СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Ирина Здравкова Вутова

ЕВРИСТИЧНА И ПРОГНОСТИЧНА РОЛЯ НА ТЕОРЕМИТЕ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователна и научна степен
доктор
област на висше образование **1. Педагогически науки**
професионално направление **1.3. Педагогика на обучението по …**
научна специалност: **Методика на обучението по математика**

Научен ръководител:
проф. д-р Иван Тонов

Научно жури:
проф. д-р Кирил Банков
проф. д-р Иван Тонов
проф. дпн Сава Гроздев
проф. дпн Васил Милушев
проф. д-р Илия Гюдженов

София
2014

Дисертационният труд е представен, обсъден и гласуван за допускане до защита на разширено заседание на катедра „Обучение по математика и информатика” на Факултета по математика и информатика на Софийски университет „Св. Климент Охридски” на 26.06.2014.

Авторът е докторант редовна форма на обучение във Факултета по математика и информатика на Софийски университет „Св. Климент Охридски”.

Дисертационният труд е от 172 стандартни машинописни страници, състои се от увод, 3 глави, заключение и литература, която включва 86 заглавия, от които 66 на български език, 17 на руски език, 1 на английски език, 1 на гръцки език. Списъкът от публикации на автора по темата на дисертацията включва 7 заглавия, от които 2 монографични книги.

Публичната защита на дисертационния труд ще се състои на открито заседание на научното жури на .... 2014 г. (...........) от .... ч. в Заседателната зала на ФМИ (София, бул. Джеймс Баучер, 5).

Материалите по защитата са на разположение в библиотеката на ФМИ (София, бул. Джеймс Баучер, 5).

СЪДЪРЖАНИЕ

УВОД

ДЕДУКЦИЯ И ЕВРИСТИКА, ТЕОРЕМИ И ХИПОТЕЗИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Ако проследим списъка на теоремите в един курс по математика, непременно ще открием, че всяка следваща теорема следва от една или няколко от предходните. Например в училищната геометрия преди да срещнем теоремата на Питагор, ще срещнем теоремите-признаци за подобност на триъгълници. Една основателна, логическа причина за това теоремите за подобни триъгълници да предхождат Питагоровата теорема е обстоятелството, че тези теореми са включени в доказателството на последната.

По повод на формално-логическия стил на наредба на знанията в математиката точни и изразителни са думите на унгарския математик и философ Имре Лакатош:

> „В рамките на евклидовата методология се е развил задължителен стил на изложение, който ще наричам „дедуктивистки”. Този стил започва със старателно формулиран списък на **аксиоми, леми** и **дефиниции**. Аксиомите и дефинициите често изглеждат изкуствено и озадачаващо сложни. Никога не се казва откъде са възникнали тези усложнения. Списъкът от аксиоми и дефиниции е последван от грижливо изказани **теореми**. Те са натоварени с трудносмилаеми условия; изглежда невъзможно някой някога да се е досетил за тях. След теоремата идва **доказателството**. В стила на дедуктивизма е всички твърдения да са верни и разсъжденията – валидни. Математиката е представена като непрекъснато растящо **множество** от вечни, неизменни истини. Входът за контрапримери, опровержения и критика е забранен. Още отначало над предмета е осигурен авторитарен облак. Дедуктивисткият стил скрива борбата, скрива приключението. Изчезва историята, последователните пробни формулировки на теоремата в процеса на доказателствената процедура са обречени на забрава, докато крайният резултат е издигнат в свещена непогрешимост” [39].

Към тези разсъждения ще добавим, че и в обучението положението не е много по-различно, защото и при училищната математика (в горния курс) е използван дедуктивисткият подход на науката. Формулира се **теоремата**. След това се дава **доказателството**. След това се формулира следващата теорема и т.н. На това място, във връзка с изучаването на геометрията, ще парафразираме руския математик-педагог Николай Михайлович Бескин. При такъв начин на излагане за ученика (студента) остава неизяснен най-важният въпрос: защо авторът е включил в своя труд именно тази, а не друга теорема. Включването на коя да е теорема в един курс може да се обясни или с това, че в началото е поставен въпрос, отговор на който се явява дадената теорема, или че теоремата е необходима, защото на нея се основават по-нататък доказателствата на други теореми. Впрочем почти всички теореми имат и едното, и другото предназначение. При изграждането на курса авторите се ръководят от някои идеи, които водят към определен избор на теореми, но често тези идеи остават скрити от читателите. При подобно изложение на математиката, давайки направо формулировките на теоремите и техните доказателства, ученикът (студентът) е обречен на пасивно усвояване: на него не му остава нищо друго, освен да запомни формулировките и да провери правилността на доказателствата. Така той добива крайно ограничено поле на зрение: разглежда поотделно всички тухли, от които е построено зданието на математиката, но не получава достатъчно представа за това как от тези тухли се изгражда зданието цялостно [4].

Както в учебниците, така и в сборниците с решени задачи по математика положението е подобно. В тази връзка моят научен ръководител – професор Иван Тонов, казва:

> „Учащият се, който разчита на това как само от разглеждането на представителните примери в тези сборници да достигне до по-висока степен на овладяване на методите за решаване на задачи, често остава разочарован и обезверен, че никога няма да се справи с решенията на подобни задачи, защото според него те са над неговите възможности. По тази причина считам, че голяма част от

> особено инструктивните задачи трябва да бъдат снабдени с друг вид решения, от които да става ясно как авторът или друг индивид, поставен в неговата позиция, достига да успешното решение. Ключът към разработването на тези нови описания на решенията е в овладяването на евристиката, дейност на която се разчита силно да подпомогне обучението в решаване на задачи...” [81].

За да подчертаем изключителната роля на евристиката в интелектуалното развитие на ученика, ще цитираме и американския математик и педагог Дьорд Пойа:

> „Опитът на много учители показва, че способ на решение, открит от самия ученик и след успешното му приложение става не само нов елемент в логическата структура на неговите дейности, но и ценно достояние на ученика. В резултат на търсене и придобиване подобен род интелектуални ценности стават вътрешна потребност и мотив за всички следващи познавателни дейности. И колкото по-трудна е за човека задачата, толкова по-голяма е субективната значимост да се използва способът, който е довел до успешното решение” [65].

Ако евристичното мислене е необходимо при изучаване на математиката, то естествено е да бъде „два пъти” по-необходимо при нейното създаване. Във връзка с евристиката и нейната роля в изграждане на математиката големият френски математик Анри Поанкаре казва:

> „Математическите истини се извеждат от не много очевидни предложения с помощта на непогрешими разсъждения: тези истини са присъщи не само нам, но и на самата природа. ... Но размисляйки, забелязваме, че математикът, а също така и експериментаторът, не може да мине без **хипотеза**. Тогава възниква въпросът достатъчно здрави ли са всички тези построения и се прокрадва мисълта, че при най-лекия полъх те могат да рухнат...” [61].

В думите на Поанкаре се чете и мисълта, че при „строежа” на математическата сграда освен „надеждността” на конструкцията, съществено значение има и „здравината” на основата, на първоизточника.

КОНЦЕПЦИЯ НА ИЗСЛЕДВАНЕТО

ПРОБЛЕМ, ИДЕЯ, ПРЕДМЕТ, ЦЕЛИ, ХИПОТЕЗА, ЗАДАЧИ, МЕТОДИ

1. Проблем и идея

Безспорно е, че теоремите играят основната роля при строежа на математическата сграда, но дали само това е ролята им? Дали тя се изчерпва само с доказателствата на други теореми или с решаване на задачи? Дали теоремите нямат важна роля не само при построяването на математиката, но и при нейното проектиране? Дали освен доказателствена, която „гарантира" верността на откритото на практика знание, теоремите нямат и друга роля – роля, която „подвежда", насочва математическите разсъждения към знание, което е ново и все още „неоткрито"? С други думи, изниква въпросът дали теоремите освен доказателствена, имат и евристична и прогностична роля в построяването на математиката. Уводните думи и повдигнатите въпроси водят към идеята, че **освен като „градивен" материал при доказване на теореми и решаване на задачи, теоремите могат да бъдат надежден „извор" на нови хипотези (и теореми) в курса по математика**.

Новата идея поражда нови въпроси. В какво направление може да се търси евристичната (и прогностична) компонента на теоремите и как да се използва за целите на евристиката в обучението по математика? Тъй като става дума за достигане до ново знание, естествено е при оформяне на концепцията да се обърнем за помощ към науката за **творчеството**. Редица автори виждат обобщението като най-естествен подход за математическо творчество. Наред с това става ясно, че за да се направи обобщение, е необходимо да се разполага с „критична" маса от **подобни** знания с конкретен характер.

Така неминуемо достигаме до въпроси, свързани със същността на подобните или **аналогичните** знания. Ако „подредим" теоремите в курса не по логически, а по критерии на „сходство”, ще видим, че много от теоремите имат свои „двойници”, т.е. аналози. Добре известно е, че цели математически курсове са изградени на основата на идеята за дуалност. Това навежда на мисълта, че конкретната теорема не е уникален, единичен обект. Философската наука учи, че всяко явление има свое допълнение, с което се намират в диалектическо единство. Казано по друг начин, всяка теорема има свои аналози (двойници) и тяхното откриване (конструиране) е творческо постижение от ранга на откриването (конструирането) на самата теорема.

Ако аналогията бъде последвана от обобщение, то резултатът може да се окаже ново твърдение, което е твърде отдалечено от своя „прародител” – въпросната теорема, но въпреки това то носи в себе си „гените” на същата теорема. И така, по пътя на аналогията и обобщението може да се достигне до ново знание. Често пъти това е свързано с изследване на редица случаи, повечето от които са лишени от съдържание, но това не означава, че търсенията са напразни. Изниква въпросът как да бъдат ограничени (в рамките на здравия смисъл) случаите, провокирани от аналогията и обобщението. Или как да формулираме аналогични и общи твърдения с голяма вероятност за истинност.

Идеята за общия „произход” на знанията ни навежда на мисълта, че в резултат на промяна на част от свойствата (характеристиките) на „сигурни” (истинни) знания по пътя на аналогията и обобщението, вероятността да се достигне до ново истинно знание е голяма и си заслужава да се „експериментира” в тази посока.

2. За обекта, предмета и целите на изследването

Достигнахме до необходимостта да уточним кои знания от училищния курс по математика са „сигурни” и достатъчно „широки”, за да могат да послужат за основа на „строежа” на нови знания. Ясно е, че **теоремите** са знания, които отговарят както на изискването за „сигурност”, така и на изискването за „широта”. В духа на по-горното можем да кажем, че в този смисъл има основания да разглеждаме теоремите като „материал” (прототип) за получаване на нови знания по пътя на аналогията. И отново възникват въпроси. Ако се ползват теореми за първооснова на аналогични знания, то кои „характеристики” биха могли да бъдат запазени и кои да бъдат променени, така че техните „производни” (аналозите) да имат „смисъл” – да не са празни понятия или противоречиви твърдения?

Ясно е, че идеята за теоремата като извор на ново знание в математиката и обучението по математика е прекалено обща и непроверима в своята общност. Но това не е пречка да бъде проверена нейната ефективност в отделни конкретни случаи. За да подкрепим идеята, ние я конкретизирахме и я насочихме към теореми от курса по геометрия, чиито аналози все още не са открити (или все още не са популярни). В курса по геометрия непременно се натъкваме на една от „най-плодотворните” аналогии – аналогията между равнината и пространството (например триъгълник – тетраедър, успоредник – паралелепипед и т.н.). Независимо от прекомерната „употреба” ние не смятаме, че „потенциалът” на аналогията „равнина – пространство” (поне за целите на обучението по геометрия) е изчерпан. Погледнато от гледна точка на „смяна на характеристиката”, аналогията „равнина – пространство” означава смяна на **размерността** (от 2 на 3). С други думи, аналогията „равнина – пространство” би играла по-ярка евристична роля в обучението по математика, ако по-ясно и определено се открои характеристиката „размерност” на сравняваните (аналогичните) понятия.

Както е известно, при **векторното „определяне”** на геометричните понятия характеристиката „размерност” участва в явен вид. Това означава, че когато се търсят стереометрични аналози на планиметрични понятия (и теореми) смяната на размерността е почти „очевиден” вариант на решение при условие, че понятието (теоремата) е формулирано(а) на езика на векторната алгебра.

Казаното по-горе навежда на мисълта, че **векторно-алгебричното моделиране** е не само метод за решаване на задачи по геометрия, но може да бъде и евристичен подход при „разширяване” на геометричните знания, чрез конструиране и доказване на твърдения, които са аналогични на вече доказани такива (каквито са теоремите).

И така, ние си поставихме най-общо за цел да установим дали при търсенето на стереометрични аналози на планиметрични теореми евристичната и прогностична роля на аналогията „планиметрия – стереометрия” ще се „усили” в резултат на прилагането на векторно-алгебричен подход.

По-конкретно, **целта на изследването е да се разкрие и покаже евристичната и прогностична роля на векторно-алгебричното моделиране за построяване на пространствени аналози на планиметрични теореми от училищния курс по математика.**

3. За хипотезата на изследването

Изложената по-горе концепция ни довежда до следната формулировка на водещата хипотеза на изследването:

Векторно-алгебричното моделиране на понятия и теореми от геометрията е не само метод за решаване и доказване на формулирани (известни до този момент) геометрични задачи (теореми), но и стратегия за конструиране и решаване (доказване) на нови задачи (теореми), т.е. стратегия за математическо творчество.

В процеса на работата ние се ръководим от допускането, че „тайната” на аналогията в геометричните теореми се „крие” във векторно-алгебричния характер на геометричните понятия и се изразява в промяна на размерността.

За проверка на хипотезата е разработен вариант на евристична стратегия за конструиране на стереометрични аналози на планиметрични теореми с векторно-алгебрични средства. С оглед на това работата да не стане прекалено голяма по обем, ние се ограничихме да включим като предмет на изследването само векторно-алгебрично моделиране в афинното пространство (без да използваме метрични свойства). Разработената стратегия е приложена (апробирана) както при формулиране, така и при доказване на нови (непопулярни), нетривиални стереометрични резултати (теореми) – аналози на теореми от училищния курс по планиметрия.

4. За съдържанието, задачите и методиката на изследване

Погледнато от формална гледна точка, дисертационният труд е композиран в три глави и по този начин структурата отразява логиката на изследването. Но погледнато от съдържателна гледна точка, изследването се състои от две основни части – теоретична и приложна. Теоретичната част включва няколко направления и е реализирана на няколко етапа.

Отначало е направено литературно проучване (контент анализ) общо на въпроса за евристиката и прогностиката и проявленията им като аналогия и обобщение в математиката и обучението по математика.

На следващия етап е направен теоретичен анализ на същността, структурата и ролята на теоремите в методическата литература. Резултатите, получени от изследванията в първия и втория етап, потвърдиха предположението, че теоремите са „сигурната” основа за построяване на достоверни математически хипотези.

На третия етап нашите търсения са насочени към по-точното очертаване на идеята, нейното конкретизиране и към разкриване на „технология” за построяване на нови хипотези, чиито прототипи са добре известни теореми, по възможност от училищния курс по математика, които до този момент не са „обобщавани”. Водеща идея на този етап е идеята, че дуалната същност на теоремата може да бъде евристична и прогностична възможност за свързване на разнородни математически обекти.

Четвъртият етап на теоретичната част на изследването, вдъхновена от идеята за изоморфизма, изследва възможността векторно-алгебричното моделиране да бъде евристична „технология” за осъществяване на прехода равнина – пространство в обучението по геометрия.

Съединението на идеята за теоремите като прототип на нови хипотези и на идеята за естествените евристични и прогностични възможности на векторно-алгебричното моделиране в геометрията доведе до извеждане и формулиране на евристична стратегия за преход от равнината към пространството чрез „надграждане” на планиметрични теореми и построяване на техни стереометрични аналози.

Втората, приложната част на дисертацията е съществената част на изследването и включва конкретизиране и проверка на хипотезата в геометрията. Нейната цел е да апробира хипотезата на изследването и да регистрира ефекта на теоретично изведената стратегия за стереометрично „надграждане” на планиметрични теореми.

В тази част са изследвани възможностите за пространствени “надграждания” на равнинни теореми в две тематични направления от равнината към пространството. За целите на „доказателството” на хипотезата са предложени две групи от геометрични твърдения (теореми), построени и доказани в съответствие и подкрепа на разработената векторно-алгебрична стратегия за построяване на стереометрични аналози.

Предметът на първата група твърдения от втората част е свързан с понятията „конкурентност на прави в триъгълника” и „конкурентност на прави в тетраедъра”. Важно следствие от тази група са две теореми, които са пространствени аналози на теоремата на Чева и тяхното обобщение.

