Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика
Математическа логика и приложения

Логики за релационни геометрични структури:

дистрибутивна мереотопология, разширени контактни алгебри и свързани безкванторни логики

Татяна Иванова

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователната и научна степен "доктор"
по професионално направление "Математика",
научна специалност "Математическа логика"

Научен ръководител: проф. дмн Димитър Вакарелов

27 юни 2016 г.

Увод

В класическата Евклидова геометрия понятието точка се взима като едно от основните примитивни понятия. В контраст теорията на пространството, базирана на региони, (RBTS) има като примитиви по-реалистичното понятие за регион като абстракция на физическо тяло, заедно с някои основни релации и операции върху региони . Някои от тези релации са мереологични - част от ($x \leq y$), overlap (xOy), дуалният му underlap ($x\widehat{O}y$). Други релации са топологични - контакт (xCy), дълбоко включване ($x \ll y$), дуален контакт ($x\widehat{C}y$) и някои други, дефинируеми чрез релациите контакт и част от. Това е една от причините разширението на мереологията с тези нови релации обикновено да се нарича *мереотопология*. Няма ясна разлика в литературата между RBTS и мереотопология, и според някои автори RBTS е свързана по-скоро с така наречената *мереогеометрия*, докато мереотопологията се счита само за вид безточкова топология, разглеждаща главно топологични свойства на нещата. RBTS води началото си от Whitehead [46] и de Laguna [28]. Според Whitehead точките, както и другите примитивни понятия в Евклидовата геометрия като прави и равнини, нямат отделно съществуване в реалността и поради това не са подходящи за примитивни понятия; но точките трябва да могат да се дефинират чрез другите примитивни понятия.

Статии за RBTS са [40, 5, 17, 32] (виж също справочника [1] и [4] за някои логики за пространството). Изследвания, разглеждащи различни приложения, са [6, 7] и книгата [20] (виж също специални издания на Fundamenta Informaticæ[9] и журнала за приложни некласически логики [3]). RBTS има приложения в компютърната наука, поради нейния по-прост начин за представяне на качествена пространствена информация и е инициирала специална област в Knowledge Representation (KR), наречена Qualitative Spatial Representation and Reasoning (QSKR). Една от най-известните системи в QSRR е Region Connection Calculus (RCC), въведена в [33].

Понятието контактна алгебра е един от главните инструменти в RBTS. Това понятие се появява в литературата под различни имена и формулировки, като разширение на булева алгебра с някои мереотопологични релации [43, 35, 41, 42, 5, 13, 8, 10]. Най-простата система, наречена просто контактна алгебра е въведена в [8] като разширение на булева алгебра $\underline{B} = (B, 0, 1, \cdot, +, *)$ с бинарна релация C наречена контакт и удовлетворяваща няколко прости аксиоми:

(C1) Ако aCb, то $a \neq 0$ и $b \neq 0$,

(C2) Ако aCb и $a \leq c$ и $b \leq d$, то cCd,

(C3) Ако $aC(b + c)$, то aCb или aCc,

(C4) Ако aCb, то bCa,

(C5) Ако $a \cdot b \neq 0$, то aCb.

Елементите на булевата алгебра се наричат региони и се считат аналози на физически тела. Булевите операции се считат операции за конструиране на нови региони от дадени региони. Елементът 1 символизира региона, съдържащ като свои части всички региони, а нулевият регион 0 символизира несъществуващия регион. Контактната релация се използва също за дефиниране на някои други важни мереотопологични релации като дълбоко включване, дуален контакт и други.

Стандартният модел на булева алгебра е алгебрата от подмножествата на даден универсум. Този модел не може да изрази всички видове контакт, например, външния контакт, в който регионите споделят само гранична точка. Поради това стандартните модели на контактни алгебри са топологични и са контактните алгебри от регулярно затворените множества в дадено топологично пространство.

Дълбокото включване и дуалният контакт се дефинират чрез операцията булево допълнение. Но има някои проблеми, свързани с мотивацията на тази операция. Възниква въпрос: ако регионът a представя физическо тяло, тогава какъв вид тяло представя a^*? За да избегнем този проблем, можем да махнем операцията допълнение и да заменим булевата част на контактна алгебра с дистрибутивна решетка. Първи стъпки в тази посока са направени в [11, 12], въвеждайки понятието дистрибутивна контактна решетка. В дистрибутивна контактна решетка единствената мереотопологична релация е контактната релация. В първата част на първата глава разширяваме езика на дистрибутивни контактни решетки чрез разглеждане като недефинируеми примитиви на релациите контакт, дълбоко включване и дуален контакт. Получаваме аксиоматизация на теорията, състояща се от универсалните формули в езика $\mathcal{L}(0, 1; +, \cdot; \leq, C, \widehat{C}, \ll)$, верни във всички контактни алгебри. Структурите в $\mathcal{L}$, удовлетворяващи въпросните аксиоми, се наричат разширени дистрибутивни контактни решетки (EDC-решетки). Теорема за представяне е доказана, гласяща, че всяка EDC-решетка може изоморфно да се вложи в контактна алгебра. Връзките на EDC-решетките с други мереотопологични системи също са разгледани: EDC-решетките са релационни мереотопологични системи в смисъла на [29], и добре известната RCC-8 система от мереотопологични релации е дефинируема в езика на EDC-решетки.

Част II на глава 1 е посветена на теорията за топологично представяне на EDC-решетки и някои от техните аксиоматични разширения, водещи до представяния в T_1 и T_2 пространства. Специално внимание е дадено на дуално гъсти и гъсти представяния в контактни алгебри от регулярно затворени и регулярно отворени подмножества на топологични пространства. Методът е разширение на теорията за представяне на дистрибутивни контактни решетки [12] и адаптация на някои конструкции от теорията за представяне на контактни алгебри [8, 10].

В [38] е представена пълна безкванторна аксиоматизация на няколко логики за теорията на пространството, основана на региони, базирани на контактна релация и предикати за свързаност c и $c^{\leq n}$, и теореми за пълнота за въпросните логики са доказани. Показано е в [38], че c и $c^{\leq n}$ могат да се дефинират в контактни алгебри чрез контакта C. Предикатите c и $c^{\leq n}$ са изучени за първи път в [30, 31] (виж също [40]). Изразителността и сложността на пространствени логики, съдържащи c и $c^{\leq n}$ са изследвани в [23, 24, 25, 26, 27]. В глава 2 разглеждаме предиката c^o - вътрешна свързаност. Нека X е топологично пространство и $x \in RC(X)$. Нека $c^o(x)$ означава, че $Int(x)$ е свързано топологично пространство в подпространствената топология. Доказваме, че предикатът вътрешна свързаност не може да се дефинира в езика на контактни алгебри. Поради това добавяме към езика нов тернарен предикатен символ $\vdash$, който има следния смисъл: в контактната алгебра от регулярно затворените множества на някакво топологично пространство $a, b \vdash c$, ако и само ако $a \cap b \subseteq c$. Оказва се, че предикатът c^o може да се дефинира в новия език. Дефинираме *разширени контактни алгебри* - булеви алгебри с добавени релации $\vdash$, C и c^o, удовлетворяващи някакви аксиоми, и доказваме, че всяка разширена контактна алгебра може изоморфно да се вложи в контактната алгебра от регулярно затворените подмножества на някакво компактно, семирегулярно, T_0 топологично пространство с добавени релации $\vdash$ и c^o. Така че разширената контактна алгебра може да се счита аксиоматизация на теорията, състояща се от универсалните формули, верни във всички топологични контактни алгебри с добавени релации $\vdash$ и c^o.

