes with continuous time. Journal of Applied Probability, 58(3), 830-848 (2021). doi:10.1017/jpr.2021.8

[124] N. M. Yanev, K. V. Mitov. Controlled branching processes with non- homogeneous migration. Pliska Stud. Math. Bulg. **7**, 90 – 96 (1984) (in Russian).

[181] I. M. Del Puerto, N. M. Yanev. Branching processes with multi-type random control functions. C. R. Acad. Bulg. Sci. **57**, No 6 , 29 - 36 (2004).

[182] I. M. Del Puerto, N. M. Yanev. Stationary distributions for branching processes with multi-type random control functions. J. Appl. Stat. Sci. **16**, 91 - 102 (2008).

[199] K. Etessami, M. Yannakakis. Recursive markov decision processes and recursive stochastic games. J. ACM **62**(2), 11:1-11:69 (2015), https://doi.org/10.1145/2699431

[200] K. Etessami, A. Stewart, M. Yannakakis. Polynomial time algorithms for branching markov decision processes and probabilistic min(max) polynomial bellman equations. Math. Oper. Res. **45**(1), 34-62 (2020). https://doi.org/10.1287/moor.2018.0970

[201] U. Rothblum, P. Whittle. Growth optimality for branching Markov decision chains. Math. Oper. Res. **7**(4):582–601 (1982).

[202] E. M. Hahn, M. Perez, S. Schewe, F. Somenzi, A. Trivedi, D. Wojtczak. Model-Free Reinforcement Learning for Branching Markov Decision Processes. In: Silva, A., Leino, K.R.M. (eds) Computer Aided Verification. CAV 2021. Lecture Notes in Computer Science, **12760**, Springer, Cham. (2021) https://doi.org/10.1007/978-3-030-81688-9_30

[203] R. Sutton, A. Barto. Reinforcement Learning: An Introduction, Second Edition. MIT Press, Cambridge, MA, (2018).

[209] Python Software Foundation. Python Language Reference, version 3.8.13, https://docs.python.org/3.8/reference/index.html

[210] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, et al. Array programming with NumPy. Nature, **585**, 357–362 (2020), https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2

[211] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. Nature Methods, **17**, 261-272 (2020), https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2

[212] J. D. Hunter. Matplotlib: A 2D Graphics Environment. Computing in Science & Engineering, **9**, 90-95 (2007).

[213] yWorks GmbH. (2019). yEd. Retrieved from https://www.yworks.com/products/yed