Предметът на втората група твърдения от втората част е свързан с понятията „лице на триъгълник” и „обем на тетраедър”. Важно следствие от втората група е теорема за обем на октаедър, за която беше показано, че е пространствен аналог на теоремата за лице на четириъгълник.

СТРУКТУРА И СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

(СЪКРАТЕН ВАРИАНТ)

ГЛАВА 1

ЗА ЕВРИСТИКАТА, ПРОГНОСТИКАТА И АНАЛОГИЯТА В МАТЕМАТИКАТА И В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

§1. За евристиката и прогностиката в математиката и теорията на математическото обучение

Специалистите по математическо образование са единни в мнението, че видният учен (математик и педагог) Дьорд Пойа (1887–1985) възражда евристиката в съвременна форма. Според Пойа, съвременната евристика се стреми да разбере процеса на решаването на задачи и по-специално мисловните операции, които като правило се използват при този процес. Особена популярност в средите на математици-педагози придоби неговата четириетапна евристична схема за решаване на задачи: 1) Разбиране на задачата; 2) Съставяне на план; 3) Провеждане на плана; 4) Поглед върху решението [62].

Дьорд Пойа създава и теорията на един широк клас от евристични разсъждения, които са не само подходящи, но и необходими за обучението по математика. Става дума за теорията на правдоподобните разсъждения. Наред с евристичната схема за решаване на задачи Д. Пойа достига и до евристична схема за математически открития.

За математическа евристика пише и споменатият в увода философ и математик Имре Лакатош (1922–1974). По думите на Лакатош математиката е продукт на човешка дейност. Математическата дейност произвежда математика. Но продуктът (математиката) се отчуждава от дейността, която го произвежда, превръща се в жив, растящ организъм и придобива известна автономност, своя диалектика. Евристиката се занимава с автономната диалектика на математиката. Според Лакатош математическата евристика прилича много на евристиката на природните науки – не защото и двете са индуктивни, а защото и двете се характеризират с хипотези, доказателства и опровержения.

От историята на науката е известно, че математиката е древна наука и нейните корени се губят в дълбините на векове и хилядолетия. В продължение на своята дълга история тя нееднократно е променяла своите идеали, а заедно с това и основните направления на своите изследвания, **но никога не е отричала по-рано получени знания. Нещо повече, широко е използвала тези знания за откриване на нови** (Гнеденко, [23]). Всеки такъв етап в развитието на математиката не само е обогатявал с нови понятия, методи и идеи, но е позволявал да се обхванат и нови области за практическо приложение, където по-рано не е имало такова. Какво се явява източник на нови проблеми, които водят до появата на нови математически идеи? Не е лесно да се отговори конкретно и еднозначно, но бъдещият учител трябва има готовност да даде отговор, разбира се повече или по-малко изчерпателен, и да даде примери от училищната математика, за да може да удовлетвори вътрешната потребност на своите ученици и да предизвика желание у тях да изпробват своите сили в математиката или нейни приложения.

§2. Евристика и прогностика в обучението по математика

За целите на настоящето изследване в този параграф проследяваме въпроса за евристиката и прогностиката в математико-методическата литература, която има водеща роля при подготовката на учителите по математика в България.

През 1996 г. излиза от печат първа част на „Методика на обучението по математика VIII–XI клас” [18] с автори И. Ганчев, Ю.

Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев, Ю. Сидоров, в която един параграф (§8) е посветен на евристичната дейност в обучението по математика. По същество това е първата книга по методика на обучението по математиката в България, в която се поставя въпросът за евристиката в математическото образование. Застъпено е становището, че: „Математиката като учебна дисциплина предоставя благоприятни условия за приобщаване на учениците към творческа изследователска дейност и за развиване на способност за изследване в процеса на обучение. Един от основните методи на работа в това обучение е евристичният метод, т.е. методът на откритието.” Авторите на методиката на обучението по математика [18] поместват и схема, по която протичат етапите на евристичната дейност (Всестранно изучаване на проблемите и овладяване до свободно боравене; Почивка (безсъзнателна дейност); Анализ, индукция, комбинации, сравнения, допълване на знанията, прилагане на някои схеми на действия; Скок и озаряване с нови идеи).

В своя хабилитационен труд „Евристиката – наука, изкуство, занаят” (2012), „посветен на решаване на математически задачи”, професор Иван Тонов изразява увереност, че „уменията за решаване на задачи могат да се преподават и да се изучават”, но за тази цел е необходимо „овладяването на **евристиката** – дейност, на която се разчита силно да подпомогне обучението в решаване на задачи”. Във връзка с творческия подход в обучението по математика проф. Тонов (като истински последовател на Д. Пойа) споделя концепцията:

> „... Математическото „know-how” е много по-важно от натрупването на информация. Какво е „know-how” в математиката? Това е умението да се решават задачи – не само рутинни, но и задачи, изискващи висока степен на независимост, преценка, оригиналност, творчество.”

Преподаването на решаване на задачи проф. Тонов свързва с пет категории: **проникване, запаметяване, подражание, екипна работа, рефлексия** (подчертаването мое – б.а.), които той свързва с евристичната схема на Пойа. Проф. Тонов намира най-широко място за евристиката във втората фаза от модела на Пойа – „Съставяне на план”. Нещо повече, според него втората фаза носи почти цялата отговорност за успеха на решаването:

> „Този провал (в решаването на задачата – б.а.) много често може да е резултат от неглижирането на втората фаза...” [81].

Проф. Тонов убедително аргументира издигането на евристиката в ранг на наука и разработва основни евристични стратегии при решаването на задачи в обучението по математика.

В своя труд „For High Achievements in Mathematics” (2007) професор Сава Гроздев отделя една глава (трета) на „Heuristic methods and activities of problem solving”. В точка 4 на глава 3 той анализира 13 евристични подхода за решаване на „олимпийски” задачи. Тъй като подходите могат да бъдат адаптирани и за училищната математика, то те имат значение и за обучението по математика като цяло. Проф. Гроздев изследва и връзката на евристиката с прогностиката при решаване на задачи:

> „Една от специфичните особености на човека е способността му да изгражда въображаема ситуация и да регулира действията си спрямо нея. Така се проявява характерната му способност да предвижда и да формулира правдоподобни съждения, т.е. проявява се антиципиращата функция на съзнанието. **Предвиждането и умението да се изказват правдоподобни хипотези** (подчертаването мое – б.а.) са основните съставки в дейността решаване на математически задачи... Прогнозирането при решаване на задачи се осъществява през целия процес на решаване, като се явява основа на етапа на търсене на решение и на евристичната дейност” [86].

В монографията „Конструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи” (2009) проф. Е. Скафа и проф. В. Милушев изграждат теоретични основи на обучението в евристична дейност на учениците, насочена към **решаване, конструиране и преобразуване** на задачи. На основата на категориите „евристична дейност”, „евристична ситуация” и

„евристична задача” авторите построяват дидактически модел на евристична дейност в обучението в съответствие с рефлексивно-синергетичния подход. Изрично се подчертава относителният (субективният) характер на понятието „евристична задача”. В своето изследване под „евристика” авторите разбират „**процес на търсене на нов продукт на дейността**” (подчертаването мое – б.а.). В центъра на своето внимание авторите поставят понятието „евристични прийоми” – особени мисловни прийоми, които се формират в хода на решаване на едни задачи и в по-малка или по-голяма степен съзнателно се пренасят при търсене решения и на други задачи. Ще обърнем внимание на още едно понятие, свързано с евристиката и въведено в монографията [67]. Става дума за понятието „евристична съставка на задачата”.

Анализът на литературата, предназначена за подготовка на учители по математика, ясно показва, че понятието „евристика” в методиката на математиката се среща много по-често, отколкото понятието „прогностика”. Освен това може да се твърди, че категорията евристика се свързва главно с **дейността решаване на задача**, докато категорията прогностика придружава евристиката по-скоро при описване на дейност, свързвана преди всичко с **откриване, конструиране на нови знания**. Също така намираме, че дейността решаване на задача в методиката на обучението по математика е изучена в по-голяма степен, отколкото дейността откриване и конструиране на нови знания.

Това ни дава основание в следващите параграфи да съсредоточим нашето внимание върху второто направление и по-конкретно върху евристиката и прогностиката при формулиране на хипотези и конструиране на нови (за ученика, студента) теореми в курса по математика.

§3. Евристика, прогностика, хипотеза или уточняване на понятията

Тъй като категориите евристика, прогноза и хипотеза са предмет на изследването и досега бяха използвани в интуитивен смисъл, намираме, че за по-голяма яснота в изложението по-нататък е необходимо да разграничим и уточним съдържанието, което влагаме в тях. Проучванията на литературата, които направихме, оформиха нашето виждане, че евристиката и прогностиката са тясно свързани с хипотезата. Нещо повече – винаги, когато се говори за хипотеза, има място както за евристика, така и за прогноза. За отправна точка при уточняване значението и връзката между посочените понятия избираме „Речник на чуждите думи в българския език”, издаден от Българската академия на науките през 1993 г.

Думата „хипотеза” идва от древногръцката дума υποϑεσις – научно предположение, което обяснява някакво явление или недоказан въпрос и трябва да се провери чрез доказателства, за да стане научна теория или закон.

Думата „евристика” произлиза от древногръцката дума ευρισκω, която в буквален превод означава „намирам”. Обикновено се свързва с радостния възглас ευρικα (открих), произнесен от древногръцкия учен Архимед (287–212 пр.н.е.), когато открил как да реши задачата за количеството на златото в короната на владетеля Хирон.

Думата „прогностика” произлиза от древногръцката дума προγνωσις, която в буквален превод означава „предзнание” („предварително знание”). Използва се в смисъл на предвиждане за развоя и края на процес, явление и подобни въз основа на известни данни.

За целите на изследването ние приемаме, че **евристиката** и **прогностиката** са разсъждения, свързани с **хипотезата**. Всяка хипотеза има два компонента – **условие** и **заключение** (причина и следствие, предпоставка и извод). Движението на мисълта от условието към заключението наричаме **прогностично разсъждение.**

Движението на мисълта от заключението към условието наричаме **евристично разсъждение**. При прогностиката мисълта се движи от причината към следствието, при евристиката мисълта се движи от следствието към причината. Прогнозата очертава **резултатите** от дадени условия, докато евристиката посочва **причините** за получени следствия.

При известни предпоставки (условия), за да достигнем до заключението, ние провеждаме прогностични разсъждения. Прогностичните разсъждения отговарят на въпросите **Как**? и **Какво**? Прогностичните разсъждения се основават на логически схеми за извод, каквито са правилата за извод, т.е. тези разсъждения са доказателствени (валидни). Тогава истинността на заключението зависи единствено от истинността на предпоставките.

При известни изводи (заключението), за да достигнем до предпоставките (условието), ние провеждаме евристични разсъждения. Евристичните разсъждения отговарят на въпросите **Защо**? и **Как**? Евристичните разсъждения се основават на логически схеми, които може да не са правила за извод, т.е. тези разсъждения често са само правдоподобни (без да са валидни). Тогава истинността на условието зависи както от истинността на заключението, така и от валидността на използваните логическите схеми.

От горните съждения става ясно, че понятията „евристика” и „прогностика” са в диалектическо единство, което означава, че появата на едното „индуцира” появата на другото, но езиковата практиката е наложила в повечето случаи употребата само на думата евристика. В този план на мисли и ние често използваме термина „евристика” и в смисъл на прогностика, без изрично да посочваме това.

§ 4. Аналогията – метод в математиката и евристичен подход в обучението по математика

Наред с индуктивните и дедуктивни умозаключения в обучението по математика много често се провеждат и заключения по аналогия. Както е известно, докато изводите, направени по дедуктивен път имат доказателствена сила, то заключенията по индукция (не математическа) и аналогия имат само евристична (или прогностична стойност) и се нуждаят от проверка (доказателство). Независимо от това индукцията и аналогията може би са най-силните средства на математическата евристика (и прогностика). Не е случайно това, че том първи на книга „Математиката и правдоподобните разсъждения” на Д. Пойа е озаглавен „Индукция и аналогия в математиката”. Следователно той поставя на едно равнище в обучението по математика евристичните подходи индукция и аналогия. Според него принципната разлика между индукцията и аналогията се отнася до следното. В основата на индукцията се намира експериментът (в умствен план), в резултат на който се получава множество от случаи (факти), от които след обобщение се достига до хипотезата. Докато при аналогията хипотезата се изгражда чрез „модифициране” на вярно твърдение (теорема) в случаи, които излизат извън рамките на началните условия.

Аналогията е описана пространно от Д. Пойа в една от неговите книги – „Математиката и правдоподобните разсъждения”, преведена на български език през 1970 г. от И. Димовски и И. Чобанов.

Според Пойа *аналогията* е вид подобие, подобие на концептуално ниво. Съществено различие между аналогията и другите видове сходства се крие в **намеренията на мислещия** (подчертаването мое – б.а.).

> „Сходните обекти се съгласуват един с друг в известно отношение. Ако възнамерявате **да сведете признака, по който те се съгласуват, до определени понятия** (подчертаването мое – б.а.), вие разглеждате тези сходни обекти като *аналогични*. Ако успеете да

> се домогнете до ясни понятия, вие сте изяснили аналогията. ... Две системи са аналогични, ако те *се съгласуват по ясно определени съотношения на техните части...*” [63].

Според Пойа откритията, дори твърде скромните открития, изискват нещо да се види, да се разпознае някоя връзка.

> „Вероятно няма откритие нито в елементарната, нито във висшата математика или пък в която и да е друга област, което да може да се направи без обобщението и специализацията и по-специално без аналогия... Изглежда, че аналогията има дял във всички открития, но в някои случаи на нея се пада лъвския пай...” [64]

Пойа посочва и връзката между евристиката и аналогията в следните съждения:

> „Едно предположение става по-правдоподобно след потвърждаването на ново следствие. ... Едно предположение става по-правдоподобно, когато стане по-правдоподобно едно аналогично предположение...” [64]

Пойа търси аналогията в математиката в три направления – сходство на съотношенията, изоморфизъм и хомоморфизъм.

Аналогията не е само предмет на метаматематиката. Категорията „аналогия” е един от въпросите, от които се интересуват и методиците на математиката. Още през 60-те години на миналия век П. Иванов в „Методика на обучението по математика” пише:

> „Аналогията е традуктивно умозаключение, при което от сходството на нещата в частни случаи заключаваме за сходството им в друг частен случай. ... Няма област в науката и живота, където да не се употребява аналогията. Тя дава насока на индуктивните и дедуктивните умозаключения. ... Изобщо заключенията по аналогия имат **познавателно значение** (подчертаването мое – б.а.) в науката и в обучението, но дават познания, които трябва да се доказват.” [34]

В излязлата през 1960 г. книга на съветския математик-педагог Пюря Ердниев „Сравнение и обобщение при обучении математике” [28] е отделено място за аналогията като „частен случай на **хипотетичното умозаключение**” (подчертаването мое – б.а.).

Ето структурата на умозаключенето по аналогия, предложена в книгата на Ердниев:

> „Предмет А има свойствата *a*, *b*, *x*. Предмет Б има свойствата *a*, *b*. Вероятно предмет Б има и свойството *x*."

По такъв начин умозаключенията по аналогия се явяват вероятни умозаключения; за да се изясни истинността или неистинността на „извода по аналогия", е необходимо допълнително да се изследва този извод [28].

Ердниев посочва, че в мисловния процес дори и водеща да бъде аналогията, в него участват и други мисловни форми:

> „Умозаключението по аналогия, разглеждано единствено в процеса на доказателство на неговата истинност, е диалектично по своята същност: тук тясно преплетени и взаимосвързани се срещат елементи на индукция и на дедукция. ... При използване на аналогия се извършва сложен мисловен процес, в който се прилагат в единство и взаимопроникване прийомите анализ и синтез... Изводът по аналогия може понякога да не се потвърди, или да се потвърди само частично..." [28]

През 80-те години на миналия век е отпечатана „Педагогика математики" [78], написана от съветския математик-педагог Абрам Аронович Столяр. (Книгата е преведена на български език през 1976 г. от М. Кучинова и Й. Кучинов (1929–2002) и става много популярна в средите на специалистите по математическо образование в България.)

Авторът (А. А. Столяр) разглежда аналогията като един от начините (наред с индукцията) за **математическо организиране** на емпиричния материал.

Както Пойа, така и Столяр свързва аналогията с математическото понятие „изоморфизъм":

> „Възможността за математическо организиране на различни предметни области с помощта на един и същ математически апарат, а също и прилагането на апарата на една математическа теория в друга се обяснява с разсъждения по аналогия, основани на дълбока

> прилика между някои предмети от различно естество. Това е структурна прилика, получила точно математическо описание с помощта на понятието изоморфизъм, което играе основна роля в съвременната математика... По-задълбоченото изследване на тези обекти позволява да се открие **структурна прилика** (подчертаването мое – б.а.), която е източник за разсъждения по аналогия, водеща към открития.” [78]

Евристичното понятие „аналогия” за целите на обучението по математика у нас е конкретизирано в посока „изоморфизъм” през 1996 г. в споменатата вече „Методика на обучението по математика от VIII до XI клас”.

> „При някои аналогии обектите a_1 и a_2 са системи, между които е налице **изоморфизъм** (подчертаването мое – б.а.) и тогава изводите са достоверни, но за да бъде човек сигурен в тях, трябва да е установил съответния изоморфизъм... Когато изоморфизмът е неизвестен, умозаключението остава за съответния човек аналогия и полученото съждение е само правдоподобно. ... В обучението по математика аналогиите имат, от една страна, **евристична роля** (подчертаването мое – б.а.), а от друга подпомагат и облекчават паметта. С тази си положителна роля аналогиите се използват в целия училищен курс по математика.” [18]

В „Методика на обучението по математика (обща част)“ с автори И. Ганчев, Ю. Нинова, В. Никова, издадена през 2002 г., ясно са формулирани ролята на аналогията за училищната практика. (Тя е силно евристично средство, защото спомага за откриване на нови свойства или твърдения; Спомага за по-лесното запаметяване на близки (сходни) знания или твърдения, т.е. облекчава паметта; Спомага за формиране на изследователски дух на работа, а оттам и за формиране на интерес към предмета; Спомага за откриване на решения (доказателства) на близки (сходни) задачи) и мястото на аналогията в учебния процес по математика (при въвеждане на понятия, при формиране на твърдения, при решаване на задачи, при преговор) [19].

За ролята на аналогията за развитие на творческото мислене на учащите се (ученици и студенти) пишат В. Милушев и Е. Скафа в споменатата вече книга „Конструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи”. Авторите разглеждат аналогията определено като един от видовете „**евристични прийоми**” (подчертаването мое – б.а.) на мисловна дейност.

> „В учебния процес широко се използва евристичният прийом **аналогия** – *умствено действие, насочено към получаване на нови знания за свойствата, признаците, отношенията на предметите и явленията, които се изучават, въз основа на знанията за тяхното частично сходство с други предмети или явления...* Аналогиите играят голяма роля и в процеса на търсенето на решения на задачи, а също така и при съставяне на задачи, аналогични на дадените, но по-сложни.” [67]

С оглед целите на изследването ще отбележим по-конкретно „великата аналогия” – аналогията между планиметрията и стереометрията. По думите на Д. Пойа тази аналогия има много аспекти и поради това е често двусмислена и не винаги отчетлива, но тя е неизчерпаем източник на нови идеи и нови открития... Съществуват няколко аналогии между планиметрията и стереометрията, а не само една [63].

Аналогията „планиметрия – стереометрия” като евристичен подход за съставяне на задачи е експлоатирана твърде успешно от П. Ердниев в цитираната по-горе книга „Сравнение и обобщение при обучении математике” [28]. Втората част на книгата е посветена на съставяне и решаване на задачи, получени на основата на аналогията „планиметрия – стереометрия”. В тази част Ердниев разработва осем теми. Във всяка от темите задачите са формулирани по двойки – планиметрична, стереометрична. Аналогията е използвана не само при формулирането на задачите, но и при тяхното решаване.

След анализа на литературата в този параграф направихме изводи, които накратко се свеждат до следното:

- **Аналогията, като мисловен подход за конструиране на правдоподобни разсъждения има голяма евристична и прогностична стойност и като плодотворен източник на хипотези отваря широко вратите на учащите се към математическото творчество.**
- **Аналогията е по-тясно свързана с готовия продукт (теоремата), отколкото с множеството от частни случаи, чието обобщение е теоремата.**
- **Независимо от това (а може би и точно поради това), че аналогията *„планиметрия – стереометрия”* е използвана широко както в математиката, така и в обучението по математика, тази аналогия остава едно от най-естествените, логически достъпно и дидактически целесъобразно евристично и прогностично средство за математическо творчество.**

ГЛАВА 2

СЪЩНОСТ, СТРУКТУРА И РОЛЯ НА ТЕОРЕМИТЕ В МЕТОДИКАТА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

§1. Класически подход за анализ на същността и структурата на теоремите в методиката на обучението по математика

В методиката на математиката до този момент са използвани два подхода при анализа на категорията „теорема в обучението по математика” – класически (анализ със средствата на класическата логика, в стила на Аристотел) и съвременен (анализ със средствата на математическата логика и теория на множествата).

В този параграф е представен накратко класическият подход при изучаване на теоремите в училищните курсове по математика. За направения анализ на теоремата за целите на методиката на математиката от гледна точка на класическата логика (в стила на Аристотел) са ползвани две от популярните за времето си методически книги, намерили място при подготовката на студенти-бъдещи учители по математика в България, през 50-те–70-те години на миналия век. Става дума за „Методика на геометрията” [4] с автор Н. М. Бескин, преведена на български език от Л. Чакалов, Л. Илиев и Ал. Матеев и издадена в София през 1950 г. (руското издание е от 1946 г.) и „Методика на обучението по математика” [34] (пето преработено и допълнено издание) с автор П. Иванов, издадена в София през 1965 г. (Първото издание е от 1950 г.)

В методическата литература от началото на 50-те години на миналия век теоремата е вече предмет на изучаване, т.е. теоремата е не само метаматематическа, но и методическа категория. Отначало авторът (Н. М. Бескин) разглежда два вида твърдения – твърдението (теоремата) като приписване признак на понятие и твърдението (теоремата) като включване на клас в клас. Н. М. Бескин разглежда и въпроса за обратните и противоположни теореми и връзката между видовете теореми.

> „Съждението, в което условието и следствието са разменени (т.е. следствието е направено условие и условието – следствие) се нарича обратно по отношение на даденото предложение, а самото дадено – право. Съждение, в което условието и следствието се отричат, се нарича противоположно по отношение на даденото.” [4]

Авторът смята, че силогистичната (импликативна) форма на теоремите е по-удобна за анализ. (Към това мнение се придържаме и ние в разработката.)

Интерес за изследването представлява и мнението на Н. М. Бескин за евристичния подход при изучаване на геометрията:

> „Методът, който ние препоръчваме, се казва генетичен. При този метод всеки ученик става активен създател на геометрията: ние му поставяме проблеми, при решението възникват отделни теореми и цели отдели на геометрията...” [4]

Теоремата като предмет на методиката на обучението по математика е включена и в труда на основателя на катедрата по математическо образование във Физико-математическия факултет при Софийския университет доцент Петко Иванов – Методика на обучението по математика [34]. Прави впечатление, че докато при Н. Бескин теоремите са свързани явно с понятията и са неразделна част от логическите знания, то при П. Иванов теоремите са класифицирани като форми на мисленето, заедно с понятията, аксиомите, индукцията, дедукцията и аналогията. Разсъжденията в тези учебници са вербални, без да е използван по същество символен език. Става ясно, че теоремата е съждение, което свързва условието и заключението. Но не е напълно изяснено каква е същността на условието и каква е същността на заключението. При внимателен прочит на текстовете се долавя определена „двойственост”. От примерите се вижда, че в едни случаи условието се „проявява” като съждение, а в други – като понятие. Аналогично може да се каже и за заключението. За връзката между условието и заключението се подразбира, че „от условието следва заключението”, но толкова. Все още не е използван адекватен език за точно и пълно описание на структурата и същността на теоремата.

§2. Съвременен подход за анализ на същността и структурата на теоремата в методиката на обучението по математика

В този параграф е направен методически анализ на понятието теорема от гледна точка на математическата логика и теорията на множествата въз основа на три книги, свързани с методиката на обучението по математика. Първата от тях е книгата „Прямая и обратная теоремы” [24], (пето издание) с автор И. С. Градщейн. Книгата е издадена в Москва през 1972 г. (Първото издание е от 1936 г.). Другите две са споменатите вече действащи учебници по методика на математиката за студентите-бъдещи учители по математика в България – „Методика на обучението по математика VIII–XI клас (първа част)” [18] от 1996 г. и „Методика на обучението по математика (обща част)” [19] от 2002 г. Тези книги дават възможност да се проследи развитието на концепцията за същността на теоремите в обучението и да се хвърли светлина върху ролята на теоремите за евристиката в обучението по математика.

Градщейн използва явно понятието „множество” в първата част на своята книга и свързва теоремата с това понятие по следния начин:

> „Всяка теорема сама по себе си „постановява”, че изучаваният математически обект или съвкупност от обекти притежава някакво свойство. Теоремите и особено системите теореми служат за изучаване на съвкупности (множества) от обекти, притежаващи някакви свойства. За да бъде по-лесно да се отделят условията, при които се разглеждат обектите, от това, което се твърди за тях, теоремите често се формулират във вида на условно изречение, имащо формата „ако..., то...”. Първата част, започваща с „ако”, се нарича условие на теоремата, а втората част, започваща с думата „то”, се нарича заключение на теоремата. ... Теорема, обратна на дадена, се нарича такава теорема, условието на която служи за заключение на дадената, а заключението – за условие на дадената. ... Две изречения, едното от които твърди, че елементите на дадено множество М, притежаващи свойството α , притежават и свойството β, а другото, че елементите на М, притежаващи свойството β, притежават и свойството α, се наричат взаимно обратни теореми.” [24]

Втората част на книгата на Градщейн е озаглавена “Элементы математической логики”. В нея авторът разглежда въпросите истинност и неистинност на съжденията, операциите конюнкция, дизюнкция, отрицание, импликация и равнозначност (които той нарича връзки) и релациите следва и еквивалентност. След теоретичните бележки по математическа логика авторът се връща отново на въпроса за обратната и противоположната теорема, като за целта теоремата е представена в импликативна форма.

В книгите [18], [19] са отразени както множествената, така и логическата страна на теоремата, но за целта е използван апаратът на математическата логика и по този начин на преден план е изведена логическата характеристика. В посочените книги теоремата е математическо твърдение (съждение), верността на което се установява на базата на аксиоми или вече доказани твърдения, прилагайки някои правила за извод или закони от логиката. Във всяка теорема обикновено се изразяват нови свойства на обектите от обема на някое понятие, които не са посочени в определението на това понятие, или нови признаци, по които може да се разпознават обекти от обема на понятието, които също не са посочени в определението. В първия случай се казва, че теоремата осигурява необходими условия за съществуването на съответно понятие, а във втория – достатъчни условия. В училище вместо тези названия често се употребяват съответно теорема-свойство и теорема-признак [18].

Тъй като с изучаването на теоремите-свойства се усвояват нови свойства на обекти от обемите на понятията, а с изучаването на теоремите-признаци се установяват нови признаци, чрез които могат да се разпознават обекти от обемите на понятията, можем всъщност да кажем, че изучаването на понятията става чрез изучаване на теоремите за тях...

> „Теоремите обслужват понятията, т.е. те изпълняват помощни функции по отношение на понятията. Теоремите са подчинени на понятията... Ако за определенията не се поставяше ограничението икономичност (съразмерност), то тогава нямаше да има теореми, нямаше да има доказателства, а това означава, че нямаше да има такава математика, каквато съществува сега.” [19]

В посочените книги се пояснява, че във всяка теорема онова, което трябва да се установи за някакви обекти, се нарича **заключение**, а това, което е дадено за тези обекти, се нарича **условие**.

Езикът на математическата логика дава възможност да се покаже структурата както на теоремата, така и на математическото доказателство. Например структурата на прякото доказателство на твърдения от вида $p \to q$ се основава на хипотетичния силогизъм $\frac{p \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, ..., p_k \to q}{p \to q}$, където всяка от импликациите $p \to p_1$ и $p_i \to p_{i+1}$ се основа на аксиома, теорема или определение. Откриването на доказателството на твърдението $p \to q$

се свежда до откриването на импликациите над чертата в хипотетичния силогизъм и подреждането им в съответния ред.

Авторите на [19] обръщат внимание и на едно обстоятелство, което е важен фактор при очертаване на евристичната роля на теоремите. Подчертано е, че в училищния курс по математика теоремите за едно и също понятие са „разпилени” в учебници от различни класове. Причината за това разчленяване (анализ) и разпиляване на знанията за математическите понятия е изискването за дедуктивно структуриране на науката математика и оттам на съответния предмет. В изпълнение на това изискване всяка теорема се изучава там, където може да се докаже, т.е. с доказателствата си „теоремите си намират мястото” в системата от знания по математика. Това създава трудности при запомняне и използване на теоремите при доказателства на други теореми и при решаване на задачи. За да се преодолее тази дидактическа трудност и за увеличаване на евристичните възможности на учениците, авторите на [18] и [19] предлагат нова организация на теоремите при „второто четене” на учебника по математика. Става дума за систематизиране на теоремите около понятията в дидактически системи от признаци (ДСП) и дидактически системи от свойства (ДСС), с което се облекчава запаметяването на знанията за отделните понятия, защото те се синтезират на базата на асоциативното свойство на паметта, а от друга страна се осигуряват условия за оперативност в разсъжденията, защото целенасочено се създават надеждни области на търсене.

От представените текстове се вижда, че тълкуването на теоремата само от гледна точка на математическата логика или само от гледна точка на теория на множествата е най-малкото едностранно и само едната гледна точка не е достатъчна за построяване в „завършен” вид на понятието теорема за целите на обучението по математика.

Налага се изводът, **че в методическата „дефиниция” на теоремата участват „равностойно” както математико-логически, така и теоретико-множествени понятия.**

§3. Изоморфизъм между алгебрата от свойствата и алгебрата от обемите на математическите понятия. Дуална същност на теоремите

В предходния параграф понятието „аналогия” беше свързано с понятието „изоморфизъм”. Беше казано, че в математиката изоморфизмът играе много важна евристична роля и че в основата на изоморфизма стои дуалността.

Да си представим едно математическо понятие P с обем V и съдържание S. Обемът V е множество от конкретни обекти, а съдържанието S е система от конкретни свойства. Тъй като както V, така и S задават едно и също понятие (P) , то в съдържателен план V и S са тъждествени, т.е. обемът и съдържанието са тъждествени. От друга гледна точка, съдържанието S е съждение (или конюнкция или дизюнкция от съждения), а обемът V е множество. Това обстоятелство може да се интерпретира в смисъл, че обемът V на понятието е тъждествен със съждението S, което задава (дефинира) понятието.

Всяко математическо съждение p, изразявайки някакво свойство, определя съдържателно едно математическо понятие P. Тъй като релацията „еквивалентност” ($\Leftrightarrow$) в множеството на съжденията е релация на еквивалентност, тя разделя множеството на съжденията на класове от еквивалентни съждения. Това означава, че еквивалентните съждения ще определят тъждествени понятия.

Вярно е и обратното – съдържанието на всяко понятие P е някакво свойство, по този начин то задава (неявно) едно съждение p. Тъй като релацията „тъждественост” ($\equiv$) в множеството на понятията е релация на еквивалентност, тя разделя множеството на понятията на класове от тъждествени понятия. Това означава, че тъждествените понятия ще определят еквивалентни съждения. С други думи, между множеството от класовете на еквивалентност на съжденията и множеството от класовете на еквивалентност на понятията съществува биективно изображение.

От изложеното в горните две точки и последната констатация става ясно, че между съждителната алгебра и понятийната алгебра съществува изоморфизъм. Той може да бъде реализиран чрез изображението, при което на всяко съждение p се съпостави понятието P, чието съдържание се задава чрез p и обратно.

Бележка. За краткост в тази точка вместо „съждение за свойство” ще казваме само „съждение” и вместо „обем на понятие” ще казваме само „понятие”.

По-точно, изоморфното съответствие между алгебрата на сажденията и алгебрата на понятията се състои в следното:

- на *съждение* отговаря *понятие*, т.е. $p - P$;
- на релация *еквивалентност* отговаря релация *тъждественост*, т.е. $\Leftrightarrow\ - \equiv$;
- на релация *следва* отговаря релация *включва се* , т.е. $\Rightarrow - \subseteq$;
- на операция *конюнкция* отговаря операция *сечение*, т.е. $\wedge - \cap$;
- на операция *дизюнкция* отговаря операция *обединение*, т.е. $\vee - \cup$;
- на операция *отрицание* отговаря операция *допълнение*, т.е. $\bar{\ } - \bar{\ }$.

За удобство ще формулираме логическите правила за извод на логико-множествен език.

Модус поненс

Формулировка на езика на съжденията:

$\forall p, \forall q, \{(p \to q) \wedge p\} \Rightarrow q.$

Формулировка на езика на множествата:

$\forall x, \forall P, \forall Q, \{(x \in P) \wedge (P \subseteq Q)\} \Rightarrow (x \in Q)$ (x е конкретно понятие)

Модус толенс

Формулировка на езика на съжденията:

$\forall p, \forall q, \{(p \to q) \wedge \bar{q}\} \Rightarrow \bar{p}$

Формулировка на езика на множествата:

$\forall x, \forall P, \forall Q, \{(x \notin Q) \wedge (P \subseteq Q)\} \Rightarrow (x \notin P)$

Хипотетичен силогизъм

Формулировка на езика на съжденията:

$\forall p, \forall q, \forall r, \{(p \to q) \wedge (q \to r)\} \Rightarrow (p \to r)$

Формулировка на езика на множествата:
$\forall x, \forall P, \forall Q, \forall R, \{(x \in P) \wedge (P \subseteq Q) \wedge (Q \subseteq R)\} \Rightarrow (x \in R)$

Наличието на изоморфизъм между алгебрата на съжденията и алгебрата на понятията дава възможност и теоремите да бъдат формулирани дуално – на езика на математическатаа логика и на езика на теория на множествата. Известно е, че в голямата си част теоремите в обучението по математика имат (или могат да бъдат приведени към) импликативна форма. Казано по-точно, теоремата има логическата структура на импликацията. Да разгледаме един елементарен пример от училищния курс по планиметрия.

Да означим с p: „Четириъгълникът ABCD е квадрат” и с q: „Четириъгълникът ABCD е ромб”. Сега теоремата Т: „Ако четириъгълникът ABCD е квадрат, то ABCD е ромб” добива вида Т: $p \rightarrow q$, където p и q са съждения, а импликацията $p \rightarrow q$ е истинна. Тъй като импликацията $p \rightarrow q$ е истинна, то съжденията p и q са свързани с релацията „следва”, т.е. $p \Rightarrow q$. Това означава, че теоремата Т може да се „дефинира” като двойка съждения p и q, свързани с релацията „следва”, т.е. Т: $\{(p, q), p \Rightarrow q\}$.

От друга страна съжденията p и q определят съответно две понятия – P и Q, където P е понятието квадрат, а Q е понятието ромб, които са свързани с релацията „се включва в”, т.е. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q}$. От своя страна това означава, че теоремата Т може да се интерпретира като двойка понятия P и Q, свързани с релацията „се включва в”, т.е. Т: $\{(\mathrm{P}, \mathrm{Q}), \mathrm{P} \subseteq \mathrm{Q}\}$.

(За удобство в изказа понякога вместо релация „се включва в” ще употребяваме релация „следва от”, т.е. „следва” означава „включва” и в записа вместо знака $\subseteq$ ще употребяваме знака $\Rightarrow$, т.е. $\Rightarrow$ означава $\subseteq$.)

Тъй като теоремата Т може обобщено да се разглежда като двойка съждения p и q, свързани с релацията „следва”, т.е. **Т:** $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$, то обобщено доказателството D на теоремата е изградено от крайната редица от съждения:

$$p, p_1, p_{2,} p_3, \cdots p_{\mathrm{n}}, q,$$

за които всяко следващо е следствие на предходното, т.е.

D: $p \Rightarrow p_1, p_1 \Rightarrow p_2, p_2 \Rightarrow p_3, \dots p_{n-1} \Rightarrow p_n, p_n \Rightarrow q$.

Беше показано, че теоремата T може обобщено да се разглежда и като двойка понятия P и Q, свързани с релацията „се включва в ”, т.е. **T:** $\boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{Q}$, то обобщено доказателството D на теоремата е изградено от крайната редица от понятия:

$P, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, Q,$

за които, всяко следващо е разширение на (включва) предходното, т.е.

D: $P \subseteq P_1, P_1 \subseteq P_2, P_2 \subseteq P_3, \dots, P_{n-1} \subseteq P_n, P_n \subseteq Q$.

Ето някои **изводи** за евристични възможности при обучението, произтичащи от дуалната същност на теоремата.

1) Предложените трактовки осигуряват възможности за изследване на теоремата (хипотезата) с два „вида” инструменти – както със средствата на математическата логика, така и със средствата на теория на множествата. Често пъти от евристична (и дидактическа) гледна точка двата подхода не са равностойни. Например предимството на единия (или другия) подход може да проличи при извличане на следствия от теоремата (хипотезата) с цел търсене на доказателство (потвърждение или опровержение).

Действително. Нека е дадено твърдението T: $p \Rightarrow q$, където съжденията p и q са съответно условието и заключението. Нека съждението p_1 е допълнително условие и съждението q_1 е алтернативно заключение. Образуваме конюнкцията p^* на съжденията p и p_1, т.е. $p^* = p \wedge p_1$ и дизюнкцията q^* на съжденията q и q_1, т.е. $q^* = q \vee q_1$. Формулираме ново твърдение T*: $p^* \Rightarrow q^*$. Новото твърдение е логическо следствие на първоначалното, защото условието p е следствие на новото условие p^* и новото заключение q^* е следствие на заключението q.

Ако това бъде изказано на езика на понятийната алгебра, ще изглежда по следния начин: Нека понятието P_1 е допълнително условие и понятието Q_1 е алтернативно заключение. Образуваме сечението P^* на понятията P и P_1, т.е. $P^* = P \cap P_1$ и обединението Q^* на понятията Q и Q_1, т.е. $Q^* = Q \cup Q_1$. Формулираме ново твърдение Т*: $P^* \subset Q^*$. Новото твърдение е логическо следствие на първоначалното, защото новото условие P^* е включено в P и новото заключение Q^* включва Q.

Евристичната „полза” от построяване на новото твърдение се състои в следното: Ако полученото следствие Т* е истинно, то това прави даденото твърдение Т по-вероятно; Ако следствието Т* не е истинно, то това е гаранция, че даденото твърдение Т не е вярно.

2) Дуалните формулировки на теоремата осигуряват нейната завършеност при изучаването. Наличието на изоморфизъм между алгебрата на съжденията и алгебрата на понятията предоставя логическа възможност за паралелно изучаване на двете страни на теоремата. Теоремата от тип „съждение – понятие” осигурява достатъчни условия за понятието („теорема-признак”). Теоремата от тип „понятие – съждение” осигурява необходимо условие за понятието („теорема-свойство”).

3) Различните формулировки на теоремата имат различна евристична стойност.

Да разгледаме две различни формулировки на теоремата на Питагор.

Т1. Ако a, b и c са съответно катетите и хипотенузата на правоъгълен триъгълник, то $a^2 + b^2 = c^2$.

Т2. Ако триъгълникът има прав ъгъл, то лицето на квадрата, построен върху хипотенузата, е равно на сбора от лицата на квадратите, построени върху катетите.

Според нас първата формулировка е по-кратка, но втората има по-голяма евристична стойност, защото по-естествено би ни насочило към аналогичното твърдение за пространството: Ако тетраедърът има прав тристенен ъгъл, то сборът от квадратите на лицата на стените, сключващи правия ъгъл, е равен на квадрата на лицето на стената срещу правия ъгъл. (Както е известно, формулираното твърдение за тетраедъра е вярно, т.е. то е една от теоремите в стереометрията.)

4) Различните формулировки (модели) на една и съща теорема дават възможност за промяна на гледната точка към теоремата и това обстоятелство може да има евристична стойност в две направления. Едното от тези направления е при търсене на доказателството на теоремата, а другото – при търсене на аналози на теоремата.

§4. За четирите роли на теоремата в обучението по математика

За да може по-пълно да се разкрие „евристично-прогностичния” заряд на теоремите, в този параграф на дисертацията са очертани главните (според нас) роли, които те играят в обучението по математика. Чрез конкретни примери са отделени доказателствената (валидизираща), експликативната, прогностичната и евристичната роля на теоремите в обучението по математика.

Във всяко доказателство участват съждения-предпоставки, теореми (правила) и съждения-заключения. В доказателството се държи сметка както за истинността, така и за валидността на заключенията. Дадено разсъждение е доказателство тогава, когато използваните заключения са истинни и са валидни. Теоремите са истинни съждения, които участват (в доказателствените разсъждения) в ролята на „големите предпоставки” в схемите за извод.

За да бъдем по-ясни, същността на понятията „истинност” и „валидност”, приликата и разликата между тях, както и мястото и ролята на теоремите в това отношение са представени чрез примери, свързани с питагоровата теорема.

Коментар 1. Теоремата **валидизира** (узаконява) заключенията, когато малката предпоставка отговаря на условието на теоремата. Тъй като теоремата е истинно съждение, то при истинност на предпоставката се осигурява истинност и на заключението.

Добре известно е, че една от основните познавателни цели на обучението по математика е да осигури разбиране на математическите понятия, съждения, умозаключения. Без разбиране не може да има усвояване, да не говорим за овладяване на математическите знания. Разбирането е в основата на всяка рационална дейност. От педагогическа гледна точка разбирането се осигурява от обяснението. Обяснението и разбирането са в диалектическо единство. „Обяснението изисква разбиране, а разбирането предполага обяснение” (В. Бузов, [9, 138]). Теоремите играят важна роля при обяснението на математическите факти.

Коментар 2. В случай, че ситуацията е зададена „пълно”, т.е. и трите компоненти на схемата за извод са ни известни, теоремата играе **експликативна** (обяснителна) роля – роля, която обяснява логическата причина за верността на следствието.

Коментар 3. В случай че ситуацията е зададена „частично” – известни са условието p и ние сме запознати с теоремата Т, теоремата играе **прогностична** роля – роля при която се намира заключението (прогнозата) q .

В думата прогноза ние влагаме смисъл на заключение (съждение), следващо логически от дадени предпоставки. (В тази точка с пример, свързан с питагоровата теорема, е представено нашето виждане за същността на прогностичната роля на теоремите в обучението по математика, т.е. прогностичната роля на теоремите по-скоро е свързана с тяхното приложение при решаване на задачи.)

Коментар 4. Евристичната роля на теоремата е показана на фона на останалите три – валидизираща, обясняваща и прогнозираща. В случай, че отначало е известно само условието p и се изисква да се прогнозира заключението q. За целта се привлича хипотезата Н и се допълва схемата за извод, т.е $(p \wedge \text{H}) \Rightarrow q$.

Нека отбележим, че верността на заключението q зависи от верността на хипотезата Н. Известно е, че ако хипотезата Н е истинна (теорема), то и заключението q е истинно; ако хипотезата Н не е истинна, то за заключението q нищо не може да се твърди със сигурност.

И така: В случай, че ситуацията е зададена „частично” – известно е само условието p и „малката” теорема, би могло да се формулира хипотеза Н, за да се направи прогнозата. В този случай

„малката” теорема играе **евристична** роля – ролята на прототип при формулирането на хипотезата Н.

Изводи: В зависимост от начина, по който се осъществява прехода от условие към заключение, разсъжденията могат да се разделят на доказателствени и хипотетични. В първия случай заключенията се получават по правилата за извод („пътят на логиката”). Във втория случай при прехода към заключението може да има отклонение от правилата за извод. В първия случай при условие, че предпоставките са верни (сигурни), то и заключението е вярно (сигурно). (В случай, че някои предпоставки не са верни, верността на заключението не е сигурна.) Във втория случай, независимо от верността (неверността) на предпоставките, верността (неверността) на заключението не е гарантирана.

§5. Теоремата – прототип на хипотеза. Обща евристична схема за формулиране на хипотези

Вероятността за истинност на заключението при евристичните разсъждения е по-голяма, ако е сигурно, че предпоставките са истинни. Това е сериозно основание хипотезите да се изграждат върху „здрава” основа. С други думи, вероятността една математическа хипотеза да бъде истинна е голяма тогава, когато хипотезата има за прототип известна математическа теорема. В този смисъл **теоремите са най-естествените първообрази на хипотезите като продукт на евристично-прогностична дейност в „ателието” на математическото обучение.** Така както художникът при създаване на нов образ често пъти има за прототип определен (реален) типаж, така и математикът при формулиране на нова хипотеза често пъти има за първообраз определена (реална) теорема. В резултат на проучванията, които направихме и изложихме в предходните параграфи, ние достигнахме до една обща схема за достигане до хипотези, тръгвайки от дадена теорема (от училищния курс по математика). Накратко схемата може да бъде представена по следния начин:

Отначало се прави анализ на теоремата $\boldsymbol{p \to q}$, при който ясно се отделят условието p и заключението q. След това по пътя на аналогията се формулира ново условие P (аналог на условието p). Също така, на основата на аналогията, се формулира ново заключение Q (аналог на заключението q). Накрая новите условие P и заключение Q се свързват в ипликация. Така се достига до хипотезата $\boldsymbol{P \to Q}$.

Този мисловен процес нарекохме обща евристична схема за формулиране на хипотези. Схематично той може да бъде представен, както е показано по-долу.

Обща евристична схема за формулиране на хипотези

ГЛАВА 3

ВЕКТОРНО-АЛГЕБРИЧНО МОДЕЛИРАНЕ – ЕВРИСТИЧЕН ПОДХОД В ОБУЧЕНИЕТО ПО ГЕОМЕТРИЯ

§1. Теоретико-приложни основи на векторно-алгебричното моделиране в курса по геометрия

Основните принципи на векторно-алгебричното моделиране в геометрията са заложени в няколко твърдения, някои от които в геометричната система на Вайл са аксиоми.

От първата група аксиоми (за свойствата на нанасянето на вектор) от аксиоматиката на Вайл непосредствено следва, че геометричното понятие **наредена двойка точки (насочена отсечка)** се моделира с понятието **вектор**.

От втората група аксиоми (за свойствата на събирането на вектори) от аксиоматиката на Вайл непосредствено следва, че наредената **двойка съвпадащи точки** (**нулевата отсечка**) (A, A) се моделира с **нулевия вектор** и **наредените двойки точки** (насочени отсечки) (A, B) и (B, A) се моделират с **противоположни вектори**.

От казаното дотук става ясно, че между множеството на точките (от пространството) и множеството на векторите с общо начало O (радиус-векторите) съществува биективно изображение, т. е. на всяка точка A съответства точно един вектор $\overrightarrow{OA}$ и обратно. Векторът $\overrightarrow{OA}$ се нарича **радиус-вектор** на точката A.

От формулираните аксиоми произтичат следствия за: **среда на отсечка**, **деление на отсечка от точка в дадено отношение, медиана в триъгълник, медицентър на триъгълник, средна отсечка в триъгълник, средна отсечка в четириъгълник, медицентър на четириъгълник, ъглополовяща в триъгълник, пресечна точка на ъглополовящите**, изразени със съответни **векторно-алгебрични равенства**.

Правата е производно понятие в аксиоматиката на Вайл, което се дефинира с векторно-алгебрични средства. Дефиницията на

Вайл дава възможност понятието **права** и релациите **принадлежност на точка към права, колинеарност на три точки и колинеарност на две прави** да се моделират с векторни равенства.

Равнината е производно понятие в аксиоматиката на Вайл, което се дефинира с векторно-алгебрични средства. Дефиницията на Вайл дава възможност понятието **равнина** и релациите **принадлежност на точка към равнина, компланарност на четири точки, компланарност на права и равнина, компланарност на две равнини** да се моделират с векторни равенства.

По друг начин казано, равнината α е двумерно векторно пространство с база двойка неколинеарни вектори $(\vec{a}, \vec{b})$, компланарни на равнината.

Пространството също може да бъде дефинирано с помощта на векторно-алгебрични средства. Тази дефиниция позволява релацията **принадлежност на точка към пространството** да се моделира с векторни равенства.

В тази точка ще формулираме три твърдения (теореми), които осигуряват възможност за моделиране на отношения на дължини на колинеарни отсечки, отношения на лица на компланарни триъгълници (успоредници), отношения на обеми на тетраедри (паралелепипеди).

Т1. Нека векторът $\vec{a}$ определя отсечка с дължина d и векторът $\vec{a_1}$ определя отсечка с дължина d_1 и $\vec{a_1} = \alpha\vec{a}$. Тогава $d_1 = |\alpha|d$.

Т2. Нека двойката вектори $(\vec{a}, \vec{b})$ определя триъгълник с лице S и двойката вектори $(\vec{a_1}, \vec{b_1})$ определя триъгълник с лице S_1 и

$$\vec{a_1} = \alpha_{11}\vec{a} + \alpha_{12}\vec{b}$$
$$\vec{b_1} = \alpha_{21}\vec{a} + \alpha_{22}\vec{b}$$

Тогава $S_1 = |\Delta|S$, където Δ е детерминантата на матрицата $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$.

Т3. Нека тройката вектори $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ определя тетраедър с обем V и тройката вектори $(\vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{c_1})$ определя тетраедър с обем V_1 и

$$\begin{aligned}\vec{a_1} &= \alpha_{11}\vec{a} + \alpha_{12}\vec{b} + \alpha_{13}\vec{c}\\ \vec{b_1} &= \alpha_{21}\vec{a} + \alpha_{22}\vec{b} + \alpha_{23}\vec{c}\\ \vec{c_1} &= \alpha_{31}\vec{a} + \alpha_{32}\vec{b} + \alpha_{33}\vec{c}\end{aligned}$$

Тогава $V_1 = |\Delta| V$, където Δ е детерминантата на матрицата

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}.$$

В следващите параграфи ще представим част от евристиката на векторно-алгебричното моделиране в обучението по геометрия при „прехода” равнина – пространство.

§2. Евристична стратегия за стереометрично „надграждане” на теореми от планиметрията

Методът на векторно-алгебричното моделиране може да бъде прилаган в две направления. Първото направление се отнася до намиране на решението (доказателството) на вече поставена геометрична задача (теорема). За целта ако ученикът (студентът) не вижда геометрично (синтетично) решение, би могъл да моделира задачата (теоремата) с векторно-алгебрични средства, с което задачата (теоремата) от геометрична се преобразува във векторно-алгебрична. Обикновено при векторно-алгебричната задача (теорема) идеята за решението е „прозрачна” и в този случай съставянето на план на решението не представлява трудност. Реализацията на плана се извършва с инструментариума на векторната алгебра. Понякога векторно-алгебричното решение е свързано със сложни преобразувания и затова е необходимо решаващият да има добра „векторна” техника. Но усилията си заслужават, защото крайният резултат (решението или доказателството) е почти винаги гарантиран. Накрая векторно-алгебричният резултат се интепретира в геометричен, с което решението (доказателството) е завършено.

Второто направление, в което векторно-алгебричното моделиране може да бъде използвано като евристичен подход, е свързано с откриване на нови (непознати досега) верни твърдения (теореми) в геометрията, т.е. с формулиране на хипотези и тяхната проверка. Още веднъж ще повторим думите на Кеплер за това, че в геометрията аналогиите са най-добрите учители. Но често пъти, както вече беше казано, в геометрията аналогията не е достатъчно ясно очертана. Например, пространствен аналог на триъгълника в едни случаи е (триъгълна) пирамида, а в други случаи – (триъгълна) призма. Векторното пространство, в чиято основа е векторната алгебра и векторите (наредени n-орки) са негови обекти, от математико-психологическа гледна точка осигурява почти очевиден „преход” от двумерното към тримерното пространство и по естествен начин отваря „входа” към n-мерното пространство. Естествено е закономерностите във векторната алгебра да се търсят по пътя на аналогията, преминавайки от обекти, „определени” от два вектора (в двумерното пространство), към обекти, „определени” от три вектора (в тримерното пространство), след това към обекти, „определени” от четири вектора (в четirимерното пространство) и т.н. С други думи, има основание да се предполага, че пътят на обобщението (или специализацията) във векторната алгебра е по-ясно очертан, отколкото в елементарната геометрия.

В резултат на направения теоретичен анализ (в предходните параграфи на настоящето изследване) и практическия опит (придобит при обучението на ученици и студенти) достигнахме до определена стратегия за конструиране и проверка на хипотези в стереометрията, чиито първообрази са теореми от планиметрията. Водеща роля в тази стратегия играе векторно-алгебричното моделиране.

В тази точка ще представим конспективно стратегията за стереометрично „надграждане” на планиметрични теореми чрез векторно-алгебрично моделиране.

1) Подготовка на теоремата за „превод” от елементарно-геометричен на векторно-алгебричен език

Тази точка включва определяне на водещите понятия в условието и в заключението и евентуално преформулиране (еквивалентно) на теоремата от един съждително-понятиен тип в друг. Най-често тази преформулировка е свързана с преминаване към теорема от типа „понятие – понятие”, тъй като това позволява в много случаи визуализиране на теоремата.

2) Построяване на векторно-алгебричен модел на теоремата

Този процес е описан принципно в параграфа „Теоретико-приложни основи на векторно-алгебричното моделиране в курса по геометрия” и в предварителните бележки на настоящия параграф. Негова конкретизация е представена в следващите параграфи.

3) Уточняване на „базата” (множеството от определящите вектори) на водещите понятия в теоремата (в условието и в заключението)

Известно е, че всяко планиметрично понятие, най-общо казано, може да бъде представено като векторно-алгебрична „комбинация” на два неколинеарни вектора. Изборът на определящата наредена двойка вектори (базата) определя в голяма степен сложността на модела и обема на „техническите” преобразувания при следващото доказателство. В конкретна ситуация често е по-удобно да се избере за „база” множество (от определящи вектори), което не е минимално по отношение на броя на векторите. Например, известно е, че точка M в равнината на триъгълника ABC може еднозначно да се определи чрез вектора $\overrightarrow{AM}$, който е линейна комбинация на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ с коефициенти числата α и β. Но същата точка M може еднозначно да се определи чрез вектора $\overrightarrow{OM}$, който е линейна комбинация на векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ с коефициенти съответно a, b, c, където $a + b + c = 1$ и O е произволна точка

4) Векторно-алгебрично доказателство на избраната планиметрична теорема

Векторно-алгебричното доказателство на теоремата има двуяка цел. От една страна се проверява „съдържателността” на векторно-алгебричния модел. От друга страна същото доказателство евентуално може да бъде „пренесено” по аналогия в доказателството на пространствения аналог на теоремата.

5) Построяване на тримерни аналози на водещите понятия, чрез присъединяване на трети определящ вектор към „базата”, който не е компланарен на „планиметричната” база

Примери на този етап ще бъдат представени в следващите два параграфа.

6) Формулиране на стереометричната хипотеза на векторно-алгебричен език

Примери на този етап ще бъдат представени в следващите два параграфа.

7) Проверка (доказателство) на хипотезата

Естествено е доказателството да се направи по векторно-алгебричен път, като се търси аналогия с векторно-алгебричното доказателство на планиметричната теорема.

8) „Превод” на доказаната теорема от езика на векторната алгебра на елементарно-геометричен език

Последната стъпка е препоръчителна. За пълнота (за да добие изследването завършен вид) е желателно доказаната теорема да бъде преформулирана от езика на векторната алгебра на първоначалния език, т.е. на езика на елементарната геометрия.

Предложената евристична стратегия за стереометрично „надграждане” на планиметрични теореми е „апробирана” в следващите два параграфа, където са формулирани и доказани стереометрични аналози на теоремата на Чева и на теоремата за лицето на четириъгълника.

§3. Стереометрични аналози на теоремата на Чева за триъгълник

Въпросите за колинеарност на точки и конкурентност на прави са важни както за науката геометрия, така и за училищния курс по геометрия. В много геометрични ситуации възникват задачи, свързани с колинеарност и конкурентност, но до откриването на векторната алгебра не ни е известно да е използван общ метод за тяхното решаване и на равнище планиметрия. По тази причина почти всяка една от тези задачи е решавана сама за себе си (с елементарно-геометрични средства). Векторната алгебра дава възможност към задачите за колинеарност и конкурентност да се подходи стандартно и в много от случаите те се превръщат в обикновено приложение на афинните операции с вектори.

Когато се говори за колинеарност и конкурентност, естествено е да се започне от класическите теореми за триъгълника. Става дума за теоремата на Менелай и теоремата на Чева. Теоремата на Менелай и теоремата на Чева за триъгълника са важни и нетривиални резултати в елементарната геометрия, които могат да бъдат използвани като критерии за колинеарност и за конкурентност, но поради сложността на техните класически (синтетични) доказателства досега почти не са намерили място в училищните курсове по геометрия.

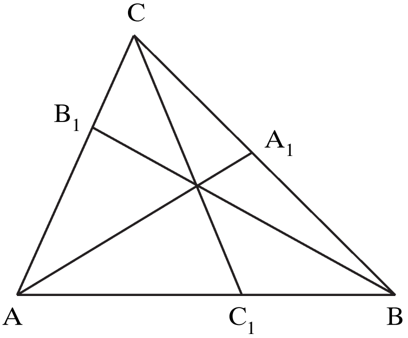
Теоремите на Менелай и на Чева могат да послужат и като ярка илюстрация за „силата" на векторната алгебра на две равнища – с използване на метрични операции (векторно и смесено произведение на вектори) и без използване на метрични операции, само на основата на афинните операции (събиране на вектори и умножение на число с вектор). Второто обстоятелство позволява теоремите, заедно с техните доказателства, да бъдат представени и пред ученическа аудитория.

Забележка. Независимо че въпросите за колинеарност и конкурентност в геометрията са тясно свързани, ние решихме, че за целите на евристичната стратегия представянето и на двете теми не носи нови, съществено различни идеи и претрупва изложението в дисертацията. Ето защо предпочетохме да изложим само нашите изследвания по втората тема, която е по-малко популярна в обучението по геометрия. Става дума за темата конкурентност на прави. В тази връзка поместените резултати представляват стереометрични обобщения на теоремата на Чева за триъгълник.

В автореферата са представени само основните и част от междинните (помощните) теореми. Всички необходими леми и пълните доказателства се намират в дисертационния труд.

1. Теорема на Чева за триъгълник и коментари за нейните възможни аналози в пространството

Теорема. Нека ABC е триъгълник и точките A_1, B_1, C_1 са съответно от страните BC, AC, AB и простите отношения (BCA_1), (CAB_1), (ABC_1) са съответно α, β, γ. Ако правите AA_1, BB_1, CC_1 се пресичат в една точка, то $\alpha\beta\gamma = -1$ и обратно (черт 1).



Черт. 1

Коментар. Ако тетраедърът се разглежда като пространствен аналог на триъгълника, то пространствени аналози на теоремата на Чева има смисъл да се търсят в две направления – обща точка на правите, които свързват съответно върховете с точки от срещуположните стени и обща точка на правите, които свързват съответно точки от срещуположни ръбове на тетраедъра.

Забележка 1. Нека ABCD е тетраедър. Точките A_1, B_1, C_1 и D_1 са съответно от стените (BCD), (ACD), (ABD) и (ABC). Твърдението, в което се посочва необходимо и достатъчно условие за съществуване на обща точка на правите AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, би могло да се нарича **първа теорема на Чева за тетраедъра**. Правите AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 за краткост ще наричаме **чевиани** на тетраедъра. Тогава първата теорема на Чева за тетраедъра е твърдение, в което се посочва необходимо и достатъчно условие за съществуване на обща точка на чевианите на тетраедъра.

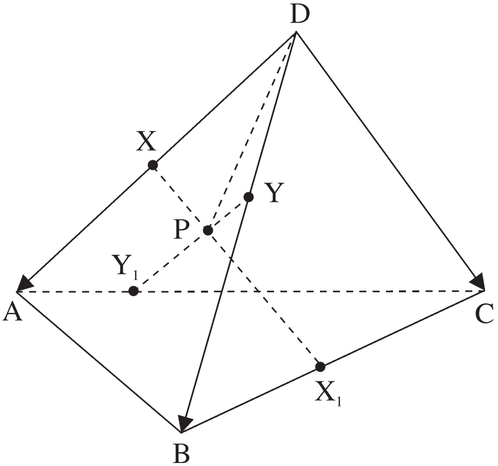
Забележка 2. Нека точките X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 са съответно от ръбовете AD и BC, BD и AC, CD и AB. Твърдението, в което се посочва необходимото и достатъчно условие за съществуване на обща точка на правите XX_1, YY_1 и ZZ_1, би могло да се нарича **втора теорема на Чева за тетраедъра**. Правите XX_1, YY_1 и ZZ_1 за краткост ще наричаме **трансверзали** на тетраедъра. Тогава втората теорема на Чева е твърдение, в което се посочва необходимо и достатъчно условие за съществуването на обща точка на трансверзалите на тетраедъра.

2. Теорема на Чева за трансверзалите на тетраедър

В тази точка ще формулираме и коментираме аналог на теоремата на Чева във второто направление – за общата точка на трансверзалите на тетраедър. (Пълното доказателство на теоремата е в дисертационния труд.)

Теорема. Трансверзалите на тетраедър се пресичат в една точка тогава и само тогава, когато за общите точки на трансверзалите и съответните ръбове от всяка стена е в сила теоремата на Чева.

Отначало е направена предварителна подготовка за доказателството на теоремата, при която са въведени „удобни" означения (черт. 2).



Черт. 2

Нека DABC е тетраедър и точките X, X_1, Y, Y_1, Z, Z_1 са съответно от ръбовете DA, BC, DB, CA, DC, AB, така че (DAX) = α,

$(BCX_1) = \alpha_1$, $(DBY) = \beta$, $(CAY_1) = \beta_1$, $(DCZ) = \gamma$, $(ABZ_1) = \gamma_1$. Нека $XX_1 \cap YY_1 = P$, $YY_1 \cap ZZ_1 = M$ и $ZZ_1 \cap XX_1 = N$.

В дисертационния труд е показано, че радиус-векторите на точките P, M, N се представят като линейни комбинации на векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ (точката O съвпада с точката D) по следния начин:

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\alpha\alpha_1\beta_1}{\alpha\alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_1 - \alpha\alpha_1 + \alpha}\overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{\alpha\alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_1 - \alpha\alpha_1 + \alpha}\overrightarrow{OB} + \\ + \frac{-\alpha\alpha_1}{\alpha\alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_1 - \alpha\alpha_1 + \alpha}\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{-\beta\beta_1}{\beta\beta_1\gamma - \beta_1\gamma_1 - \beta\beta_1 + \beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta\beta_1\gamma_1}{\beta\beta_1\gamma - \beta_1\gamma_1 - \beta\beta_1 + \beta}\overrightarrow{OB} + \\ + \frac{\beta}{\beta\beta_1\gamma - \beta_1\gamma_1 - \beta\beta_1 + \beta}\overrightarrow{OC} \qquad \text{и}$$

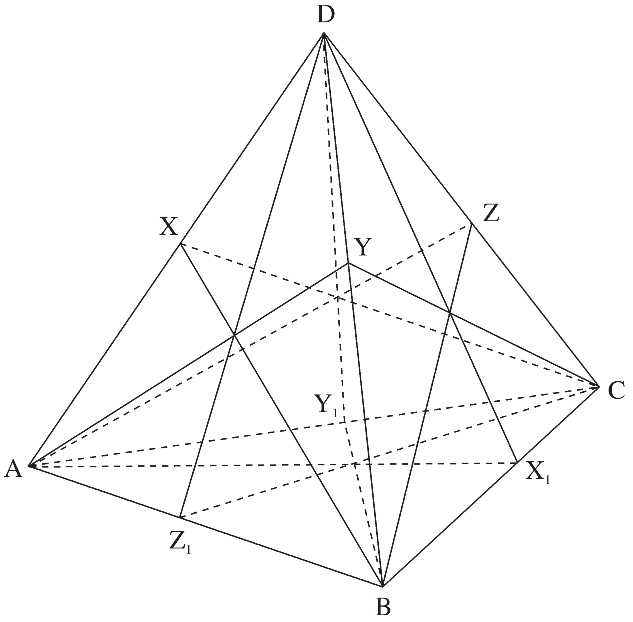
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{\gamma}{\gamma\gamma_1\alpha - \gamma_1\alpha - \gamma\gamma_1 + \gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{-\gamma\gamma_1}{\gamma\gamma_1\alpha_1 - \gamma_1\alpha_1 - \gamma\gamma_1 + \gamma}\overrightarrow{OB} + \\ + \frac{\gamma\gamma_1\alpha_1}{\gamma\gamma_1\alpha_1 - \gamma_1\alpha - \gamma\gamma_1 + \gamma}\overrightarrow{OC}\cdot$$

След това е направено доказателство на теоремата (в едната посока) в случай, че точките P, M и N съвпадат.

Преди да бъде направено доказателството в другата посока, е формулирано и доказано помощно твърдение, наречено лема на Чева за стените на тетраедър.

Лема: Нека DABC е тетраедър и точките X, X_1, Y, Y_1, Z, Z_1 са съответно върху ръбовете DA, BC, DB, CA, DC, AB, така че за тройките точки (X, Z_1, Y); (Y, X_1, Z); (Z, Y_1, X) и съответните триъгълници (DAB), (DBC), (DCA) е в сила теоремата на Чева. Тогава за четвъртата тройка точки (X_1, Y_1, Z_1) и четвъртата стена (ABC) е в сила теоремата на Чева (черт. 3).

Коментар 1. Лемата на Чева за стените на тераедъра може да бъде формулирана и така: Нека X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 са точки от двойките срещуположни ръбове на тетраедър. Ако за три трой-



Черт. 3

ки точки съответно от три от стените на тетраедъра е в сила теоремата на Чева, то тя е в сила и за четвъртата тройка точки от равнината на четвъртата стена.

Коментар 2. Доказаната теорема може да бъде формулирана и така: Теоремата на Чева за тетраедър е в сила тогава и само тогава, когато е в сила теоремата на Чева за триъгълник поне за три от стените на тетраедъра.

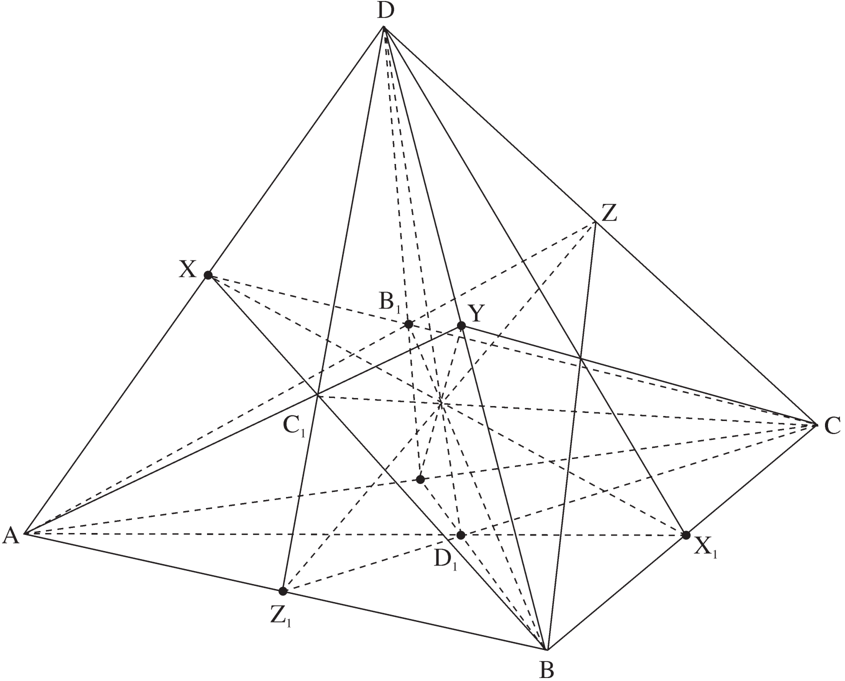
3. Теорема на Чева за чевианите на тетраедър

В тази точка е формулирана (и доказана в дисертацията) теорема, която е аналог на теоремата на Чева в първото направление – за общата точка на чевианите на тетраедъра.

Теорема. Нека ABCD е тетраедър, за който точките A_1, B_1, C_1 и D_1 са съответно от равнините на стените (BCD), (ACD), (ABD) и (ABC).

Нека $AD_1 \cap BC = X_1$ и $DA_1 \cap BC = X_1'$;
$BD_1 \cap AC = Y_1$ и $DB_1 \cap AC = Y_1'$;
$CD_1 \cap AB = Z_1$ и $DC_1 \cap AB = Z_1'$;
$BC_1 \cap AD = X$ и $CB_1 \cap AD = X'$;
$AC_1 \cap BD = Y$ и $CA_1 \cap BD = Y'$;
$BA_1 \cap DC = Z$ и $AB_1 \cap DC = Z'$.

Правите AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 имат обща точка (са конкурентни) тогава и само тогава, когато: $X_1' = X_1$, $Y_1' = Y_1$, $Z_1' = Z_1$, $X' = X$, $Y' = Y$ и $Z' = Z$, (черт. 4).



Черт. 4

Коментар. Теоремата на Чева за чевианите на тетраедър може да се изкаже и така: Нека ABCD е тетраедър и точките A_1, B_1, C_1 и D_1 са съответно от равнините на стените (BCD), (ACD), (ABD) и (ABC). Правите AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 имат обща точка тогава и само тогава, когато чевианите в триъгълниците BCD, ACD, ABD и ABC съответно за точките A_1, B_1, C_1 и D_1 пресичат общите ръбове в една и съща точка.

4. Заключение (коментари, обобщения, дефиниции)

Нека ABCD е тетраедър и точките X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 са съответно върху ръбовете DA и BC, DB и CA, DC и AB. Беше доказано, че ако правите XX_1, YY_1 и ZZ_1 имат обща точка (втора точка на Чева), то за ΔABC и точките X_1, Y_1 и Z_1, за ΔABD и точките X, Y, и Z_1, за ΔBCD и точките X_1, Y и Z и за ΔCAD и точките X, Y_1 и Z е в сила теоремата на Чева за триъгълника. Тогава правите AX_1, BY_1 и CZ_1 имат обща точка D_1, правите AY, BX и DZ_1 имат обща точка C_1, правите BZ, CY и DX_1 имат обща точка A_1 и правите CX, AZ и DY_1 имат обща точка B_1. Следователно съществуват чевианите AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Тези прави ще наречем **чевиани, съответни на трансверзалите** XX_1, YY_1 и ZZ_1.

Нека ABCD е тетраедър и точките A_1, B_1, C_1 и D_1 са съответно от равнините на стените (BCD), (CAD), (ABD) и (ABC). Нека $AD_1 \cap BC = X_1$, $DA_1 \cap BC = X_1'$, $BD_1 \cap AC = Y_1$, $DB_1 \cap AC = Y_1'$, $CD_1 \cap AB = Z_1$, $DC_1 \cap AB = Z_1'$, $BC_1 \cap AD = X$, $CB_1 \cap AD = X'$, $AC_1 \cap BD = Y$, $CA_1 \cap BD = Y'$, $BA_1 \cap DC = Z$, $AB_1 \cap DC = Z'$. Беше доказано, че ако правите AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 имат обща точка (първа точка на Чева), то $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$, $X_1 = X_1'$, $Y_1 = Y_1'$ и $Z_1 = Z_1'$. Следователно съществуват трансверзалите XX_1, YY_1 и ZZ_1. Тези прави ще наречем **трансверзали, съответни на чевианите** AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Въведените понятия и **доказаните** по-горе твърдения ни дават възможност да формулираме следните следствия:

Следствие 1. Ако трансверзалите на тетраедъра имат обща точка, то съответните им чевиани също имат обща точка.

Следствие 2. Ако чевианите на тетраедъра имат обща точка, то съответните им трансверзели също имат обща точка.

Следствие 3. Ако OABC е тетраедър, точките X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 са съответно от правите OA и BC, OB и CA, OC и AB, (OAX) = α, (OBY) = β, (OCZ) = γ и трансверзалите XX_1, YY_1, ZZ_1 имат обща точка T_2 (втора точка на Чева). Тогава:

$$\overrightarrow{OT_2} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-1}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma-1}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma-1}\overrightarrow{OC}.$$

Следствие 4. Нека OABC е тетраедър. Точките A_1, B_1, C_1 и D_1 са съответно от стените (BCO), (CAO), (ABO) и (ABC), чевианите AA_1, BB_1, CC_1 и OD_1 имат обща точка T_1 (първа точка на Чева), XX_1, YY_1 и ZZ_1 са съответните трансверзали на чевианите AA_1, BB_1, CC_1 и OD_1 и точките X, Y и Z лежат съответно върху OA, OB и OC така, че (OAX) = α, (OBY) = β и (OCZ) = γ. Тогава:

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-1}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma-1}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma-1}\overrightarrow{OC}.$$

Следствие 5. Първа точка на Чева за тетраедъра съществува тогава и само тогава, когато съществува съответната ѝ втора точка на Чева за тетраедъра и двете точки на Чева съвпадат (в точка на Чева за тетраедъра).

Следствие 6. Ако трансверзалите на тетраедъра имат обща точка, то същата точка е обща и за съответните чевиани на тетраедъра. Ако чевианите на тетраедъра имат обща точка, то същата точка е обща и за съответните трансверзали на тетраедъра.

§4. Стереометричен аналог на теоремата за лице на четириъгълник

1. Предварителни бележки

Както е известно, съществува клас многостени, чиито обеми могат да бъдат намерени „непосредствено”. Става дума за призматоидите, т.е. за многостени, чиито върхове, най-общо казано, са разположени в две успоредни равнини, каквито в частност са призмата и пирамидата. Основните числови характеристики, необходими за намиране обема на призматоид са лицата на основите (или лицето на основата) и дължината на височината. Но многобразието на многостени е голямо и често в геометрията е необходимо да се търси обем на многостени, които не са призматоиди. За да се реши задачата в този случай, се налага РАЗБИВАНЕ на многостена на призми или пирамиди или неговото ДОПЪЛВАНЕ до призма или пирамида. Като правило решенията, които се основават на метода на „разбиването или допълването”, са сложни и често пъти „изкуствени”, тъй като предварително не е ясно кои са призматоидите, които ще бъдат в състава на разглеждания многостен.

Преди повече от 20 години Здравко Лалчев при свои изследвания върху приложения на линейната алгебра в училищния курс по математика достига до „неочакван” резултат от елементарната геометрия. Става дума за това, че октаедърът може „обемно” да се редуцира (без разбиване и допълване) до тетраедър. (Доказателството е докладвано на Национална конференция на Гръцкото математическо дружество и публикувано през 1993 година в гръцкото дидактико-математическо списание “ΔΙΑΣΤΑΣΗ”, в статия озаглавена “**Αναγωγή πολυέδρων**” (Редукция на многостени) [46].) На пръв поглед горепосоченият резултат е изолиран и неестествен, тъй като не се виждат неговите връзки с популярните в геометрията теореми за лице на многоъгълници и обем на многостени.

„Откъснатостта” на теоремата за обема на октаедъра от добре известните теореми за лица и обеми провокира в нас интерес и желание да „апробираме” стратегията за „надграждане” на планиметрични теореми и в този случай. За целта си поставихме задача да намерим планиметричните „корени” на теоремата и по пътя на аналогията да достигнем до получения вече стереометричен резултат.

Бележка. В книгата „Доказателства и опровержения” [39] на споменавания вече няколкократно унгарски математик Лакатош се прави хипотетично изследване (за философско-логически цели) на евристиката на доказателството на добре известната теорема на Ойлер за многостени. Примерът на Лакатош ни направи силно впечатление и ние решихме, че си заслужава да се направи (за дидактически цели) подобно изследване за достигане до първообразите на теоремата за октаедъра.

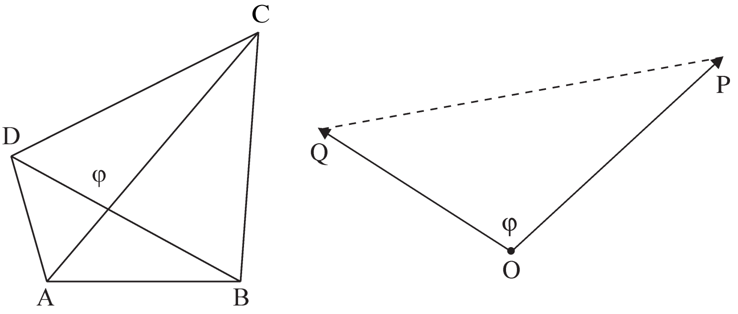
Добре известно е, че идеята за „обобщаване” на теореми за лицето на триъгълника е „експлоатирана” многократно може би още от създаването на геометрията, но тези обобщения са довеждали до призми или пирамиди. Ето защо ние насочихме нашето внимание към четириъгълника. Развивайки идеята за „надграждане” лицето на четириъгълника и прилагайки формулираната евристична стратегия в предходния параграф, ние показваме, че теоремата за обемната приводимост на октаедъра е „естествен” пространствен аналог на добре известната равнинна теорема от училищния курс по геометрия: „Лицето на всеки четириъгълник е равно на полупроизведението на диагоналите на четириъгълника и синуса на ъгъла между тях”.

В автореферата (както и в предходня параграф) са представени само основните и част от междинните (помощните) теореми. Всички необходими леми и пълните доказателства се намират в дисертационния труд.

2. Лице на триъгълник и лице на четириъгълник

След като е фомулирана и доказана (векторно-алгебрично) теорема за сравняване на лицата на два триъгълника и е представен метод за изразяване на лицето на произволен триъгълник чрез лицето на предварително зададен триъгълник, е разгледан въпросът за векторната база в равнината и лицето на четириъгълника. Формулирана и доказана е теорема за изразяване на лицето на четириъгълника чрез лицето на триъгълника, определен от векторите по диагоналите и на тази основа е предложен метод за изразяване лицето на даден четириъгълник чрез лицето на предварително зададен триъгълник. Става дума за **следната**

Теорема: Нека ABCD е четириъгълник с диагонали AC и BD. Тогава лицето на ABCD е равно на лицето на триъгълника, определен от векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ (черт. 5).



Черт. 5

Направеното доказателство е векторно-алгебрично, но то не е подходящо за „обобщение” и затова е предложено второ доказателство на теоремата, което е удобно за „пренасяне” в пространството. Второто доказателство се опира на едно специално свойство на детерминантите от втори ред, което е наречено **включване на двумерен вектор в детерминанта от втори ред**.

Теорема: Нека $A_1 = (a_{11}, a_{12})$ и $A_2 = (a_{21}, a_{22})$;
$B_1 = (b_{11}, b_{12})$ и $B_2 = (b_{21}, b_{22})$
са две двойки двумерни вектори и $X = (x_1, x_2)$ е произволен двумерен вектор.

Тогава за детерминантите:

$$\begin{vmatrix} A_1 - X \\ A_2 - X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 - X \\ B_2 - X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 - X \\ A_2 - X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 - X \\ B_2 - X \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \end{vmatrix}$$

е вярно следното равенство:

$$\begin{vmatrix} A_1 - X \\ A_2 - X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_1 - X \\ B_2 - X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_1 - X \\ A_2 - X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 - X \\ B_2 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \end{vmatrix}$$

където

$$\begin{vmatrix} A_1 - X \\ A_2 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - x_1 & a_{12} - x_2 \\ a_{21} - x_1 & a_{22} - x_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 - X \\ B_2 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - x_1 & a_{12} - x_2 \\ b_{21} - x_1 & b_{22} - x_2 \end{vmatrix}$$

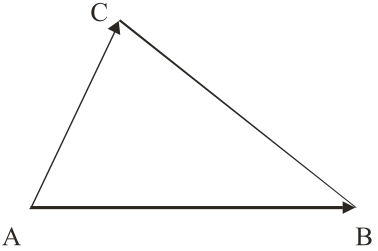
$$\begin{vmatrix} B_1 - X \\ A_2 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} - x_1 & b_{12} - x_2 \\ a_{21} - x_1 & a_{22} - x_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} B_1 - X \\ B_2 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} - x_1 & b_{12} - x_2 \\ b_{21} - x_1 & b_{22} - x_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{vmatrix}.$$

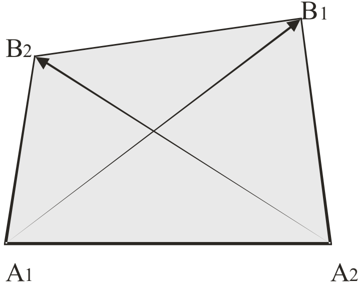
Преди да пристъпим към разкриване на геометричния смисъл на теоремата за включване на двумерен вектор в детерминанта от втори ред, е необходимо да представим в координатна форма теоремата за лице на триъгълник.

Нека в равнината е зададена дясна афинна координатна система, за която базисните вектори определят триъгълник с лице S_0. Известно е, че ако A, B и C са три точки от равнината с координати съответно (a_1, a_2), (b_1, b_2) и (c_1, c_2) (черт.6), то ориентираното лице $S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ на триъгълник ABC, определен от двойката вектори $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, е равно на стойността на детерминантата, определена от координатите на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т.е

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} S_0.$$



Черт. 6



Черт. 7

След това е направена геометрична интерпретация на теоремата за включване на двумерен вектор в детерминанта от втори ред (**теорема за лице на четириъгълник**).

Теорема: Лицето на четириъгълник с върхове A_1, A_2, B_1, B_2 и диагонали A_1B_1 и A_2B_2 е равно на лицето на триъгълника определен от двойката вектори $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2})$ (черт. 7).

Коментар. Разсъжденията, направени в този параграф, позволяват да се направи изводът, че геометричният смисъл на теоремата за включване на двумерен вектор в детерминанта от втори ред е следния: Ако произволна точка от равнината на даден четириъгълник е свързана с върховете на четириъгълника, то сборът от ориентираните лица на получените триъгълници е равен на ориентираното лице на триъгълника, определен от диагоналите (разглеждани като вектори) на четириъгълника.

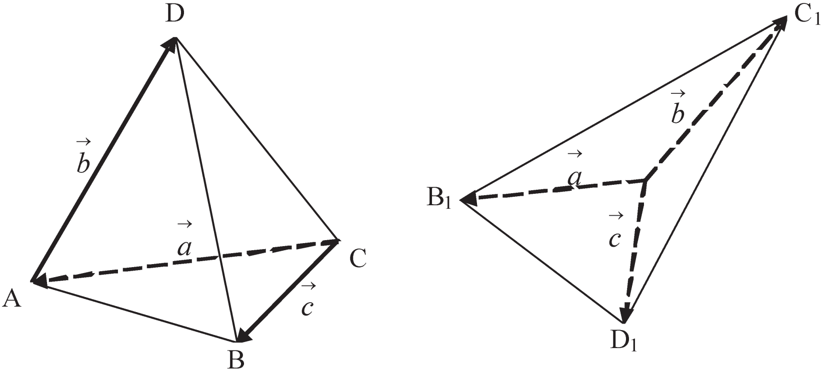
3. Обем на тетраедър и обем на октаедър

Във втората част на параграфа представяме векторно-алгебричен метод за изразяване на обема на произволен тетраедър чрез обема на предварително зададен тетраедър. Методът се основава на теорема от аналитичната геометрия. Въпросната теорема дава възможност за сравняване на обемите на всеки два тетраедъра със средствата на афинната векторна алгебра по начин, аналогичен на начина за сравняване на лицата на триъгълниците. Когато се използва този подход за намиране на обема на тетраедър, много задачи от тази тема се превръщат в обикновено приложение на векторната алгебра.

3.1. Векторна база в пространството и обем на тетраедър

Преди да пристъпим към формулиране и доказване на теоремата за октаедъра, е необходимо да въведем понятието **определящи вектори на тетраедър**.

Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са три вектора и ABCD (черт. 8) е тетраедър, за който съществуват три некомпланарни ръба така, че векторите с краища, краищата на тези ръбове да са съответно равни на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. В този случай ще казваме, че векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са **определящи** за тетраедъра ABCD. Също така ще казваме, че тетраедърът ABCD е **обемно определен** от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Черт. 8

В тази точка привеждаме една теорема за обем на тетраедър, която може да бъде доказана с използване на смесено произведение на вектори.

Теорема. Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са вектори, определящи тетраедър с обем V, а $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ и $\vec{c_1}$ са вектори, определящи тетраедър с обем V_1 и

$$\left|\begin{array}{l} \vec{a_1} = \alpha_{11}\vec{a} + \alpha_{12}\vec{b} + \alpha_{13}\vec{c} \\ \vec{b_1} = \alpha_{21}\vec{a} + \alpha_{22}\vec{b} + \alpha_{23}\vec{c} \\ \vec{c_1} = \alpha_{31}\vec{a} + \alpha_{32}\vec{b} + \alpha_{33}\vec{c} \end{array}\right.$$

Тогава обемът V_1 на втория тетрадър се изразява чрез обема V на първия тетраедър по следния начин: $V_1 = |\Delta| V$, където

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Коментар. Посочената теорема е в основата на предлагания метод за изразяване на обема на даден тетраедър чрез обема на предварително избран тетраедър. Накратко, методът се състои в следното:

1) Избираме тройка вектори (първа векторна база), определящи първия тетраедър;

2) Избираме тройка вектори (втора векторна база), определящи втория тетраедър;

3) Всеки един от векторите на втората база изразяваме като линейна комбинация на векторите от първата база;

4) Построяваме детерминантата на прехода (детерминанта от трети ред) и пресмятаме нейната стойност.

Абсолютната стойност на построената детерминанта е равна на отношението на обема на втория тетраедър и обема на първия тетраедър. В случая, когато обемът на единия от двата тетраедъра е известен, става известен и обемът на другия тетраедър.

3.2. Включване на тримерен вектор в детерминанта от трети ред. Теорема за обем на октаедър

В тази точка представяме теоремата (и нейното доказателство) за изразяване на обема на даден октаедър чрез обема на тетраедъра, построен върху диагоналите на октаедъра, разглеждани като вектори. В основата на доказателството на тази теорема се намира едно специално свойство на детерминантите от трети ред, което условно наричаме **включване на вектор в детерминанта от трети ред**.

Теорема (за включване на вектор в детерминанта): Нека

$$\begin{array}{lcl} A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) & & B_1 = (b_{11}, b_{12}, b_{13}) \\ A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}) & \text{и} & B_2 = (b_{21}, b_{22}, b_{23}) \\ A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}) & & B_3 = (b_{31}, b_{32}, b_{33}) \end{array}$$

са две тройки 3-мерни вектори и $X = (x_1, x_2, x_3)$ е произволен тримерен вектор. Тогава за детерминантите:

$$\begin{vmatrix} A_1 - X \\ A_2 - X \\ A_3 - X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 - X \\ A_2 - X \\ B_3 - X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 - X \\ B_2 - X \\ A_3 - X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 - X \\ B_2 - X \\ B_3 - X \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} B_1 - X \\ A_2 - X \\ A_3 - X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_2 - X \\ A_2 - X \\ B_3 - X \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 - X \\ B_2 - X \\ A_3 - X \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 - X \\ B_2 - X \\ B_3 - X \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \\ A_3 - B_3 \end{vmatrix}$$

е в сила равенството:

$$(-1)^0 \begin{vmatrix} A_1 - X \\ A_2 - X \\ A_3 - X \end{vmatrix} + (-1)^1 \begin{vmatrix} A_1 - X \\ A_2 - X \\ B_3 - X \end{vmatrix} + (-1)^1 \begin{vmatrix} A_1 - X \\ B_2 - X \\ A_3 - X \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} A_1 - X \\ B_2 - X \\ B_3 - X \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^1 \begin{vmatrix} B_1 - X \\ A_2 - X \\ A_3 - X \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} B_2 - X \\ A_2 - X \\ B_3 - X \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} B_1 - X \\ B_2 - X \\ A_3 - X \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} B_1 - X \\ B_2 - X \\ B_3 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \\ A_3 - B_3 \end{vmatrix}$$

където:

$$\begin{vmatrix} A_1 - X \\ A_2 - X \\ A_3 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - x_1 & a_{12} - x_2 & a_{13} - x_3 \\ a_{21} - x_1 & a_{22} - x_2 & a_{23} - x_3 \\ a_{31} - x_1 & a_{32} - x_2 & a_{33} - x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 - X \\ A_2 - X \\ B_3 - X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - x_1 & a_{12} - x_2 & a_{13} - x_3 \\ a_{21} - x_1 & a_{22} - x_2 & a_{23} - x_3 \\ b_{31} - x_1 & b_{32} - x_2 & b_{33} - x_3 \end{vmatrix} \qquad \text{и т. н.}$$

....

$$\begin{vmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \\ A_3 - B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{vmatrix}.$$

Преди разкриването на геометричния смисъл на теоремата за включване на тримерен вектор в детерминанта от трети ред са уточнени някои понятия, свързани с октаедъра. Въведено е понятието ориентиран обем на тетраедър и е представена теоремата за изразяване обема на тетрдаедър в координатна форма.

Октаедърът е многостен с осем стени (които са триъгълници), шест върха и дванадесет ръба. Всеки октаедър е еднозначно определен, когато са известни точките, които са негови върхове, и отсечките, с краища измежду тези точки, които са негови ръбове.

Всеки два върха, които са краища на един и същи ръб на октаедъра, наричаме **съседни**. Всеки два върха, които не са краища на един и същи ръб, наричаме **срещуположни**. Всеки връх има четири съседни върха и един срещуположен връх.

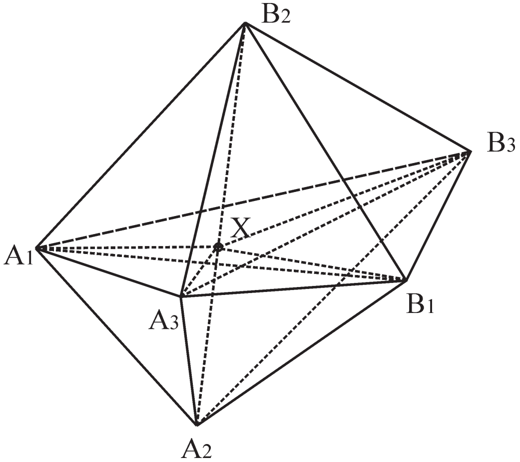
Отсечката, определена от два срещуположни върха на октаедъра, наричаме **диагонал** на октаедъра. Всеки октаедър има три (различни) диагонала.

Всеки три върха, които са два по два съседни, образуват стена на октаедъра. (Вече беше казано, че стените на октаедъра са 8 триъгълника.)

Забележка. Октаедърът може да бъде определен еднозначно не само с „върхове и ръбове", а и с „върхове и диагонали", защото всяка отсечка с краища измежду върховете на октаедъра е или ръб, или диагонал на октаедъра.

Пример. Нека точките A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 са върхове на октаедър, чиито ръбове са отсечките: A_1A_2, A_1A_3, A_1B_2, A_2A_3, A_2B_1, A_2B_3, A_3B_1, A_3B_2, B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3 (черт. 9).

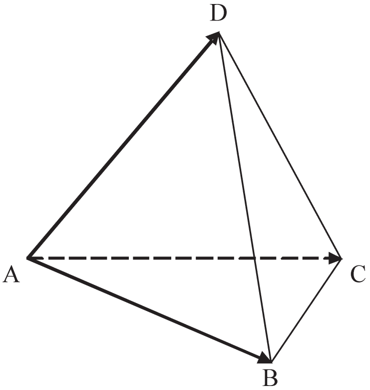
Върховете A_1 и B_1 са срещуположни, върховете A_2 и B_2, са срещуположни, а също и върховете A_3 и B_3, са срещуположни, т.е. отсечките A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 са диагонали на октаедъра.



Черт. 9

Върховете A_1, A_3 и A_2 са два по два съседни, т.е. те образуват стената $(A_1A_3A_2)$; върховете A_3, B_1 и A_2 са два по два съседни, т.е. те образуват стената $(A_3B_1A_2)$ и т.н. ...; върховете B_3, A_1 и A_2 са два по два съседни, т.е те образуват стената $(B_3A_1A_2)$.

За целите на следващото изложение е необходимо да въведем и понятието **ориентиран** обем на тетраедър и координатна форма за изразяване на обема на тетраедъра.



Черт. 10

Нека ABCD е тетраедър с обем V (черт. 10).

Да разгледаме наредената тройка вектори $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Тази тройка е дясна (положително ориентирана), защото двойката от първите два вектора $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, „гледана” от полупространството (относно равнината (ABC)), в което се намира точката D, е дясна. В този случай казваме, че **ориентираният** обем $V(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ на тетраедъра, определен от тройката вектори $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, е равен на числото V, т.е. $V(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = V$.

Да разгледаме наредената тройка вектори $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Тази тройка е лява (отрицателно ориентирана), защото двойката от първите два вектора $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$, „гледана” от полупространството (относно равнината (ABC)), в което се намира точката D, е лява. В този случай казваме, че **ориентираният** обем $V(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ на тетраедъра, определен от тройката вектори $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, е равен на числото –V, т.е. $V(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -V$.

С други думи, ориентираният обем на тетраедъра, определен от наредена тройка вектори, е равен на обема на тетраедъра, взет със знак „+”, ако тройката е дясна, и със знак „–”, ако тройката е лява.

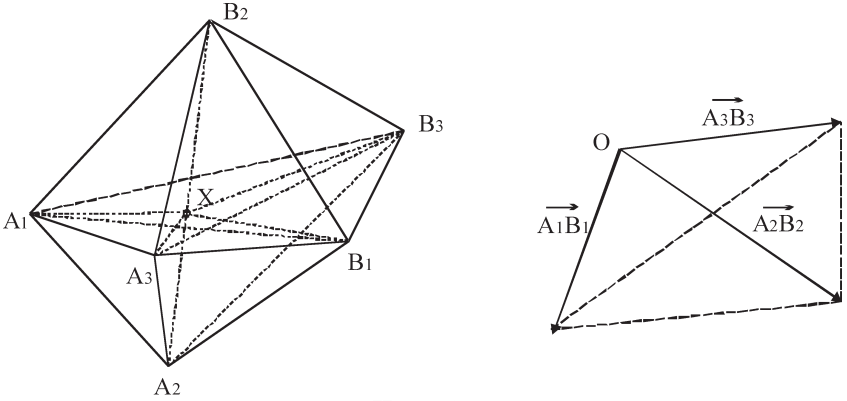
Нека в пространството е зададена дясна афинна координатна система, за която базисните вектори определят тетраедър с обем V_0.

Известно е, че ако A, B, C и D се четири точки от пространството с координати съответно (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) и (d_1, d_2, d_3) (черт. 10), то ориентираният обем $V(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ на тетраедъра, определен от тройката вектори $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, е равен на детерминантата, определена от координатите на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, т.е.

$$V(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} V_0.$$

Параграфът завършва с доказателството на централната

Теорема. Обемът на октаедър с върхове A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 и B_3 и диагонали A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 е равен на обема на тетраедъра, определен от тройката вектори $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_3B_3})$ (черт. 11).



Черт. 11

Коментар. Разсъжденията, направени в този параграф, позволяват да се направи изводът, че геометричният смисъл на теоремата за включване на тримерен вектор в детерминанта от трети ред е следният: Ако произволна точка от пространството е свързана с върховете на октаедъра, то сборът от ориентираните обеми на получените тетраедри е равен на ориентирания обем на тетраедъра, определен от диагоналите (разглеждани като вектори) на октаедъра.

Вместо заключение

Ограничената „употреба” на векторите в училищните курсове по геометрия и особено в най-традиционните геометрични области на училищната математика, каквито са лицето и обемът, стана допълнителна причина за разработване на векторно-алгебрични планиметрични теореми, свързани със задачата за намиране лица на триъгълници и четириъгълници. Тази разработка впоследствие се оказа стъпало към формулиране на стереометрични аналози на въпросните планиметрични теореми и доведе до теоремата за обем на октаедъра. От своя страна тази теорема допуска специализации и дава възможност за векторно-алгебричен подход за намиране на обемите на един клас многостени, който обхваща 6 вида – от тетраедър до октаедър.

НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИ ПРИНОСИ НА ИЗСЛЕДВАНЕТО

Приносите в резултат на **теоретичната част** на изследването са свързани с анализа на понятията евристика, прогностика, аналогия, теорема, хипотеза и техните място и роля в обучението по математика.

1) **Проучени** са мястото и ролята на понятията **евристика** и **прогностика** в училищната и университетска математика и математическо образование.

2) **Направен** е **логико-математико-дидактически анализ** на понятията **теорема** и **хипотеза** и релациите между тях в рамките на обучението по математика.

3) Обстойно е **развита** идеята за **теоремите като евристико-прогностичен „извор”** на нови математически знания за целите на обучението по математика.

4) **Изведена** е обща **евристично-прогностична схема** за построяване на хипотези, по пътя на аналогията, произтичащи от теореми (от училищната математика).

5) **Синтезирани** са (конспективно, за методически цели) теоретико-приложните основи (основните понятия, аксиомите и най-важните, от практическа гледна точка, теореми) на афинното векторно-алгебрично моделиране в обучението по геометрия (по идея на Херман Вайл).

6) **Формулирана** е логически проста и дидактически ефективна **евристична стратегия** за стереометрично „надграждане“ на планиметрични теореми от училищния курс по геометрия (за целите на студентско или ученическо математическо творчество).

Приносите в резултат на **приложната част** на изследването са свързани с проверката на хипотезата и по-конкретно, с продуктивността и ефективността на предложената евристична стратегия за построяване на стереометрични аналози на планиметрични теореми на основата на векторно-алгебричното моделиране.

1) Намерени са нови пространствени аналози на теоремата на Чева за триъгълник – теореми, формулирани във вид на хипотези и след това доказани векторно-алгебрично. Става дума за теорема за обща точка на трансверзалите на тетраедър (Втора точка на Чева), теорема за обща точка на чевианите на тетраедъра (Първа точка на Чева) и теорема за съвпадането на двете точки на Чева.