В глава 3 разглеждаме език от първи ред без квантори, съответен на EDCL. Даваме теореми за пълнота по отношение на алгебрична и топологична семантика за няколко логики за този език. Оказва се, че всички тези логики са разрешими. Разглеждаме също безкванторен език от първи ред, съответен на ECA и логика за ECA, която е разрешима.

1 Дистрибутивна мереотопология. Разширени дистрибутивни контактни решетки

Контактна алгебра е булева алгебра $\underline{B} = (B, \leq, 0, 1, \cdot, +, *, C)$ с допълнителна бинарна релация C, наречена *контакт*, и удовлетворяваща следните аксиоми:

(C1) Ако aCb, то $a \neq 0$ и $b \neq 0$,

(C2) Ако aCb и $a \leq a'$ и $b \leq b'$, то $a'Cb'$,

(C3) Ако $aC(b + c)$, то aCb или aCc,

(C4) Ако aCb, то bCa,

(C5) Ако $a \cdot b \neq 0$, то aCb.

Даваме дефиниция на дистрибутивна контактна решетка, разширена с релациите дуален контакт $\widehat{C}$ и дълбоко включване $\ll$, следвайки стратегията да изберем универсални формули от първи ред за релациите $C, \widehat{C}, \ll$ като допълнителни аксиоми, които са верни в произволни контактни алгебри и които гарантират влагането в контактна алгебра. Получената алгебрична система е наречена *разширена дистрибутивна контактна решетка.*

Дефиниция 1 Разширена дистрибутивна контактна решетка. *Нека $\underline{D} = (D, \leq, 0, 1, \cdot, +, C, \widehat{C}, \ll)$ е ограничена дистрибутивна решетка с три допълнителни релации $C, \widehat{C}, \ll$, наречени съответно* ***контакт, дуален контакт*** *и* ***дълбоко включване****. Получената система, означена кратко с $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$, се нарича* ***разширена дистрибутивна контактна решетка*** *(EDC-решетка), ако удовлетворява аксиомите по-долу.*

Аксиоми за C: *Аксиомите (C1)-(C5), споменати по-горе.*

Аксиоми за $\widehat{C}$:

($\widehat{C}1$) *Ако* $a\widehat{C}b$*, то* $a, b \neq 1$,

($\widehat{C}2$) *Ако* $a\widehat{C}b$ *и* $a' \leq a$ *и* $b' \leq b$*, то* $a'\widehat{C}b'$,

($\widehat{C}3$) *Ако* $a\widehat{C}(b \cdot c)$*, то* $a\widehat{C}b$ *or* $a\widehat{C}c$,

($\widehat{C}4$) *Ако* $a\widehat{C}b$*, то* $b\widehat{C}a$,

($\widehat{C}5$) *Ако* $a + b \neq 1$*, то* $a\widehat{C}b$.

Аксиоми за $\ll$***:***

($\ll 1$) $0 \ll 0$,

($\ll 2$) $1 \ll 1$,

($\ll 3$) *Ако* $a \ll b$*, то* $a \leq b$,

($\ll 4$) *Ако* $a' \leq a \ll b \leq b'$*, то* $a' \ll b'$,

($\ll 5$) *Ако* $a \ll c$ *и* $b \ll c$*, то* $(a + b) \ll c$,

($\ll 6$) *Ако* $c \ll a$ *и* $c \ll b$*, то* $c \ll (a \cdot b)$,

($\ll 7$) *Ако* $a \ll b$ *и* $(b \cdot c) \ll d$ *и* $c \ll (a + d)$*, то* $c \ll d$.

Смесени аксиоми:

($MC1$) *Ако* aCb *и* $a \ll c$*, то* $aC(b \cdot c)$,

($MC2$) *Ако* $a\overline{C}(b \cdot c)$ *и* aCb *и* $(a \cdot d)\overline{C}b$*, то* $d\widehat{C}c$,

($M\widehat{C}1$) *Ако* $a\widehat{C}b$ *и* $c \ll a$*, то* $a\widehat{C}(b + c)$,

($M\widehat{C}2$) *Ако* $a\overline{\widehat{C}}(b + c)$ *и* $a\widehat{C}b$ *и* $(a + d)\overline{\widehat{C}}b$*, то* dCc,

($M \ll 1$) *Ако* $a\overline{\widehat{C}}b$ *и* $(a \cdot c) \ll b$*, то* $c \ll b$,

($M \ll 2$) *Ако* $a\overline{C}b$ *и* $b \ll (a + c)$*, то* $b \ll c$.

За езика на EDCL можем да въведем следния принцип за дуалност: дуални двойки $(0, 1), (\cdot, +), (\leq, \geq), (C, \widehat{C}), (\ll, \gg)$. За всяка формула A от езика можем да дефинираме по очевиден начин нейната дуална $\widehat{A}$. За всяка аксиома Ax на EDCL нейната дуална $\widehat{Ax}$ също е аксиома.

За да докажем, че аксиомите на EDC-решетките са верни в контактни алгебри, въвеждаме релационни модели на EDCL, които са леки модификации на релационните модели на контактни алгебри, въведени в [10] и наречени там *дискретни контактни алгебри*. Моделът се дефинира, както следва.

Нека (W, R) е релационна система, където W е непразно множество и R е рефлексивна и симетрична релация в W и нека a, b са произволни подмножества на W. Дефинираме контактна релация между a и b както следва:

(Def C_R) aC_Rb ако и само ако $\exists x \in a$ и $\exists y \in b$, такива че xRy.

Тогава всяка булева алгебра от подмножества на W с така дефиниран контакт е контактна алгебра, и освен това, всяка контактна алгебра е изоморфна на контактна алгебра от такъв вид [10].

Модифицираме този модел за EDCL както следва: вместо булеви алгебри от множества разглеждаме само фамилии от подмножества, съдържащи празното множество $\emptyset$ и множеството W и затворени по отношение на обединение и сечение, които са ограничени дистрибутивни решетки от множества. Оттук интерпретираме решетъчните константи и операции както следва: $0 = \emptyset$, $1 = W$, $a \cdot b = a \cap b$, $a + b = a \cup b$. За контактната релация запазваме дефиницията (Def C_R). Тази модификация е точно модел на дистрибутивна контактна решетка, изучен в [12].

Имайки предвид дефинициите $a\widehat{C}b \leftrightarrow_{def} a^*Cb^*$ и $a \ll b \leftrightarrow_{def} a\overline{C}b^*$ в булеви контактни алгебри, въвеждаме следните дефиниции за $\widehat{C}$ и $\ll$ (за удобство представяме дефиницията на отрицанието на $\ll$):

(Def $\widehat{C}_R$) $a\widehat{C}_R b$, ако и само ако $\exists x \notin a$ и $\exists y \notin b$, такива че xRy, и

(Def $\not\ll_R$) $a \not\ll_R b$, ако и само ако $\exists x \in a$ и $\exists y \notin b$, такива че xRy.

Лема 1 *Нека (W, R) е релационна система с рефлексивна и симетрична релация R и нека $\underline{D}$ е произволна колекция от подмножества на W, която е ограничена дистрибутивна решетка от множества с релации $C, \widehat{C}$ и $\ll$, дефинирани, както по-горе. Тогава $(\underline{D}, C_R, \widehat{C}_R,$
$\ll_R)$ е EDC-решетка.*

EDC-решетка $\underline{D} = (D, C_R, \widehat{C}_R, \ll_R)$ над релационна система (W, R) ще се нарича *дискретна EDC-решетка.* Ако D е множество от всички подмножества на W, тогава $\underline{D}$ се нарича *пълна дискретна EDC-решетка.*

Следствие 1 *Аксиомите на релациите $C, \widehat{C}$ и $\ll$ са верни в контактни алгебри.*

Най-напред получаваме релационна теорема за представяне на EDC-решетки. Следните три твърдения са добре известни в теорията за представяне на дистрибутивни решетки.

