РЕЦЕНЗИЯ

на дисертацията на **ас. Росен Асенов Николов**

„Оценки на разстоянието на Банах-Мазур чрез модули на изпъкналост и гладкост“

За придобиване на ОНС „доктор“ в научното направление 4.5 Математика, докторска програма „Математически анализ“

Рецензент: проф. дмн Румен Петров Малеев

Данни за дисертанта. Ас. Росен Николов е възпитаник на НМГ „Акад. Любомир Чакалов“. През 1983 г. завършва математика във ФММ (сега ФМИ) на СУ със специализация в сектор „Реален и функционален анализ“ и дипломна работа с ръководител проф. П. Джаков. В периода 1985-1988 г. е асистент във ВНВТУ „Тодор Каблешков“, а от 1988г. до 2014 г. е последователно асистент, ст. асистент и главен асистент в катедра „Мат. анализ“ на ФМИ. Понастоящем е асистент в същата катедра..

Документи. В съответствие с Правилника на СУ ас. Росен Николов е представил необходимите документи, както и CD с електронни копия от тях. Представената дисертация представлява печатен текст на български от 37 страници - Предговор (5 стр.), две глави (30 стр.) и библиография, съдържаща 17 заглавия.

Авторефератът и заключението вярно отразяват съдържанието на дисертацията и приносите на дисертанта.

Обзор на съдържанието на дисертацията и научни приноси. Метрични характеристики за изпъкналост и гладкост на единичната сфера на банахово пространство X с многобройни приложения в геометрията на банаховите пространства са модулът на изпъкналост

$$\delta_X(\varepsilon) = inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|, \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = \varepsilon\right\}, 0 \le \varepsilon \le 2$$

и модулът на гладкост

$$\rho_X(\tau) = sup\left\{\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\| - 2}{2} : \|x\| = \|y\| = 1\right\}, \tau \ge 0$$

на пространството X. Ако модулът на изпъкналост (модулът на гладкост) допуска оценка със степенен порядък $\delta_X(\varepsilon) \geq c\varepsilon^p$ ($\rho_X(\tau) \leq C\tau^q$) пространството X наричаме p-равномерно изпъкнало (q-равномерно гладко). От работите на Енфло и Пизие следва, че едно банахово пространство е суперефлексивно тогава и само тогава, когато допуска еквивалентно
p-равномерно изпъкнало и q-равномерно гладко пренормиране за подходящи $1 \leq q \leq 2 \leq p < \infty$. Фигел и Пизие показват, че пространство, допускащо
2-равномерно изпъкнало и 2-равномерно гладко пренормиране, е изоморфно на хилбертово. В определен смисъл хилбертовите пространства се оказват „най-изпъкнали“ и „най-гладки“, както се вижда от сравнението на модулите на изпъкналост и гладкост на произволно банахово пространство X с тези на произволно хилбертово пространство H:

$$\delta_X(\varepsilon) \leq \delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon^2}{8} + O(\varepsilon^4),$$

$$\rho_X(\tau) \geq \rho_H(\tau) = \sqrt{1+\tau^2} - 1 = \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^4).$$

В дисертацията на Р. Николов се разглежда и друга геометрична характеристика на банаховите пространства

$$d_2(X) = sup\{d(Y, l_2^2), Y \subset X,\ dim\, Y = 2\},$$

използваща разстоянието на Банах-Мазур $d(Y,Z) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|, T: Y \leftrightarrow Z\}$ между изоморфни банахови пространства Y и Z. Характеристиката $d_2(X)$ всъщност измерва колко се отличават от елипса двумерните сечения на единичната сфера S_X на X. Очевидно $d_2(X) \geq 1$. Класическата теорема на Джордан-фон Нойман указва, че $d_2(X) = 1$ тогава и само тогава, когато X е хилбертово. В такъв смисъл може да се счита, че колкото по-малко е $d_2(X)$, толкова „по-хубаво“ е пространството X. Оценки за $d_2(X)$ за класове от пространствасе са изследвани от различни автори и са използвани например за намиране на тип и котип на пространството X.

Изследванията в дисертацията са концентрирани върху пресмятане на $d_2(X)$ за класове от двумерни 2-равномерно гладки или 2-равномерно изпъкнали пространства с оглед уточняване на оценки за $d_2(X)$ в съответните класове от банахови пространства. В първата глава се изучава обстойно фамилия от двумерни пространства $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in(0,1]}$ с единична окръжност S_λ, представляваща квадрат заоблен гладко при върховете с четвъртинки дъги от окръжност с радиус λ и със сфера на Джон[1] евклидовата сфера $S = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Доказва се, че $d_2(Y_\lambda) = \sqrt{2} + (1-\sqrt{2})\lambda$. Следвайки идея и метод, използвани в работи на Иванов, Троянски и Иванов, Паярес, Троянски, авторът намира в $(0,1]$ функция $H(\lambda)$, $lim_{\lambda \to 0} H(\lambda) = \infty$, $H(1) = 1$, с явни формули и строго намаляваща в интервали $[0, \lambda_1], [\lambda_2, 1]$ (за константите $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ са приложени приближени стойности с точност до 15-ия знак). С помощта на $H(\lambda)$ е определена асимптотиката на модула на глакост на пространствата Y_λ: $\rho_{Y_\lambda}(\tau) = \frac{H(\lambda)}{2}\tau^2 + o(\tau^2)$. С други думи пространството Y_λ при $a = H(\lambda) - 1$ принадлежи на класа χ_a от всички 2-равномерно гладки банахови пространства X с $\rho_X(\tau) = \frac{1+a}{2}\tau^2 + o(\tau^2)$. За пространствата от този клас една асимптотично точна оценка отгоре при $a \to 0$ за $d_2(X)$, получена от Иванов, Паярес, Троянски, е:

$$d_2(X) \leq 1 + \frac{a}{\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})a}.$$

