СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФИЛОСОФСКИ ФАКУЛТЕТ

SOFIA UNIVERSITY
St. KLIMENT OHRIDSKI

FACULTY OF PHILOSOPHY

Катедра „Философия“

Джонатан Кенигсън

„МАТЕМАТИКА И *МАТЕЗИС*“

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за придобиване на научна степен „доктор“ по професионално направление 2.3. Философия

научен ръководител: доц. д-р Веселин Христов Дафов

София, 2018 година

СЪДЪРЖАНИЕ

I. Въведение във философския контекст

Настоящата дисертация представлява заключителната фаза на няколко различни траектории на философско и математическо изследване, всяка от които заслужава отделен анализ. От епистемологична гледна точка предметът на изследване е *матезис* - начинът по който се синтезира нова математика въз основа на това, което вече съществува в научната литература. Целта на изследването е да се демонстрира, че *матезис* е един осъзнат процес на математическо обобщение, чрез който мнозина професионални математици целенасочено търсят начин да направят резултатите си възможно най-широко приложими. Един от резултатите на тази генерализираща тенденция е противното на платоновата теза твърдение - на първо място тъй наречения Quine-Putnam Thesis (QPT) (теза на Куйан-Пътнам) - че математиката *a-priori* предсказва физическата реалност и че трябва да съществуват абстрактни обекти, обясняващи тази пророческа сила. Ние ще стигнем до един неголям, но оригинален извод чрез комбиниране на четири от "най-добрите" съвременни научни теории: теория на гравитацията (f (R)), теория на струните, обща теория на относителността и свързани положения от алгебричната топология - като направим опит да демонстрираме, че всяка от тях може с по-голяма доза достоверност да се разглежда като обект на интуитивна генерализация, отколкото като абстрактни обекти според QPT. Ще следваме Куайн при определяне на математическите теории, отразяващи симетриите, свойствени на емпиричната реалност, както и да потвърдим тезата на Витгенщайн, че математиката е един вид "език", който лежи в основата на симетричните свойства на физическата реалност. Ние обаче ще докажем, че абстрактните обекти биха могли да се разглеждат като обяснение за успеха на една физична теория, единствено при предположение, че зад него не стои антропоцентричен процес например *матезис*.

Според класическа негласна епистемологична презумпция математиката е продукт (артефакт) на собствения си дискурс - доказателствата, теоремите, лемите и обявените резултати - а не на навиците и интуицията на практикуващите я. Изучаването на развитието на математиката преди появата на артефактите се приема за несъществено за повечето трудни въпроси от епистемологията на математиката. Следователно философията на математиката е повече археология, отколкото антропология. Съответно съвременната епистемология на математиката отбягва историята на математическата мисъл от древността до началото на Новото време, които са решаващи епохи в паралелната еволюция на математиката и философията като научни дисциплини. В анализа не се разглеждат особеностите на дискурса, историята на проблемите, възприятията на участниците в диспута и изискванията от сродните дисциплини. Друг аспект от дисертацията е, че *матезис*-ът - освен че се прилага в практиката на математиката - олицетворява присъствието на периодически променящи се платонови и аристотелиански тенденции във философията на числата, количествата и отношенията, които се срещат в класическите философски трудове. По този начин ще демонстрираме, че *матезис* е не просто математически феномен, но до голяма степен е диалектическо философско учение, отразяващо духа на времето във философията на математиката, механиката и емпиричните науки между Платон и Аристотел. Подобен интердисциплинарен труд би трябвало да се приветства от традиционната философия на математиката. Дефицитът от трудове, съчетаващи философски и математически гледни точки, кара специалистите по философия на математиката да приравняват математиката с нейните артефакти (доказателства), така че епистемологията на математиката по същество да бъде до голяма степен подчинена на доказателството като такова. Дисертацията завършва с конкретна, практическа демонстрация на начина, по който *матезис* процедира за създаване на непознати дотогава резултати с предсказуем физически ефект. Като приложно поле сме избрали динамиката на черната дупка - чиято теория е добре представена в литературата, свързана с QPT. Това навлизане в нова територия по съвкупност е една демонстрация на това, как функционира *матезис* в различни сфери на математическите изследвания и може да замести абстрактните обекти на QPT със физически обясними и предсказуеми.

Природата на математическата истина е разисквана както от философи и историци, така и от математици. Този интерес се допълва чрез изследване на произхода и принципите на математиката. Както може да се очаква, историци поставят акцент върху проучването на източниците на математическата практика. Например в книга 2 от своите *Histories* Херодот твърди, че произхода на геометрията се дължи на използването й в селското стопанство на Египет (70); в *Decline and Fall of the Roman Empire* също се изследват основите на геометрията (Gibbon 299). Целта на това изследване е да се проучи епистемологията на Айнщайн и Витгенщайн с намерението да се разсеят някои несдържани платонистични критики, появяващи се в дискусии относно математическите реалности. Настоящата дискусия ще разгледа и историческото развитие на аристотелианските и платонови тенденции в математическата мисъл. Платонизмът е исторически преобладаващата гледна точка във философията на математиката. В *Gorgias* Платон разделя изкуствата на тихи и такива, които изискват вербални аргументи (252-295). По-важно за нашия дискурс е, че същият диалог прави разграничение между чистата ("философска") математика и приложната математика - като първата е по-близо до чистата диалектика от втората (Plato 254). Тъй като *Gorgias* се фокусира главно върху естеството на риториката, по-нататък прякото дискутиране на математически теми е ограничено (Plato 451). От друга страна *Timaeus* е тясно свързан с математическата организация на космоса и предлага обширно описание на математическата природа на реалността. Създателят на вселената конструира "kosmos" (подредена реалност) от света на формите и именно в това се състои целта на вселената - да разкрие своята математическа природа (Plato 254-255). Аритметикът, подобно на геометъра, е въвлечен в един откривателски и изследователски - за разлика от конструктивния, процес. *Philebus* е посветен на изследване на удоволствието и знанието; този късен диалог допълнително определя границите на превъзходството на чистото математическо знание пред "смесеното" (напр. приложно) знание. Така сред по-късните платонови диалози математиката и реалността се смятат за равнозначни. Чистият математик и в крайна сметка диалектикът имат привилегията да разберат причинно-следствените и структурни реалности на едно фундаментално ниво. Както се твърди в *Meno*, начинът, по който е добито това знание, се гради върху спомени. Способността на математика да възприема реалността с по-голяма проницателност от търговеца, войника или занаятчията просто се дължи на факта, че той е надарен с по-голяма способност да си припомни, какво вече са му разкрили формите (Plato 633-634). Именно тази способност за припомняне прави математиката задължителен за изучаване предмет от всички философи и политици.

Математиците от класическата школа са склонни да споделят платоновата епистемология на математиката. В глава V на *Arithmetic* Никомах от Гераза (Nicomachus) твърди, че аритметиката е просто откритие на интелекта, за разлика от интуицията и конструирането (619-620). Целта на философската аритметика е да определи отношенията между числата с единствена цел - всестранни знания. Аритметиката се предлага да се смята за най-важна форма на математиката, защото числата са необходими за всички математически занимания, докато обратното не е валидно. Следователно, априорността на аритметиката по подразбиране води до същото заключение относно цялата останалата чиста математика. Познанието на математическите факти, независимо как са получени, са в основата на разбирането на математическата истина. Евклид подкрепя априорността на геометрията, но - противно на Никомах - настоява, че формалното и конструктивно доказателство е необходимо условие за математическото знание (30-40). Знанието за даден математически факт без конструктивно доказателство е недостатъчно да притежаваме знание за чистата математика. Ако използваме езика на Платон, фактът, отделен от причината, е в областта на смесената математика и е достатъчен единствено за изявяване на условна (напр. методологична) истина. В книга I от *Revolutions of the Heavenly Spheres* Коперник защищава платоновата онтология, съгласно която числото предшества и описва физическата реалност (510-512). *Geometrical Demonstrations* на Паскал поддържат подобна теза, като според Паскал основното качество на математика е способността да разсъждава ясно и изчерпателно въз основа на първичните принципи (аксиоми), приети за очевидни (445). В раздел I от *Pensees* той защитава по-общото твърдение, че математическата практика е един процес на непрекъснато откриване (или "откровение") на универсални факти (Pascal 444-445). Навсякъде в трудовете си Декарт защищава априорността на математическите реалности и предлага методология за унифициране на алгебрата и геометрията с цел разкриване на свойствата на тези реалности. Според Декарт същината на математическото откритие са ясните разсъждения върху очевидни основни принципи, както той лаконично твърди в *Meditation* V (319-322). Допусканията би следвало да отразяват възприеманата (субективна) структура на света; дедукциите да са разумно систематични. Картезианското отхвърляне на аристотеловия силогизъм не означава отмяна на логическата структура, а по-скоро на това, което се смята за аристотелова неясна вселена от аксиоми и византийска йерархия на причините. От критиката между капките възниква една ейдентична математика.

Математическата физика на 20-и век реализира сложното взаимопроникване на езика и реалността и като такава представлява отхвърляне на платоновата епистемология. В своя труд *Principles of Relativity* Айнщайн доказва, че математическите твърдения не са нито верни, нито погрешни, а по-скоро отразяват верни или неверни изводи от системи от аксиоми (195-196). Тези аксиоми в крайна сметка възникват от емпиричния опит и могат да бъдат отхвърлени или модифицирани, ако не отговарят на математическите изисквания на физичните теории. Ако използваме езика на Кант, математическите твърдения могат да се нарекат *a-priori* твърдения за *a-posteriori* аксиоми (195). *Relativity* е плод на тази програма. Като отхвърля кантианските схващания за априоритета на евклидовата геометрия в подкрепа на съвременната диференциална геометрия, Айнщайн получава възможност да конструира теория, която измества нютоновата механика както по отношение на нейната прецизност, така и по пророческата й сила. Що се отнася до Коперник и Бейкън, математиката принася най-голяма полза като слуга на физическите науки. Подобно на Айнщайн, Витгенщайн приема, че математическите твърдения не могат да се смятат за "истинни" или "неистинни" при отсъствие на езиков контекст (437). Математическите твърдения са производни на езика, но въпреки това неизбежно описват физическия свят. По този начин математическите твърдения са непропозиционални, но и задължителни; поради самата същност на света те не могат да бъдат различни (Wittgenstein 437-438). Тъй като платоновата теза е, че математическата реалност е независима от ума и езика, можем да приемем, че Витгенщайн отрича платонизма, но не *in-toto*. Структурата на езика съдържа в себе си необходимата изометрия на структурата на света (Wittgenstein 440). Използвайки платоновата терминология, *логосът* е изречен и той изцяло съответства на вселената, която създава. С помощта на езика математиката завещава своите знания на потомците, и общността на говорещите е тази, която му дарява връзката със света. Според Витгенщайн, както няма частен език, така не може да има и частна математика. *Логосът* не търпи самота.

Макар и рядко да е признавано, математикът Poincare е имал напълно подобно схващане. Математическите реалности са *sui-generis* рожби на езика; но техните всеобхватни прогнози не подлежат на преразглеждане под влияние на ексцентричните възгледи на лингвисти или философи (1-5). Математическите реалности отразяват реалността не защото налагат своите средства върху физикалността, а защото физикалността налага своите изисквания върху езика. Според Витгенщайн математиката е семиотика на реалното. Математическите факти са необходимите истини на езика - не на интуицията, не на привеждането им към логични системи (Poincare 14-15). Занятието за ограничаване на математиката до ниво на елементарна методология е също толкова неудачно, колкото и налагането на универсална структура върху говоримите, човешки езици. Математическата истина е истина от последна инстанция за реалността, но не и за *hypokymenon*. Вселената може да се разкрие толкова прецизно само чрез езика и много от нещата, които имат материална стойност и съдържание, могат никога да не се поддадат на точно описание или дефиниция (Poincare 21-26). Възгледите на Айнщайн и Витгенщайн за математиката като функция на езика намират сериозна подкрепа в трудовете на Аристотел. Аристотел доказва, че формите на математическите обекти се наследяват в обектите на описание (Metaphysics 270). Математическите обекти са обекти *qua* (в качеството си на) обекти; те представляват възможно най-обобщеното изследване на вселената от явления. Силогизмът, което е наука за формалния език, е вселена, в която математическите обекти, може да се каже, принадлежат на и взаимодействат с физическата реалност (Aristotle 547-548). Всъщност, самото разграничаване на физическа и математическа реалност според Аристотел е една категорична и опасна грешка. Платоновата епистемология отделя абстрактната реалност от физикалната единствено за да стигне до епистемологичния парадокс, че познанието за математическата реалност е крайно загадъчно. Математикът е като един магьосник; неговото умение е особено и сигурно, но е добито отвъд областта, в която може да се разчита на достоверността на сетивата и съответно на описанието.

Айнщайн и Витгенщайн предлагат една алтернатива на математическия платонизъм, която може да се приложи за изпразване от съдържание на традиционния платонизъм и за поставяне на основа на една забележителна антропоцентрична онтология на математиката в научната литература. Едно обобщение на този аргумент би послужило успешно при дискусиите, които се опитват да направят неприятния избор между възгледите на Платон и Аристотел, чиито описания могат да се намерят тук (Aristotle 14-15). Традиционният математически платонизъм счита, че абстрактните математически реалности (а именно множествата, функциите и отношенията) съществуват независимо от човешките езици и културните практики. Да допуснем, че L е един формален език, състоящ се от краен набор символи с определена семантика и коректни правила. Ако е в сила закона за противоречието, L не може едновременно да съществува и не съществува. Да приемем, че елементите, принадлежащи към множество, което съществува, следва да получат онтологичен статус - едно разумно предположение, с което всеки поддръжник на Платон или Аристотел с готовност ще се съгласи. Да предположим, че съществува доказателство, че ако L не съществува (например величините, които цитира L, онтологично предхождат L), множеството, не съдържащо нищо (например празното множество), ще продължи да съществува. Ако L не съществува, то според modus ponens празното множество продължава да съществува. Следователно, според закона на противоречието, L не е елемент от празно множество. Следователно, L съществува, което е противоречие. Доказателство, адаптирано по подобен начин и подходящо формализирано, може да се приложи за установяване на нерешимост на въпроса за предлингвистичното съществуване на числата, или - в още по-общите случаи, на мереологична конструкция от произволен подходящо рестриктиран формален език L. Аргументът може да се разшири до доказателство, че не може да се докаже съществуване на множества преди появата на формален език L. Тъй като зададените дескриптивно множества съдържат квантификация на целите числа или бройни системи на база цели числа, не можем да приемем, че класът на дескриптивните множества съществува независимо от целите числа. Ако има доказателство, че по принцип човек никога не може да докаже или обори предлингвистичния статус на целите числа, то същото заключение се отнася и за множества, квантифицирани на база цели числа.