Лема 2 *Нека F_0 е филтър, I_0 е идеал и $F_0 \cap I_0 = \emptyset$. Тогава:*

1. **Лема за разширение на филтри.** *Съществува прост филтър F, такъв че $F_0 \subseteq F$ и $F \cap I_0 = \emptyset$.*

2. **Лема за разширение на идеали.** *Съществува прост идеал I, такъв че $I_0 \subseteq I$ и $F_0 \cap I = \emptyset$.*

3. **Лема за отделимост на филтри и идеали.** *Съществува (прост) филтър F и (прост) идеал I, такива че $F_0 \subseteq F$, $I_0 \subseteq I$, $F \cap I = \emptyset$, и $F \cup I = D$.*

Получаваме по-силни лема за разширение на филтри и лема за разширение на идеали. Не знаем дали тези две твърдения за дистрибутивни решетки са нови, но ги използваме в теоремата за представяне.

Лема 3 *Нека F_0 е филтър, I_0 е идеал и $F_0 \cap I_0 = \emptyset$. Тогава:*

1. **Силна лема за разширение на филтри.** *Съществува прост филтър F, такъв че $F_0 \subseteq F$, $(\forall x \in F)(x \notin I_0)$ и $(\forall x \notin F)(\exists y \in F)(x \cdot y \in I_0)$.*

2. **Силна лема за разширение на идеали.** *Съществува прост идеал I, такъв че $I_0 \subseteq I$, $(\forall x \in I)(x \notin F_0)$ и $(\forall x \notin I)(\exists y \in I)(x + y \in F_0)$.*

Нека $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е EDC-решетка и нека $PF(D)$ обозначава множеството от простите филтри на $\underline{D}$. Конструираме канонична релационна структура (W^c, R^c), свързана с $\underline{D}$, полагайки $W^c = PF(D)$ и дефирирайки каноничната релация R^c for $\Gamma, \Delta \in PF(D)$, както следва:

$\Gamma R^c \Delta \leftrightarrow_{def} (\forall a, b \in D)((a \in \Gamma, b \in \Delta \rightarrow aCb) \& (a \notin \Gamma, b \notin \Delta \rightarrow a\widehat{C}b) \& (a \in \Gamma, b \notin \Delta \rightarrow a \not\ll b) \& (a \notin \Gamma, b \in \Delta \rightarrow b \not\ll a))$

Нека $h(a) = \{\Gamma \in PF(D) : a \in \Gamma\}$ е добре известното влагане на Stone. Оказва се, че h е влагане от $\underline{D}$ в EDC-решетката над (W^c, R^c):

Теорема 1 Релационна теорема за представяне на EDC-решетки. *Нека $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е EDC-решетка. Тогава има релационна система $\underline{W} = (W, R)$ с рефлексивна и симетрична R и влагане h в EDC-решетката от всички подмножества на W.*

Следствие 2 *Всяка EDC-решетка може изоморфно да се вложи в контактна алгебра.*

Теорема 2 *Нека A е универсална формула от първи ред в езика на EDC-решетки. Тогава A е следствие от аксиомите на EDC-решетка, ако и само ако A е вярна във всички контактни алгебри.*

Релационната мереотопология и *RCC-8* са изразими в езика на EDC-решетки, но не са изразими в дистрибутивните контактни решетки от [11, 12].

Формулираме няколко допълнителни аксиоми за EDC-решетки, които са адаптации за езика на EDC-решетки на някои известни аксиоми, разглеждани в конкекста на контактни алгебри. Най-напред формулираме някои нови решетъчни аксиоми за EDC-решетки - така наречените аксиоми за екстенсионалност за дефинируемите предикати overlap - $aOb \leftrightarrow_{def} a \cdot b \neq 0$ и underlap - $a\widehat{O}b \leftrightarrow_{def} a + b \neq 1$.

(Ext O) $a \not\leq b \rightarrow (\exists c)(a \cdot c \neq 0$ и $b \cdot c = 0)$ - *ексенсионалност на overlap*,

(Ext $\widehat{O}$) $a \not\leq b \rightarrow (\exists c)(a + c = 1$ и $b + c \neq 1)$ - *ексенсионалност на underlap*.

Казваме, че една решетка е *O-екстенсионална*, ако удовлетворява (Ext O) и *U-екстенсионална*, ако удовлетворява (Ext $\widehat{O}$). Забележете, че условията (Ext O) и (Ext $\widehat{O}$) са верни в булеви алгебри, но не винаги са верни в дистрибутивни решетки (виж [12] за някои примери, референции и допълнителна информация за тези аксиоми).

Изучаваме също следните аксиоми.

(Ext C) $a \neq 1 \rightarrow (\exists b \neq 0)(a\overline{C}b)$ - *C-екстенсионалност*,

(Ext $\widehat{C}$) $a \neq 0 \rightarrow (\exists b \neq 1)(a\overline{\widehat{C}}b)$ - *$\widehat{C}$-екстенсионалност*,

(Con C) $a \neq 0, b \neq 0$ и $a + b = 1 \rightarrow aCb$ - *аксиома за C-свързаност*,

(Con $\widehat{C}$) $a \neq 1, b \neq 1$ и $a \cdot b = 0 \rightarrow a\widehat{C}b$ - *аксиома за $\widehat{C}$-свързаност* ,

(Nor 1) $a\overline{C}b \rightarrow (\exists c, d)(c + d = 1, a\overline{C}c$ и $b\overline{C}d)$,

(Nor 2) $a\overline{\widehat{C}}b \rightarrow (\exists c, d)(c \cdot b = 0, a\overline{\widehat{C}}c$ и $b\overline{\widehat{C}}d)$,

(Nor 3) $a \ll b \rightarrow (\exists c)(a \ll c \ll b)$.

Друг вид аксиоми, които използваме в теорията за топологично представяне са така наречените rich аксиоми.

(U-rich $\ll$) $a \ll b \to (\exists c)(b + c = 1$ и $a\overline{C}c)$,

(U-rich $\widehat{C}$) $a\overline{\widehat{C}}b \to (\exists c, d)(a + c = 1, b + d = 1$ и $c\overline{C}d)$.

(O-rich $\ll$) $a \ll b \to (\exists c)(a \cdot c = 0$ и $c\overline{\widehat{C}}b)$,

(O-rich C) $a\overline{C}b \to (\exists c, d)(a \cdot c = 0, b \cdot d = 0$ и $c\overline{\widehat{C}}d)$.

Нека $(D_1, C_1, \widehat{C}_1, \ll_1)$ и $(D_2, C_2, \widehat{C}_2, \ll_2)$ са две EDC-решетки. Пишем $D_1 \preceq D_2$, ако D_1 е подструктура на D_2. В теоремите за влагане е ценно да знаем при какви условия имаме еквивалентности от вида:

D_1 удовлетворява някаква допълнителна аксиома тогава и само тогава, когато D_2 удовлетворява същата аксиома.

Забележка 1 Важността на такива условия е свързана с теорията за представяне на EDC-решетки, удовлетворяващи някакви допълнителни аксиоми. Изобщо, ако имаме някаква теорема за влагане на EDC-решетка D, удовлетворяваща дадена допълнителна аксиома A, не се знае предварително, че решетката, в която D се влага също удовлетворява A. Ето защо е добре да имаме такива условия, които автоматично гарантират това. Подолу формулираме няколко такива "добри условия": гъста и дуално гъста подрешетка, C- и $\widehat{C}$-отделима подрешетка.