Като използва точната формула за пресмятане на $d_2(Y_\lambda)$ от по-горе Р. Николов получава за пространствата

$$X_a = Y_{\lambda_H(a)}, \lambda_H(a) = min\{\lambda \in (0,1): H(\lambda) = 1 + a\},$$

които са от класа χ_a, по-добра оценка при $a \in [0, H(\lambda_2) - 1] = [0, \frac{\sqrt{7}-2}{3}]$:

$$d_2(X_a) \leq 1 + \frac{(\sqrt{2}-1)a}{\sqrt{2}+a}.$$

Ще отбележим, че при намирането и изследването на функцията $H(\lambda)$ дисертантът е преодолял значителни трудности, проявявайки геометрична интуиция и сръчност в прилагането на методите на анализа.

Основният обект на изследване във втората глава от дисертацията са двумерните пространства X_α, $\alpha \in (0,1]$ с норма, определена по формулата

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{max\{|x_1|, |x_2|\}^2 + \alpha\left(min\{||x_1||, |x_2|\}\right)^2}.$$

Очевидно за нормата в X_α е в сила представянето

$$\|x\| = \sqrt{\alpha\|x\|_2^2 + (1-\alpha)\|x\|_\infty^2},$$

[1] Елипсата с максимално лице, съдържаща се в единичния кръг B_{Y_λ} на Y_λ.

където $\| \ \|_2$ е евклидовата норма , а $\| \ \|_\infty$ е нормата в $l_\infty^{(2)}$. Лесно се вижда, че единичният кръг на пространството X_α е сечение на елипсите $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \alpha x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ и $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + \alpha x_2^2 \le 1\}$. Николов пресмята $d_2(X_\alpha) = \sqrt{2/(1+\alpha)}$. Използвайки геометрични аргументи, подкрепени със съответните аналитични пресмятания, дисертантът успява да намери явна формула за модула на изпъкналост на пространствата X_α :

$$\delta_{X_\alpha}(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha\varepsilon^2}{4}}.$$

Тази формула може да се използва при изследването на геометричната характеристика $D_p = sup\{d_2(X); X \in \Upsilon_p\}$ на класа $\Upsilon_{p,}\ p \in (1,2]$ на 2-равномерно изпъкналите банахови пространства, удовлетворяващи условието:

$$liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \ge \frac{p-1}{8}.$$

От нея веднага следва при $\alpha = p - 1$, че $X_\alpha \in \Upsilon_p$. Освен това, за $\alpha = p - 1$ е в сила $d_2(X_\alpha) = \sqrt{2/p}$ и за характеристиката D_p веднага се получва оценката

$$D_p \ge \sqrt{\frac{2}{p}}.$$

Досега известната оценка $D_p \ge \sqrt{2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}$, използвана от Иванов, Паярес, Троянски, следва от това, че пространствата l_p , $p \in (1,2)$ са от класа Υ_p и $d_2(l_p) = 2^{(2-p)/2p}$. Лесно се проверява, че оценката $D_p \ge \sqrt{\frac{2}{p}}$, получена от дисертанта, подобрява за $p \in (1,2)$ тази оценка.

Критични бележки. Нямам забележки по същество. Изложението е гладко и ясно, а приложените фигури облекчават възприемането на изложението.

Публикации. Представените работи, използвани в дисертацията са 2 (от общо 4) и са приети за публикуване в Доклади БАН и Годишника на Софийския университет. Не са ми известни цитирания, свързани с тях, което е обяснимо като се има предвид предстоящото им публикуване.

Лични впечатления. Познавам Росен Николов от постъпването му във ФМИ. Той е сериозен математик, отличен преподавател и колега. Преподавателската му дейност, научните му изследвания, както и заниманията му с елементарна математика, се отличават с дълбочина и строгост на изложението. Това го прави ценен и уважаван преподавател на ФМИ.

Заключение. Както личи от описанието на дисертацията на ас. Р. Николов той е получил нови резултати в интересна област от геометрията на банаховите пространства. За получаването им са били необходими оригинално мислене, значителни професионални умения и сръчност. Считам, че дисертацията на ас. Николов удовлетворява изискванията, предвидени в ЗРАСР и съответния Правилник на ФМИ. Ето защо препоръчвам убедено на уважаемото жури да присвои на ас. Росен Николов образователната и научна степен доктор по математика.

София, ноември 2017 Рецензент: