Софийски университет
"Св. Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

Диференциални включвания с неизпъкнала дясна част

Мира Изак Бивас

АВТОРЕФЕРАТ
на дисертация
за присъждане на образователната и научна степен
"ДОКТОР"
в професионално направление
4.5 Математика (Математически анализ)

Научен ръководител: проф. д-р Надежда Рибарска

София, 2017г.

Диференциалните включвания са релация от вида

$$\dot{x}(t) \in F(x(t), t)\,,$$

където F е многозначно изображение. Първоначално, интересът към тях се е дължал главно на техническите трудности, които пораждат. Но новите идеи, възникнали в процеса на развитието им, позволяват да бъдат решени задачи, които преди са изглеждали недостъпни. В наши дни увереността във възможностите на този инструмент е нараснала и диференциалните включвания са основно средство за математическо моделиране – дори при най-основните модели. Както е отбелязано в статията [9] на A.Cellina, ако Fermat е бил виждал диференциално включване преди да се занимае с геометричната оптика, по всяка вероятност развитието на математическия анализ би било различно.

Първите диференциални включвания се появяват през 30те години на 20 век в работите на Zaremba (1936) и Marchaud (1938) без мотивация от конкретен модел. Скоро интересните свойства на този математически обект събуждат интереса и на други математици.

Струва си да отбележим, че, въпреки че първоначално изглежда контраинтуитивно, доказването на съществуване на решение на диференциално включване е значително по-трудно, отколкото в случая на обикновено диференциално уравнение. Това се дължи на факта, че описанието на поведението на еднозначно изображение е лесно (точката може само да се премести), докато при многозначно изображение могат да се случат много неща: освен да се премести, множеството може да стане по-голямо или по-малко (може би по непрекъснат начин); множеството може да бъде отворено или затворено, изпъкнало или не и т.н. Предположението, че дясната част на включването съдържа непрекъсната функция $f(x,t)$, е много ограничаващо и изключва възможността за прекъснатост на дясната част, което може да бъде разглеждано като допълнителна мотивация за изучаването на диференциалните включвания.

Исторически, първият клас диференциални включвания, които са изучени, е класът от включвания, чиято дясна част е полунепрекъсната отгоре с компактни *изпъкнали* стойности. Главните инструменти, използвани за доказване на съществуване на решение, са теореми за неподвижната точка и конструиране на приближени решения. И при двата подхода предположението за *изпъкналост* на образите е съществено. Изпъкналостта е необходима за многозначните теореми за неподвижната точка. Относно втория подход, възможно е да конструираме редица от приближени решения $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, да докажем *слабата* сходимост на редицата от съответните производни, но за да получим силна сходимост и границата да удовлетворява началните условия, се изисква образите да бъдат изпъкнали множества (лема на Мазур).

Един от първите такива резултати принадлежи на Филиппов, който доказва съществуване на решение на автономното диференциално включване

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),\ x(t_0) = x_0\,, \tag{1}$$

при предположение, че F е полунепрекъснато отгоре с *изпъкнали* и компактни стойности (вж. [18], [19], [20] и т.н.). От тогава предположението за изпъкналост на дясната страна е стандартно във вариационното смятане и оптималното управление винаги, когато се използват диференциални включвания.

От една страна, поради общността си, подходът на Филиппов за взимане на изпъкнали обвивки не винаги дава най-добрия резултат. От друга страна, ако не предположим изпъкналост, не винаги съществува решение на (1), както се вижда от известните примери на Филиппов (вж. например [20]).

Въпросът дали съществуват решения в случай на непрекъснато F без да се предполагат изпъкнали стойности е повдигнат от Hermes в [24]. Положителен отговор е даден от Филиппов в [19]. Този резултат е обобщен в случай на полунепрекъснато отдолу изображение от Bressan в [5] с помощта на избиране на подходящи селекции и от Lojasiewicz в [27] и [28] с помощта на метода на Филиппов. Подробна историческа справка може да бъде намерена в книгите на J.-P. Aubin и A. Cellina [1] и K. Deimling [13].

През годините са се наложили две основни направления за доказване на резултати за съществуване на решение на диференциални включвания с неизпъкнала дясна част. Първият обхваща включвания, чиято дясна част е полунепрекъснато отгоре изображение, чиято графика се съдържа в субдиференциала на "хубава" функция. Първият резултат от този вид е получен от Bressan, Cellina и Colombo (вж. [6]) през 1989г. и полага основата за редица изследвания в тази насока. Ние считаме за особено важен другия тип резултати за съществуване на решение, при които се използват само свойствата на (полу)непрекъснатост на дясната част. При тях се предполага полунепрекъснатост отгоре и изпъкналост в точките, принадлежащи на дадено множество, и полунепрекъснатост отдолу в точките, принадлежащи на допълнението му (условия от смесен тип). Доказването на съществуване на решение за такива задачи е относително лесно в автономния случай, но трудно в случая на Carathéodory (неавтономни задачи, при които се предполага $F(x,\cdot)$ да е измеримо и $F(\cdot,t)$ да има някакво свойство на полунепрекъснатост).