Може да се използва тезата на Айнщайн и Витгенщайн за оспорване на предлингвистичното a-priori съществуване на общи множества. Да предположим, че дескриптивното множество S се състои от скоби и непротиворечиво мереологично условие p(s), квантифицирано според формалния език L. Ако условието p(s) има формата “f(s)~k” за някакво отношение ~, коректно построената формула f и свързаната променлива к, то мереологията на S изисква пояснение, дали всеки елемент r от S отговаря на условието f(r)~k. Това е равносилно на въпроса, дали f(r) и k притежават общо свойство. Но изясняването на това свойство изисква интерпретиране в езика L и представлява серия от (възможно противоречиви) добре формулирани L-условия. Ако L-условията са противоречиви (напр. че дадено цяло число n е едновременно четно и нечетно), тогава според закона за противоречието множеството S следва да е празно. Ако L-условията са непротиворечиви, тогава S следва да не е празно. Но ако L няма онтологичен статус, тогава не са на лице L-условия, и следователно S е празно, което е противоречие.

Това твърдение изисква, в случай че L не е получило онтологичен статус, всяко множество S, чиято мереология произтича от добре формулирани L-условия, да бъде празно. Помислете си само какви екзистенциални квантификации биха могли да съществуват в такова множество. Всяко множество, което би могло да претендира за екзистенциалност, би предизвикало вътрешно противоречие, отричайки собственото си съществуване и превръщайки всички подобни множества в празни множества. Тази теория на множествата, която води началото си от семантичния модел на Витгенщайн и Айнщайн, чудновато се отличава от наивната теория на множествата и илюстрира някои трудности, възникващи при натуралистичния подход към теорията на множествата. По-конкретно, най-неразрешимите противоречия изглеждат прости за формулиране, но много трудни за отхвърляне при липса на изчерпателна аксиоматична стратегия. За съжаление същата критика е приложима и за производните структури. Да предположим, че X и Y са множества и че f е функция на X и Y. В светлината на предходната критика, ако X или Y съдържат екзистенциална квантификация, то функцията е тривиална. Ако има вероятност X или Y изобщо да не притежават онтологичен статус, тогава е нерешимо дали и f следва да получи онтологичен статус. Функционалната логика и квантификациите от n-ти ред позволяват подобна номинализация. Един парадокс, присъщ на общата семантика на Айнщайн и Витгенщайн. Да предположим, че трябва да присвоим онтологичен статус на математическите реалности, представяни в широко подкрепяните научни теории за реалността. Ако означим с T една такава теория и ако приемем, че T съществува независимо от какъвто и да било човешки език L, тогава трябва да има множество от математически величини (природни константи, физически константи, коефициенти на пропорционалност), които са неотменими за T. Но тези константи са числа, за които според горната критика не може да се докаже, че съществуват независимо от който и да е човешки език. Ако съществуваше доказателство, че тези математически обекти задължително съществуват независимо от който и да е език L, би съществувало доказателство за предлингвистичното съществуване на тези числа. Това е противоречие, съответно, не може да съществува подобно доказателство.

Настоящата дисертация може да се разглежда като частично застъпничество за философските възгледи на Витгенщайн и Айнщайн за математическия език като неотстраним за математическата реалност. Разглежданата тук концепция за *матезис* отчасти представлява онтологичното разбиране, че поне една абстрактна математическа теория има в основата си математически изследователски програми със съзнателен уклон към обобщаване, които се стремят да станат максимално достъпни за дескриптивната феноменология. Една обещаваща възможност за изследване - и една, която за съжаление не може подробно да бъде обсъждана тук - е добавянето към аргументацията структурализма на Poincare. Доводите против господството на теорията на множествата в математическия дискурс могат да се превърнат в търсене на фундаментални структури, които да са предлингвистични, и които да контекстуализират езика на съответната теория на множествата. Получената езикова теория би могла да се опита да избегне критерия за нерешимост, постулиран в настоящето есе, като въведе за всеки формален език L един мета-език L, съдържащ всички математически твърдения, квантифицирани в L. Получената семантика на L би могла да се изследва като един вид платонистичен структурализъм, като същевременно се избягват настоятелните претенции за предлингвистичната природа на математическите реалности.

II. Преглед на съвременната литературата

След оригиналната публикация на Benacerraf & Putnam (1983) назрява необходимостта от обширен преглед на съвременната литература по въпроса. Платонизмът във философията на математиката се основава върху доктрината, че реално съществуват математически обекти като числа, множества, отношения. McLarty (2005) доказва, че Платон не е съвременен платонист или привърженик на тезата за неотстранимост във всяко смислено значение на думата. В *Republic* Сократ се отказва от вечните абстрактни обекти (основна тема от запитването на Glaucon). Също така McLarty предоставя и една кратка история на съвременната геометрия. Marcus (2015) прави опит да подреди неизяснените въпроси на както изглежда безкрайните дебати по тезата на Куайн-Пътнам (Quine-Putnam Thesis) и връзката й с математическия реализъм и натурализъм. На амбициозния платонист Marcus предоставя обширна библиотека от аргументи за неотстранимостта и разглежда някои непознати досега модификации на всеки от тези аргументи. Resnik (1997) доказва, че математиката е емпирична наука; подобно на Куайн той поддържа идеята, че математическото и научно знание не може да се диференцира чрез a-posteriori \ a-priori разграничаване. Resnik е както платонист-натуралист, така и структуралист; според него математиката в крайна сметка е изследване на структури. Balaguer (1998) доказва, че спорът между платонистите и антиплатонистите е невъзможен за разрешаване и че съществуват - и винаги ще съществуват - смислени аргумента в полза и на двете твърдения. Balaguer смята, че съществуват форми на платонизъм, които не попадат под ударите на никоя от настоящите критика от страна на номиналистите, но че въпреки това, тази аргументация е неподатлива на традиционните атаки от сорта на тезата на Куйан-Пътнам за неотстранимост (Quine-Putnam Indispensability Thesis) (QPT). При Jubien (1977) може да се намери силен контрааргумент. Той доказва, че математическият платонизъм не може да бъде обоснован, дори ако се предположи, че абстрактни обекти съществуват (противно на изискването за неотстранимостта на съществуването им) и че чрез анализ на логическата възможност може да се изгради алтернативна неплатонистична теория на математическата реалност. Cheyne & Pigden (1996) поддържат становището, че аргументът на QP сам по себе си е съмнителен от гледна точка на логиката, при условие че това е единствената смислена причина за вяра в съществуване на абстрактни математически обекти. Настина, ако диспенсацията можеше да се демонстрира, тогава няма причина да се предполага наличието на абстрактни обекти, но ако не може, тогава според горното предположение също така няма причина да се предполага наличието на подобни обекти.

Един по-подробен преглед на съществуващата научна литература ще хвърли светлина върху засегнатите в спора въпроси. Bigelow (1988) черпи от материализма на Armstrong (1991) за да доказва, че квантификацията при множествата или при класове математически обекти не води задължително до съществуването на тези обекти. Той се захваща да дефинира множества, естествени, реални и имагинерни числа емпирично и съзнателно избягва в конструкциите си квантификация на абстракциите. Schwartzkopff (2016) заимства неофрегеновото разбиране за математическата квантификация и привежда доводи против опита на Frederike Moltmann да сведе всички математически формули до една спецификационна форма. В подкрепа на номинализма и фикционизма на Hartry Field Bangu (2008) поддържа тезата, че известен брой от случаите, за които се твърди, че представляват истинско математическо обяснение на физическо явление, всъщност са пояснителни и затова подлежат на номинализация. Liggins (2006) доказва, че анти-платоновият аргумент на Hartry Field срещу тезата на Куайн-Пътнам е смислен въпреки възраженията на John Burgess и Gideon Rosen. Kasa (2010) поставя предизвикателство пред програмата за номинализация на Field, основана на критика срещу квантификацията и окачествяването при причинно-следствени случаи, и възразява срещу опита на Liggins' (2006, 2010) да спаси програмата на Benacerraf. В същото време Callard (2007) доказва, че причинно-следствената връзка с абстрактни обекти не е проблематична за платониста и че платонистите не трябва да се оправдават с аргумента за невъзможност на знание без причинна обусловеност. В подобен дебат McEnvoy (2012) разглежда един силен аргумент на Jody Azzouni в полза на скептицизма относно съществуването на математически реалности, водещи начало от нейната "загадка на епистемичната роля" (epistemic role puzzle) (ERP) и заключава, че скептицизма на Azzouni относно математическите реалности не е равнозначен на скептицизъм за съществуването на външен свят. Park (2016) доказва, че не е оправдано да се отхвърлят математическите възгледи спрямо емпиричните доказателства и едновременно с това да се прегръща тезата на Куайн-Пътнам, или да сте платонист по отношение на математическите реалности. Той казва, че такива философи търсят удобството и ги нарича "convenientists". Park (2016) се стреми да разсее напрежението между научния реализъм и математическия принцип на неотстранимостта като твърди, че "интерактивно успешните" теории често са добри приближения на реалността, така че предсказаните от физическите теории числа, множества и обекти наистина съществуват. Той нарича тази теория "интерактивен реализъм". Park (2018) се обявява срещу Callard (2007) и твърди, че се иска отговор на няколко възражения преди да се приеме, че съществува причинна връзка между влиянието на абстрактните обекти и интелекта. Park (2017) се стреми да оспори математическия реализъм, като нагледно показва, че той не може да предложи конструкция за осмисляне на разбираема/достъпна промяна. Той дава пример за математическа структура, която постоянно се променя спрямо времето и доказва, че реализмът не разполага с ресурса да обясни защо многото сходни твърдения, които биха могли да се направят относно този обект, не се разглеждат като истинно-функционални. Park (2017) предлага една нова гледна точка, която той нарича "математически инференциализъм" - един вид семантичен реализъм, при който истинността на математическите съждения се извежда от техните конкретни следствия, и не е необходимо да се приема съществуването на ante-rem или платонови реалности независимо от класовете, които те квантифицират. Тази позиция е устойчива срещу предизвикателството на Benacerraf, както и съвместима с гледните точки на някои умерени фикционалисти, което я прави привлекателна за натуралистите, които сами по себе си не са платонисти. Математическият реализъм изисква от абстрактните обекти да притежават това свойство, но също така изисква това, което се очаква от понятието "абстрактен" - т.к. такова определение предполага извънпространствено-времеви модел (aspatiotemporality). Също така е проблематично за разбиране, как ще се осъществи епистемичен достъп до безграничните и непроменящи се обекти, т.к. те са извън областта на нашия типичен опит за природните феномени. Parsons (2010) изследва кантианските основи на теоретико-множественния платонизъм на Gödel и призовава философите да възродят критиката на Кант на извънпространствено-времевата (aspatiotemporal) епистемология, насочена срещу съвременните му платонисти и антиплатоновите емпиристи. Baron (2013; 2014; 2016) доказва, че във естествените науки съществуват случаи за автентично свръхматематическо (extra-mathematical) обяснение. Той провежда такова изследване в областта на морската биология, по-точно изследва навиците за преследване при хищниците. Ако съществува научно извън математическо обяснение, тогава възникват проблеми за поддръжник на тезата за неотстранимостта, който разчита на традиционната защита на QP на математическия реализъм. Baker (2010) подкрепя платонизма на Burgess-Rosen срещу критиката на Liggins(2007), че математическите стандарти за теореми за съществуване са неясни по същество и затова са безполезни при определянето на реалности, за които наистина може да се твърди, че съществуват. Tallant (2013) разглежда наскоро "подсиления" аргумент за неотстранимостта на Baker и предлага една номиналистична критика на теорията на числата. Особено интересен е начинът на излагане на теорията на числата. Той доказва, че номинализмът наистина изисква лингвистична модификация при прилагане на теорията на числата, обаче номиналистичният език не предлага реални факти за света. Daly & Liggins (2016) повдигат проблема с разделянето, както прави Dorr, на математическия език на две разновидности - обикновен и онтологичен. Според Dorr обикновеният математически език е езикът на нерефлексивната математическа практика и представлява ежедневно (повърхностно) общуване между математици, изучаващи съответните реалности, докато фундаменталният (същественият) език се използва при философски дискусии относно математическата реалност и е по-прецизен от гледна точка на онтологията. Daly & Liggins се придържат към мнението, че разграничаването на езика на два вида - ежедневен и фундаментален, по същество е неточно и не намира приложение в много от често срещаните математически задачи. De Cruz (2016) наскоро защити математическия реализъм чрез изследване за това, как хората и животните възприемат числата в околната среда. Освен това в своя защита тя предлага подробна генеалогия на теорията за появата на математическо мислене при животните. Предстои публикация на Liggins, в която той отхвърля интерпретацията на Benacerraf от Justin Clarke-Doane и в частност критикува твърдението на Clarke-Doane, че предизвикателството на Hartry Field към платонистите е несериозно. Balaguer (1998) възразява на Benacerraf (1965), че платонистите могат свободно да квантифицират абстрактни обекти, които се отличават по форма или конструкция от референтните им обекти. Нееднозначността на подобни структури в крайна сметка не представлява проблем за платониста и го освобождава от по-голема епистомологична атака от страна на Benacerraf. Balaguer (1994) доказва, че математическите реалности не могат да са абстрактни и познаваеми едновременно и че природните платонизми a-la Maddy са чувствителни към критиката, отправяна от Benacarraf, относно опитите на платонистите да омаловажат проблема за достъп. Balaguer (1995) възразява срещу твърдението на Benacerraf (1973), че математическият платонизъм и натуралистичната епистемология не могат да бъдат съвместими. Хората могат да получат знания за математическите обекти просто предоставяйки описание, как това знание е възможно. Balaguer (1995) предлага едно от най-авторитетните описания на чистопробен платонизъм (всеки математически обект, който може да съществува, трябва да съществува в някаква вселена). Knowles (2015) защитава един вид платонизъм за "тежки условия". В тази система всяка физическа величина е частен случай на физически обект, който е свързан с реално съществуващо число или множество. Според Knowles радикализмът на тази идея е довел до нейното мълчаливо или прибързано отхвърляне, макар че тя заслужава по-подробно проучване. Освен това, установено е, че доводите, които почиват на прибързаното отхвърляне на платонизма за "тежки условия", трябва да бъдат преоценени в светлината на евентуалните й достоинства. Linsky & Zalta (1995) развиват платонизиран натурализъм като форма на пълномащабен платонизъм и твърдят, че подобен пълен платонизъм - с корени в онтологичната икономия и натуралистките (естествени) стандарти на компетентност и знания (напр. "принцип на осмисляне") - е необходим на епистемологичния натурализъм като защита срещу различните антиплатонистки злословия (в частност, програмата за номинализация). Познание на математическата истина може да се получи чрез познаване на принципа на осмисляне и неговото приложение. В предстояща публикация Linsky & Zalta предлагат разклонена "обектна (предметна) теория" на математическото убеждение, която е съвместима с формалните конструкции и е в състояние да идентифицира математическите обекти във всяка математическа теория. Предимство на този подход е, че създава квантификационни твърдения за абстрактни обекти изцяло референтно, като избягва някои основни семантични предизвикателства - цикличност и референтност. MacBride (2004) доказва, че проблемът за достъп в теоретичната математика е изоморфен на проблема за достъп при идеалните системи в естествените науки, и че структуралисткото схващане може да предложи частично решение за единия от тези проблеми, единствено и само тогава, когато е в състояние да предложи съответно решение за другия. Assadian (предстояща публикация) напада структуралисткото ante-rem схващане за разлика и пермутация, твърдейки, че основните семантични проблеми с подобни структуралистки програми е, че те не успяват да демонстрират защо са по-добри от други, относително по-предпазливи елиминистични виждания по същия въпрос. Една значителна полза от елиминистичната онтология е опростяването на проблема за достъп при абстрактните реалности. Button & Walsh (2016) изследват широк спектър аргументи за категоричност и дават на платонистите, структуралистите и на недоволните от тях доказателства за тяхната полза.