2) Намерен е нов пространствен аналог на четириъгълника или по-точно, намерена е теорема (формулирана като хипотеза и след това доказана със средствата на линейната алгебра и аналитичната геометрия), която е пространствен аналог на теоремата за лице на четириъгълник. Конкретната теорема е следната: „Всеки октаедър е равнообемен на тетраедър, определен от векторите по диагоналите на октаедъра“.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работата е предложен изследователски подход в теорията и практиката на обучението по математика. На преоценка са подложени традиционните разбирания за понятията евристика, прогностика и хипотеза и са обогатени с нови концепции за евристична и прогностична роля на теоремите в обучението по математика.

Хипотезата на изследването е потвърдена. Проверена е правотата и ефективността на предложената евристична стратегия за конструиране на стереометрични аналози на планиметрични теореми за целите на обучението по геометрия.

Направени са нови приложения на векторната алгебра в училищния курс по математика. В резултат на приложената евристична стратегия по метода на векторно-алгебричното моделиране са формулирани и доказани нетривиални геометрични твърдения, неизвестни (или малко известни) до този момент.

Изследването може да се разглежда като методология за достигане на нови математически хипотези и теореми, която да се приложи и върху други теореми от училищня курс по математика.

Предложената методика може да послужи като ръководство за математическо (студентско и ученическо) творчество и да бъде използвана при подготовката на ученици, проявяващи интерес към математиката, от последните класове на средното училище и студентите от първите курсове на университетските математически специалности.

Авторът се надява, че изследването представлява интерес за специалистите по математическо образование, учители и студенти-бъдещи учители по математика.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. **Адамар, Ж.** Элементарная геометрия, Часть вторая: Стереометрия, Издание третье. Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, Москва, 1958.

2. **Балк, М. Б., В. Г. Болтянский.** Геометрия масс. Москва, 1987.

3. **Банков, К., Т. Витанов.** Геометрия. Издателска къща „Анубис”, София, 2003.

4. **Бескин, Н. М.** Методика на геометрията. Държавно издателство „Народна просвета”, София, 1950.

5. **Бескин, Н. М.** Деление отрезка в данном отношении. Москва, 1973.

6. **Болтянский, В. Г., И. М. Яглом.** Преобразования. Векторы. Пособие для учителей. Изд. „Просвещение”, Москва, 1964.

7. **Болтянский В. Г.** Элементарная геометрия. „Просвещение”, Москва, 1985.

8. **Бауер, А., В. Эйхгорн, Г. Кребер, Г. Шульце, В. Сегет, К.-Д. Вюстнек.** Философия и прогностика. Мировоззреческие и методологические проблемы общественного прогнозирования. Издательство „Прогрес”, Москва, 1971.

9. **Бузов, В.** Практическа логика или изкуството на аргументацията. Издателство НВМ – Пл. Христов, 1998.

10. **Вагин, И.** Как да мислим гениално. СОФТПРЕС, София, 2010.

11. **Вутова**, **И.** Обем на октаедър. – Математика и математическо образование, Доклади на Тридесет и третата пролетна конференция на Съюза на Математиците в България, Боровец, 1–4 април, 2004. БАН, ИМИ, СМБ, София, 2004.

12. **Върбанова, М., И. Ганчев.** Методика на обучението по математика (специална част). Faber, Велико Търново, 2001.

13. **Върбанова, М., З. Лалчев, И. З. Вутова.** Методически бележки по въвеждане и изучаване на векторите в училищния курс

по геометрия. – Предизвикателствата на информационното общество пред статистиката и математиката – век XXI, Доклади на Международна научно-практическа конференция, Свищов, 16-18 октомври 2003. СА „Д. А. Ценов”, ИМИ при БАН, НСИ–София, Свищов, 2003.

14. **Ганчев, Г., А. Лангов и др.** Геометрия за VIII клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1980.

15. **Ганчев, Г., А. Лангов и др.** Геометрия за VIII клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1983.

16. **Ганчев, Г., Г. Геров и др.** Геометрия за 8 клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1988.

17. **Ганчев, Г., Е. Карлов и др.** Геометрия за 9 клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1989.

18. **Ганчев, И., Ю. Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев, Ю. Сидоров.** Методика на обучението по математика от VIII до XI клас. Първа част. Модул, София, 1996.

19. **Ганчев, И., Ю. Нинова, В. Никова.** Методика на обучението по математика (обща част). Благоевград, 2002.

20. **Ганчев, И.** Основни учебни дейности в урока по математика (Синтез на резултати от различни изследвания). ИФ „Модул-96”, София, 1999.

21. **Ганчев, И.** Сава Гроздев – математик и педагог, учен-новатор в духа на традициите. Синергетика и рефлексия в обучението по математика. $e^{i\pi} + 1 = 0$. Доклади на юбилейна международна конференция, Бачиново, 10 -12 септември, 2010.

22. **Гельфанд, М. Б., А. С. Макуха, Р. П. Ушаков.** Математика, справочное пособие. Киев, 1982.

23. **Гнеденко, Б. В.** Математика и математическое образование в современном мире. Москва, 1985.

24. **Градщейн, И. С.** Прямая и обратная теоремы. Издательство „Наука”, Москва, 1972.

25. **Гьонов, А., Н. Стоев.** Сборник от задачи по аналитична геометрия, пето издание. СОФТЕХ, София, 1994.

26. **Денчев М.** Тайни на научното творчество. „Народна младеж”, София, 1977.

27. **Дьедоне, Ж.** Линейная алгебра и элементарная геометрия. Москва, 1972.

28. **Эрдниев, П. М.,** Сравнение и обобщение при обучении математике. Пособие для учителей. Москва, 1960.

29. **Эрдниев, П. М.** Преподавание математики в школе. Москва, 1978.

30. **Запрянов, З., Г. Станилов и др.** Учебно пособие по математика за свободноизбираема подготовка в X клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1982.

31. **Запрянов, З., И. Димовски и др.** Математика за III курс на техникумите и СПТУ за свободноизбираема подготовка в XI клас (III курс) на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1983.

32. **Запрянов, З., А. Лангов и др.** Геометрия за 10 клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1990.

33. **Запрянов, З., Г. Станилов и др.** Математика. Учебно пособие за свободноизбираема подготовка в 10 клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1990.

34. **Иванов, П.** Методика на обучението по математика. Наука и изкуство, София, 1965.

35. **Ивин, А.** Изкуството да мислим правилно. Държавно издателство „Народна просвета”, София, 1989.

36. **Илиев, Л.** Творчество, наука изкуство. Теория на моделирането. Държавно издателство „Народна просвета”, София, 1986.

37. **Коксетер, Г. С. М., С. Л. Грейтцер.** Новые встречи с геометрией. Москва 1978.

38. **Колягин, Ю. М., В. А. Оганесян, В. Я. Саннинский, Г. Л. Луканкин.** Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Москва, 1975.

39 . **Лакатош, И.** Доказателства и опровержения. Наука и изкуство, София, 1983.

40. **Лалчев, З.** Векторно-алгебрично изграждане на афинните преобразувания на равнината. – Математика и математическо об-

разование, Доклади на Тринадесетата пролетна конференция на Съюза на математиците в България, Слънчев бряг, 6–9 април 1984. БАН, ЕЦММ, СМБ, София, 1984.

41. **Лалчев, З.** Векторно-алгебрично изграждане на афинните преобразувания на пространството. – Математика и математическо образование, Доклади на Тринадесетата пролетна конференция на Съюза на математиците в България, Програма на домакините – Врачански окръг, Слънчев бряг, 6 – 9 април 1984. СМБ, ОНС–Враца, 1984.

42. **Лалчев, З.** Смесено произведение на вектори и негови приложения в училищния курс по геометрия. Юбилеен сборник „100 години от рождението на з. у. Атанас Радев” (1886 – 1986), Ямбол, 12–13 ноември 1986. СМБ, ОНС–Ямбол, 1986.

43. **Лалчев, З.** Използване на векторната база за доказване на някои теореми, свързани с лице на триъгълник. Приложение на математиката в икономиката и проблеми на обучението по математика и информатика. – Сборник от доклади на Първа регионална конференция на ВФСИ „Д. А. ЦЕНОВ", Свищов, 11–12 март 1988. ВФСИ, СНРБ, СМБ–Свищов 1988.

44. **Лалчев З.** Векторна база в пространството и обем на тетраедър. – Математика и математическо образование, Доклади на Двадесетата пролетна конференция на Съюза на математиците в България, Дружба, Варна 2–5 април 1991. БАН, ИМИЦ, СМБ, София, 1991.

45. **Лалчев, З.** Правило на триъгълника. – В: Обучението по математика и информатика, бр. 5. Народна просвета, София, 1989.

46. Λαλτσεφ, Ζ. Αναγωγη πολυεδρων, ΔΙΑΣΤΑΣΗ, Τριμηνια ια Μαθηματικη Επιθεωρηση των Παραρτηματος Κεντρικης Μακεδονιας της Ε.Μ.Ε., Τευχος 3–4 / 1993, Θεσσαλονικη, 1993.

47. **Лалчев, З., И. Здравкова.** Теорема на Чева за тетраедъра. – В: Математика и информатика, кн. 4, год. 1999.

48. **Лалчев З., И. Вутова.** Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от лица и обеми. „ВЕДА СЛОВЕНА” – ЖГ, София, 2005.

49. **Лалчев З., И. Вутова.** Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от колинеарност и конкурентност. „ВЕДА СЛОВЕНА” – ЖГ, София, 2009.

50. **Леви, Л.** Кокнитивна психология. Издателство „Парадигма“, София, 2006.

51. **Лозанов, Ч., Г. Енева, А. Лангов.** Синтетична геометрия. София, 1994.

52. **Милушева В., В. Милушев.** Вектори. Учебно пособие за ученици, зрелостници и кандидат-студенти. Пловдив, 1993.

53. **Нинова, Ю.** Основните задачи за построение. София, 2007.

54. **Паскалев, Г., И. Чобанов.** Забележителни точки в триъгълника. София, 1985.

55. **Паскалев, Г., И. Чобанов.** Забележителни точки в тетраедъра. София, 1988.

56. **Паскалев, Г., Н. Георгиева, И. Тонов, В. Димитров.** Учебно пособие за факултативна подготовка по математика в 9 клас на ЕСПУ. София, 1986.

57. **Пенков, К.** Вектори и някои техни приложения. Народна просвета, София, 1971.

58. **Перепьолкин, Д. И.** Курс по елементарна геометрия, част I: Равнинна геометрия. София, 1965.

59. **Перепьолкин, Д. И.** Курс по елементарна геометрия, част II: Пространствена геометрия, второ издание. Изд. „Наука и изкуство”, София, 1965.

60. **Петканчин, Б.** Аналитична геометрия, трето издание. Изд. „Наука и изкуство”, София, 1966.

61. **Поанкаре, А.** Наука и хипотеза. О науке. Москва, 1973.

62. **Пойа, Д.** Как да се решава задача (Един нов аспект на математическия метод). НП, София, 1972.

63. **Пойа, Д.** Математиката и правдоподобните разсъждения. Том първи: Индукция и аналогия в математиката. НП, София, 1970.

64. **Пойа, Д.** Математиката и правдоподобните разсъждения. Том втори: Схеми на правдоподобни разсъждения. НП, София, 1976.

65. **Пойа, Д.** Математическое открытие (Решение задач: основные понятия, изучение и приподавание). Наука, Москва, 1976.

66. **Сендов, Б.** Джон Атанасов – електронният Прометей. Университетско издателство „Св. Климент Охридски”, София, 2003.

67. **Скафа, Е., В. Милушев.** Конструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи. Университетско издателство „Паисий Хилендарски”, Пловдив, 2009.

68. **Скопец, З. А., Я. П. Понарин.** Геометрия тетраэдра и его элементов. Ярославль, 1974.

69. **Сойер, У. У.** Прелюдия към математиката. Държавно издателство „Техника”, София, 1977.

70. **Станилов, Г.** Върху приложението на векторния апарат в геометрията. – Математика и математическо образование, Доклади по покана и материали за дискусии на Деветата пролетна конференция на Съюза на математиците в България, Слънчев бряг, 3–6 април 1980 г. София, 1980.

71. **Станилов, Г., В. Георгиев, Й. Кучинов.** Вектори и преобразувания в равнината. Народна просвета, София, 1975.

72. **Станилов, Г., Й. Кучинов, В. Георгиев.** Вектори и преобразувания в пространството. Народна просвета, София, 1979.

73. **Станилов, Г., Й. Кучинов, В. Георгиев.** Стереометрия за X клас на общообразователните трудово-политехнически училища. Народна просвета, София, 1976.

74. **Станилов, Г., А. Лангов, Й. Кучинов, Д. Николов.** Геометрия за IX клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1981.

75. **Станилов, Г., А. Лангов, Й. Кучинов, Д. Николов.** Геометрия за X клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1982.

76. **Станилов, Г., А. Лангов, Й. Кучинов, Д. Николов.** Геометрия за 9 клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1984.

77. **Станилов, Г., А. Лангов, Й. Кучинов, Д. Николов.** Геометрия за 10 клас на ЕСПУ. Народна просвета, София, 1985.

78. **Столяр, А.А.** Педагогика на математиката. Държавно издателство „Народна просвета”, София, 1976.

80. **Табаков, М.** Логика и аксиоматика. Издателство „Наука и изкуство”, София, 1986.

81. **Тонов, И.** Евристиката – наука, изкуство, занаят. Монографичен труд. София, 2012.

82. **Чобанов, И.** Векторна алгебра – историческии съвременни аспекти. София, 1982.

83. **Рузавин, Г. И.** За природата на математическото знание. Държавно издателство „Народна просвета”, София, 1981.

84. **Фройденталь, Г.** Математика как педагогическая задача. Часть I. Просвещение, Москва, 1982.

85. **Фройденталь, Г.** Математика как педагогическая задача. Часть II. Просвещение, Москва, 1983.

86. **Grozdev, S.** For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia, 2007.

ПУБЛИКАЦИИ, СВЪРЗАНИ С ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

1. Лалчев, З., **И. Здравкова.** Теорема на Чева за тетраедъра. – В: Математика и информатика, кн. 4, София, 1999.

2. Лалчев, З., **И. З. Вутова.** Свързващ елемент. – Математика и математическо образование, Доклади на Тридесет и втора пролетна конференция на Съюза на математиците в България, Слънчев бряг, 5–8 април, 2003. БАН, ИМИ, СМБ, София, 2003.

3. Върбанова, М., З. Лалчев, **И. З. Вутова.** Методически бележки по въвеждане и изучаване на векторите в училищния курс по геометрия. – Предизвикателствата на информационното общество пред статистиката и математиката – век XXI, Доклади на Международна научно-практическа конференция, Свищов, 16–18 октомври 2003. СА „Д. А. Ценов”, ИМИ при БАН, НСИ – София, Свищов, 2003.

4. Вутова, И. Обем на октаедър. – Математика и математическо образование, Доклади на Тридесет и третата пролетна конференция на Съюза на Математиците в България, Боровец, 1–4 април, 2004, БАН, ИМИ, СМБ, София, 2004.

5. Лалчев, З., **И. Вутова.** Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от лица и обеми. „ВЕДА СЛОВЕНА” – ЖГ, София, 2005.

6. Лалчев, З., **И. Вутова,** М. Върбанова. Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от колинеарност и конкурентност. „ВЕДА СЛОВЕНА” – ЖГ, София, 2009.

7. Вутова, И. Теоретико-приложни основи на векторно-алгебрично моделиране в обучението по геометрия. – В: Математика и информатика, кн. 1, София, 2014.

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарна съм на покойния **професор Иван Ганчев** за избора на темата на моя дисертационен труд.

Благодарна съм на **проф. Иван Ганчев** и на **доц. Юлия Нинова** за това, че запалиха любовта ми към преподаването на математиката и за подготовката по теория и методика на обучението, която ми дадоха по време на следването и на съвместната ни работа във Факултета по математика и информатика.

Благодаря и на преподавателите от катедра „Геометрия“ – **проф. Грозьо Станилов, доц. Гергана Енева, доц. Анани Лангов и доц. Чавдар Лозанов** за това, че провокираха у мен интерес към геометрията и насърчиха моите „векторно-алгебрични“ експерименти.

Изказвам благодарност и на моя научен ръководител **проф. Иван Тонов** за евристичните съвети по време на изследването и затова, че ми предостави възможността да проуча и да използвам неговия хабилитационен труд „Евристика – наука, изкуство, занаят“.

Благодаря и на моя баща **проф. Здравко Лалчев** за оказаната морална, материална и професионална помощ и за това, че ме научи да преоткривам и да пресъздавам математика.