С Т А Н О В И Щ Е

от проф. дмн Георги Добромиров Димов

на дисертацията на докторант Татяна Иванова

"Логики за релационни геометрични структури: дистрибутивна мереотопология, разширени контактни алгебри и свързани безкванторни логики",

представена за присъждане на образователната и научна степен "доктор"

по професионално направление "Математика",

научна специалност "Математическа логика"

1. Кратки биографични данни и общо описание на представените материали.

Татяна Иванова е родена на 02.08.1984 г. През 2003 г. завършва Националната финансово-стопанска гимназия, придобивайки средно специално икономическо образование със специалност "Икономика и мениджмънт". През м. септември 2008 г. завършва Факултета по математика и информатика на СУ "Св. Кл. Охридски" като бакалавър по информатика. В представените документи няма други биографични данни.

Списъкът от научните трудове на дисертантката наброява 2 заглавия, едно от които е съвместна публикация с научния ѝ ръководител проф. дмн Димитър Вакарелов, публикувана в Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 77(1) (2016), 3-41; това е списание с много голям импакт фактор - 0,994. Втората публикация е самостоятелна и е отпечатана в трудовете на 10th Panhellenic Logic Symposium, 11-15 June 2015, Samos, Greece. Представена е декларация от проф. дмн Димитър Вакарелов, че резултатите от първата част на съвместната статия принадлежат на дисертантката, а тези от втората част са съвместни.

Дисертантката е докладвала резултати от дисертацията си на международната конференция по логика "10th Panhellenic Logic Symposium, 11-15 June 2015, Samos, Greece" и на Пролетната научна сесия на ФМИ, 28 март 2010 г., София.

Дисертацията е написана на английски език на 71 страници, състои се от увод и четири глави, като последната глава е всъщност авторската справка (нейният превод на български е приведен в автореферата); литературата към дисертацията съдържа 46 заглавия. Представен е и автореферат на дисертацията, написан на български, състоящ се от увод, три параграфа, заключение (това е авторската справка) и литература от 46 заглавия, идентична с тази от дисертацията; обемът на автореферата е 19 страници. Авторефератът и авторската справка правилно отразяват научните приноси на дисертанта. Няма сведения за цитирания, но тъй като публикациите са съвсем отскоро, то това е съвсем естествено.

2. Описание и оценка на съдържанието на дисертацията.

В тази дисертация са получени редица нови, интересни и нетривиални резултати за дистрибутивни решетки с релации от близостен тип и за безкванторни логики, свързани с тях. Тези резултати са търсени и получени като аналози на част от резултатите от работите [4], [8], [10]-[12], отнасящи се до булеви алгебри с релации от близостен тип и съответстващите им логики. Задачата за получаване на такива аналози е трудна и съвършено нетривиална. За нейното решаване е било необходимо въвеждането на редица нови понятия и развиването на нова техника, която да има като образец техниката, работеща в булевия случай, но да бъде пригодна и за работа в новите условия. Доказателствата на получените резултати са дълги и нетривиални.

Тематиката на дисертацията, както и на работите, цитирани по-горе, води началото си от трудовете на А. Н. Уайтхед [46] и де Лагуна [28], свързана е по естествен начин с геометрията, топологията, логиката, алгебрата и теоретичната информатика, бурно се развива в последно време (вж., напр., справочниците (handbooks) и обзорите [1], [3], [5], [17], [40]) и има редица приложения в информатиката.

Първата глава на дисертацията е озаглавена “Дистрибутивна мереотопология. Разширени дистрибутивни контактни решетки” и е с обем от 34 страници, разделена е на 7 параграфа и даже на две части, като първата част обхваща първите 4 параграфа, а втората - останалите три параграфа. В първата част е въведено понятието “разширена дистрибутивна контактна решетка”. Мотивацията за въвеждането на това понятие е следната: понятието “контактна алгебра”, въведено в [8], което като че ли най-добре отразява идеите на Уайтхед, се въвежда чрез аксиоми, в които не участва операцията "булево допълнение", но благодарение на последното, чрез релацията "контакт" (да я означим с C) могат да се дефинират и релациите "дълбоко включване" (означава се с "$\ll_C$" и се дефинира чрез формулата $a \ll_C b \leftrightarrow a(-C)b^*$) и "дуален контакт" (означава се с "$\hat{C}$" и се дефинира чрез формулата $a\hat{C}b \leftrightarrow a^*Cb^*$); в дистрибутивните решетки може да се въведе релацията "контакт" със същите аксиоми, както и при контактните алгебри (това е направено в [11]), но тъй като в дистрибутивните решетки няма операция "допълнение", то, ако искаме да работим с релациите "дълбоко включване" и "дуален контакт", които са изключително полезни в редица случаи, то трябва да ги въведем допълнително и да изберем подходящите аксиоми, които те да удовлетворяват. Именно това е направено в дисертацията. Фактът, че избраните аксиоми са наистина подходящи, се доказва от това, че, първо, в случая на контактни алгебри (B, C), всичките 23 аксиоми на разширените дистрибутивни контактни решетки се удовлетворяват от контакта C и неговите споменати по-горе производни релации $\ll_C$ и $\hat{C}$ (вж. Следствие 1.1, стр. 8), и второ, всяка разширена дистрибутивна контактна решетка може изоморфно да се вложи в контактна алгебра (вж. Теорема 2.3, стр. 15 и Следствие 2.1, стр. 16). Искам изрично да отбележа, че доказателството на Теорема 2.3 обхваща седем страници и е интересно и нетривиално. По-нататък се разглеждат разширени дистрибутивни контактни решетки, удовлетворяващи естествени допълнителни аксиоми, и, модифицирайки методите от [8], се доказват теореми за топологично представяне на разширените дистрибутивни контактни решетки и на техните подвидове (това е направено във втората част на Глава 1). Разгледани са и връзките на разширените дистрибутивни контактни решетки с други мереотопологични системи.