Създаването на метод за получаване на теореми за съществуване на решение на задачи от смесен тип в неавтономния случай е започнато от Olech през 1975 (вж. [34]). Той предполага, че $F(x,\cdot)$ е измеримо, $F(\cdot,t)$ е полунепрекъснато отгоре, $F(\cdot,t)$ – полунепрекъснато отдолу, когато $F(x,t)$ не е изпъкнало и F – интегрално ограничено. През 1986г. Himmelberg и Van Vleck отслабват предположението за ограниченост в теоремата на Olech (вж. [26]). Друг резултат от този тип е на St.jun.Lojasiewicz (вж. [28]) при предположения, че F е интегрално ограничено, $\mathcal{B}\otimes\mathcal{L}$-измеримо, $F(\cdot,t)$ е полунепрекъснато отгоре в точките, в които $F(x,t)$ е изпъкнало и $F(\cdot,t)$ е полунепрекъснато отдолу в околност на x, ако $F(x,t)$ не е изпъкнало. Цанко Дончев (вж. [14], 2001) обобщава резултатите на Olech, Himmelberg/Van Vleck и Lojasiewicz в безкрайномерния случай (по-точно, за сепарабелни банахови пространства).

През 2008, T. Haddad, A. Jourani и L.Thibault (вж. [23]) доказват съществуване на решение за диференциално включване без фазови ограничения

$$\dot{x}(t)\in F(x(t),t)+G(x(t),t),\ \ x(t_0)=x_0\,, \tag{2}$$

където F и G са интегрално ограничени и $\mathcal{B}\otimes\mathcal{L}$-измерими, $F(\cdot,t)$ е полунепрекъснато отгоре в точките, в които $F(x,t)$ е изпъкнало, $F(\cdot,t)$ е полунепрекъснато отдолу в околност на точките x, в които $F(x,t)$ не е изпъкнало, G е с изпъкнали компактни стойности и $G(\cdot,t)$ е полунепрекъснато отгоре.

В статията [33] М.Кръстанов и Н.Рибарска получават резултат за съществуване на решение за автономната версия на (2) с фазово ограничение $x(t)\in D$ и при по-слабо предположение за множеството на полунепрекъснатост отдолу: то трябва да бъде G_δ, за разлика от стандартното предположение за отвореност. Първата стъпка в техния подход е създаването на технически инструменти за изучаване на (1), когато дясната част е ограничено изображение с непразни компактни стойности. Идеята за това произхожда от метода на Bressan за построяване на непрекъснати по направление селекции и от селекторите на Srivatsa от първи клас на Baire за полунепрекъснати отгоре многозначни изображения (вж. [38]). Грубо казано, подходът се състои в разбиването на дефиниционната област и върху всяко парче на разбиването първоначалното включване се апроксимира с включвания с полунепрекъснати отгоре изпъкналозначни десни части, "недалеч" от първоначалните.

Глава 1 от дисертацията е уводна. Необходимите предварителни сведения, излизащи извън стандартните курсове, са представени в **Глава 2**.

В **Глава 3**, *Секции 1 и 2*, по-горе споменатите технически инструменти от [33] са развити, за да са приложими и за неавтономния случай

$$\dot{x}(t) \in F(x(t), t), \; x(t_0) = x_0 \,. \tag{3}$$

Вече апроксимациите на дясната страна удовлетворяват стандартните предположения на Carathéodory: полунепрекъснатост отгоре по фазовата променлива и измеримост по времето, както и ограниченост и затворени *изпъкнали* образи. Освен това, "близостта"между първоначалното включване и апроксимациите му се предполага само върху множество с голяма мярка.

Следващата дефиниция е основна за нашия подход:

Дефиниция 1. *Нека множеството D е сечение на отворено и затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ е компактен интервал и $F : \bar{D} \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е многозначно изображение с непразни стойности. Нека $\varepsilon > 0$, $I_\varepsilon \subset I$ е компактно множество, такова че $meas(I_\varepsilon) > meas(I) - \varepsilon$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \; 1 \leq \alpha < \alpha_0\}$ е релативно отворено разбиване на D и*

$$\mathcal{G} := \{G_U : \; U \in \mathcal{U}\}$$

да бъде фамилия от многозначни изображения. Казваме, че тройката $(\mathcal{U}, \mathcal{G}, I_\varepsilon)$ е инвариантна ε-апрокцимация на F, ако

(i) за всяко $\alpha \in [1, \alpha_0)$ $G_{U_\alpha} : \bar{U}_\alpha \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ има непразни, изпъкнали и компактни стойности, $G_{U_\alpha}(\cdot, t)$ е полунепрекъснато отгоре и $G_{U_\alpha}(x, \cdot) \cap T_{D_\alpha}(x)$ притежава измерима селекция, където $D_\alpha = \bar{D} \setminus (\bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta)$;

(ii) за всички $(x, t) \in \bar{U}_\alpha \times I_\varepsilon$, за всяко $\alpha \in [1, \alpha_0)$

$$G_{U_\alpha}(x, t) \cap T_{D_\alpha}(x) \subset F(x, t) + \varepsilon \bar{B} \,.$$

Главното свойство на апроксимациите G_{U_α} е, че от една страна, диференциалното включване с дясна страна G_{U_α} притежава решение, оставащо в U_α известно време и от друга страна, G_{U_α} е близко до F извън множество с малка мярка по времето. Разбира се, основният въпрос (стоящ отворен) е кога могат да се намерят такива апроксимации и как да се построят.

