Рецензия

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:

„Клас C*-алгебри на Тьоплиц“

за придобиване на

образователна и научна степен „доктор“

кандидат: Николай Петров Буюклиев,
Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика
Професионално направление: 4.5. Математика,
Докторска програма: „Математически анализ“, катедра: „Математически анализ“,
Факултет по математика и информатика (ФМИ),
Софийски университет „Св. Климент Охридски“ (СУ),

Рецензията е изготвена от: проф. дмн Севджан Ахмедов Хаккъев, ИМИ-БАН
в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед № РД-38-223 / 28.04.2023 г. на Ректора на Софийския университет.

1. Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Представените материали са изготвени в съответствие със Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за приложение на ЗРАСРБ, както и с Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности (ПУРПНСЗАД) в СУ “Св. Кл. Охридски“. Дисертантът е представил пълния комплект от документи,който включва: 1) Дисертационен труд; 2) Автореферат на български език и английски език; 3) Копие на диплома за магистърска степен; 4) Справка за изпълнение на минималните изисквания; 5) Списък от научни публикации по темата на дисертацията; 6) Автобиография; 7) Протокол за проверка на оригиналността на дисертациония труд; 8) Становище във връзка с процедурата за предотвратяване на плагиатство; 9) Декларация на докторанта за оригиналност и липса на плагиатство; 10) Протоколи от катедрени съвети, свързани с откриване на процедурата и с предварителното обсъждане на дисартационния труд.

Дисертационният труд на докторанта Николай Буюклев е в обем от 56 страници , като включва увод, 5 глави и литература от 52 заглавия.

2. Данни и лични впечатления за кандидата

Николай Буюклиев е роден през 1959 г. Завършва висшето си образование през 1984 г. като магистър по Математика във ФММ на СУ „Свети Климент Охридски. В професионалната си кариера е бил последователно, асистен, старши асистент и главен асистент към катедра „Математически анализ“ на ФМИ на СУ. Познавам дисертанта и имам отлични впечетления от работата му

3. Съдържателен анализ на научните и научноприложните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата

В глава 1 са въведени основните понятия разглеждани в дисертацията, дадени са дефиниции на операторите на Тьоплиц и Внер-Хопф и $C*$-алгебрата породена от тях по следния начин.

Нека T е групата на комплексните числа с модул 1, μ е мярката на Хаар, като $\mu(T) = 1$ и $P : L^2(T) \to H^2(T)$ е оператора на проектиране ($H^2(T)$ е пространство на Харди). За $\varphi \in C(T)$, с T_φ е означен оператора $T_\varphi = P(\varphi f), \quad f \in H^2(T)$ и с $\mathcal{T}$ е означена C^*-алгебрата породена от операторите T_φ

Нека G е T_2 е локално компактна гупа с единица e, P е нормална подгрупа на G. За $f \in C_c(G)$, се дефинира оператора на Винер-Хопф

$$W_f\xi(t) = \int_G f(s)\xi(ts)1_P(ts)d\lambda(s), \ \ \xi \in L^2(P). \tag{1}$$

C^*-алгебрата породена от операторите W_f, която се нарича още $C*$-алгебра на операторите на Винер-Хопф е означено с $\mathcal{B}$.

В глава 2 са дадени някои предварителни сведения за C^*-алгебри, групоиди и техните алгебри, примери за групоидни C^* алгебри. Също така са дадени и сведения от K-теорията и цикличните кохомологии на C^*-алгебри.

В глава 3 е разгледана груподна C^*-алгебра $\mathcal{T} = C^*(\mathcal{G})$, където $\mathcal{G}$ е групоид на Винер-Хопф. В параграф 3.1 е получен критерий за това кога оператора $T \in C^*(\mathcal{G})$ е Фредхолмов. В параграф 3.2 е представен метод за конструиране на явно линейно сечение. Показано е, че изображението

$$\psi : C^*(\mathcal{G}_{|F}) \to C^*(\mathcal{G})$$

$$\psi(b)(x, n) = b(\lambda(x), n), \ \ b \in C_c(\mathcal{G}_{|F})$$

където F е затворено и инвариантно подмножество на $\mathcal{G}^0$ и $\lambda : X \to F$ е линейна контракция, е непрекъснато сечение. Този резултат е обобщен в случая когато F е обединение на краен брой затворени и инвариантни подможества на X. Показано е, че изображението

$$\psi(b)(x,n) = \sum_{\sigma\subset\{1,2,\dots,n\}} (-1)^{rank(\sigma)+1} b(\lambda_\sigma(x),n), \quad b \in C_c(\mathcal{G}_{|F}),$$

където $rank(\sigma)$ е броя на елементите на σ, е непрекъснато сечение.

В глава 4, първо е представен резултата на E. Park, който е свързан с изучаването на C^*-алгебрата $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$ породена от операторите на Тьоплиц. По конкретно $\mathcal{T}^{\alpha,\beta}$ съдържа $\mathcal{K}$-идеала на компактните оператори и редицата

$$0 \to \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{T}^{\alpha,\beta} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{T}^{\alpha,\beta}/\mathcal{K} \to 0$$

е точна.

В тази глава се разглежда групоидна C^*-алгебра $\mathcal{T} = C^*(\mathcal{G})$, където $\mathcal{G}$ е групоид на Винер-Хопф. Целта е да се построи непрекъснато линейно сечение ψ в групоидна алгебра на Винер-Хопф. При следните предположения:

- съществува фамилия M от оператори(елементарни образуващи $||A|| \leq 1,\ A \in M$), която поражда алгебрата $C^*(\mathcal{G})$. Ако $A = A_1 A_2 ... A_n$, където A_i са елемнтарни ибразуващи, то A се нарича крайно произведение

- съществува числова функция $N(A)$, $A - \psi\gamma(A)$ е с крайна следа и $||A - \psi\gamma(A)||_1 < N(A)$

- съществуват C_1, C_2, такива че $N(A) > C_1$ и $N(AB) \leq C_2(N(A) + N(B))$

е показано, че множеството от всички оператори от вида

$$S = \{A = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i : \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| N(A_i) < \infty\}$$

е алгебра.

Показано е, че изображението $\psi : \mathcal{T}^\infty \to C^*(\mathcal{G})$, където $\mathcal{T}^\infty = \gamma(S)$ е почти мултипликативно, т.е. ако $\gamma(A),\ \gamma(B) \in \mathcal{T}^\infty$, то $\psi\gamma(AB) - \psi\gamma(A)\gamma(B)$ е оператор с крайна следа.

В последния параграф на тази глава е получен следния резутат: Ако $T \in \mathcal{T}$ е Фредхолмов оператор и $\gamma(T),\ (\gamma(T))^{-1} \in \mathcal{T}^\infty$, то индекса на T се пресмята по следната формула

$$ind(T) = tr[\psi\gamma(T)\psi(\gamma(T)^{-1}) - \psi(\gamma(T)^{-1}\psi\gamma(T)].$$

В глава 5 е посветена на пресмятането на K-теорията на $\mathcal{B}(R^d, P)/\mathcal{K}$ и $\mathcal{B}$, където $\mathcal{B}(R^d, P) = C^*(\mathcal{G})$. В параграф 5.1 е показано, че ако $P \subset R^n$ удовлетворява определени геометрични условия, то $K_*(\mathcal{B}(R^n, P) = (0,0),\quad K_*(\mathcal{B}(R^d, P)/\mathcal{K}) = (0, Z)$ и индексното изобтажение е изоморфизъм. В параграф 5.2 е показано, че ако P е полиедрален конус в R^d, то в $\mathcal{B}(R^d, P)$ съществува Фредхолмов оператор с индекс единица. Също така е показано, че ако $K_*(\mathcal{B}(R^d, P)/\mathcal{K}) = (0, Z)$, то $K_*(\mathcal{B}) = (0, 0)$ и индексното изображение

$$ind : K_1(\mathcal{B}(R^n, P)/\mathcal{K}) \to K_0(\mathcal{K}$$

е изоморфизъм.

В глава 6 се разглеждат операторите на Тьоплиц $\mathcal{T}(H_3(Z))$, асоциирани с дискретната тримерна гупа на Хайзенберг $H_3(Z)$ и нейна полугрупа P. Показано е, че за операторите на Тьоплиц, съществува редица от двустранни затворени идеали

$$\{0\} \subset I_0 \subset I_{1d} \subset I_2 \subset I_3 = \mathcal{T}(H_3(Z)),$$

където $I_0 \cong \mathcal{K}, \;\; I_3/I_2 \cong C^*(H_2(Z))$.

4. Апробация на резултатите

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в 4 статии, всичките на английски език и всичките са самостоятелни. Краткият анализ на тези публикации показва следното: една от статиите е приета за публикация в списание с импакт фактор, а другите 3 статии са публикувани в Годишника на ФМИ на СУ. Резултатите от дисертационния труд са докладвани на две международни конференции, на научната сесия на ФМИ и на една конференция с международно участие.

Получните 86 точки надвишават минималните изисквания за предобиване на образователната и научна степен „доктор“ и на допълнителните изисквания на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване на образователна и научна степен „доктор“ в научната област и професионално направление на процедурата.

Въз основа на представените материали, рецензентът приема, че няма доказано по законоустановения ред плагиатство в представения дисертационен труд и научни трудове по тази процедура.

5. Качества на автореферата

Авторефератът в обем от 14 стр. отразява адекватно основните идеи и съществените крайни резултати, които са описани в дисертационния труд.

6. Критични бележки и препоръки

Нямам критични бележки по същество. Налице е и задълбочено познаване на литературата по разглежданите в дисертацията въпроси, видно от въведението, което прави получените резултати още по-убедителни.

7. Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни и научноприложни приноси, потвърждавам, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване от кандидата на образователната и научна степен „доктор"в научната област 4. Природни науки, математика и информатика и професионално направление 4.5 Математика. В частност кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове. Въз основа на гореизложеното, препоръчвам на научното жури да присъди на Николай Петров Буюклиев образователна и научна степен „доктор“ в научна област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, докторска програма "Математически анализ".

29.05.2023 г.

Изготвил рецензията:
(проф. дмн Севджан Хаккъев)