Дефиниция 2 Гъста и дуално гъста подрешетка. *Нека D_1 е дистрибутивна подрешетка на D_2. D_1 се нарича* гъста *подрешетка на D_2, ако следното условие е изпълнено:*

(Dense) $(\forall a_2 \in D_2)(a_2 \neq 0 \Rightarrow (\exists a_1 \in D_1)(a_1 \leq a_2$ *и* $a_1 \neq 0))$.

Ако h е влагане на решетката D_1 в решетката D_2, тогава казваме, че h е гъсто *влагане, ако подрешетката $h(D_1)$ е гъста подрешетка на D_2.*

Дуално, D_1 се нарича дуално гъста *подрешетка на D_2, ако следното условие е изпълнено:*

(Dual dense) $(\forall a_2 \in D_2)(a_2 \neq 1 \Rightarrow (\exists a_1 \in D_1)(a_2 \leq a_1$ *и* $a_1 \neq 1))$.

Ако h е влагане на решетката D_1 в решетката D_2, тогава казваме, че h е Dual dense *влагане, ако подрешетката $h(D_1)$ е дуално гъста подрешетка на D_2.*

В булеви алгебри, dense и dually dense условията са еквивалентни; в дистрибутивни решетки тази еквивалентност не е в сила (виж [12] за някои известни характеризации на гъстота и дуална гъстота в дистрибутивни решетки).

За случая на контактни алгебри [40] и дистрибутивни контактни решетки [12] е въведено понятието *C-отделимост*, както следва. Нека $D_1 \preceq D_2$; казваме, че D_1 е *C-отделима подрешетка на* D_2 ако следното условие е изпълнено:

(С-отделимост) $(\forall a_2, b_2 \in D_2)(a_2\overline{C}b_2 \Rightarrow (\exists a_1, b_1 \in D_1)(a_2 \leq a_1, b_2 \leq b_1, a_1\overline{C}b_1))$.

За случая на EDC-решетки модифицираме това понятие, добавяйки две допълнителни клаузи, съответни на релациите $\widehat{C}$ и $\ll$, имайки предвид дефинициите на тези релации в контактни алгебри. Именно

Дефиниция 3 С-отделимост. *Нека $D_1 \preceq D_2$; казваме, че D_1 е C*-отделима EDC-подрешетка на D_2, *ако следните условия са изпълнени:*

(C-отделимост за C) -
$(\forall a_2, b_2 \in D_2)(a_2 \overline{C} b_2 \Rightarrow (\exists a_1, b_1 \in D_1)(a_2 \leq a_1, b_2 \leq b_1, a_1 \overline{C} b_1))$.

(C-отделимост за $\widehat{C}$) -
$(\forall a_2, b_2 \in D_2)(a_2 \overline{\widehat{C}} b_2 \Rightarrow (\exists a_1, b_1 \in D_1)(a_2 + a_1 = 1, b_2 + b_1 = 1, a_1 \overline{C} b_1))$.

(C-отделимост за $\ll$) -
$(\forall a_2, b_2 \in D_2)(a_2 \ll b_2 \Rightarrow (\exists a_1, b_1 \in D_1)(a_2 \leq a_1, b_2 + b_1 = 1, a_1 \overline{C} b_1))$.

Ако h е влагане на решетката D_1 в решетката D_2, тогава казваме, че h е С-отделимо влагане, *ако подрешетката $h(D_1)$ е C-отделима подрешетка на D_2.*

Понятието за $\widehat{C}$-отделимо влагане h се дефинира подобно. Следната лема е аналогична на подобен резултат от [40] (Теорема 2.2.2) и от [12] (Лема 5).

Лема 4 *Нека D_1, D_2 са EDC-решетки и D_1 е C-отделима EDC-подрешетка на D_2. Тогава:*

(i) Ако D_1 е дуално гъста EDC-подрешетка на D_2, тогава D_1 удовлетворява аксиомата (Ext C) тогава и само тогава, когато D_2 удовлетворява аксиомата (Ext C),

(ii) D_1 удовлетворява аксиомата (Con C) тогава и само тогава, когато D_2 удовлетворява аксиомата (Con C),

(iii) D_1 удовлетворява аксиомата (Nor 1) тогава и само тогава, когато D_2 удовлетворява аксиомата (Nor 1),

(iv) D_1 удовлетворява аксиомата (U-rich $\ll$) тогава и само тогава, когато D_2 удовлетворява аксиомата (U-rich $\ll$),

(v) D_1 удовлетворява аксиомата (U-rich $\widehat{C}$) тогава и само тогава, когато D_2 удовлетворява аксиомата (U-rich $\widehat{C}$).

След това дефинираме топологични модели на EDC-решетки. Казваме, че a е *регулярно затворено множество*, ако $a = Cl(Int(a))$ и a е *регулярно отворено* множество, ако $a = Int(Cl(a))$. Добре известен факт е, че множеството $RC(X)$ от всички регулярно затворени подмножества на X е булева алгебра по отношение на релациите, операциите и константите, дефинирани, както следва: $a \leq b$ тогава и само тогава, когато $a \subseteq b$, $0 = \emptyset$, $1 = X$, $a + b = a \cup b$, $a \cdot b = Cl(Int(a \cap b)$, $a^* = Cl(-a)$. Ако дефинираме контакт C чрез aCb тогава и само тогава, когато $a \cap b \neq \emptyset$, тогава получаваме стандартния топологичен модел на контактна алгебра.

Друг топологичен модел на контактна алгебра е чрез множеството $RO(X)$ от регулярно отворените подмножества на X. Тази контактна алгебра се дефинира дуално на контактната алгебра от регулярно затворените подмножества на X.

Топологичен модел на EDC-решетка чрез регулярно-затворени множества. Разглеждаме контактната алгебра $RC(X)$ от регулярно затворените подмножества на X. Нека махнем операцията a^* и дефинираме релациите $\widehat{C}$ и $\ll$ топологично според техните дефиниции в контактна алгебра, както следва:

$a\widehat{C}b$ тогава и само тогава, когато $Cl(-a) \cap Cl(-b) \neq \emptyset$ тогава и само тогава, когато (еквивалентно) $Int(a) \cup Int(b) \neq X$.

$a \ll b$ тогава и само тогава, когато $a \cap Cl(-b) = \emptyset$ тогава и само тогава, когато (еквивалентно) $a \subseteq Int(b)$.

Очевидно получената структура е модел на EDC-решетка. Също всяка дистрибутивна подрешетка на $RC(X)$ със същите дефиниции на релациите C, $\widehat{C}$ и $\ll$ е модел на EDC-решетка. Тези модели се считат за *стандартни топологични модели на EDC-решетка чрез регулярно затворени множества.*

Топологичният модел на EDC-решетка чрез регулярно-отворени множества се дефинира дуално.

Теорема 3 Теорема за топологично представяне на EDC-решетки. *Нека $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е EDC-решетка. Тогава:*

(i) Съществува топологично пространство X и влагане на $\underline{D}$ в контактната алгебра $RC(X)$ от регулярно затворените подмножества на X.

(ii) Съществува топологично пространство Y и влагане на $\underline{D}$ в контактната алгебра $RO(Y)$ от регулярно отворените подмножества на Y.

Дефиниция 4 U-rich и O-rich EDC-решетки. *Нека $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е EDC-решетка. Тогава:*

(i) $\underline{D}$ се нарича U-rich EDC-решетка, ако удовлетворява аксиомите (Ext $\widehat{O}$), (U-rich $\ll$) и (U-rich $\widehat{C}$).

(ii) $\underline{D}$ се нарича O-rich EDC-решетка, ако удовлетворява аксиомите (Ext O), (O-rich $\ll$) и (O-rich $\widehat{C}$).