Следващите дефиниции и твърдения от *Секция 1* показват как да работим с тях, ако разбиването е локално-крайно:

Дефиниция 2. *Нека множеството D е сечение на отворено и затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ е компактен интервал, $\varepsilon > 0$ и $I_\varepsilon \subset I$ е компактно множество, такова че $meas(I_\varepsilon) > meas(I) - \varepsilon$. Казваме, че абсолютно непрекъснатата функция $\varphi : [t_0, T) \to D$ е $(\varepsilon,\ I_\varepsilon)$-решение на $\dot{x}(\cdot) \in F(x(\cdot), \cdot)$, ако $\dot{\varphi}(t) \in F(\varphi(t), t) + \varepsilon \bar{B}$ за почти всички $t \in I_\varepsilon$.*

Използваме стандартната дефиницията за инвариантност:

Дефиниция 3. *Нека множеството D е сечение на отворено и затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$ и нека $x : [t_0, T) \to \mathbb{R}^n$ е абсолютно непрекъсната функция. Каваме, че множеството D е инвариантно спрямо кривата $x(\cdot)$, ако за всяко $t \in [t_0, T)$, за което $x(t) \in D$, съществува $\delta > 0$, такова че $x(\tau) \in D$ за всяко $\tau \in [t, t + \delta)$.*

Предложение 4. *Нека множеството D е сечение на отворено подмножество O на $\mathbb{R}^n$ и на затворено подмножество S на $\mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ е компактен интервал, $F : D \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е равномерно ограничено и $(\mathcal{U}, \mathcal{G}, I_\varepsilon)$ е инвариантна ε-апроксимация на F. Тогава*

(i) *за всяко x_0, за което $(x_0, t_0) \in D \times I$, имаме, че съществува $(\varepsilon,\ I_\varepsilon)$-решение $\varphi(\cdot)$ на $\dot{x}(\cdot) \in F(x(\cdot), \cdot)$, $x(\cdot) \in D$, започващо от $x_0 = \varphi(t_0)$ и дефинирано върху интервала $[t_0, T)$ ($T = \max I$ или $\varphi(t)$ клони към точка от ($\mathbb{R}^n \setminus O$, когато $t \to T$), такова че всеки елемент от разбиването $\mathcal{U}$ е инвариантен спрямо φ;*

(ii) *ако $\mathcal{U}$ е локално-крайно, $\varphi_k : [t_0, T] \to D$, $k = 1, 2, \ldots$ е редица от $(\varepsilon,\ I_\varepsilon)$-решения на $\dot{x}(t) \in F(x(t), t)$ спрямо които елементите на $\mathcal{U}$ са инвариантни, и $\varphi : [t_0, T] \to D$ е равномерната ѝ граница, то φ е $(\varepsilon,\ I_\varepsilon)$-решение на $\dot{x}(t) \in F(x(t), t)$.*

Дефиниция 5. *Нека множеството D е сечение на отворено и затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ е компактен интервал и $F : \bar{D} \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е многозначно изображение с непразни стойности. Нека $(\mathcal{U}^1, \mathcal{G}^1, I_{\varepsilon_1})$ е инвариантна ε_1-апроксимация на F и $(\mathcal{U}^2, \mathcal{G}^2, I_{\varepsilon_2})$ е инвариантна ε_2-апроксимация на F, където $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{U}^2$ са релативно отворени разбивания на D. Казваме, че $(\mathcal{U}^2, \mathcal{G}^2, I_{\varepsilon_2})$ е по-фина от $(\mathcal{U}^1, \mathcal{G}^1, I_{\varepsilon_1})$, ако*

(i) $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ *и* $I_{\varepsilon_2} \supset I_{\varepsilon_1}$*;*

(ii) $\mathcal{U}^2 \prec \mathcal{U}^1$;

(iii) *ако* $\mathcal{U}^2 \ni U^2_\beta \subset U^1_\alpha \in \mathcal{U}^1$, *то* $G^2_\beta(x,t) \subseteq G^1_\alpha(x,t)$ *за всяко* $(x,t) \in \bar{U}^2_\beta \times I_{\varepsilon_2}$.

Теорема 6. *Нека множеството D е сечение на отворено и затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ е компактен интервал и $F : \bar{D} \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е равномерно ограничено многозначно изображение с непразни затворени стойности. Нека съществуват инвариантни $\frac{1}{k}$-апроксимации $(\mathcal{U}^k, \mathcal{G}^k, I_{\varepsilon_k})$ на F, такива че $\mathcal{U}^k$ е локално-крайно релативно отворено разбиване на D и $(\mathcal{U}^{k+1}, \mathcal{G}^{k+1}, I_{\varepsilon_{k+1}})$ е по-фина от $(\mathcal{U}^k, \mathcal{G}^k, I_{\varepsilon_k})$, за всяко $k = 1, 2, \ldots$.*

Тогава за всяко $(x_0, t_0) \in D \times I$ съществуват $T > t_0$ и абсолютно непрекъсната функция $x : [t_0, T] \to D$, такива че

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \in F(x(t), t) \quad \textit{п.н. върху } [t_0, T] \\ &x(t_0) = x_0\,. \end{aligned}$$

В *Секция 2* тази схема е обобщена, така че да включва случаите, в които разбиванията не са локално крайни.

Секция 3 съдържа кратко представяне на връзките между измеримост и ε-полунепрекъснатост на едно- и многозначни изображения. Тази секция следва структурата на първата част на [28]:

Дефиниция 7. *Еднозначното изображение $f : D \to \mathbb{R}$ се нарича ε-полунепрекъснато отдолу [ε-полунепрекъснато отгоре] в $x_0 \in D$, ако за всяко $\eta > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че*

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon - \eta \quad [f(x) < f(x_0) + \varepsilon + \eta]$$

за всички $x \in D \cap B_\delta(x_0)$. Това е еквивалентно на твърдението, че за всяка редица $\{x_n\}$, за която $x_n \to x_0$, е изпълнено, че

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0) - \varepsilon \ [\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x_0) + \varepsilon]\,.$$

Изображението $f : D \to \mathbb{R}$ се нарича ε-полунепрекъснато отдолу [ε-полунепрекъснато отгоре] върху $D' \subset D$, ако е ε-полунепрекъснато отдолу [ε-полунепрекъснато отгоре] за всяко $x_0 \in D'$.