Авторите предлагат добре обмислено разбиране за структурна еквивалентност и изоморфизъм в контекста на теорията на множествата, теорията на моделите и формалната аритметика. Buijsman (2016) разширява философската програма на Benacerraf като настоява, че онтологията на математиката следва да е отговорна за математическите практики на обикновените хора, не само на професионалните математици. Baras (2017) поставя проблема за възражението на Benacerraf-Field срещу платонизма и защитава активния прагматизъм от тази атака. Devlin (2008) издига идеята, че математическия конструктивизъм и математическата обективност могат да се сближат, ако разглеждаме математиката като мисловна дейност. Вместо да се питат, дали абстрактните обекти съществуват независимо от мисловния процес и практиките, епистемолозите трябва да изследват начина, по който човешкия мозък придобива способността да мисли и разсъждава математически. Този подход предполага придържане към поставеното от Benacerraf ударение върху математическите практики. Tieszen (2010) твърди, че философите на математиката трябва да се заемат с "мисловни експерименти", за да определят по-какъв точно начин математиката открива или конструира различни реалности - един подход известен под името "на какво прилича" (what it is like) анализ. Моралът на упражнението е, че при постулиране на математическите теории епистемолозите трябва да обръщат внимание на диспозициите и прилаганите от практикуващите методи на работа. Izlard et. al. (2008) дава пример за това, как са били създадени числата чрез невербални средства и в зависимост от изискванията на обстоятелствата впоследствие са символично обобщени за по-големи числа и други бройни системи. Това е един опит да се установи априорността на числото, въпреки че не може да се счита за защита на платонизма или за отхвърляне на фикционализма per-se. В съответствие с критиката на Devlin (2008) Bujisman издига изискването, че платонизмът е отговорен за начините, по които математиката се възприема в реалния живот. Buijsman (2017) атакува референциалните условия, представени в епистемологията на Linsky и Zalta и завършва с дискусия на референциалната стабилност, за която се твърди, че отсъства в изложението на Linsky и Zalta. Baron (2013) лансира тезата за неотстранимостта, основана на работата на David Armstrong, която избягва критерия на Quine за онтологична обвързаност. Основната новост е излагането на факта, че за всеки даден критерий за онтологична обвързаност може да има версия на аргумента за неотстранимостта, създадена специално за него, която не попада под ударите на номиналистката критика. Carter (2004) избягва номиналистката критика като доказва, че математическите обекти, създадени от математиците, обективно и неизменно съществуват след подтвърждаването им с примери (инстанцииране). Въпросът, дали и в какъв смисъл тези реалности съществуват преди демонстриране с примери, е неразрешим чрез традиционния дискурс на епистемологията. Chen (предстояща публикация) се стреми да номинализира квантовата механика въз основа на съществуващо описание на квантовото състояние на дадена система. Chen смята програмата на Hartry Field от книгата му "Science Without Numbers" за напредничава и предлага алтернатива на опита на Balaguer (1996) за такава номинализация. Механиката на Chen избягва квантификация на абстрактни математически обекти и предлага съществена/присъща аксиоматизация на квантовите фазови структури, която може да се изролзва от другите автори. Newstead (2009) се опитва да разбере теоретико-множественния платонизъм на Georg Cantor и доказва с факти, как предпочитанията му се изместват от Спиноза към Лайбниц. Статията предлага едно отлично класическо въведение към платонизма на Cantor и волунтаристичния дуализъм, но няма пряк принос към съвременния дебат между платонистите и номиналистите за обекти, различни от множества, подобни на тези, описвани от Balaguer.

Основната причина за честото присъствие на платонизъм и натурализъм в едни и същи философски системи е, че платонизмът изисква съществуването на абстрактни математически реалности. Т.к. математическите обекти толкова често присъстват в научните изследвания, естествено е да се поинтересуваме, дали такива обекти съществуват независимо от тези проучвания. Тъй като в утвърдените научни теории е естествено да се припише онтологичен статус на референциите на реалностите, също така е естествено да се твърди, че математическите реалности, които са ключови елементи от тези теории, трябва по същия начин да съществуват подобно на другите реалности, на които се позовават теориите. Аргументи, изискващи съгласуваност на онтологичния статус с математическите реалности въз основа на тяхното фигуриране в научните теории, се наричат аргументи за неотстранимост (неотменно значение) (indispensability arguments). Изключителните класически примери включват Colyvan (2001); Quine (1961; 1981); Putnam (1971; 1975); и Maddy (1992). Критиците на аргументите за неотстранимост могат да предпочитат да отрекат съществуването на абстрактното (фикционализъм); да отрекат неотменимостта на математиката за науката (елиминативизъм); да разделят математиката на чиста и приложна, всяка с различни онтологични приоритети; или да отрекат, че онтологичен статус се предоставя на абстрактните реалности по същия начин, по който се предоставя на материални или емпирични реалности. Azzouni (1998) предупреждава, че онтологичните обвързаности, представени от QP, не са очевидно универсални, обаче критерия за участие и обвързването също не се поддават на демонстриране. Основното твърдение на Azzouni е, че философската неопределеност е предопределеност на дебата платонисти-номиналисти.

Други влиятелни възгледи се фокусират върху приложението на математиката в естествените науки. Baker (2005) доказва, че съществуват математически формулировки, които създават изцяло нови познания в естествените науки и дава няколко примера от математическата биология. Baker (2009; 2016) разширява предишните си изследвания и дава няколко допълнителни примери, както и насоки за по-нататъшни изследвания. Rizza (2011) доказва, че примерите от Baker (2001; 2003; 2005; 2009; 2010) могат в края на краищата да се номинализират и че тяхната нестандартност се дължи в по-голяма степен на яснотата на тяхното изразяване , отколкото на предизвикателството им към номинализма. Bangu (2013) върви по пътя на Rizza (2011) и доказва, че неотстранимостта на математиката трябва да се преработи с езика на теорията на вероятностите (пробабилистична терминология). Ney (2012) опровергава привидната тривиалност на търсенето на програми за номинализация и в същото време мълчаливо отхвърля Carnapian и позитивистките мнения като ненужно ограничителни. Batterman (2010) предоставя подробен преглед на опитите за разбиране на разясняващата роля на математиката в естествените науки и доказва, че опитите да се сведе причинното обяснение в една област към такова във друга може да не е възможно. Saatsi (2011) установява, че пост-Куайнеанските аргументи за неотстранимостта са предмет на критика, че математиката може да играе репрезентативна (а не казуална) роля в научното обяснение. Saatsi (2016) настоява за по-точна дефиниция на неотстранимостта и разделя математическите свидетелства (доказателства) на "дебели" и "слаби" в зависимост от начина, по който се прилага съответната математика. Lyon & Colyvan (2008) твърдят, че прилагането на номинализационна програма, основана на възгледите на Field, при анализ на фазовото пространство ще доведе до загуба на прогнозна и обяснителна способности и, следователно, не може да бъде онтологично идентична на оригиналната теория. Melia (2000) излага номинализационна стратегия за квантификация на множества и числа и посочва, че й липсва елегантността и концептуалната яснота на конкуриращите платонистки теории. Извод от труда на Melia е, че номинализацията - колкото и да не е желателна в някои от случаите - не е непременно неоправдана или неуместна. Yablo (2010) разглежда твърдението на Colyvan, че не е възможна номинализация на фундаменталните физични теории; той доказва, че доказателството на Colyvan създава трудности, които могат - поне по принцип - да бъдат преодолени. Pincock (2007) доказва, че математическите реалности са както неотменими, така и казуално инертни, което изисква ново описание на абстракциите. Неговото тълкуване е трудно приемливо за платонистите и анти-платонистите и не може да бъде сбито и кратко оценено от никоя от платформите. Liggins (2008) възприема подобен подход на "път между рогата" като твърди, че мненията на Quine (1961) и Putnam's (1975) са цитирани доста неточно и че те на практика са в по-малка степен обвързани с онтология, отколкото обикновено се твърди в литературата. Berenstain (2017) доказва, че научният реализъм изисква не само математически реализъм, но и специфична връзка на метафизичното разграничаване между математическата и физическата реалности. Bueno (2003) се опитва да отслаби аргумента на QP, като отбелязва, че връзката му с математически обекти е неопределена и подкрепя няколко конкуриращи се версии на антиреализъм по-радикално, отколкото чистия платонизъм. Bueno (2005) разглежда неотстранимостта на теорията на функцията на Дирак за квантовата механика, като твърди противно на Colyvan (2001), че математиката може да бъде изключена от квантовата механика. Новаторството на Bueno е неговото доказателство, че дори теорията на Дирак да създава новаторски предвиждания, потвърдени по-късно, ние все още нямаме основание да приемем съществуването на математически реалности, възникващи от получената теория. Dieveney (2007) доказва, че самият критерий на Quine за конфирмационен (потвърждаващ, семантичен) холизъм не е доказано необходим за аргумента на QP, но и самият той може да се превърне в обект на номинализационна програма.. Busch & Morrison (2016) предупреждават, че научните реалисти, които използват концепцията на QP, за да оправдаят математическия реализъм, трябва да докажат, че съответните математически субекти са наистина необходими. Dorr (2010) се опитва да съживи интереса към модалните подходи към неотстранимостта, които според нея са били пренебрегвани в съвременната научна литература. Pincock (2004) твърди, че различните аргументи на Colyvan за неотстранимост не упоменават структурните връзки между математическите реалности и научните теории, за които, както се твърди, са неотменими.

Математическият структурализъм е форма на платонизъм или номинализъм, която се фокусира върху математическите системи като структури. Benacerraf (1965); Resnik (1997); Shapiro (1997); и Chihara (2003) са парадигматични произведения. Математическият структурализъм твърди, че математическият дискурс се отнася за класове структури, за разлика от единичните структури. Например, един теоретико-множествен структуралист би могъл да твърди, че когато говорим за числото 1, може би имаме предвид една конструкция на Peano, конструкция на Godel , кардинална конструкция или някоя от серията алтернативи, които са идентифицирани помежду им за различни случаи на използване (Conway & Guy 1996). Ante-rem структуралистите са математически платонисти, които разлеждат системите като съществуващи независимо от своите реализации. В ребуса структурализмът не изисква математическите реалности да са абстрактни; тези реалности може да са присъщи на математическите структури. По отношение на ребуса структуралистите могат да бъдат смятани за математически номиналисти, защото не държат на съществуването на абстрактни обекти. Shapiro (1997) се опитва да омаловажи тезата на QP, като доказва, че множествата, функциите и числата са части от референтни системи, които съдържат принципи за зависимост или приемственост. Този подход приема, че математическите твърдения имат определени истинни стойности, но също така оспорва критиката на номиналистите за липса на убедителни причини да вярваме в съществуването на абстрактни реалности. Shapiro (2008) защитава ante-rem структурализма от обвинението, че не е в състояние еднозначно да индивидуализира математическите реалности във всяка структура - критика, която Shapiro не отрича, но намира я намира за несъществена. За разлика от него, Keranen (2001) намира тази не-уникалност за много проблематична от гледна точка на ante-rem структуралиста и твърди, че номинализмът е единствената защитна позиция за онези, които желаят да признаят структурната не-уникалност като безпроблемна. Button (2006) отговаря, че тази и подобни критики правят елиминативизма необходим в определени случаи, но по никакъв начин не във всички. Както вече споменахме, Resnik (1997) се стреми да представи структуралистко-платонисткаta онтология на математиката като наука за моделите и разпознаване на моделите. Parsons (2007) се разграничава от Shapiro и Resnik с аргумента, че математическите обекти имат онтологичен статус само по отношение на определена система. Parsons също така подробно разглежда естеството на математическата интуиция по отношение на тези производни структури. Parsons (2004) защитава тезата, че математическите обекти имат естествени свойства не повече, отколкото получават от своите структури и затова елиминационна програма в структурализма не е необходима. Leitgeb & Ladyman (2008) разглеждат автоморфизмите и тъждествените образи на структурите, получени от чистата математика и посочват, че идентичностите от референциите на структурите не могат да бъдат отчетени от онтологични фактори, външни за съответните структури. Awodey (2004) изследва автоморфизма в абстрактна теория за хомотопията и го разглежда от гледна точка на структуралистите. Awodey доказва, че тази теория на автоморфизма е несъвместима с класическите основи на математиката, но предоставя интересна дискусионна точка за онези, които искат да се отдалечат от чисто теоретико-множествените дебати. Франклин (2014) съживява аристотеловата реалистична онтология на абстрактните реалности, започвайки с приложната математика. Той определя, че безкрайните величини и структури, които усложняват структуралистките теории, са концептуално - дори и фактически - осъществими. Psillos (2006) е едно цялостно отхвърляне на ante-rem структурализма и предпазлива защита на тезата, че в in-rebus структурализмът може да се включи една практическа теория за причинно-следствената връзка във физическите науки. Централната тема е аргументът, че структурата не е единственият познаваем аспект на опита, и че този опит не може да бъде сведен до структура. Linnebo (2008) представя компромисно мнение, като привежда аргумента, че структурализмът може приблизително да регистрира алгебрични обекти, но не и теоретично-множествени обекти. Hellman (2003) предлага мнението, че теориите на категориите и топосите изискват допускания за логиката и правят екзистенциални твърдения, които не могат да бъдат сведени към теориите като такива. Тъй като предположенията за съществуване са мета-теоретични, те подкопават предполагаемия статус на теорията на категорията като нетеоретично-множествена база за математиката. Hellman доказва, че първичността на категориите и топосите може да бъде спасена чрез мереологията на Grothendieck и множествената квантификация. Макар че детайлите на този аргумент са технически и няма да бъдат цитирани тук, основното твърдение - че категориите и топосите могат да бъдат разширени по предвидим и систематичен начин - играе важна роля за структуралистката математическа онтология. В една обширна структуралистка литература трудно може да се намери ефективното обобщение, но тук можете да намерите авторитетни допълнителни аргументи: Nodelman & Zalta (2014 г.); Ladyman (2007); Hellman (2001); Shapiro (2005); Reck (2003); Landry & Marquis (2005); Landry (2011); Chihara (2003); Reck & Price (2000); Ainsworth (2011); и цитираните в тях източници. Най-активните части на настоящото изследване включват функционалния характер на структурите и връзката между ante-rem структурализма и научния реализъм; отлично резюме може да се намери в Horsten (2008).

Фикционализмът се доближава до QP, като доказва, че абстрактните обекти не съществуват и че екзистенциалните твърдения, квантифицирани въз основа на тези обекти, не могат да бъдат верни. Същността на математиката не се базира върху изучаването на абстрактни обекти. Този подход редуцира проблема за достъпа като отрича, че математиката има предмет и изисква от фикционалиста някак си да отчита ползата от математиката в науката и кохерентността на структурата на математическата практика. Типично за математиците е да приемат математическите обекти за съществуващи поне с някакво допускане. Фикционалистът е принуден да отчита коректността на математическите твърдения и степента, до която тази коректност обикновено предполага съответното физическо или логическо състояние на нещата. Тъй като много от математическите твърдения (както са записани) са - според фикционалиста - строго казано неверни, често е необходимо фикционалиста да предложи алтернативна модална структура, която запазва истинната функционалност на някои от съответните математически твърдения. Според всеобщото мнение Field (1982) се смята за най-влиятелната парадигматична работа; Azzouni & Bueno (2016) и Varzi (2014) предоставят превъзходно разбираеми контури на основните аргументи. Balaguer (1994; 1996; 1998; 2008; 2009; 2016) осигурява отличен преглед на съвременната изследователска литература, но е много технически. Също забележителна е работата Daly (2006). Основните въпроси към фикционалисткия аргумент възникват от работата на Field (1982). Liggins (2012 г.) се стреми да защити номинализма на Melia (както бе обсъдено по-горе) от критиката на Colyvan. Liggins (2014) търси обяснение на твърдението, че математическият дискурс е полезно разширение на естествения език и изследва онтологичните приоритети на участващите реалности. Burgess & Rosen (1997) предоставят подробен, нетехнически преглед на математичния фикционализъм и оценяват жизнеспособността на цялостната програма в светлината на контрааргументите на платонистите. Бърджис (2004) възкресява структурната програма на Carnap и доказва, че номинализмът не е защитим в стила на Azzounian. Leng (2005) доказва, че херменевтичният фикционализъм може да бъде неоснователен, но натурализираният фикционализъм е защитен срещу много атаки, най-вече тези на Burgess (2004). Leng доказва, че Burgess погрешно тълкува критиката на Carnap на фикционализма, която не се отнася за абстрактни реалности, които се подкрепят с научно доказателствени данни. Leng (2010) защитава фикционалисткия възглед за математически дискурс, в който математическите реалности се интерпретират като изказвания под формата на приказки. Подобни са аргументите на Leng (2002). Yablo (2005) е авторитетно обсъждане на цялостната фикционалистка стратегия, която се основава на Burgess & Rosen (1997) и контекстуализира съвременната научната литература. Yablo (2002) се интересува в по-голяма степен от характеристиките на участващите реалности. Azzouni (2010) предоставя задълбочен фикционализъм, който избягва подхода на Liggins (2014) и се възползва от теорията на формалните езици. Balaguer (1996, 2008 г. 2009 г.) доказва, че въпреки липсата на аналогия между художествената литература и математическия дискурс и факта, че някои математически изречения са верни и други не са, номинализъм в стила Melia все още е възможен. Daly (2008) изглажда различието между революционния и нереволюционния фикционализъм и предлага избор между три алтернативи, като оспорва всяка форма на фикционализъм. Eagle (2008) се стреми да разбере фикционализма чрез интуиционистка перспектива. Liggins (2010) прилага теорията на претенциите за разработване на теория на участието на математичните изрази, които не се основават на семантични истини. Armor-Garb & Woodbridge (2010, 2014) поемат по подобен път и използват аргумента на Yablo за фикционализма като крайъгълен камък на описанието. Hoffman (2004) възприема схващането на Kitcher, че математиката е в по-голяма степен наука за човешките действия, отколкото описателна онтология на математическата реалност. Изводът на Хофман е, че мнението на Китчър може да бъде белетризирано, но че основната идея не може да оспори чистия платонизъм на Colyvan (2001) или QP. Подобни дебати, структурирани според насоките на Yablo, могат да бъдат намерени в Forrai (2010); Ulatowski (2017); Woodward (2012); и Liggins (2014). Много от разискванията се опират на манифеста на Yablo(2005) и неговата (2002) проблематизация на абстрактни реалности. Azzouni (2011) добавя към дебата една допълнителна фикционалистка онтология и Skiba (2017) разглежда тези аргументи в светлината на модалния фикционализъм. Контраангументите от страна на приложната математика са редки, но техният брой се увеличава в научната литература. Barrantes (предстояща публикация) разглежда допълнителни аргументи за неотстранимостта и намира, че те в някои случаи липсват от математическата биология, доказвайки, че фикционализмът не е приложим в много конкретни случаи на приложната - за разлика от чистата - математика.

Неофрегеанизмът представлява опит да се сведе математиката до логика и да сведе числата до логически абстракции. Теориите на Фреге използват принципа на абстракция (обикновено въз основа на принципа на Hume), за да определят равномощността преди изграждането на обща област на целите числа (виж Wright 1983). Подобни опити се усложняват от съществените теоретико-моделни изисквания и от трудностите при доказване, че принципите на абстракция са точно определени (Hale 2000, Hale & Wright 2001). Основна задача на нео-фрегеанската парадигма е да се намерят икономически и точно дефинирани принципи на абстракция за различни математически програми и да се разработят съгласувани desiderata за непротиворечиви и ефикасни принципи на абстракция (Klement 2012, Knox 2016; Moltmann 2013; 2017) , Възражението от страна на "лошите момчета" например възниква, когато принципите на абстракцията не са взаимно съгласувани. Неофрегеанците също така са призовани да осигурят натуралистични или други епистемологични причини платонистите да приемат принципите на абстракция и да осигурят съответна защита срещу критиката на номиналистите (Linnebo 2009, Urbaniak 2010, Potter & Smiley 2011). По-специално, Wright (1983), Boolos (1987) и Hale (2001); и Zalta (1983) разглеждат разбиранията на Фреге за числата като абстрактни обекти, онтологически подчинени на принципите на абстракция (AP) -

един подход, възприет оттогава от много автори и подход, който парадигматично се приема от Ръсел (1919) в неговия забележителен труд "Въведение в математическата философия" (Introduction to Mathematical Philosophy). Klement (2012) способства за съживяването на програмата на Фреге от Ръсел, като доказва, че тази програма може да бъде модифицирана, за да удовлетвори сегашното номиналистично предизвикателство . Fine (2002) разглежда ограниченията на принципите на абстракция, а Hewitt (предстояща публикация) определя мястото им в структуралистичната онтология. Linnebo & Uzquiano (2009); Linsky & Zalta (2006); MacBride (2003) разглеждат възраженията (по-конкретно възражението на "лошите момчета") към аргумента на Wright (1983) и обсъждат семантичните проблеми, които възникват при свеждането на математиката към теория на множествата. Cook & Ebert (2005) продължават тази дискусия, както и MacFarlane (2009), на която Hale & Wright (2009) отговарят. Други трактовки се намират в Linnebo (2012); Raatikainen (предстояща публикация, свързана като с логиката, така и с математиката); Eklund (2006) (изцяло онтологична трактовка); Weir (2003) е изключително критичен, като твърди, че не всички точно дефинирани принципи на абстракция могат да произведат твърдения за истинност на референциите си. Heck (1997a; 1997b) предоставя обширен преглед на теориите на абстрактността и типовете, а Май (2005) предлага неофреанско, базирано на теорията на множествата, свеждане на аритметиката до второстепенна логика и концепционална теория на типовете. Шапиро (2003) подробно разглежда темата за абстракцията в теорията на множествата; Boucher (2006); Russell (2017); Bueno (2001); и Hodes (1984) предлагат подобни общодостъпни сведения за логицизма. Colburn & Shute (2007) разглеждат принципите на абстракция в компютърните науки, които Wright (2001) подлага на аналитичен анализ в по-широк математически контекст.

По-техническото третиране включва Parsons (1965); доказателствата за непротиворечивост на Heck, първоначалното противопоставяне на стила на мислене на Weir (2003) (1996); Walsh (2005) и Linnebo (2004), което е подробно изследване на принципа на Hume и други принципи на абстракция, свързани с класическата аритметика на Peano и теорията за конструктивни множества; Sider (2007) и Hawley (2007), които обсъждат вариацията на квантора; Hale (2000), който осигурява конструирането на реалните (веществени) числа според неофрегеанските принципи; и Heck (2000), който се занимава с изометрия и формална равномощност. Heck (1995; 1999) и Boolos & Heck (1998) разглеждат теоремата на Фреге и възможните разклонения на абстракциите в духа на Linnebo (2006, 2012), който също разглежда схващането на Фреге за идентичност (2014). Antonelli (2010) разглежда инвариантността на принципите на абстракция, които въздействат по различен начин върху крайни и безкрайни множества, тема, изследвана от Heck (1993; 1998), е знак на уважение към оригиналната програма на Фреге, използваща принципа на Hume като принцип на абстракция. Horsten & Linnebo (2016) продължават да изследват принципите на абстракция за традиционната логика (term logic). Shapiro (2000; 2004); Demopoulous (1995); Shapiro & Weir (2000; 2003); Cook (1999 г., 2003); Fine (1998); и Heck (1992; 2011; 2014) предлагат по-сложно отношение към квантификацията и позоваването, освоваващо се върху теорията на рекурсивните функции и теориите за екзотични множества;

Shapiro & Weir (1999) резюмира този формалистичен подход, прилаган към теорията на ZF-множествата.

В основата на психологизма лежи тезата, че математическите реалности имат онтологичен статус, но този статус по някакъв начин се определя от човешките познавателни практики. Frege (1916) все още звучи съвременно с противопоставянето си на това виждане. Hersh (1997) доказва, че платонизмът неправилно класифицира математическите обекти като непреходни, вече съществуващи и не подлежащи на влияние на времето. Математическите теории и обекти се изграждат от хората с цел да предсказват и обясняват природните явления и ги изоставят, ако не отговарят на очакванията им. Затова не е чудно, че математическите и физическите реалности се доближават толкова близко. Cole (2008, 2013) доказва, че математическата реалност не може да се разглежда отделно от институционалната реалност на математическата практика и че обективната и извънвременна (атемпорална) природа на математиката може да се обясни чрез тезата за институционална реалност. Fang (1974) има подобни възгледи, както и Heller (2000). Evinine (2003, скоро ще се появи в книжарниците) доказва, противно на неофрегеанците, че Фреге никога не би имал намерение да отхвърли напълно връзката между логиката и психологическия процес и че мисъл и логика всъщност са неотделими от математическата практика. Според теориите на претенциите, математическите твърдения нямат детерминирани истинностни значения и препратките на математиците към тези стойности не трябва да се приемат буквално. Психологизмът е критикуван заради своята възприемчивост към подобни възгледи. Например, Tallant (2013) извлича от когнитивната невробиология и психологията на развитието доводи, за да се противопостави на "теориите на претенциите" от математиката, предпочитайки по-скоро платонистичния реализъм. Все пак това обвинение не бива да се прилага спрямо всички психологически теории. Wenzel (2010; 2016) доказва, че една интуитивна онтология в кантиански стил е достатъчна, за да се избегнат претенциите за психологически релативизъм. Ierna (2012) изказва подобно твърдение по отношение на онтологията на Фреге. Godden (2014) сравнява логиката на Mill с логиката на Фреге и включва една дискусия за психологизма в схващането на Mill и антипсихологизма във възгледите на Фреге. DaSilva (2017) се венчава със структуралистките и психологичните доводи, като привежда доказателство, че психологическите конструкции вдъхват живот на създаването и курирането на математически структури за дефинитивни спомагателни цели. Допълнителен интерес представляват трудовете Brogaard (предстои да излезе от печат); Ulatowski (2008); и Błaszczyk, Piotr (2004). Философският интерес към психологизма намалява в днешния дискурс на английския език, поради привидно трудните предизвикателства, поставени от машините за автоматично доказване на теореми и постоянното предизвикателство от страна на неофрегеанците, че психологията задължително води до узурпиране на математиката и по този начин до загуба на математическа обективност. Wenzel (2016) се спира на някои от тези възражения, но има още много работа за вършене. Особен интерес биха представлявали опитите да се съживи психологизма в логиката и да се използват аргументи за редуциране, подобни на тези на логицистите, за да се достигне до психологистичните основи за математиката като цяло. Подобни аргументи биха могли да използват конструкцията на DaSilva (2017), както и тази на Klement (2012), като приблизителен начален модел.

Формализмът, до голяма степен благодарение на Hilbert (1970), е опит да се класифицира математиката като поредица от игри, които се извършват според съгласувани семантични правила (Detlefsen 2005). Аксиомите са постулирани и принципите за действие на дедукцията са определени в съответствие с интересите на математиците (Giaquinto 1983). "Математическа играта" или "доказателството" се състои в преобразуването на един набор (множество) от знаци (предположения) в друг чрез тези съгласувани правила (Zach 2003). Не е необходимо аксиомите да съответстват на реалния феномен и няма гаранция, че заключенията ще са съпоставими с тази реалност. Математиката не е учение за предвиждане, а средство за изчисляване, настроено според установени правила. Zach (1998; 2003) изследва историята на програмата на Hilbert и частичните опровержения на Godel, както и опитите за съживяване на една релативизирана формалистка програма в светлината на пречките, породени от теоремата за непълнота. Подобно на работата на Zach, обширните трудове на Detlefsen (1986; 1990; 2001; 2005) и Smullyan (1982) дават пълна представа за историята на формализма в светлината на първата теоремата на Godel за непълнота (FIT - Godel’s First Incompleteness Theorem) и свързаните с нея онтологични предизвикателства. Ferreirós (2009) предоставя едно внимателно, въз основа на първоизточници изследване на еволюцията на мисълта на Hilbert и взаимодействието на програмата на Hilbert с програмата на Dedekind за формализиране. Patton (2014) изследва опита на Detlefsen (1986) да разбере семиотиката на символите на Hilbert и изследва проблемите, които възникват, ако определени логически символи не се интерпретират в зависимост от контекста. Hirst (2012); Fefferman (2008); и Stenlund (2012), всички те включват изследване на някои аспекти на финитизма на Hilbert. Hilbert подкрепя платонизма по отношение на крайните математически обекти и идеализма по отношение за безкрайните обекти и всяко доказателство, включващо идеални (безкрайни) количества, може да бъде превърнато, макар и с много усилия, в доказателство, включващо само крайни количества. Формалистката семантиката, третираща условията, включително усъвършенстването на първоначалната програма на Hilbert, предлага друга насока за дебат. Birch (2007) разглежда формализма на Витгенщайн, но огромното болшинство съвременни автори разглеждат формализма на Hilbert. Малък, но предан брой автори продължават програмата на Hilbert. Weir (2011) предоставя формалистка, антиплатонистка основа за математика, която надхвърля гейм формализма и използва неофрегеанската квантификационна рамка. Azzouni (2005) предлага номинализационна стратегия на редуктивен формализъм в стил Hilbert. Resnik (1995) отхвърля по-ранните контури на програмата на Azzuni. Detlefsen (1998) разглежда твърденията за конструктивно съществуване; Detlefsen (1979; 2001) се фокусира върху приложенията на втората теорема на Godel за непълнота във една формалистка рамка. Fulda (2009) разглежда теорията на математическите условия (модални твърдения), чиито елементи сами по себе си са условни. Hofweber (2000) разглежда приложенията на формалната теория на доказателствата във философската наука. Avigad & Zach (2008) разглеждат epsilon calculus (един клас от теориите на доказателство) в същия контекст. Редица автори разглеждат също така формализма спрямо други философски програми. Toader (2014) изследва връзките между формализма и феноменологията. Hallett (1979) изследва формализма като парадигма в теорията си за изследователски програми. Zach (2005), макар и в рецензия на книга, хвърля светлина върху връзката между формализма и логиката. Baum (1972) разглежда радикалния идеализъм на George Berkeley като вид математически формализъм и използва това виждане за да изследва теорията на Berkeley като цяло.