Развиваме теорията за топологично представяне на U-rich EDC-решетки. По дуален начин може да се развие теорията за топологично представяне на O-rich EDC-решетки. Нека $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е U-rich EDC-решетка. Както в [12], дефинираме абстрактните точки на $\underline{D}$ да бъдат кланове (виж [8] за произхода на това понятие). Дефиницията е следната. Едно подмножество $\Gamma \subseteq D$ е *клан*, ако удовлетворява следните условия:

(Clan 1) $1 \in \Gamma$, $0 \notin \Gamma$,

(Clan 2) Ако $a \in \Gamma$ и $a \leq b$, то $b \in \Gamma$,

(Clan 3) Ако $a + b \in \Gamma$, то $a \in \Gamma$ или $b \in \Gamma$,

(Clan 4) Ако $a, b \in \Gamma$, то aCb.

Γ е *максимален клан*, ако е максимален по отношение на теоретико-множественото включване. Обозначаваме чрез CLAN(D) (MaxCLAN(D)) множеството от всички (максимални) кланове на $\underline{D}$. Дефинираме влагането на Stone: $h(a) = \{\Gamma \in CLAN(D) : a \in \Gamma\}$ и разглеждаме множеството $\mathbf{CB}(X) = \{h(a) : a \in D\}$ като затворена база на топологията в $X(D) = CLAN(D)$. Пространството $X(D)$ е семирегулярно, T_0, компактно и h е дуално гъсто влагане на $\underline{D}$ в булевата контактна алгебра $RC(X(D))$.

Теорема 4 Теорема за топологично представяне на U-rich EDC-решетки
Нека $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е U-rich EDC-решетка. Тогава съществува компактно, семирегулярно T_0-пространство X и и дуално гъсто и C-отделимо

влагане h на $\underline{D}$ в булевата контактна алгебра $RC(X)$ от регулярно затворените множества на X. Освен това:

(i) $\underline{D}$ удовлетворява (Ext C), ако и само ако $RC(X)$ удовлетворява (Ext C); в този случай X е слабо регулярно.

(ii) $\underline{D}$ удовлетворява (Con C), ако и само ако $RC(X)$ удовлетворява (Con C); в този случай X е свързано.

(iii) $\underline{D}$ удовлетворява (Nor 1), ако и само ако $RC(X)$ удовлетворява (Nor 1); в този случай X е к-нормално.

След това получаваме представяния на някои U-rich EDC-решетки в T_1-пространства, разширявайки съответните резултати от [12]. За да получим представяния в T_1 пространства, приемаме абстрактните точки да бъдат максимални кланове, така че за каноничното пространство на $\underline{D}$ полагаме $X(D) = MaxCLAN(D)$ и дефинираме каноничното влагане h да бъде $h(a) = \{\Gamma \in MaxCLAN(D) : a \in \Gamma\}$. Топологията в $X(D)$ се дефинира, разглеждайки множеството $\mathbf{CB}(X(D)) = \{h(a) : a \in D\}$ да бъде затворена база за пространството. Без допълнителни аксиоми не можем да докажем в този случай, че h е влагане. За да гарантираме това, приемаме, че $\underline{D}$ удовлетворява допълнително аксиомата за С-екстенсионалност.

(Ext C) $a \neq 1 \rightarrow (\exists b \neq 0)(a\overline{C}b)$.

Пространството $X(D)$ е семирегулярно, T_1, компактно и h е дуално гъсто, C-отделимо влагане на D в булевата контактна алгебра $RC(X(D))$.

Теорема 5 Теорема за топологично представяне на С-екстенсионални U-rich EDC-решетки *Нека $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е С-екстенсионална U-rich EDC-решетка. Тогава съществува компактно слабо регулярно T_1-пространство X и дуално гъсто и C-отделимо влагане h на $\underline{D}$ в булевата контактна алгебра $RC(X)$ от регулярно затворените множества на X. Освен това:*

(i) $\underline{D}$ удовлетворява (Con C), ако и само ако $RC(X)$ удовлетворява (Con C); в този случай X е свързано.

(ii) $\underline{D}$ удовлетворява (Nor 1), ако и само ако $RC(X)$ удовлетворява (Nor 1); в този случай X е к-нормално.

Добавяйки аксиомата (Nor 1), получаваме представимост в компактни T_2-пространства. Причината за това е, че аксиомата (Nor 1) прави възможно да използваме нови абстрактни точки - така наречените клъстери, които са максимални кланове, удовлетворяващи някои допълнителни свойства, водещи до T_2 отделимост на топологичното пространство.

Дефиниция 5 *Нека $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е EDC-решетка. Клан Γ в $\underline{D}$ се нарича клъстер, ако удовлетворява следното условие:*

(Cluster) Ако за всички $b \in \Gamma$ имаме aCb, то $a \in \Gamma$.

Обозначаваме множеството от клъстерите в $\underline{D}$ с $CLUSTER(D)$.

За да построим каноничното пространство $X(D)$, приемаме, че $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е U-rich EDC-решетка, удовлетворяваща аксиомите (Ext C) и (Nor 1). Дефинираме $X(D) = CLUSTER(D)$, $h(a) = \{\Gamma \in CLUSTER(D) : a \in \Gamma\}$ и дефинираме топологията в $X(D)$, разглеждайки множеството $\mathbf{CB}(X) = \{h(a) : a \in D\}$ като база за затворените множества в $X(D)$. Пространството $X(D)$ е семирегулярно, T_2, компактно и h е дуално гъсто, С-отделимо влагане на D в булевата контактна алгебра $RC(X(D))$.

Теорема 6 Теорема за топологично представяне на U-rich EDC-решетки, удовлетворяващи (Ext C) и (Nor 1). *Нека $\underline{D} = (D, C, \widehat{C}, \ll)$ е U-rich EDC-решетка, удовлетворяваща (Ext C) и (Nor 1). Тогава съществува компактно, T_2-пространство X и дуално гъсто и C-отделимо влагане h на $\underline{D}$ в булевата контактна алгебра $RC(X)$ от регулярно затворените множества на X. Освен това $\underline{D}$ удовлетворява (Con C), ако и само ако $RC(X)$ удовлетворява (Con C) и в този случай X е свързано.*

2 Разширени контактни алгебри и вътрешна свързаност

Нека X е топологично пространство и $x \in RC(X)$. Нека $c^o(x)$ означава, че $Int(x)$ е свързано топологично пространство в подпространствената топология.

Твърдение 1 *Не съществува формула $A(x)$ в езика на контактните алгебри, такава че: за всяко регулярно затворено подмножество x на някакво топологично пространство, $c^o(x)$, ако и само ако $A(x)$ е валидна в алгебрата от регулярно затворените подмножества на топологичното пространство.*

Нека X е топологично пространство. Дефинираме релацията $\vdash$ в $RC(X)$ по следния начин: $a, b \vdash c$, ако и само ако $a \cap b \subseteq c$.

Твърдение 2 *Нека X е топологично пространство. За всяко a в $RC(X)$, $c^o(a)$, ако и само ако $\forall b \forall c (b \neq 0 \wedge c \neq 0 \wedge a = b + c \rightarrow b, c \not\vdash a^*)$.*

Даваме аксиоматизация на релацията $a, b \vdash c$, използвана в характеризацията на предиката $c^0(a)$ - вътрешна свързаност.