Предложение 8. *Изображението $f : D \to \mathbb{R}$ е ε-полунепрекъснато отдолу в $x_0 \in D$ тогава и само тогава, когато*

$$\overline{Epi\, f} \cap \{(x_0, r_0) \ : \ r_0 < f(x_0) - \varepsilon\} = \emptyset\ .$$

Лема 9. *Нека $f : D \times I \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$-измеримо. Тогава множеството*

$$E := \{t \in I \ : \ f(\cdot, t) \text{ е } \varepsilon\text{-полунепрекъснато отгоре}\}$$

е измеримо.

Дефиниция 10. *Еднозначното изображение $F : D \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ се нарича ε-полунепрекъснато отдолу [ε-полунепрекъснато отгоре] в $x_0 \in D$, ако за всяко $\eta > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че*

$$F(x_0) \subset F(x) + (\varepsilon + \eta)B \ [F(x) \subset F(x_0) + (\varepsilon + \eta)B]$$

за всички $x \in D \cap B_\delta(x_0)$.

Изображението $F : D \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ се нарича ε-полунепрекъснато отдолу [ε-полунепрекъснато отгоре] върху $D' \subset D$, ако е ε-полунепрекъснато отдолу [ε-полунепрекъснато отгоре] за всяко $x_0 \in D'$.

Ако едно- или многозначно изображение е ε-полунепрекъснато отдолу [ε-полунепрекъснато отгоре] за всяко $\varepsilon > 0$, тогава то е полунепрекъснато отдолу [полунепрекъснато отгоре].

Следващото твърдение показва връзката между ε-полунепрекъснатостта на едно- и многозначни изображения:

Предложение 11. *Нека $F : D \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е компактнозначно. F е ε-полунепрекъснато отдолу в $x_0 \in D$ тогава и само тогава, когато $\varphi(\cdot) = dist(y, F(\cdot))$ е ε-полунепрекъснато отгоре в x_0 за всяко $y \in \mathbb{R}^n$ (или само за всички y_i, $i \in \mathbb{N}$, такива че $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ е гъсто в $\mathbb{R}^n$).*

Използвайки следствия на теоремата на Лузин от [28], доказваме теореми от типа на Scorza Dragoni за ε-полунепрекъснати едно- и многозначни изображения:

Теорема 12. *Нека $f : D \times I \to \mathbb{R}$ е $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$-измеримо и $f(\cdot, t)$ е ε-полунепрекъснато отдолу [ε-полунепрекъснато отгоре]. Тогава, за всяко $\eta > 0$ съществува затворено $I_\eta \subset I$, за което $\mu(I \setminus I_\eta) < \eta$, такова че $f|_{D \times I_\eta}$ е ε-полунепрекъснато отдолу [ε-полунепрекъснато отгоре].*

Теорема 13. *Нека $F : D \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е компактнозначно и $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$-измеримо и нека $F(\cdot, t)$ е ε-полунепрекъснато отдолу за всяко $t \in I$. Тогава, за всяко $\eta > 0$ съществува затворено $I_\eta \subset I$, за което $\mu(I \setminus I_\eta) < \eta$, такова че $F|_{D \times I_\eta}$ е ε-полунепрекъснато отдолу.*

Предложение 14. *Нека $F : D \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е компактнозначно и $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$-измеримо. Нека дефинираме $\widetilde{D} := \{(x,t) \in D \times I$: съществува релативно отворена в D околност U на x, такава че $F(\cdot,t)|_U$ е ε-полунепрекъснато отдолу$\}$. Тогава, $\widetilde{D}$ и $F|_{\widetilde{D}}$ са $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$-измерими.*

Предложение 15. *Нека $F : D \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е компактнозначно, $\widetilde{D} := \{(x,t) \in D \times I$: съществува релативно отворена в D околност U на x, такава че $F(\cdot,t)|_U$ е ε-полунепрекъснато отдолу$\}$ и $F|_{\widetilde{D}}$ е $\mathcal{B}\otimes\mathcal{L}$-измеримо. Тогава, за всяко $\eta > 0$ съществува затворено $I_\eta \subset I$, за което $\mu(I \backslash I_\eta) < \eta$, и релативно отворено $\Omega \subset D \times I$, такива че $\widetilde{D} \cap (D \times I_\eta) = \Omega \cap (D \times I_\eta)$ и $F|_{\Omega \cap (D \times I_\eta)}$ е ε-полунепрекъснато отдолу.*

Дефиниция 16. *Нека $D \subset \mathbb{R}^n$ и $I \subset \mathbb{R}$ е компактен интервал. Изображение $F : D \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ се нарича почти ε-полунепрекъснато отдолу върху $D' \subset D \times I$, ако съществува затворено J_ε, такова че $\mu(I \setminus J_\varepsilon) < \varepsilon$ и $F|_{D \times J_\varepsilon}$ е ε-полунепрекъснато отдолу върху D'.*

Ако изображение е почти ε-полунепрекъснато отдолу за всяко $\varepsilon > 0$, тогава то е почти полунепрекъснато отдолу в смисъла на обичайната дефиниция.