Формализмът е изправен пред сериозни епистемологични предизвикателства, много от които се точат от времето на нападките на Godel. По-специално, пресмятането на пълната разрешимост в която и да е достатъчно устойчива система става невъзможно поради теоремите за непълнота. Освен това, докато работещите математици, представяйки своите резултати, са склонни да пишат във формалистични термини, всекидневните математически разсъждения са комбинация от интуиция, дедукция, индукция и формално математическо мислене, и едва на края кулминационната им точка е доказателството. Много формалистки монографии (като Hallett (1979), Birch (2007) и Zach (1998)) включват нетривиални разкази от формалистката практика. Една формалистка история на математиката, която да обърне особено внимание на развитието на системите и структурите, включени във всяка програма, би била полезна за съживяване на формализма като епистемология на избора на съвременния пазар на идеи. По нататъшното задълбочаване на диалога с неофрегеанците би облекчило защитата на ad-hoc фундаментания платонизъм. Аналогично по-разширен диалог с номинализма в стил Azzouni (2005) може да бъде една полезна номинализационна стратегия, ако се търси такава. Според формалистите, за да бъде субект на математически дискурс не е необходимо математическата реалност да съществува абстрактно, (Azzouni 2005; Birch 2007). Интуиционизмът се противопоставя на формализма, тъй като не съществува онтологичен императив за свеждане на математическите реалности до чисто логически реалности; така че интуиционистката логика и интуиционистката математика са много различни области (Dummett 2000). Интуиционистката логика отхвърля закона на изключеното трето и закона за двойното отрицание (Awodey 2014). Ако p е твърдение, твърдението ~ p се тълкува като подразбиране, че съществува опровержение на p, вместо да се предполага неистинност на p (Mints 2006, Schlimm 2005). Един математически обект се приема за съществуващ тогава и само тогава, когато може да бъде конструиран. Така, в интуиционизма присъства нещо от конструктивизма (Bridges 1987, Heck 2013, Troelstra 1988). Интересни дискусии за този критерий могат да бъдат намерени в Heyting (1956; 1966); Kleene (1965); и Dummett (1998; 2000). Raatikainen (2013); Detlefsen (1990); Shapiro & Taschek (1996); Bridges (2008 г.); и Posey (2005) всички те съдържат обширни обсъждания на интуиционистките епистемологични позиции и предлагат няколко форми на защита срещу формалистката критика, че интуиционистките критерии за истина са субективни. Brown (2003) изследва изискванията, които интуиционистката математика поставя пред емпиричните науки.

В сравнение с corpus-а на формалистите, при интуиционистите аритметиката и анализът са тема на малобройна, но предана група . Achourioti & van Lambalgen (2011) се стремят да обобщят трансценденталната интуиционистка логика на Кант към една всеобхватна теория на математическия силогизъм. Troelstra (1973, 1977) разглежда метаматематическите обобщения на интуистката логика и аритметика, включително последователностите за избор. Heylen (2013) разглежда израстването на интуиционистката аритметика от модалната логика. Granström (2011) предлага една интуиционистка адаптация на теорията за типовете на Фреге. Avigad & Fefferman (1998) разглеждат интуиционистката теория от позициите на логиката на Godel. Valentini (2004) се спира върху основите на конструктивната топология и съответно на конструктивната геометрия. Veldman (2014) и Berger & Ishihara (2005) разглеждат интуиционистки тълкувания на специфични топологични резултати. Дискусии относно естеството на финитизма в процеса на конструиране и доказване също преобладават в интуиционисткия пейзаж. Magidor (2012) разглежда ограниченията, наложени от строгия финитистичен конструктивизъм и преценява предимствата и недостатъците на този подход. Wright (1982); Sundholm (1998) разглежда изискванията, които конструктивизмът поставя върху класическите логически таблици и таблици за истинноста. Bridges (2009) разглежда конструкцията на равномерно непрекъснатите функции и съответния функционален анализ от интуиционистка перспектива. Bridges (2008) и van Bendegen (2008) по-общо изследват конструктивния финитизъм в геометрията. Tait (2006) разглежда тълкуването на финитизма от гледна точка на последователите на Godel

Всички водещи теории на математиката правят прогнози за структурата и възникването на естествените и реалните числа. Lavers (2013); Bueno & Oyenstein (2009); Tennant (1997); Maddy (2005); и Santos (2013) съдържат в текстовете си отлични прегледи на дебата за онтологичния статус на числата. Основен спор е дали числата съществуват абстрактно, както е в дебата между платонисти и номиналисти; сред номиналистите и особено в средите на структуралистите се води спор относно специфичното естество на таблиците на номинализирани числа и тяхната връзка с езика (Azzouni 1997; 1998; 2004; 2005; 2010; Caldon & Ignjatović 2005; Marshall 2017). Pica et. al. (2004; 2008) разглеждат дали е необходим език за разработването на бройна система за практическо приложение. Авторите стигат до заключение, че съществуват невербални "приблизителни" аритметики за еднозначни числа, свързани с допълнителни дейностите, но не и формална или функционираща аритметика за по-големи величини. Епистемологичното заключение е защита на конструктивистичната математическа онтология. Russell (1919) доказва, че числата са логически конструкции и могат да бъдат сведени до (и са предмет на) законите на математическата логика и теорията на множествата. Benacerraf (1965) противно на Ръсел доказва, че натуралните (естествените) числа нямат твърдо установена идентификация и че платонистките опити да открият канонично представяне довеждат до нерешим идентификационен проблем. Dixon & Gilmore (2016) включват няколко варианта на дилемата на Benacerraf в аргумент срещу натурализма. Moltmann (2013a, 2013b, 2017) се спира на въпроса дали естествените и формалните езици имат възможността цялостно да изследват абстрактните обекти, с които работят, и заключава, че е възможно да съществуват свойства на абстрактни обекти, които никога не могат да бъдат правилно формулирани. Felka (2014) доказва присъствие на антиреализъм по отношение на някои величини, присъстващи в изречения от естествения език, но също така твърди, че този довод не води до общ извод за антиреализъм на всички числа. Lackey (2013); Munoz-Darde (2005); Moore (1999); Hodes (1990); Schwartzkopff (2016);

Kim (2013); Hsieh & Wasserman (2006); Toader (2013); и Antonelli (2010), всички те разглеждат до каква степен числата са продукти на естествен език или трансцендентен естествен език и по някакъв начин са достъпни за него. Pettigrew (2008) разглежда, как платоновия и аристотелов езици могат да изяснят статусите на числата и множествата. Frege (1950 г.) остава една забележителна работа в техническата теория на формалния език и численото конструиране и естествено издава своя логистичен дневен ред. Steinhardt (2002) и Calle (2018) продължават тази линия на изследване, следвайки редукционизма в стила на Frege на теорията на множествата на естествените числа. Lawrence (2017); Dehaene (2001); Urbaniak (2010 г.); и Yi (1999) отхвърлят подобно мнение. Menzel (2014) разглежда числата в итеративните концепции на формалното представяне на теорията множествата на ZF. Zalta (1999) разглежда естествените числа и техните кардинални генерализации като абстрактни обекти и изследва съответната епистемология. Csima, Franklin, & Shore (2013) разглеждат броенето (бройните системи) в контекста на ординалните числа и следващите ординали. Sanders (1988) и McLarty (1993) твърдят, че цифрите могат да имат различни епистемологични основи в зависимост от контекста на тяхното използване.

Консенсусът за това, как биха изглеждали основите на теорията на множествата за математиката, е ограничен. Въпреки сериозните прения относно епистемологичния статус на абстрактните обекти, какво е естеството на множествата и ролята им в улесняване на конструирането и разбираемостта на математическите системи все още не е решено по същество . Опитите да се намери такава теоретико-множествена основа за математическа практика, която да обедини теоретико-числените и логическите изчисления, не вдъхват оптимизъм. Ferreiros (1996) и Potter (2004) разказват, как намалява делът на теорията на множествата в този контекст. Ramsey (1931) и Ramsey & Mellor (1978) представляват ранни опити за такава основа. Linnebo (2012 г.); Linnebo & Rayo (2013) и Linnebo & Richard (2011) изследват теориите за йерархичните множества и теории на категориите като потенциални консолидиращи парадигми за основа. Horsten & Linnebo (2016) разглеждат *ad hoc* принципите за абстракция на теорията на множествата в духа на Фреге. Goldstein (2004); Walsh (2016); Bacon (2013); и Field (2004) изследват противоречията, които възникват в схемите на теорията на множествата и принципите за абстракция. Hamkins (2012); Studd (2013); Martin (2001) разглеждат парадоксите в теорията на множествата по отношение на йерархични модели на мултивселена (multiverse). Menzel (предстояща публикация); Väänänen (2012 г.); Hale (2013); и Ferreira & Wehmeier (2002) подхождат към основополагащата теорията на множествата от гледна точка на формалната логика и превръщат много от парадоксите за непротиворечивост от теорията на множествата в техните квантификационни еквиваленти. Warren (2017); Studd (2013); и Hale (2013) обръщат специално внимание на квантификационните подходи. Спорещите автори тълкуват привидно неизбежното появяване на противоречия между теория на множествата и логиката като философски бариери, които по принцип биха могли да бъдат преодолени с достатъчно ясни формулировки на съответните философски проблеми.

Усилията за обединяване на логиката и теорията на множествата също са несполучливи и често са сфера за действие на специалисти, чието влияние не подхранва по-широкия философски диалог. Väänänen (2012) разглежда логиката от втори ред и теорията на множествата; Studd's (2005) изследва допусканията във теорията на множествата в Basic Law V на Фреге; и Shapiro (2012 г.) оспорва различието между логиката от по-висок порядък и теорията на множествата, като твърди, че всички те представляват разностранни опити в това направление. Potter (2010); Payne (2015); Antonelli (2012); Linnebo (2005); и Luetich (2012) имат за цел да пояснят отношенията между приложната математическа логика и конструктивните парадигми в теорията на множествата. Усилията за обхващане на структурните характеристики на формалните езици и прилагането на тези знания в теориите на моделите и множествата за изясняване на условията за съществуване на математическите реалности изглеждат като път, който води към парадокс и противоречие. За да могат философите да определят съществуването на математически реалности, те трябва да изучат свойствата на множествата, числата и логическата квантификация. В случая с множествата, тези усилия често се свеждат до въпроси на логическа квантификация - което изисква предикатно смятане и принципи за абстракция, връщайки се апоретично към областта на множествата и числата. При числата, дискусиите (pas Frege) се свеждат до логическа квантификация, повтаряйки отстъплението (regressus), упоменато в предишния цикъл. И накрая, свеждането на математиката до логика допуска възникването на многобройни епистемологични проблеми, породени от логицизма, основният от които е трудността да се обяснят привидно a-priori математически знания и приложимостта на математиката във естествените науки.

Дори ако може да се намери приемлива епистемология за числата, теорията на множествата и логиката, все още ще има спор относно възможността за ограничаване на математическата практика до комерциални приложения в някоя от съответните области. Теорията на множествата е пълна с парадокси, дори и на строго математическо ниво. Potter (1996, 2004) изследва парадоксите, присъщи на теорията на множествата на ZF и разказва историята на неуспешните опити да се излезе извън техните граници. Gödel (1940) критично ограничава вселената от резултати, доказуеми в стандартните аксиоматични теории на множествата, според изследването на Koellner (2010). Друга трудност при установяването на всеобщо приемлива основа на математика въз основа на теорията на множествата е растящото противоречие между философите и математиците конструктивисти и неконструктивисти по отношение на допустимост на аксиомата за избор при математическите доказателства. Сред епистемолозите на математиката, тази тема е проучена най-пълно в Beradi et. al. (1998); van Lambalgen (1992); Esser (2000); Williamson (1986); и наскоро, Hamkins (2015). След Potter (1996), Larvor, Löwe, & Dirk (2015) разглеждат аксиомната схема в инфиниратарни структури, както правят и Hochberg (1977); Corazza (2010); Linnebo (2013); Easwaran (2008); и Fefferman, Friedman, Maddy, & Steel (2000). Ternullo & Friedman (2016) разглеждат аксиомната схема на структури от многомерна вселена. Липсата на последователна и ясна аксиоматизация и установен формален език, с който да се обсъждат въпросите за трансцеденталния характер на множествата и тяхната аритметика, създава такъв проблем, че намирането на решение - ако се стигне до такова, най-вероятно ще се сметне за невъзможно. Настоящата дисертация изследва, и то не в малка степен, защо подобни знания никога не могат да бъдат получени при разумни формални дискурсивни условия.

Теоремите за непълнота създават условия, при които математическите заключения никога не могат да бъдат решени по отношение на дадена аксиомна схема и включват важна част от съвременния математически пейзаж. Parker (2003a, 2003b) разглежда разрешимостта на определени ограничени подмножества на реалните числа; Tsai (2009; 2011; 2013; 2015) инициира подобна дискусия по отношение на мереологични и мереотопологични теории вместо за действителни множества. Парадокси за доказуемост се разглеждат в Beeson (1976) (в контекста на интуиционистките аритметични операции върху множеството от реални числа), а Artëmov & Montagna (1994) - в контекста на операторите на доказуемост на логически квантификации от първи ред. Класическите резултати за непълнота се разглеждат в Bell (2013); Longo (2011); Detlefsen (2001); Heathcote (1990); и Berto (2009). Обсъждането в Heathcote (1990) на резултатите от непълнота в квантовата механика е забележително поради своя интердисциплинарен характер и представлява едно от малкото широко цитирани изследвания на приложенията на теорията за непълнота в естествените науки. Такива изследвания са важни както с тяхната методологична критика на натурализма, така и с утвърждаването на новаторски физически (материални) познания, които могат да обезсилят критиките на фикционалистите на аргументите за неотстранимостта на QP.

Основна трудност с по-голямата част от съвременната научноизследователска литература в епистемологията на математиката е, че тя не взима предвид съвременната математическа практика. Съвременната практика -

условно ще приемем напредъка от 40-те години на миналия век до днес, е възвестила безпрецедентно разпространение на математически знания, приложими към естествените и точните науки. Най-съвременната (свръхсъвременната) математика - която ще дефинираме като практикувана от 1980 г. до днес - практически не е тествана от философите на математиката. Тази математика е резултат от експоненциално нарастване на математичните познания и е ключов елемент на всяка онтология, която има за цел да тества платонистичната неотстранимост - да използваме израза на QP - в контекста на нашите наистина най-добри научни теории. Богатствата на съвременната и свръхсъвременната математика се разкриват като резултат от съзнателни обобщаващи тенденции, които могат да обяснят много от на пръв поглед свръхестествените физически прогнози на математическите теории, които платонистите приписват на абстрактни обекти. Точно на тази природа на *матезис*-а в тези области ще обърнем внимание сега.

Научната литература (особено Linnebo & Richard (2011)) предполага внимателно разследване на теорията на категориите, но епистемолозите на математиката все още не са разгледали по същество модерната алгебрична топология, на която се основават теорията на категориите и съответно редица платонистични трудове. Сред отличните примери на категориална математика, свързани с математическата епистемология, са Freyd & Scedrov (1990); Getzler & Kapranov (1998); Lawvere & Schanuel (1997); MacLane & Gehring (1998); Основна цел на съвременната алгебрична топология е да се намери алгебричен инвариант с точност до хомеоморфизъм (структуро-запазваща функция) на различни топологични пространства (Glen 1993). На практика, класифицирането до хомотопна (например, непрекъсната деформация) еквивалентност често е най-точната класификация, която човек може да открие. За всяко пространство X и цяло число n> 1 започваме с дефинирането на структура на n-та основна група на X в базова точка y като пространство на функциите от n-сфера към X, които запазват базовата точка (Hatcher 2002). За постигане на точно дефиниране (определеност) е необходимо да се вземат под внимание класовете на еквивалентност на такива трансформации. След определяне на хомотопната група може да се пристъпи към дефиниране на хомотопните функции, като например тези, които са комбинация на хомотопни деформации с друга (Glen 1993). Интуитивно идеята е да се извърши непрекъсната трансформация на графа на едната функция в граф на другата. Често обаче хомотопията не е достатъчно силна, за да систематизира желаните инварианти на топологичните пространства - особено тези с кухини (празнини) или "дръжки". Ще започнем с едно достатъчно регулярно многообразие M (интуитивно, можем да го разглеждаме като повърхност) и ще конструираме алгебрични инварианти (хомологични групи), които съответстват на тези "дръжки" (Hatcher 2002). Получената теория, в случаите, когато може да бъде приложена, често е достатъчна, за да осигури алгебрични решения за привидно нерешими задачи, възникващи във вътрешната геометрия на M. Получените в резултат теории за хомология и кохомология (обобщение на хомологията с помощта на теорията на категориите) сега са повсеместно разпространени в математическата практика (Hatcher 2002, Hartshorne 1977).

Матезис-ът също така се отнася благосклонно към аристотеловата тенденция в терминологията като постулира ante-rem структури, които са една абстракция на много конкретни случаи и позволяват едновременното им обсъждане. Един забележителен пример, който по-късно се появява във всички съвременни теории на математическата физика, възниква в теорията на многообразието под името риманово многообразие (Jost 2008). Риманово многообразие (M, f) представлява гладко многообразие M, чиято асоциирана вътрешна форма f е диференцируема функция на допирателните пространства във всяка точка x от M. В най-простите случаи във всяка точка y от M допирателното пространство T(y) е изоморфно на копието на n-мерните реални числа. T(y) може интуитивно да се разглежда като пространството на скоростите на диференцируемите криви, преминаващи през y, по подобие на допирателната равнина към диференцируеми реални криви. Римановото многообразие е едно ante-rem твърдение (постулат), получено първоначално от наблюдение на Гаус, че вътрешната кривина на повърхността може да бъде точно измерена чрез гладки криви, съставляващи повърхността (Jost 2008). Не е необходимо да се създава влагане в заобикалящо пространство с по-висока размерност. Предимство на римановите структури е, че те позволяват измерване на разстояния и изчисляване на обобщени вътрешни (скаларни) произведения. Римановите многообразия са били широко използвани в математическата физика - най-вече при пространствено-времевите модели в теорията на относителността на Айнщайн и в екзотични теории на гравитацията (M-теория например), като модели на брани и екзотични хиперповърхности (McDuff & Salamon 1998). От епистемологична гледна точка универсалността на римановата структура трябва да се разглежда в исторически контекст. Структурата е резултат от изследователска програма, която "самоселектира" предварително уговорени математически обекти, които моделират емпирични интерпретации за това, как се изчисляват разстоянията в конкретни контексти. Адаптирането на структурата за свързване на различни, на пръв поглед несвързани цели, не е изненадващо; ако се установява, че структурата е неподходяща за физически изследователски програми, тя бива отхвърлена и заменена с по-подходяща. Чрез търсене на обща ante-rem конструкция, математиците увеличават вероятността съответната математика да може да се адаптира към някое от редица привидно несвързани физически явления.

По този начин математическите структури, които възникват от процеса на *матезис*, са самоселектирани за емпирично и математическо удобство. Очакваното развитие на структурите на Calabi-Yau е ante-rem резултат от интуитивния диалог с естествените науки и води до създадена с определена цел обща класификационна (аристотелизираща) онтология. От гледна точка на *матезис*-а многообразията на Calabi-Yau представят една аристотелианска (контекстуализираща) тенденция; получените структури, многообразия на Kahler и Kahler-Einstein, представляват една платонизираща тенденция, предизвикана от релативисткото търсене на ante-rem структура за пространствено-времеви континуум. Симплектичните и риманови многообразия са получаваните структури за теорията на Kahler и представляват пролиферацията на различни класове гладки многообразия; по този начин тези теории представляват една аристотелианска тенденция (McDuff 1998). Виждаме диалектически *матезис* в повишаването на нивото на абстракция, едновременно разрешаване на платоновите и аристотелиански тенденции при постулирането на ante-rem структури. Теорията на симплектичните многообразия е подходящ пример за това как физическите изследователски програми произвеждат desiderata в математическите науки, които както изглежда "мистериозно" моделират разнообразни физически и математически явления. Да приемем, че M е гладко многообразие с ненулева 2-форма g, така че външната производна на g е 0 (интуитивно погледнато, това е закон за съхранение на енергията). Ако f е диференцируемо изображение, чиято домейн е H, тогава f може да си го представим като Хамилтонова (пълна енергия) функция H (хамилтониан) (de Gosson 2006). Свързаното хамилтоново поле превръща в цифрова форма времезависимата еволюция на всяка система, чиято пълна енергия е f. Симплектичното многообразие е ante-rem постулат; неговите общи аксиоми произтичат от разнообразните изисквания на квантовата и хамилтоновата динамика. Всъщност, ако M е многообразие, представящо потенциалните състояния на система S с даден хамилтониан H, може да се потърси множество линейни функции, които създават образ на допирателното пространство в себе си. Това множество, обозначено с M0, е образ на фазовото пространство S, което представлява съвкупност от всички възможни физически състояния на S. M0 е архетип на симплектично многообразие. Постулирането на структурата ante-rem е резултат от емпиричния анализ на различни квантово-механични формални математически нотации. Универсалността на получената структура е една нерешена задача (desideratum) от математическия анализ (de Gosson 2006). Математиците съставят аксиомна схема за M0, която умишлено обхваща широк спектър от обекти на реалния свят (в случай на математическата физика) и други математически обекти (в случай на чиста математика). Тъй като математическите обекти често се аксиомизират като се взимат предвид физически ограничения, изискванията на двете траектории често се припокриват. В контекста на диференциалната и алгебрична топология, пример за това припокриване е многообразието на Calabi-Yau. Получените структури са комплексните K3-повърхнини, гладки повърхнини, резултат от обобщения на комплексни торове.

Поради широкото им приложение в теорията на суперструните - симетрии на дуалността на струните, тяхната пророческа сила може да се тълкува от платониста като доказателство за априорност на математическата истина. Теорията за разнообразието на Kahler (грубо казано, теория за гладкото многообразие с асоциирана комплексна диференциална и риманова структура) е артефакт на постоянния интерес през 30-те години от миналия век към формализирането на диференциални топологични концепции като реакция на изискванията на квантовата механика и динамиката на Hamilton. Структурите на Kahler осигуряват обобщаване на структурите на Kahler-Einstein чрез въвеждането на изисквания към кривина на потока (кривина Ricci), които са адаптирани към релативистичните условия за динамични изисквания към тензор на кривина в присъствието на маса (Greene 1997). Освен това, теорията на многообразието на Kahler-Einstein е пригодена за използване при моделиране на евклидовото пространство-времето, чиято кривина на Ricci е 0 при липса на маса. Многообразията на Calabi-Yau отразяват необходимостта от компактифицирани многообразия на Kahler при нарастване на размерността в теорията на суперструните. Изискването, че всяко многообразие на Calabi-Yau трябва да има метрика на Kahler при холономична група, еквивалентна на специална линейна група SU (n), е опит да се наложи суперсиметрия върху полученото компактифицирано измерение (Greene 1997). Условието за еквивалентност - че M няма клоняща към нула комплексно-диференцируема n-форма, е еквивалентно отражение на същото изискване, произтичащо от класическата ориентационна теория. Не е чудно теорията на Калаби-Яу да направи нови прогнози във физическата наука.

Изследването на теорията на наредбите (подредбите), привидно чисто математическа теория, изведена от една определена теория на множествата (в този случай ZF), разкрива *матезис*-а като онтологично обяснение на участващите реалности. Една от чисто математическите теории, които водят началото си от ZF, е теорията на наредбите (или, грубо казано, начини за нареждане на безкрайни множества от най-малък до най-голям елемент, когато това е възможно). Неформално, частичната наредба е символ, който се държи като "по-малко или равно" или "по-голямо или равно" неравенство и осигурява "класиране" на елементите на дадено множество. Формалното определение на частична наредба R използва отношения и декартови произведения (например понятия за размерност) и изисква да е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна релация, дефинирана върху множество X, получено от една конкретна теория на основните множества. Рефлексивност е изискването xRx за всеки елемент x на множеството X (съответства на изискването за цели числа - всяко цяло число x е по-малко или равно на себе си). Антисиметрия е изискването, при условие на x и y в X, ако xRy и yRx, то x = y (съответства на изискването за цели числа, че ако x е по-малко или равно на y и обратното, тогава x и y трябва да бъдат равни). Транзитивност е понятие, също получено от работата на математиците с цели числа, че ако x, y и z са елементи на X, тогава от $x<y$ и $y<z$ задължително следва $x<z$. Една наредбата се нарича пълна (противно на частична), ако за всеки x и y от множеството X важи xRy или yRx. Това изискване е пряк аналог на опита на математиците с реални числа, при които съществува така наречената трихотомия: при дадени реални числа x и y, или $x<y$, $x>y$ или $x=y$ (за по-пълно математическо описание, вижте Wilder 1965). Образуването на математическа структура с частична или пълна наредба е преди всичко отражение на опита на математиците с множество конкретни системи с еднаква структура и е аристотелов процес на обобщаване и абстракция и съответно на *матезис*. Налице е голямо нарастване на ефективността на доказателствата в случаите, когато характеристиките на редица вече съществуващи системи могат да се формулират като система от аксиоми, които могат да бъдат съхранени за бъдещо използване в други доказателства. При подредбите широтата и обхвата на мотивациите е достатъчна гаранция за постулиране на симетризираща структура По-специално, като се има предвид вселената U, може да се нареди частично степенното множество P(U) чрез релация за включване; в компютърните науки, при зададена формална азбука, може да се предизвика частична наредба на множеството низове с релация на поднизове (на популярен език, abc е подниз на abcd, защото първия "се появява" като част от втория). Като имаме едно векторно пространство V (генерирано от предишно изследваните контексти в алгебрична топология или по друг начин), може да се индуцира частична наредба на множеството Sp(V) от линейни подпространства на

V - понятие, което има приложения в квантовата механика, топологията, диференциалната геометрия, теорията на сноповете, теорията на множествата и теорията на моделите, наред с други области. Релативистките теории (които ще бъдат дискутирани по-долу) предизвикват частични подреждания на множества от събития в пространство-времето: при дадени събития E и F може да се дефинира ERF, тогава и само тогава, когато F е в светлинния конус на E (при плоско пространство-времето това е еквивалентно на F да се намира в казуалното бъдеще на E или да лежи в каузалното минало на F) (виж Einstein 2005).

Езикът на "математическото откритие" ще ни убеди, че математиците "откриват", че твърденията за частични наредби на реални числа "предсказват" резултати от привидно несвързани физични теории като квантовата механика и теория на относителността. От онтологична гледна точка е поразително, че структурите, възникващи в чисто теоретична теория на множествата, имат приложения в толкова разнообразни области. Платонистичното мислене би настоявало, че участващите математически реалности според тезата на Quine-Putnam трябва да съществуват абстрактно . Все пак, да се говори абстрактно за съществуването на множества, отношения и функции (например, без да се прави позоваване на теория на основните множества) е неуместно, както се и твърди в настоящата монография. Всеобхватността на релацията на частична наредба в многобройни приложни области няма да ни изненада, ако приемем, че математиците конструират наредбите като реалности, предшестващи регистрацията на емпиричните наблюдения върху други математически структури, и всъщност като свойствата на физическата реалност, които тези междинни структури моделират. Ако теорията на наредбите имаше неголям брой разнообразни приложения, изследователските програми биха я отхвърлили като неинтересна и неактуална; биха разработили нови аналози, които да характеризират по-надеждно феномените в света и да облекчат появата на по-кратки и по-естетични доказателства. Това, което математиците откриват в теорията на наредбите, е език за контекстуализиране на съществуващи по-рано accepit structurae. Нещо повече, фактът, че математическата теория прави нови прогнози за физическата реалност, не означава, че участващите математически реалности трябва да се приемат за съществуващи в абстрактен, както го разбират платонистите, смисъл.

III. *Матезис* като таксономия на математическото откритие

Общата теория на относителността (GR/ОТО) дава още един пример за бъркотията по отношение на епистемологията на математическата теория и е отличен пример за ролята на *матезис*-а в математическата практика. Подобно на теорията на наредбите, GR/ОТО има разнообразни области на приложение, но за разлика от нея, приложенията на GR са по-инстинктивно физически и по-непосредствено податливи на емпирична проверка. Един конкретен обект на дебат за платонистите е твърдението, че GR и подобни теории предсказват физически явления, за които нямаше как да разберем, ако отсъстваха някои нови методи в математиката. Съществуването на гравитационни вълни е непознато дотогава предвиждане на GR, което заслужава внимателно проучване с цел хвърляне на светлина върху онтологичния статус на участващите реалности и изследване на начина на присъствие на *матезис*. Според класическата теория за гравитация на

Нютон силата на привличане между два обекта е пряко пропорционална на произведението на техните маси и обратно пропорционална на квадрата на разстоянието между тях (Arnowitt et al., 1962). Приема се, че силата на гравитацията действа мигновено върху всички обекти в евклидовото пространство и в този смисъл може да се тълкува, че гравитацията има безкрайна скорост на разпространение. Специалната теорията на относителността (SR/CTO), на която стъпва GR, се основава на допускането - получено от проведени в края на 19 век наблюдения на скоростта на разпространение на електромагнитната радиация - че във вакуум скоростта на светлината е инвариантна, независимо от движението или местоположението на източника. Инвариантност на инерциалната отправна рамка е другото наблюдение, което подтиква развитието на SR. Общо казано, инерциалната рамка е тази, в която ускорението е 0 - или съответно там, където Нютоновите закони на инерцията са валидни в локалната рамка. Инвариантност на рамката се състои в схващането, че във всички такива рамки математическите формули, описващи физическите понятия, трябва да имат еднаква форма. Този принцип е известен повече като Принцип на относителността и отразява здравия разум на инерциалните рамки, наблюдавани в ежедневния живот (движение на превозни средства \ асансьори \ въздухоплавателни средства \ способност на предмети за задържане на повърхността в течности и др.). Нютоновата механика (NM) е една проста и симетрична теория, която вече е доказала рамковата инвариантност (Arnowitt et al., 1962). Масата и ускорението на даден обект определят силата му във всяка референтна отправна система; при благоприятни условия инерцията се запазва във всяка система; и разпространението на вълните се редуцира до движение на точкови частици, всяка с дискретно векторно представяне. Обаче наблюдението, че скоростта на светлината във вакуум е инвариантна във всички системи, води до противоречие в NM. Както изглежда, електромагнитните вълни и масивните частици се подчиняват на различна динамика, при което гравитацията се разпространява с безкрайна скорост и светлината се разпространява с голяма, но крайна скорост.