Дефиниция 6 *Разширена контактна алгебра (ECA, за краткост) е система $\underline{B} = (B, \leq, 0, 1, \cdot, +, *, \vdash, C, c^o)$, където $(B, \leq, 0, 1, \cdot, +, *)$ е неизродена булева алгебра, $\vdash$ е тернарна релация в B, такава че следните аксиоми са верни:*
(1) $a, b \vdash c \rightarrow b, a \vdash c$,
(2) $a \leq b \rightarrow a, a \vdash b$,
(3) $a, b \vdash a$,
(4) $a, b \vdash x,\ a, b \vdash y,\ x, y \vdash c \rightarrow a, b \vdash c$,
(5) $a, b \vdash c \rightarrow a \cdot b \leq c$,
(6) $a, b \vdash c \rightarrow a + x, b \vdash c + x$,
C е бинарна релация в B, такава че за всички a, $b \in B$: $aCb \leftrightarrow a, b \not\vdash 0$. c^o е унарен предикат в B, такъв че за всички $a \in B$: $c^o(a) \leftrightarrow \forall b \forall c (b \neq 0 \wedge c \neq 0 \wedge a = b + c \rightarrow b, c \not\vdash a^*)$.

Лема 5 *Ако $\underline{B} = (B, \leq, 0, 1, \cdot, +, *, \vdash, C, c^o)$ е ECA, то C е контактна релация в B и оттук (B, C) е контактна алгебра.*

Горната лема показва, че понятието ECA е обобщение на контактна алгебра.

Следващата лема показва стандартния топологичен пример за ECA.

Лема 6 *Нека X е топологично пространство и $RC(X)$ е булевата алгебра от регулярно затворените подмножества на X. Нека за $a, b, c \in RC(X)$:*

aCb, ако и само ако $a \cap b \neq \emptyset$,

$a, b \vdash c$, ако и само ако $a \cap b \subseteq c$

$c^0(a)$, ако и само ако $Int(a)$ е свързано подпространство на X.

Тогава булевата алгебра $RC(X)$ с току-що дефинираните релации е ECA, наречена топологична ECA над пространството X.

Теорема 7 *(Теорема за представяне) Нека $\underline{B} = (B, \leq, 0, 1, ., +, *, \vdash, C, c^o)$ е ECA. Тогава има компактно, семирегулярно, T_0 топологично пространство X и влагане h на $\underline{B}$ в $RC(X)$.*

3 Безкванторни логики, свързани с EDC-решетки и EC-алгебри

Първо разглеждаме логики за EDCL.

Разглеждаме безкванторния език от първи ред с равенство $\mathcal{L}$, който включва:

• константи: 0, 1;
• функционални символи: $+$, $\cdot$;
• предикатни символи: $\leq$, C, $\widehat{C}$, $\ll$.

Разглеждаме логиката L с правило MP и следните аксиоми:

• аксиомите на класическата съждителна логика;
• аксиомните схеми на дистрибутивна решетка;
• аксиомите за C, $\widehat{C}$, $\ll$ и смесените аксиоми на EDCL - разглеждани като аксиомни схеми.

Разглеждаме следните допълнителни правила и аксиомна схема:

(R Ext $\widehat{O}$) $\frac{\alpha \to (a+p\neq 1 \vee b+p=1) \text{ за всички променливи } p}{\alpha \to (a \leq b)}$, където α е формула, a, b са термове

(R U-rich $\ll$) $\frac{\alpha \to (b+p\neq 1 \vee aCp) \text{ за всички променливи } p}{\alpha \to (a \ll b)}$, където α е формула, a, b са термове

(R U-rich $\widehat{C}$) $\frac{\alpha \to (a+p\neq 1 \vee b+q\neq 1 \vee pCq) \text{ за всички променливи } p,\ q}{\alpha \to a\widehat{C}b}$, където α е формула, a, b са термове

(R Ext C) $\frac{\alpha \to (p\neq 0 \to aCp) \text{ за всички променливи } p}{\alpha \to (a=1)}$, където α е формула, a е терм

(R Nor1) $\frac{\alpha \to (p+q\neq 1 \vee aCp \vee bCq) \text{ за всички променливи } p,\ q}{\alpha \to aCb}$, където α е формула, a, b са термове

(Con C) $p \neq 0 \wedge q \neq 0 \wedge p + q = 1 \to pCq$

Нека L' е например разширението на L с правилото (R Ext $\widehat{O}$) и аксиомната схема (Con C). Тогава обозначаваме L' с $L_{ConC,Ext\widehat{O}}$ и наричаме аксиомите (Con C) и (Ext $\widehat{O}$) съответни на L' допълнителни аксиоми. По подобен начин обозначаваме кое да е разширение на L с някои от разглежданите допълнителни правила и аксиомна схема и по подобен начин дефинираме неговите съответни допълнителни аксиоми.

Теорема 8 (Теорема за пълнота по отношение на алгебрична семантика) *Нека L' е някакво разширение на L с 0 или повече от разглежданите допълнителни правила и аксиомна схема. Следните условия са еквивалентни за произволна формула α:*
(i) α е теорема на L';
(ii) α е вярна във всички EDCL, удовлетворяващи съответните на L' допълнителни аксиоми.

Разглеждаме следните логики, съответни на разглежданите EDC-решетки:
1) L;
2) $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C}}$;
3) $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ExtC}$;
4) $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ConC}$;
5) $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},Nor1}$;
6) $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ExtC,ConC}$;
7) $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},Nor1,ConC}$;
8) $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ExtC,Nor1}$;
9) $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ExtC,ConC,Nor1}$.

На всяка от тези логики съпоставяме клас от топологични пространства:
1) класът на всички T_0, семирегулярни, компактни топологични пространства;
2) класът на всички T_0, семирегулярни, компактни топологични пространства;
3) класът на всички T_0, компактни, слабо регулярни топологични пространства;
4) класът на всички T_0, семирегулярни, компактни, свързани топологични пространства;
5) класът на всички T_0, семирегулярни, компактни, κ - нормални топологични пространства;
6) класът на всички T_0, компактни, слабо регулярни, свързани топологични пространства;
7) класът на всички T_0, семирегулярни, компактни, κ - нормални, свързани топологични пространства;
8) класът на всички T_0, компактни, слабо регулярни, κ - нормални топологични пространства;
9) класът на всички T_0, компактни, слабо регулярни, свързани, κ - нормални топологични пространства.

Твърдение 3 *За всяка EDCL $\underline{B}$, удовлетворяваща съответните на някои от разглежданите по-горе логики допълнителни аксиоми, съществува топологично пространство X от съответния клас и влагане на $\underline{B}$ в $RC(X)$.*

Теорема 9 (Теорема за пълнота по отношение на топологична семантика) *Нека L' е коя да е от разглежданите логики. Следните условия са еквивалентни за всяка формула α:*
(i) α е теорема на L';
(ii) α е вярна във всички контактни алгебри над топологично пространство от съответния на L' клас.

Твърдение 4 *L и $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C}}$ имат едни и същи теореми.*

Твърдение 5 *Следните условия са еквивалентни за всяка формула α:*
(i) α е вярна във всички EDCL;
(ii) α е вярна във всички крайни EDCL с брой на елементите, по-малък или равен на $2^{2^n-1}+1$, където n е броят на променливите на α.