Лема 17. *Нека $F : D \times I \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е компактнозначно, $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$-измеримо и $F(\cdot,t)$ е ε-полунепрекъснато отдолу за почти всяко $t \in I$. Тогава F е почти ε-полунепрекъснато отдолу.*

Ако F е почти ε-полунепрекъснато отдолу за всяко $\varepsilon > 0$, обратното също е вярно.

Секция 4 е посветена на доказването на съществуването на решение на включването (2), ненапускащо дадено затворено множество, където F и G са равномерно ограничени и $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$-измерими, $G(\cdot,t)$ е полунепрекъснато отгоре и *изпъкнало*значно, докато $F(\cdot,t)$ удовлетворява условия от смесен тип (полунепрекъснатост отдолу върху G_δ множество и полунепрекъснатост отгоре и изпъкналозначност върху допълнението му). Предположено е и естествено допирателно условие, свеждащо се до стандартните предположения в изцяло Carathéodory полунепрекъснатия отгоре изпъкналозначен случай, както и в Carathéodory полунепрекъснатия отдолу случай). Този резултат съдържа всички теореми, споменати по-горе, в крайномерния случай.

Формулировката на теоремата е следната:

Теорема 18. *Нека F и G са равномерно ограничени многозначни изображения със затворени образи, дефинирани върху $D \times I$, където D е сечение на отворено подмножество и затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$ и $I \subset \mathbb{R}$ е компактен интервал. Нека F е $\mathcal{B} \otimes \mathcal{L}$-измеримо. Нека съществува редица от положителни ε_k, клонящи към 0, и множества $\widetilde{D}_k \subset \mathbb{R}^{n+1}$, такива че $D_k(t) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ (x,t) \in \widetilde{D}_k\}$ е релативно отворено (в D) и $F(\cdot,t)|_{D_k(t)}$ е ε_k-полунепрекъснато отдолу за почти всяко $t \in Pr_t\widetilde{D}_k$ (предполагаме,че $\widetilde{D}_1 = D \times I$, Pr_t е естествената проекция от $\mathbb{R}^n \times I$ в I). Нека F е изпъкналозначно върху множеството $(D \times I) \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{D}_k$, $F(\cdot,t)$ е полунепрекъснато отгоре върху множеството $\left(D \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D_k(t)\right)$. Нека G е изпъкналозначно и $G(\cdot,t)$ и полунепрекъснато отгоре върху D. Нека е изпълнено следното допирателно условие:*

> *за всяко естествено число k, за всяко $x \in D$ и всяка измерима селекция $\bar{y}(\cdot)$ на $F(x,\cdot) \cap D_k(\cdot)$ върху измеримо $J \subset I$, съществува $y(\cdot)$ – измерима селекция на $F(x,\cdot) \cap \bar{B}(\bar{y}(\cdot), \varepsilon_k) \cap (T_D(x) - G(x,\cdot))$ върху J.*

Тогава, за всяко $(x_0,t_0) \in D \times I$ диференциалното включване $\dot{x}(t) \in F(x(t),t) + G(x(t),t)$ притежава локално решение, започващо от точка $x_0 \in D$ в момент $t_0 \in I$.

В **Глава 4** са разгледани конкретни диференциални включвания с неизпъкнала дясна част, а именно процес на изметане с конуса на граничните нормали и процес на проектиране.

В *Секция 1* мотивираме и въвеждаме процес на проектиране, сравнявайки го с известния процес на изметане. Класическият процес на изметане е въведен и изучаван през 70те от J.J. Moreau (вж. [29]). Обща мотивация, произхождаща от механиката, е дадена в [30]. Множество задачи от механиката, моделирани с процес на изметане, могат да бъдат открити в [31]. Математическата формулировка на процеса на изметане е следното диференциално включване с фазово ограничение:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) \\ &x(0) = x_0 \in C(0) \\ &x(t) \in C(t), \end{aligned} \tag{4}$$

където $C(t)$ е дадено движещо се затворено множество и $N_{C(t)}(x(t))$ е нормалният конус (в някакъв смисъл) към $C(t)$ в $x(t)$. В споменатите по-горе статии на Moreau множествата $C(t)$ са изпъкнали подмножества на хилбертово пространство и се движат по абсолютно непрекъснат начин.

Две години след първата статия на Moreau, C.Henry (вж. [25], [24]) моделира механизми за разпределение на ресурсите с диференциалното включване

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) \in Proj_{T_C(x(t))}F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in C \\ x(t) \in C, \end{array} \tag{5}$$

където C е изпъкнало затворено подмножество на крайномерно пространство, $T_C(x(t))$ е допирателният конус към C в $x(t)$ и F е полунепрекъснато отгоре многозначно изображение с изпъкнали непразни стойности. Скоро след това е разкрита близката връзка между двете задачи. B.Cornet ([11]) доказва еквивалентността на (5) и на процеса на измитане (4) с пертурбация F, добавена към дясната страна, и стационарно множество C, регулярно по Clarke.

Процесът на измитане е изследван при различни предположения за фазовото пространство, геометрията на движещото се множество, начина, по който то се движи, възможните пертурбации и т.н. Понастоящем съществува обширна литература по въпроса. За изчерпателна информация, насочваме читателя към статията [39] и препратките в нея. Процес на измитане с пертурбация F, добавена към дясната страна, за прокс-регулярни множества в хилбертово пространство е изучен в [16], [17]. Връзката на тази задача (със стационарно прокс-регулярно множество) с процеса на проектиране (5) е изучена в [37]. Диференциалното включване (5) се появява и в модел за движение на тълпи ([3], [4]). В тези статии, благодарение на прокс-регулярността на съответните множества при предположения за липса на препятствия, пак е доказана еквивалентността на (5) с процеса на измитане.

Ние се интересуваме от тези задачи, когато геометрията на множествата не е регулярна – това е така, когато конусът на граничните нормали и нормалният конус на Clarke може и да не съвпадат. В този случай дясната страна на (5) може да не е полунепрекъсната отгоре. Затова разглеждаме задачата (5) с дясна страна, чиято графика е затворената обвивка на графиката на първоначалното проектиращо изображение:

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) \in G(F(x(t)), x(t)) \\ x(0) = x_0 \in C \\ x(t) \in C, \end{array} \tag{6}$$

където C е затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$ и многозначното изображение G е получено чрез затваряне на графиката на $(d,x) \mapsto Proj_{T_C(x)}(d)$ ($T_C(x)$ е допирателният конус на Bouligand към C в x). Ще наричаме (6) "процес на проектиране". Тази задача е тясно свързана с процеса на измитане с пертурбация, при който нормалният конус е конусът на граничните нормали:

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) \in -N_C(x(t)) + F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in C \\ x(t) \in C, \end{array} \tag{7}$$

където C е затворено множество в $\mathbb{R}^n$ и $N_C(x)$ е конусът на граничните нормали към C в x. Нека отбележим, че десните страни на (6) и (7) са полунепрекъснати отгоре изображения с евентуално неизпъкнали стойности, което прави изследването им доста по-трудно. Предложение 6.7 на p.219 от [36] (вж. и Lemma 3.8 от [22]) показват, че дясната страна на (7) съдържа дясната страна на (6). Не знаем дали (7) притежава решение за произволно затворено множество C, дори и когато пертурбацията $F(x)$ е еднозначна и константна. Даваме пример, показващ, че е възможно процесът на проектиране (6) (с константна еднозначна пертурбация) да не притежава решение, докато процесът на измитане (7) да притежава. Следователно, задачите (6) и (7) вече не са еквивалентни.

За да включим възможността за движими препятствия в модела за движение на тълпи, както и за да имаме по-близка връзка с класическия процес на измитане, ще изучаваме по-общ процес на измитане:

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + F(x(t),t) \\ x(0) = x_0 \in C(0) \\ x(t) \in C(t), \end{array} \tag{8}$$

където $C(t)$ е движещо се затворено множество в $\mathbb{R}^n$ и $N_{C(t)}(x)$ е конусът на граничните нормали към множеството $C(t)$ в точката x, както и по-общ процес на проектиране:

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) \in Pr\ G(F(x(t),t), x(t), t) \\ x(0) = x_0 \in C(0) \\ x(t) \in C(t), \end{array} \tag{9}$$

където $C(t)$ е движещо се затворено множество в $\mathbb{R}^n$, $Pr : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ съпоставя на $(n+1)$-мерен вектор вектора на първите му n координати и многозначното изображение G е затворената обвивка на графиката на

$$(d,x,t) \mapsto Proj_{T_K(x,t)\cap\{t=1\}}(d), \quad K := \{(x,t) \in R^{n+1} :\ x \in C(t)\}.$$

Това е естественият начин на обобщаване на (6) при преминаване от стационарния към нестационарния случай.

За да докажем резултати за съществуване на решение на процеса на измитане и на процеса на проектиране, налагаме допълнително условие върху геометрията на участващите множества и върху пертурбацията. Това условие е дефинируемост в някоя о-минимална структура. Дефинируемостта влече съществуване на стратификация по Whitney. Динамични системи със стратифицирани области са разгледани в [7], [2] и много други. Нашата задача може да се разглежда като задача за слаба инвариантност върху стратифицирана област, но ние не налагаме никакви условия върху подобластите (докато проксимална гладкост и wedgeness са предположени в [2]). Освен това, и в двете споменати статии е наложено допълнително структурно условие върху динамиката, докато ние доказваме това свойство за конкретната регуляризация.

При предположение за дефинируемост, резултат за съществуване на решение за (7) е получен в статията [22], в случай че пертурбацията е еднозначна и непрекъсната. В същата статия е доказано съществуване на решение на (4), ако многозначното изображение $C(t)$ е дефинируемо и липшицово (по отношение на разстоянието на Hausdorff). Сега тези резултати са продължени и за задачата (8) при същите предположения. В *Секция 2* доказваме съществуването на решение на пертурбиран процес на измитане с конуса на граничните нормали:

Теорема 19. *Нека многозначното изображение $C : [0,T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ е липшицово (по отношение на разстоянието на Hausdorff), дефинируемо в някоя о-минимална структура и нека стойностите му $C(t)$ са непразни компакти. Нека изображението $d : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ е непрекъснато. Тогава процесът на измитане*

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) \in d(x(t),t) - N_{C(t)}(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in C(0) \\ x(t) \in C(t)\ , \end{array} \tag{10}$$

където $N_{C(t)}(x(t))$ е конусът на граничните нормали към $C(t)$ в $x(t)$, притежава решение.

Всъщност, предположението за дефинируемост на C (и непрекъснатост и еднозначност на пертурбацията) влече съществуването на решение и на процеса на проектиране (9) (и следователно на (6)). Това е получено в *Секция 3*:

Теорема 20. *Нека многозначното изображение* $C : [0,T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *е липшицово (по отношение на разстоянието на Hausdorff), дефинируемо в някоя o-минимална структура и нека стойностите му* $C(t)$ *са непразни компакти. Нека изображението* $d : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *е непрекъснато. Тогава процесът на проектиране*

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) \in Pr\ G(d(x(t),t), x(t), t) \\ x(0) = x_0 \in C(0) \\ x(t) \in C(t)\,, \end{array}$$

където многозначното изображение G *е получено чрез затварянето на графиката на*

$$(d,x,t) \mapsto Proj_{T_K(x,t)\cap\{t=1\}}(d), \quad K := \{(x,t) \in R^{n+1} :\ x \in C(t)\}\,,$$

притежава решение.

В същата секция има и пример, за който не съществува решение на процеса на проектиране.

В *Секция 4* са представени приложение в модел за движение на тълпи, както и допълнителна мотивация. Обобщаваме модела, представен в [3], [4] и прилагаме резултатите от предните секции към него.

1 Авторска справка

По мнение на автора основните приноси в дисертацията са:

1. Предложен е подход за инвариантна ε-апроксимация с изпъкналозначни Carathéodory полунепрекъснати отгоре изображения върху елементи на релативно-отворени разбивания за неавтономни диференциални включвания. Тази схема е обобщена, така че да включва случаите, в които разбиванията не са локално крайни.

2. Дадени са дефиниции за ε-полунепрекъснатост на едно- и многозначни изображения. Доказани са връзки между ε-полунепрекъснатостта и измеримостта под формата на теореми от тип на Лузин и на Scorza Dragoni.

3. Доказана е теорема за съществуване на решение на диференциално включване с фазово ограничение, чиято дясна страна удовлетворява условия на Carathéodory от смесен тип. Тази теорема обобщава всички известни досега теореми от този тип в крайномерния случай.

4. Доказано е съществуване на решение на пертурбиран процес на измитане с конуса на граничните нормали при предположение, че участващите множества са дефинируеми (и се движат по дефинируем начин) в някоя о-минимална структура.

5. Въведен и мотивиран е процес на проектиране. При предложение за дефинируемост на множествата е направена връзката му с процеса на измитане и е доказано съществуване на решение.

6. Представено е приложение на процеса на проектиране в модел за движение на тълпи.

2 Списък на публикациите по дисертацията

1. Mira Bivas, *"A nonautonomous Olech type result"*, European Journal of Mathematics, Volume 3, Issue 2, pp 342-362

2. Mira Bivas, *"Measurability of generalised semicontinuous single- and set-valued mappings"*, Proceedings of the Forty Sixth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovetz, April 9–13, 2017, pp 146-150

3. Mira Bivas, *"Viability theorems and an application"*, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Vol 70, No3, pp 321-332

4. Mira Bivas, Nadezhda Ribarska, *"Projection process with definable right-hand side"*, SIAM J. Control Optim, Volume 53, Issue 5, pp 2819–2834

Статията 4. е цитирана в

Abderrahim Jourani, Emilio Vilches, *"Moreau-Yosida Regularization of State-Dependent Sweeping Processes with Nonregular Sets"*, Journal of Optimization Theory and Applications, April 2017, Volume 173, Issue 1, pp 91–116.

3 Апробация на резултатите

Резултатите от дисертацията са докладвани на следните научни форуми:

1. *"A nonautonomous Olech type result"*, 11th International Conference on Large-Scale Scientific Computations, June 5-9, 2017, http://parallel.bas.bg/Conferences/SciCom17/

2. *"Crowd Motion as a Sweeping Process"*, Seminar of the Department of Aerospace Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, USA, 14 November 2016 (по съвместна работа с проф. д-р Надежда Рибарска)

3. *"A nonautonomous Olech type result"*, Пролетна научна сесия на ФМИ, 26 март 2016

4. *"On the projection process with definable right-hand side"*, 10th International Conference on Large-Scale Scientific Computations, June 8-12, 2015, http://parallel.bas.bg/Conferences/SciCom15/ (по съвместна работа с проф. д-р Надежда Рибарска)

5. *"Projection process with definable right-hand side"*, Пролетна научна сесия на ФМИ, 28 март 2015 (по съвместна работа с проф. д-р Надежда Рибарска)

6. *"Projection process with definable right-hand side"*, 125 years of Mathematics and Natural Sciences at Sofia University "St. Kliment Ohridski 5-7 December 2014, http://125years.fmi.uni-sofia.bg/ (по съвместна работа с проф. д-р Надежда Рибарска)

4 Благодарности

Искам да изкажа сърдечна благодарност на научния си ръководител проф. Надежда Рибарска за ценните ѝ помощ, мотивация и подкрепа. Надя, благодаря ти, че си ми учител и ръководител!

Литература

[1] J.-P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1984).

[2] Barnard R. C., P. R. Wolenski, Flow Invariance on Stratified Domains, *Set-Valued and Variational Analysis*, Volume 21, Issue 2 (2013), 377–403.

[3] Bernicot F., J. Venel, Differential inclusions with proximal normal cones in Banach spaces, *J. Convex Analysis*, 17 (2010), 451–484.

[4] Bernicot F., J. Venel, A discrete contact model for crowd motion, *ESAIM: M2AN 45 no. 1*, 17 (2011), 145-168.

[5] A. Bressan, *On differential relations with lower continuous right-hand side: An existence theorem*, J. Differ. Equations 37 (1980), pp. 89-97.

[6] A. Bressan, A. Cellina, G. Colombo, *Upper semicontinuous differential inclusions without convexity*, Proc. Am. Math. Soc. 106 (1989), No.3, pp. 771-775.

[7] Bressan, A., Y. Hong, Optimal control problems on stratified domains, *Netw. Heterog. Media*, Volume 2, Issue 2, (2007), 313-–331.

[8] C. Castaing, M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580 (1977).

[9] A. Cellina, A view on differential inclusions. Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino 63 (2005), 197–209.

[10] Clarke F.H., Y.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski, Nonsmooth Analysis and Control Theory, *Springer-Verlag New York* (1998).

[11] Cornet B., Existence of slow solutions for a class of differential inclusions, *J. Mathematical Analysis and Applications*, Volume 96, Issue 1 (1983), 130-–147.

[12] Coste M., An introduction to o-minimal geometry, http://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/OMIN.pdf (1999).

[13] K. Deimling, *Multivalued equations*, Walter de Gruyter, Berlin-New York (1992).

[14] TZ. DONCHEV, *Mixed type semicontinuous differential inclusions in Banach spaces*, Ann. Polon. Math., Volume 77 (2001), pp. 245-259.

[15] Van den Dries L., Tame topology and O-minimal structures, Cambridge University Press (1998).

[16] Edmond J.F., Thibault L., Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process, *Mathematical Programming*, (2005), Volume 104, Issue 2-3, 347-373.

[17] Edmond J.F., Thibault L., BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation, *J. Differential Equations* 226 (2006), 135–179.

[18] A. F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinnuous right-hand side*, Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. 42 (1964), pp. 199-231.

[19] A. F. FILIPPOV, *The existence of solutions of generalized differential equations*, Math. Notes 10 (1971), pp. 608-611.

[20] A. F. Filippov, Differential equations with discontinuous right-hand sides. Ed. by F. M. Arscott. Transl. from the Russian. Mathematics and Its Applications: Soviet Series, 18. Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers. x (1988) pp. 304.

[21] Georgiev B., N. Ribarska, On sweeping process with the cone of limiting normals, *C.R.Acad. Bulg. Sci*, Vol 66, No5 (2013), 635-642.

[22] Georgiev B., N. Ribarska, On Sweeping Process with the Cone of Limiting Normals, *Set-Valued Var. Anal* 21 (2013), 673-689.

[23] T. HADDAD, A. JOURANI, L.THIBAULT, *Reduction of sweeping process to unconstrained differential inclusion*, Pac. J. Optim. 4 (2008), No. 3, 493-512.

[24] Henry C., An existence theorem for a class of differential equations with multivalued rihgt-hand side, *J. Mathematical Analysis and Application* 41 (1973), 179-186.

[25] Henry C., Differential equations with discontinuous right-hand side for planning procedures , *J. Economic Theory* Volume 4, Issue 3 (1972), 545–551.

[26] C.J. Himmelberg, F.S. Van Vleck, *Existence of solutions for generalized differential equations with unbounded right-hand side*, Journal of Differential Equations, Volume 61, Issue 3 (1985), pp. 295-320.

[27] St. jun. Lojasiewicz, *The existence of solutions for lower semicontinuous orientor fields*, Bull. Acad. Pol. Sci., Se'r. Sci. Math. 28 (1980), pp. 483-487.

[28] St. jun. Lojasiewicz, *Some theorems of Scorza Dragoni type for multifunctions with application to the probof existence of solutions for differential multivalued equations*, Mathematical control theory, Banach Cent. Publ. 14 (1985), pp. 625-643.

[29] Moreau J.J., Rafle par un convexe variable I, *Sém. Anal. Convexe Montpellier*, Exposé 15, (1971).

[30] Moreau J.J., Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space, *J. Differential Equations* 26 (1977), 347-374.

[31] Moreau J.J., On Unilateral Constraints, Friction and Plasticity, *New Variational Techniques in Mathematical Physics* (1974), 171-322.

[32] Krastanov M., Lecture Notes on Optimal Control, http://www.math.bas.bg/ krast/zip/OCnote.pdf (2007)

[33] M.I. Krastanov, N.K. Ribarska, *Viability and an Olech type result*, Serdica Mathematical Journal, Volume 39, Number 3–4 (2013), 423—446.

[34] Cz. Olech, *Existence of solutions of non-convex orientor fields*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 11 (1975), no. 3, suppl., 189-197.

[35] N. Ribarska, *Internal characterization of fragmentable spaces*, Mathematika 34 (1987), No.2, pp. 243-257.

[36] Rockafellar R.T., R. Wets, Variational Analysis, *Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 317, 2nd printing (2004).

[37] Serea O., On Reflecting Boundary Problem for Optimal Control, *SIAM J. Control Optim.*, 42(2) (2003), 559–575.

[38] V. V. Srivatsa, *Baire class 1 selectors for upper semicontinuous set-valued maps*, Trans. Am. Math. Soc. 337 (1993), No.2, pp. 609–624.

[39] Thibault L., Sweeping process with regular and nonregular sets, *J. Differential Equations* 193 (2003), 1—26.

[40] Veliov V., Sufficient conditions for viability under imperfect measurement, *Set-Valued Analysis* 1 (1993), 305–317.

[41] Venel J., Modélisation mathématique et numérique de mouvements de foule, *PhD Thesis - Université Paris-Sud*, http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00346035/fr (2008).