Чрез *матезис*, а не с някакво абстрактното откритие за математическия език, се намира отлично решение на дилемата, защо математическите обекти толкова лесно пасват към такава физична теория. При релативистната метрична геометрия, конкретния *матезис* се обяснява с интуицията, че допирателните пространства и скоростите на промяна могат да бъдат сведени до "малки" линейни образи, които след това, "слепени заедно", определят глобалната геометрия. В този случай съответният *матезис* е приложение на линейната алгебра към теорията на многообразията, която създава релативистки пространства. Същата тази интуиция изпълва NM, с изключение на това, че контекста е ограничен до евклидовите пространства. Ако x е произволна точка от многообразие M и g - скаларно поле на M, конструирайте допирателно пространство T(x), обгърнато от наклонни производни на g по всяко от измеренията. Дуалното изображение е изображение (образ) на реалните числа f с домейн T(x), който има линейна скаларна структура (например линия). Множеството на всички дуални изображения от T(x) се нарича дуално пространство на T(x) и се обозначава с T*(x). Докато T(x) е множество точки, което "прилича" на нормално пространство с n-размерни реални числа, T*(x) е функционално пространство, което може да бъде разглеждано като индуциращо действие върху T(x) в локалната координатна система. Ако m и n са цели числа, то тензорът Y от тип (m, n) е реална функция, чийто домейн се състои от произведение на n еднакви пространства T*(x) и m еднакви пространства T(x). Дефиниционната област за Y има ранг m + n (например m + n общи пространства се изобразени от Y като реални числа). Самият Y може да се разглежда като полилинейно изображение и към него може да се приложи същия линеен анализ (разбиване на компоненти по всяко измерение), както и към изображенията, дефиниращи Y. В SR съществуват глобални евклидови (плоски) координати пространство-времето (x, y, t) които се подчиняват на глобално дефинирана метрика на Minkowski $(ds)\ 2=-c2(dt)2+(dx)2+(dy)2+(dz)2$, която дефинира светлинния конус, позволяващ конструирането на вектор v между две точки x и y. В GR наличието на гравитационни деформации до голяма степен пречи на тази програма. Във всяка точка x на M конструираме допирателните пространства T(x) и T*(x), както е описано по-горе и определяме метричен тензор g, който е полилинейна функция, действаща върху двойки вектори (u, v). Друго условие е g да не клони към нула (напр. отлично от нула) за всички ненулеви u и v. Възможно е да се докаже, че полученият тензор g може също да бъде конструиран така, че да изглежда като означенията от метриката на Minkowski от SR (отрицателно за време и положителни за пространство) (Lee 1997). Тензорът g се нарича метричен тензор и всяко многообразие M, съдържащо такъв тензор като мерка, е известен като пространство-времето. GR, обаче, изисква повече от тензора g; все още липсва зависимост от гравитацията и няма определение аналогично на конструкцията на светлинния конус в SR. *Матезис*, базиран на анализ на безкрайно малките величини, първоначално проведен от Нютон, предлага частично решение. Всяка точка x създава пространство T(x), в което е възможно (поради гладкостта на M) да се избере безкрайно малък елемент dx и да се определи разстоянието по начин, идентичен с метриката на Minkowski. В действителност, обаче, едно общо пространство-времето не позволява пряко свързване на събития от пространство-времето, които не са безкрайно близки. За да го дефинираме прибягваме до *матезис*-а. Всеки две отдалечени събития x и y могат да се свържат с гладка крива C и - както в Нютоновия анализ на безкрайно малките величини - може да се осъществи линейно интегриране по всички допирателни пространства T(z) за точки z между x и y спрямо геометрията на C. Полученото пространство-времето разстояние не е независимо от кривата (както е в SR), но е независимо от координатната система, избрана за M. Доказателството на този факт е постоянен елемент на всеки основен курс по тензорна механика и е изцяло интуитивно, но няма да бъдат разглеждано тук.

Матезис в математическите основи на GR е схващането на математиците, че GR и SR трябва да се подчиняват на една и съща динамика. Това разбиране се изразява чрез структури и отношения. *Матезис*-ът на GR твърди, че евклидовото пространство трябва да бъде заменено от локален аналог - многообразието M. Пространство на Lorentz в GR е конструирано да бъде аналогично на SR. Метричният тензор на GR е конструиран като аналогия на метриката на Minkowski в SR. Всяка от конструкциите е предизвикана от желанието да се обединят натрупаните аналогови изследвания и за да се постигне тази цел се създават подходящи математически реалности. Да разгледаме тезата на QP от гледна точка на GR - че лоренцовите многообразия по-скоро са откритие, а не конструкция, т.к. те са неразделна част от най-добрите ни физически теории. Свързаните с *матезис* разсъждения, не са просто търсене на обобщение, а напълно интердисциплинарен инструмент на математическите програми, търсещи контекстуализация на вече съществуващи математически структури. Приписването на независещо от разума абстрактно съществуване на математически реалности, появяващи се в GR, е категорийна грешка, която идентифицира артефактите на една математическа програма като еквиваленти на самата програма. Човешката инициатива, човешкият език и теорията на множествата са основните двигатели за развитието на математическите реалности в GR. *Матезис*-ът също така улеснява разработването на аналози на конструкцията на светлинен конус в пространството на Minkowski и улеснява извличането на диференциални оператори върху многообразията на Lorentz и пространство-времената. Изискването за неизроденост на метричния тензор улеснява изграждането на обратна метрика. Обединението на метричните и обратните метрични тензори е тъждествен образ, чиито дефиниционна област и област от стойностите (кообласт) и двете са равни на дуалното пространство T(x). След това се дефинират пространственоподобни, времеподобни, и светлиноподобни вектори, като се използват същите релации като в SR. По сходен начин интуитивно се дефинират диференциални оператори; пречка пред директното пренасяне на класическото диференциално смятане от SR е необходимостта да се стигне до ковариантни (независещи от координати) формулировки на диференциални уравнения за пространство-времето. При дадени различни точки x и y, допирателните пространства T(x) и T(y) също са различни. За да се определи локалното поведение на диференциала върху многообразие M на Lorentz, ни е необходима достатъчно гладка функция за преход между T(x) и T(y). Така наречената свързаност на Levi-Civita - ключово нововъведение в разработването на геометрията на пространство-времето на GR - осигурява точно такава функция (Kobayashi & Nomizu 158). При всяко достатъчно гладко поле на тензор T, дефиниран върху M, дефинираме операторът на свързаност D да удовлетворява същите свойства като оператор за разходимост (дивергенция) на реално векторно поле. По-точно, D е функция, чиято дефиниционна област са тензорните полета от ранг (m, n), дефинирана в M, и чиято област от стойности (кообласт) е друго тензорно поле от ранг (m, n + 1). Друго изискване е операторът D да е без усукване, което е еквивалентно на условието, че рангът на диференциране не трябва да влияе върху резултата от процеса на диференциране. Коефициентите на свързаност са скаларни полета, които удовлетворяват уравнение на базовите преходи в допирателните пространства T(x) и T(y) съответно. При зададен вектор v в едно пространство T(x), паралелното преместване е действието за запазване постоянна големина на v в друго локално пространство T(y). Това е аналогично на понятието "нормализиране" на реален вектор v във всяка точка на тримерно евклидово пространство по дадена крива C чрез деление на евклидовата големина на v. Свързаността за кривата C, която преминава през диапазон от тангенциални пространства върху многообразие M на Lorentz може да бъде нормализирана по C, при условие, че ъглите между векторите и големината на векторите се запазват при паралелния пренос по C (еквивалентно на изискването скаларното произведение на метричния тензор на векторите по C да бъде запазено в допирателните пространства). Установяване на наличието на ковариантна производна, която отговаря на тези изисквания (наречена свързаност на Levi-Civita), е нетривиална задача на класическата диференциална геометрия. Обичайните условия за дискусията включват едно по-общо риманово многообразие и произволна метрика g, а не пространство-времето съвместим метричен тензор с сигнатура на Minkowski (отрицателен времеви член и положителни пространствени членове), както се изисква от GR.

IV. *Матезис* като историческа философска диалектика

Ако подходим класически, можем да да открием *матезис* в самата философия на математиката, проявяващ се като диалектика между платонистични и аристотелиански тенденции. Тази диалектика никога не е била внимателно изследвана от философите на математиката. Като резултат имаме историческа амнезия по отношение на оригиналните мотиви на привидно неподатливи философски проблеми, като неотстранимостта и природата на абстрактното - и може би схващането, частично разработено от Айнщайн, Витгенщайн и Poincare, че никакво окончателно решение изобщо не може да има. Наистина, произходът на аргументите за неотстранимостта е - типично за проблемите във философията на математиката - диалектиката на класическата античност. Онтологията на една дисциплина не може да се разглежда откъснато от онтологията на нейните реалности, и *матезис*-ът се проявява в редуващите се платонистични и аристотелови тенденции от класическата философия до философията на ранното ново време в математиката, механиката и науката. Произходът и развитието на математиката и нейните дялове са проучени из основи от класическите автори, но няма консенсус относно съществуването на абстрактни математически обекти. Сред историците с най-голямо влияние са трудовете на Херодот (70) и Gibbon (299), упоменаващи подобни изследвания; Nicomachus of Gerasa (Никомах Гераски) (620), Коперник (510), Whitehead (126-127; 137-138; 151; 163-164), Poincare (1-5) и Hardy (380-381). Сред философите и историците на идеите на първо място са Платон (254) и Аристотел (119), чиито описания за естеството на математическата истина са горе-долу успоредни на вижданията на платонистите и формалистите. Можем да смятаме, че в същия влак са Plotinus (558); Augustine (736-737); Hobbes (268); Descartes (228-229); както и британските емпирицисти, най-вече Locke (362-363) и Hume (458). Идеализмът на Хегел е пълно отричане на емпиричната парадигма (126; 230), докато Кант се опитва да примири подобни възгледи в своята трансцендентална аналитика на пространството и числото (17-18; 68-69; 553). В основата на определянето на границите на проблема е една известна интелектуална траектория - опитът да се определи естеството на математическото знание по отношение знанието за логиката и метафизиката. Това изследване - предложено от Платон (391-398) и Аристотел (270; 391; 547-548) и съзряващо през средновековековието чрез схоластиката на сборниците *Summa* - поддържа тезата, че числото е действителна величина (има реално значение) и по този начин съществува в света (238- 239; 424-425). Това отхвърляне на ейдетичната природа на числото кара Hobbes да се съмнява в същественото различие между математика и физика (58; 59; 72; 267) и Декарт да го потвърди (227-229; 234-235; 296; 354-355) - положение, отново отхвърлено от Кант (5-9; 17-19; 243-248; 311-313). Логицизъм на Russell (289-290) и платонизъм на Hardy (377-378). Сред учените е продължила да битува гледната точка, че математиката е "език на природата" преди физиката и метафизиката; човек може да намери подобно гледище сред космолозите Птолемей (5-6), Галилей (190) и Нютон (1-2); тази тема намира своето въплъщение в трансцендենталния рационализъм на Паскал (445), както и в диалектическия рационализъм на Хегел (230).

Матезис-ът е допълнително представен в диалектиката по отношение на естеството на достоверността на математическото познание и по-специално - дали аритметиката и геометрията имат априорни основи. Може да кажем, че това обсъждане се колебае ad-infinitum между платоновата и аристотелианска перспективи. Платон се занимава с въпроса за математическия априоритет първоначално във *Philebus* (633-634); Аристотел го разглежда бегло в *Posterior Analytics* (119) и по-подробно в *Metaphysics* книга1, глава 2 (500), книга 2, глава 3 (513) и книга 13, глава 3 (609-610). *Nicomachean Ethics* също така предлага един бегъл анализ (339-340). Сред математиците и учените платоновата траектория е продължена в книга 1 от *Arithmetic* на Nicomachus (811-814); *Almagest* на Ptolemy (5-6); *Geometrical Demonstrations* на Pascal (430-446). В *Meditations* Pascal накратко разглежда априорността на числото в разсъжденията 1-2 (171-172) и 33 (176), както и Lavoisier в *Chemistry* (1-2) и Fourier в *Theory of Heat* (170-174). Тези разсъждения не са недостатъчни като категорични философски аргументи, но въпреки това отразяват научния *zeitgeist*. Сред метафизиците платоновата траектория е изразена изцяло в *Human Knowledge* (436) на Berkeley; априоритността на числото се защитава в произведенията на Кант, но най-ясно - в *Critique of Pure Reason* (5-8; 15-16; 31; 35-40; 86; 211-218) и непряко в *Critique of Practical Reason* (295, 312, 330-

331); *Science of Right* (399); и в *Critique of Judgment* (551-552). Декарт защитава априорността на математическото познание в първата си медитация (76; 93-95); *Objections and Replies* (128-129); и втората книга на *Geometry* (304). От картезианския корпус, *Discourse of Method*, части I и II (43-47), както и части IV и V (52-55) предлагат най-познатите защити на математическата априорност, макар и не изцяло обсъдена в *Rules* (2-7). Изчерпателно опровержение на картезианските аргументи за априорност можем да открием при Locke в *Human Understanding,* книга IV, глави II и III (311; 317-320; 322-323); глава IV, раздели VI-IX (325-326); и много недвусмислено в глава XII (358-360). В *Human Understanding* Hume се придържа към подобно скептично отношение в раздел IV, раздел XX (458), както и в раздел VII (470-471) и раздел XII (508-509). Mill накратко оспорва платонизма в *Utilitarianism* (445) и непряко в *Liberty* (283-284), а James го обсъжда в своята *Psychology* (175-176; 874-878; 879-882).

Диалектиката между платонистичнита и аристотелианска гледни точки, както са представени от *матезис*-а, също ни информират за тясно свързана с тях дискусия по въпроса, дали математическите реалности имат ейдетично, физическо или мисловно съществуване. *Phaedo на* Платон (228-231; 242-243); *Republic,* книги VI (387) и VII (391-398); и *Theateatus* (535-541) възприемат изцяло ейдетична гледна точка. Тази перспектива се засилва при *Philebus* (636) и е изразена по-сдържано в *Sophist* (562) и *Seventh Letter* (809-810). Широтата и дълбочината на аристотеловото опровержение е видна и е най-ясна в *Posterior Analytics,* книга 1, глава 10 (105), 13 (108-109) и 18 (111) и в *Metaphysics,* книга 1, глави 5-6 503-504; 505-506); и глави 8-9 (508; 509-511). По нататъшно задълбочено обсъждане на този въпрос може да намерите в книга 3 на *Metaphysics*, особено глави 1-2 (515-516); глави 5-6 (520-521); книга 7, глава 2 (550-551); и книга 13, глава 3 (606-610). В дискусията на Аристотел в *Nicomachean Ethics,* книга 1, глава 6 (341) и книга 6, глава 8 (390-391) също така се проявяват типичните за него възражения срещу платонизма, както са изложени в *Theateatus* и *Republic*. В *Elements* Евклид повтаря платонистката гледна точка за абстрактните обекти, особено в книга 1, постулати 1-3 (2) - едно по-задълбочено мнение, изложено от Nicomachus в неговата *Arithmetic* (812; 814). Средновековните коментатори по природа са предсказуемо схоластични. В *Christian Doctrine* Augustine се позовава на вродеността на идеите за безкрайност и приписва на математиката симетрията на божествения ум (654), мнение, отразено сбито между редовете в книга 10 на *Confessions* (76-77). Подобно схващане е развито в различни пасажи от Aquinas в неговата *Summa*, Q. 1 (25); P. 10 (45-46); Q. 11 (46-47; 49); както и в Q. 30; Q.44; и Q. 85 (167-168; 238-239; 451-453) между други кратки обсъждания. Предварвайки Кант, част 3 от *Summa* също така подкрепя обективността на математическата реалност и вродеността на математическите идеи: по-специално Q. 7 (754-755); Q. 83 (976-978; 978-980), сред други дискусии, включително Q. 83, A. 3, Rep. 2. Въпреки мнението на Aquinas, че възприятието е източник на познание, достоверността математиката остава неприкосновена. Разривът на Декарт със схоластиката не развенчава максималната достоверност на математическото познание - гледна точка, защищавана в *Rules* (по-точно в XIV, 30-32); *Discourse*, част IV; (52-53); *Meditations* (76; 93; 96); и *Objections and Replies* (169-170; 217-218; 228-229). Трансценденталното съществуване на математически обекти фигурира в рационализма на Спиноза, който присъства в част 1 от *Ethics* (370), както и при

Pascal в *Treatise on Vacuum* (373), въпреки научния емпиризъм на последния. Трансценденталният емпиризъм на Бъркли защитава новаторското становище, че математическите реалности - по подобие на физическите - имат идеален, мисловен характер, който е обективен. Този възглед се развива в *Human Knowledge*, раздели 12 и 16 (408-409; 415); раздели 118-128 (436-438); и много убедително в раздели 121, 122, 125 и 126 (436-438). Типичният за Hume емпиризъм е изразен в *Human Understanding*, раздел 4, глава 20 (458); раздел 12, глава 122 (505); и глава 125 (507). Кант елегантно съчетава емпиризма на Hume с картезианския идеализъм в цялата *Critique of Pure Reason* (16; 24-33; 35-36; 46; 62; 87; 91-95; 211-212) и мимоходом в *Critique of Practical Reason* (295 312) и в *Critique of Judgment* (551-553). В *Analytical Theory of Heat* Fourier накратко защитава въображаемото съществуване на математическите реалности и в по-широк план изразява тяхната полезност при изследването на скритите взаимоотношения в природата (183). Прагматичната философия, която води началото си от *Principles of Psychology* на James, приема математиката като множество ментални конструкции, които са полезни при интерпретирането на обективната действителност (вж. например 874-878; 880; 881; 875-876 са особено подходящи).

Диалектиката на *матезис*-а също така започва да се насочва към обекти на самото математическото познание, които често са във фокус на философско изследване в наши дни. Платон провежда такава дискусия в изследването си на *sophrosyne* (въздържаност) в *Charmides* (7-8) и в диалога си за добродетелта (*arete*) в *Meno* (176-177; 180-183), разглеждайки *arete* само по себе си като математически израз. Книга VII на *Philebus* (633) и книги VI (387) и VII (393) на *Republic* завършват платоновата дискусия. Приема се, че обекти на математиката са геометрични и аритметични величини - числа, фигури и отношения. По-късните авторите - главно математиците - подкрепат варианти на това виждане; например, Нютон в неговите *Principles* (1) и Галилей (252-254). За Аристотел обаче обектите на математиката са абстракции и по този начин принадлежат и на разума, и на възприятията (перцепцията). Това е схващането, изложено във *Physics,* книга IV (299); книга III, глави I (514) и V на *Metaphysics* (520-521). Допълнителен аргумент в тази насока може да се намери в *Metaphysics,* книга VII, глава II (551) и книга XI, глава XIII (589); *Categories*, глава 6 (9-11); и *Categories,* глава 8 (15), наред с други места. Интересното е, че в *Rhetoric* (595) се обсъждат накратко обектите на математическото познание, което показва широкия интерес на Аристотел към това знание измежду седемте свободни изкуства. Augustine възприема тази траектория в своята *Christian Doctrine*, книга 2, глава 38 (654) и Aquinas в *Summa*, част 1 (32-34; 167-168; 451-453). В книги I и VII от *Elements* (1-2, 127) Евклид прави подробно изброяване на обектите на геометрично доказателство, като завършва с дефинициите на теорията на числата в книга XI (301). Един вторичен продукт в това отношение може да се намери в *Almagest* на Птолемей, книга 1. За разлика от тези геометри, Nicomachus развива обектите на аритметиката по-всеобхватно, като взима за изходна точка книга XI на Евклид и предлага подробна таксономия на числото в своята *Arithmetic* (811-812). Универсалният *матезис* на Декарт търси синтез на перспективите на Nicomachus и Aquinas в аналитичната геометрия, което води до класифициране на числото и фигурата като подобни abstracta в *Rules* (3; 7; 8-10; 30-33); *Discourse,* части II и IV (47; 52-53); *Meditations* (76); и книга II на

Geometry (304-306; 316). По този въпрос емпириците не се бунтуват решително срещу декартовата революция, както личи от книга II, глава XII от *Human Understanding* на Locke (147-148); раздел 118 от *Human Knowledge* на Berkeley (436; 439); и *Human Understanding* на Hume (508-509). В *Critique of Pure Reason* Кант определя обектите на математиката като способности за абстракция, които по рождение съществуват в човешкия ум, на 46; 62; 68-69; и 211-213. Този псевдоаристотелов психологизъм е изведен на първи план от James в неговата *Psychology* (874-878). Забелязва се значително нарастване на философски интерес към прилагането на математиката във физиката. Платонови перспективи могат да се намерят в книгите VII-IX на *Republic* (391-398; 403; 424-425); в *Timaeus* (448-450; 452-454); във *Philebus* (633); и в книги V и VII на *Laws* (691-692; 695-697; 728-730). Макар че математиката се разглежда като полезна за физиката, според Платон изучаването на математика е необходимо заради нейната приложимост в метафизиката (вж. например *Republic* по-горе).

Матезис дава съдържание на спора между класическите философи относно разграничаването на алгебричните от геометричните процеси. Тази тенденция отсъства при Платон и неговите предшественици, но първото й появяване е в книга 8 на *Topics* (222) от Аристотел и книги 8-9 от *Elements* (127-190) на Евклид в една дискусия за несъизмерими величини и конструкция. В пропозиция 3 от *Measurement of a Circle* (448-451) Архимед се позовава на евклидовото разграничение между дискретно и геометрично количество - позиция, изразена в *Conoids and Spheroids* (455-456) в lemmata към втората пропозиция (456-457); в пропозиция 10 към *Spirals* (488-489); и в *Sand Reckoner* (520-526). В *Arithmetic* на Nicomachus, макар и поезотерична по тон, в книга I (814-821) се говори за методите на аритметика спрямо геометричния процес според неговата таксономия на безкрайностите. В птоломеевото публично опровержение на Кеплер и защита на коперниковата астрономия най-ясно откриваме разликата между алгебричните и геометрични процеси в книга V от *Epitome (990),* въпреки че това разграничаване проличава във цялата работа. Не толкова директно, във втория ден на *Two New Sciences*, Галилей се позовава на различието между алгебрични и геометрични методи на изчисление. *Матезис*-ът на Декарт - описан в книга I на *Geometry* (295-296); част II от *Discourse of Method* (46-47); и в *Rules,* XVI (33-35) и XVIII (36-39) - оказва влияние върху първия истински брак между алгебрични и геометрични методи на изчисление. Впоследствие Pascal се позовава на интегрирането на алгебрични и геометрични методи в своя теоретико-числен труд *Correspondence With Fermat* (474-487) и *Arithmetical Triangle* (451-452; 458-459; 464-466). Locke и Berkeley третират тази математическо техническа концепция съвсем бегло; при Locke, алгебрично-геометричното отличие се появява само накратко в раздел XI, книга IV на *Human Understanding* (378) и в раздели 19 и 121-122 от *Human Knowledge* на Berkeley (410; 436-437). *Critique of Pure Reason* представя едно по-съществено обсъждане на отличията доколкото става дума за априори синтетични знания (17-18; 68-69; 212-213; 217). Един от ефектите от този картезиански *матезис* е съвременното разширяване на опитите за постигане на общност на математическата нотация, както и на коренно различните структури на математическото знание. Тази тенденция вече фигурира в 41-ата глава на книга I на *Prior Analytics* на Аристотел (68) и накратко в *Posterior Analytics* (105). Nicomachus посочва символната общност като цел на математическо изследване в книгата 11 на *Arithmetic* (832), след което трудовете са сравнително оскъдни, докато картезианският *матизис* не превърне символната общност в първостепенна задача на алгебро-геометрично теоретично интегриране в *Geometry* (295; 298; 314 353), част II от *Discourse* (46; 47) и в *Rules* (28; 40). Трактовката на Locke е извънредно лаконична в третата глава на книга IV от *Human Understanding* (318-319); в *Human Knowledge* (409; 436-437) анализът на Berkeley също е бегъл. Кантианската метафизика разглежда генерализирането на нотацията в светлината на прогреса на разума в *Pure Reason* (68-69; 211-213), след което не се наблюдава друга гледна точка във тъй наречения кантиански корпус. Fourier убедително демонстрира унифицирането на алгебрична и геометрична нотации в инфинитарното представяне на неговата *Theory of Heat*, напълно реализирайки методологията на картезианската (и нютоновата) траектория към повишаване на символната общност (172-173; 181; 233; 240).

Настоящата дисертация е само въведение към едно перспективно направление на епистемологично и онтологично изследване, което да постави математическата практика в центъра на метаматематематическите хипотези. Отлични източници за бъдещи изследвания включват Awodey (1996) относно теорията на категориите; Herrlich (1996) относно Axiom of Choice; и Dillon (1999) и Dillon (2015) за платонистичното мислене в науката. Допълнителни текстове, отнасящи се по-специално до платонистичното мислене, включват Bangu (2012); BoKulich & BoKulich (2011); Busch (2003; 2011a; 2011b); Carter (2008); D'Allesandro (2017); Ebert и Shapiro (2012 г.); Cole (2009); Demopoulos (1995) Cook (2012); и Chen (2017). В настоящата работа са пропуснати някои основни и нетривиални въпроси и се очаква това да предизвика критика. Първото основно направление за последващи изследвания е по-задълбочено изясняване на това, по какъв начин платонистичната \ аристотеловата диалектика, присъстваща в метафилософията на математиката, е свързана с диалектиката на разсъжденията в самата математика. Този въпрос - който ще наречем математическа изометрия - има важни последици за разбирането на реалностите, участващи в математическо изследване. Дали математиците не твърдят за съществуването на abstracta, заради предпочитание към това понятие, появило се от предишно философско изследване? Или, дали постулирането на ante-rem структури следва по-предсказуем модел, отразяващ ежедневните опит и взаимодействия на тези, които работят с математическите реалности? Подобни въпроси остават без отговор в сегашните трудове и заслужават по-нататъшно проучване - особено в светлината на общата критика на Айнщайн, Витгенщайн и Поанкаре за връзката между математическия език и реалността. Да се разглежда математическия език като илюстрация за света е по същество свеждане на цялата математическа мисъл до хипотетични или реални упражнения по моделиране. Кои прозрения правят определени математически мисли по-дълбоки или по-плодотворни от други? Дали този неизвестен фактор се обуславя от някаква интуиция в стила на Brouwer или е продукт на рутинен математически опит? Концептуализацията на математиката като език на моделите позволява деконструкция на математичекия дискурс с помощта на семиотиката и на формалната логика. Поставените по-горе въпроси биха били подходящи за разглеждане в тази светлина. За съжаление е необходимо да се пропусне известно допълнително математическо съдържание, за което би могло да се смята, че в крайна сметка има емпирична основа, въпреки привидната си висока степен на абстракция. По-специално, в изследванията си аз се позовавам на Heisenberg Group; една по-обширна трактовка на Lie Algebras; по-строга историческа трактовка на теорията на мярката; и по-голяма дълбочина в анализа на многообразията. Погледнати от гледна точка на *матезис*-а, всяка от тези теми допринася до голяма степен за разискванията по тезата за неотстранимостта на QP. Надяваме се, че бъдещите изследвания, вместо да са резултат от абстрактни, априорни, независещи от разума структури, ще хвърлят светлина, как всяка от тези стратегически важни математически области всъщност отразява пролиферацията на структури, избрани да превърнат в цифрова форма симетриите на физическата реалност и оформени така, че да осигурят максимално обобщение. Например, едно изследване за това, как децата придобиват математически знания при различни системи на обучение, може да хвърли светлина върху начина, по който знаците и символите първоначално се усвояват в съзнанието на тези, които се занимават с математика. Вероятно подобни и много други въпроси са предмет на бъдеща монография.

V. Основни приноси

1. Доказва се, че математическите реалности, както и математическите разсъждения, в крайна сметка са получени въз основа на емпиричните наблюдения на математиците.
2. Освен това се доказва, че тези наблюдения са формирани въз основа на взаимодействието на математиците с вече съществуващите математически системи, както и чрез преките физически наблюдения на процесите в света. Процеса на математическо творчество обозначаваме с термина *матезис*.
3. Доказва се, че класическият философски корпус включва диалектиката между платоновите (ейдетични) и аристотеловите (класификационни) тенденции и че тази диалектика е отражение на подобен процес в самата математика.
4. Доказва се, че епистемологичните обяснения, които не квантифицират абстрактни реалности, трябва да имат предимство пред онези, които квантифицират подобни реалности (като тезата на Quine-Putnam), при условие, че обяснителните възможности на двете съперничащи теории са сравними.
5. Като се следват препратките към научната литература по философия на математиката, „се открива“ нова математическа формулировка на динамиката на „черната дупка“ и се показва, как това откритие е резултат от интуиция, основаваща се на емпирични наблюдения за света, а не доказателство за съществуване на абстрактни реалности, както е според QP.