Следствие 3 *L е разрешима.*

Твърдение 6 *Правилото (Ext C) е допустимо в $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C}}$ и $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ConC}$.*

Твърдение 7 *Правилото (R Nor1) е допустимо в логиките $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C}}$ и $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ConC}$.*

Твърдение 8 *Правилото (R U-rich $\ll$) не е допустимо в L_{ConC}.*

Твърдение 9 *Правилото (R U-rich $\widehat{C}$) е допустимо в $L_{ConC,U-rich\ll}$.*

Твърдение 10 *Правилото (R Ext $\widehat{O}$) е допустимо в логиката $L_{ConC,U-rich\ll,U-rich\widehat{C}}$.*

Твърдение 11 *$L_{ConC,U-rich\ll}$ разрешима.*

Следствие 4 *(i) Логиките L, $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C}}$, $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ExtC}$, $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},Nor1}$,*

$L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ExtC,Nor1}$ имат едни и същи теореми и са разрешими;
(ii) Логиките $L_{ConC,U-rich\ll}$, $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ConC}$,

$L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ConC,Nor1}$, $L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ExtC,ConC}$,

$L_{Ext\widehat{O},U-rich\ll,U-rich\widehat{C},ExtC,ConC,Nor1}$ имат едни и същи теореми и са разрешими.

След това разглеждаме безкванторна логика за ECA.

Разглеждаме безкванторен език от първи ред $\mathcal{L}'$ с равенство, който има:
• константи: 0, 1
• функционални символи: $+$, $\cdot$, $*$
• предикатни символи: $\leq$, $\vdash$, c^o

Всяка ECA е структура за $\mathcal{L}'$.

Разглеждаме логиката L_{c^o}, която има следните:
• аксиоми:

- аксиомите на класическото съждително смятане
- аксиомите на булева алгебра - като аксиомни схеми
- аксиомите $(1), \ldots, (6)$ на ECA - като аксиомни схеми
- аксиомната схема:

(Ax c^o) $c^o(p) \wedge q \neq 0 \wedge r \neq 0 \wedge p = q + r \rightarrow q, r \overline{\vdash} p^*$

• правила:
- MP
- (Rule c^o) $\frac{\alpha \rightarrow (p \neq 0 \wedge q \neq 0 \wedge a = p + q \rightarrow p, q \overline{\vdash} a^*) \text{ за всички променливи } p,\ q}{\alpha \rightarrow c^o(a)}$, където α е формула, a е терм.

Разглеждаме също логиката L_{Axc^o}, която се получава от L_{c^o} чрез премахване на правилото (Rule c^o).

Теорема 10 (Теорема за пълнота) *За всяка формула α в $\mathcal{L}'$ следните условия са еквивалентни:*
(i) α е теорема на L_{c^o};
(ii) α е вярна във всички ECA;
(iii) α е вярна във всички ECA над компактно, T_0, семирегулярно топологично пространство.

Твърдение 12 *Правилото (Rule c^o) не е допустимо в L_{Axc^o}.*

Твърдение 13 *L_{c^o} е разрешима.*

4 Заключение

В дисертацията са получени следните резултати:
В първата част на първата глава езикът на дистрибутивни контактни решетки се разширява чрез разглеждане като недефинируеми примитиви на релациите контакт, дълбоко включване и дуален контакт. Получена е аксиоматизация на теорията, състояща се от универсалните формули в езика $\mathcal{L}(0, 1; +, \cdot; \leq, C, \widehat{C}, \ll)$, верни във всички контактни алгебри. Структурите в $\mathcal{L}$, удовлетворяващи въпросните аксиоми, се наричат разширени дистрибутивни контактни решетки (EDC-решетки). Релационна теорема за представяне е доказана, твърдяща, че всяка EDC-решетка може изоморфно да се вложи в контактна алгебра. Аксиоматизацията и релационната теорема за представяне са получени от Т. Иванова.

В част II на глава 1 е получена теория за топологично представяне на EDC-решетки и някои от техните аксиоматични разширения, водещи до представяния в T_1 и T_2 пространства. Специално внимание е обърнато на дуално гъсти и гъсти представяния в контактни алгебри от регулярно затворени и регулярно отворени подмножества на топологични пространства. Тези резултати са общи с проф. Д. Вакарелов.

В глава 2 се разглежда предикатът c^o - вътрешна свързаност. Доказва се, че този предикат не може да се дефинира в езика на контактни алгебри. Поради това към езика се добавя нов тернарен предикатен символ $\vdash$, който има следния смисъл: в контактната алгебра от регулярно затворените множества на някакво топологично пространство $a, b \vdash c$, ако и само ако

$a \cap b \subseteq c$. Оказва се, че предикатът c^o може да се дефинира в новия език. Дефинира се *разширени контактни алгебри* - булеви алгебри с добавени релации $\vdash$, C и c^o, удовлетворяващи някои аксиоми, и се доказва, че всяка разширена контактна алгебра може изоморфно да се вложи в контактната алгебра от регулярно затворените подмножества на някакво компактно, семирегулярно, T_0 топологично пространство с добавени релации $\vdash$ и c^o. Така че разширената контактна алгебра може да се счита аксиоматизация на теорията, състояща се от универсалните формули, верни във всички топологични контактни алгебри с добавени релации $\vdash$ и c^o. Резултатите в глава 2 с изключение на идеята, че c^o може да се дефинира чрез релацията $\vdash$, са получени от Т. Иванова.

В глава 3 се разглежда език от първи ред без квантори, съответен на EDCL. Дадени са теореми за пълнота по отношение на алгебрична и топологична семантика за няколко логики за този език. Оказва се, че всички тези логики са разрешими. Разглежда се също безкванторен език от първи ред, съответен на ECA и логика за ECA, която е разрешима. Резултатите в тази глава са получени от Т. Иванова.

Публикации:
1)T. Ivanova. Extended contact algebras and internal connectedness. Proceedings of the 10th Panhellenic Logic Symposium, 2015, Samos, Greece
http://samosweb.aegean.gr/pls10/pls10-proceedings.pdf
2)T. Ivanova and D. Vakarelov. Distributive mereotopology: extended distributive contact lattices. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 77(1), 3-41, DOI 10.1007/s10472-016-9499-5

Презентации:
1)T. Ivanova, Extended contact algebras and internal connectedness, 10th Panhellenic Logic Symposium, 11-15 June 2015, Samos, Greece
2)Т. Иванова и Д. Вакарелов, Разширени дистрибутивни контактни решетки, Пролетна научна сесия на ФМИ, 28 март 2015, София, България
3)Т. Иванова, Разширени контактни алгебри и вътрешна свързаност, Семинар по Математическа логика, 10 декември 2015, София, България

Декларация за оригиналност: Авторът декларира, че дисертацията е оригинална научна разработка. Използването на предходни резултати е отразено с подходящи препратки.

Литература

[1] M. Aiello, I. Pratt-Hartmann and J. van Benthem (eds.), *Handbook of spatial logics*, Springer, 2007.

[2] R. Balbes and P. Dwinger. (1974). *Distributive Lattices.* University of Missouri Press, Columbia.

[3] P. Balbiani (Ed.), Special Issue on Spatial Reasoning, *J. Appl. Non-Classical Logics* **12** (2002), No. 3-4.

[4] P. Balbiani, T. Tinchev and D. Vakarelov. Modal Logics for Region-based Theory of Space. *Fundamenta Informaticae*, Special Issue: Topics in Logic, Philosophy and Foundation of Mathematics and Computer Science

in Recognition of Professor Andrzej Grzegorczyk, vol. (81), (1-3), (2007), 29-82.

[5] B. Bennett and I. Düntsch. Axioms, Algebras and Topology. In:*Handbook of Spatial Logics*, M. Aiello, I. Pratt, and J. van Benthem (Eds.), Springer, 2007, 99-160.

[6] A. Cohn and S. Hazarika. Qualitative spatial representation and reasoning: An overview. *Fuandamenta informaticae* 46 (2001), 1-20.

[7] A. Cohn and J. Renz. Qualitative spatial representation and reasoning. In: F. van Hermelen, V. Lifschitz and B. Porter (Eds.) *Handbook of Knowledge Representation*, Elsevier, 2008,551-596.

[8] G. Dimov and D. Vakarelov. Contact algebras and region–based theory of space: A proximity approach I. *Fundamenta Informaticae*, vol. 74, No 2-3,(2006) 209-249

[9] I. Düntsch (Ed.), Special issue on Qualitative Spatial Reasoning, *Fundam. Inform.*, 46 (2001).

[10] I. Düntsch and D. Vakarelov. Region-based theory of discrette spaces: A proximity approach. In: Nadif, M., Napoli, A., SanJuan, E., and Sigayret, A. EDS, *Proceedings of Fourth International Conference Journées de l'informatique Messine*, 123-129, Metz, France, 2003. Journal version in: *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **49**(1-4):5-14, 2007.

[11] I. Düntsch, W. MacCaull, D. Vakarelov and M. Winter. Topological Representation of Contact Lattices. *Lecture Notes in Computer Science* vol. 4136 (2006), 135-147.

[12] I. Düntsch, W. MacCaull, D. Vakarelov and M.Winter. Distributive contact lattices: Topological representation. *Journal of logic and Algebraic Programming* 76 (2008), 18-34.

[13] I. Düntsch and M. Winter. A representation theorem for Boolean contact algebras. *Theoretical Computer Science (B)*, 347 (2005), 498-512.

[14] M. Egenhofer and R. Franzosa, Point-set topological spatial relations. *Int. J. Geogr. Inform. Systems*, 5:161-174, 1991.

[15] R. Engelking, *General topology*, Polish Scientiphic Publishers, 1977.

[16] P. Forrest Mereotopology without Mereology, *Journal of Philos. Logic* (2010) 39:229-254.

[17] T. Hahmann and M. Gruninger. Region-based Theories of Space: Mereotopology and Beyond. S. Hazarika (ed.): *Qualitative Spatio-Temporal Representation and Reasoning: Trends and Future Directions.*, 2012. pp. 1-62. IGI Publishing.

[18] T. Hahmann and M. Gruninger. Complementation in representable theories of region-based space. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 54(2) (2013), 177-214.

[19] T. Hahmann, M. Winter, M. Gruninger: Stonian p-Ortholattices: A new approach to the mereotopology RT0. *Artificial Intelligence*, 173(2009)1424-1440.

[20] *Qualitative Spatio-Temporal Representation and Reasoning: Trends and Future Directions* S. M. Hazarika (Ed.), IGI Global; 1st ed. (May 31, 2012)

[21] T. Ivanova. Extended contact algebras and internal connectedness, *10th Panhellenic Logic Symposium*, 11-15 June 2015, Samos, Greece

[22] T. Ivanova and D. Vakarelov. Distributive mereotopology: extended distributive contact lattices. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 77(1), 3-41

[23] R. Kontchakov, I. Pratt-Hartmann, F. Wolter and M. Zakharyaschev. Topology, connectedness, and modal logic, *In C. Areces and R. Goldblatt, editors, Advances in Modal Logic*, volume 7, College Publications 2008, London, 151-176

[24] R. Kontchakov, I. Pratt-Hartmann and M. Zakharyaschev. Interpreting Topological Logics over Euclidean Spaces, *F. Lin, U. Sattler and M. Truszczynski, editors, Proceedings of KR*, Toronto, Canada, May, 9-13, AAAI Press, 2010, 534-544

[25] R. Kontchakov, I. Pratt-Hartmann and M. Zakharyaschev. Topological logics over Euclidean spaces, *Proceedings of Topology, Algebra and Categories in Logic, TACL 2009*, Amsterdam, July, 7-11, 2009

[26] R. Kontchakov, I. Pratt-Hartmann, F.Wolter and M. Zakharyaschev. On the computational complexity of spatial logics with connectedness constraints, *I. Cervesato, H. Veith and A. Voronkov, editors, Proceedings of LPAR*, 2008, Doha, Qatar, November, 22-27, 2008, 574-589, LNAI, vol. 5330, Springer 2008

[27] R. Kontchakov, I. Pratt-Hartmann, F. Wolter and M. Zakharyaschev. Spatial logics with connectedness predicates, *Logical Methods in Computer Science*, 6 (3:7), 2010

[28] T. de Laguna Point, line and surface as sets of solids, *J. Philos*, 19 (1922), 449-461.

[29] Y. Nenov and D. Vakarelov. Modal logics for mereotopological relations, *Advances in Modal Logic*, volume 7, College Publications 2008, 249-272

[30] I. Pratt-Hartmann Empiricism and Racionalizm in Region-based Theories of Space., *Fundamenta Informaticae*, 45, 2001, 159-186

[31] I. Pratt-Hartmann A topological constraint language with component counting., *J. of Applied Nonclassical Logics*, 12, 2002, 441-467

[32] I. Pratt-Hartmann First-order region-based theories of space, *In: Logic of Space, M. Aiello, I. Pratt and J. van Benthem (Eds.)*, Springer, 2007.

[33] D. A. Randell, Z. Cui, and A. G. Cohn. A spatial logic based on regions and connection. In: B. Nebel, W. Swartout, C. Rich (Eds.) *Proceedings of the 3rd International Conference Knowledge Representation and Reasoning*, Morgan Kaufmann, Los Allos, CA, pp. 165–176, 1992.

[34] E. Shchepin. Real-valued functions and spaces close to normal. *Siberian mathematical journal*, **13** (1972) 820–830

[35] J. Stell. Boolean connection algebras: A new approach to the Region Connection Calculus, *Artif. Intell.* **122** (2000), 111–136.

[36] M. Stone. Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics. *Časopis Pěst. Mat.*, 67, (1937), 1-25.

[37] W. J. Thron. Proximity structures and grills, *Math. Ann.*, **206** (1973), 35–62.

[38] T. Tinchev and D. Vakarelov. Logics of Space with Connectedness Predicates: Complete axiomatizations. *Proceedings of the conference 8th Advances in Modal Logic. L. Beklemishev, V. Goranko, V. Shehtman (eds.), Advances in Modal Logic, 8*, College Publications, London, (2010), 409-427.

[39] D.Vakarelov. Extended mereotopology based on sequent algebras. *Proceedings of Workshop dedicated to the 65 anniversary of Luis Farinas del Cerro*, 3-4 March, 2016, Toulouse, France.

[40] D. Vakarelov. Region-Based Theory of Space: Algebras of Regions, Representation Theory and Logics. In: Dov Gabbay et al. (Eds.) *Mathematical Problems from Applied Logics. New Logics for the XXIst Century.* II. Springer, 2007, 267-348.

[41] D. Vakarelov, I. Düntsch and B. Bennett. A note on proximity spaces and connection based mereology. In: Welty, C. and Smith, B., editors, *Proceedings of the 2nd International Conference on Formal Ontology in Information Systems (FOIS'01)*, ACM, (2001), 139-150.

[42] D. Vakarelov, G. Dimov, I. Düntsch, and B. Bennett. A proximity approach to some region based theory of space. *Journal of applied non-classical logics*, vol. 12, No3-4 (2002), 527-559

[43] H. de Vries. *Compact spaces and compactifications*, Van Gorcum, 1962

[44] M. Winter, T. Hahmann, M. Gruninger. On the algebra of regular sets. Properties of representable Stonian p-ortholattices. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 65(1):25-60, Springer, 2012.

[45] M. Winter, T. Hahmann, M. Gruninger. On the Skeleton of Stonian p-Ortholattices. *Proc. of the 11th Int. Conference on Relational Methods in Computer Science* (RelMiCS/AKA-09), 2009. LNCS 5827, Springer, pp. 351–365.

[46] A. N. Whitehead. *Process and Reality*, New York, MacMillan, 1929.