Втората глава на дисертацията е озаглавена "Разширени контактни алгебри и вътрешна свързаност" и е с обем от 10 страници, разделена е на 5 параграфа. В нея е въведено понятието "разширена контактна алгебра". Мотивацията е описана по-долу. Нека X е топологично пространство, $RC(X)$ е контактната алгебра от всички регулярно затворени подмножества на X, $F \in RC(X)$ и нека $c^0(F)$ означава, че $Int_X(F)$ е свързано подпространство на X (предикатът c^0 се нарича "вътрешна свързаност"). В дисертацията е доказано, че не съществува формула $A(F)$ в езика на контактните алгебри, такава че за всяко топологично пространство X и за всяко $F \in RC(X)$, $c^0(F)$ да е изпълнено тогава и само тогава, когато формулата $A(F)$ е валидна в $RC(X)$ (вж. Твърдение 1.1, стр. 39). В Твърдение 2.1, стр. 41, пък е показано, че ако за всяко топологично пространство X въведем тернарна релация $\vdash$ в булевата алгебра $RC(X)$ чрез формулата "$\forall F, G, H \in RC(X),\ F, G \vdash H \leftrightarrow F \cap G \subseteq H$", то $c^0(F)$ може да се изрази чрез формула в езика на булевата алгебра $RC(X)$ и релацията $\vdash$. Възниква естествения въпрос за аксиоматизация на релацията $\vdash$ и като негов отговор се появява понятието разширена контактна алгебра. Получена е теорема за топологично представяне на разширените контактни алгебри (вж. Теорема 4.1, стр. 46, чието доказателство също е интересно и нетривиално).

Глава 3 на дисертацията е озаглавена "Безкванторни логики, свързани с разширени дистрибутивни контактни решетки и разширени контактни алгебри" и е с обем от 19 страници, разделена е на 4 параграфа. В нея са разгледани езици от първи ред без квантори, съответстващи на разширените дистрибутивни контактни решетки и, съответно, на разширените контактни алгебри. Доказани са теореми за пълнота и разрешимост.

Глава 4 на дисертацията е озаглавена "Заключение" и е с обем от 2 страници. Както вече споменах, това е всъщност авторската справка.

3. Критични бележки и препоръки.

Нямам съществени критични бележки. Все пак, ще отбележа някои неща, които, обаче, по никакъв начин не намаляват достойнствата на дисертацията.

1. Доказателството на Твърдение 1.1, стр. 39, е вярно, но има много по-лесни и естествени примери. Ето един такъв: да положим $X = \mathbb{R}$, където $\mathbb{R}$ е реалната права с естествената ѝ топология, $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\varphi : RC(X) \longrightarrow RC(Y)$, $F \mapsto F \cap Y$; тогава Y е навсякъде гъсто в X, и, както е добре известно, φ е изоморфизъм между булевите алгебри $RC(X)$ и $RC(Y)$; да положим, $\forall F, G \in RC(X)$, $FC_X G \leftrightarrow$

$F \cap G \neq \emptyset$ и $\forall F, G \in RC(Y)$, $FCG \leftrightarrow \varphi^{-1}(F) C_X \varphi^{-1}(G)$; тогава контактните алгебри $(RC(X), C_X)$ и $(RC(Y), C)$ са изоморфни и φ е изоморфизъм между тях; очевидно, X е свързано, а $\varphi(X) = Y$ не е свързано (или, [-1,1] е свързано, но $\varphi([-1,1]) = [-1,0) \cup (0,1]$ не е свързано).

2. Доказателството на Твърдение 2.1, стр. 41, не е написано добре (в първата му част, напр., е казано следното: "Suppose for the sake of contradiction that $Int_X b \neq \emptyset$", когато по условие $b \neq \emptyset$ и значи $Int_X b \neq \emptyset$). Доказателството може би е вярно, но самото твърдение със сигурност е вярно. Ето едно негово доказателство:

($\Rightarrow$) Нека $F, G, H \in RC(X) \setminus \{\emptyset\}$, $U = Int_X(F)$ е свързано и $F = G \cup H$. Нека $G_1 = G \cap U$, $H_1 = H \cap U$ и да допуснем, че $G \cap H \subseteq cl_X(X \setminus F)$. Тогава $G \cap H \cap U = \emptyset$, т.е. $G_1 \cap H_1 = \emptyset$. Тъй като $G_1 \cup H_1 = U$, за да достигнем до противоречие е достатъчно да покажем, че $G_1 \neq \emptyset$ и $H_1 \neq \emptyset$. Да допуснем, че $G_1 = \emptyset$. Тогава $G \subseteq F \setminus U = cl_X(U) \setminus U = Fr_X(U)$ и следователно $\emptyset \neq Int_X(G) \subseteq Int_X(Fr_X(U)) = \emptyset$ - противоречие. Значи $G_1 \neq \emptyset$. Аналогично получаваме, че $H_1 \neq \emptyset$. Следователно $G \cap H \nsubseteq F^*$.

($\Leftarrow$) Нека $F \in RC(X) \setminus \{\emptyset\}$ и $U = Int_X(F)$. Да допуснем, че $U = V \cup W$, където W и V са отворени непразни подмножества на U и $W \cap V = \emptyset$. Тогава $G = cl_X(V) \in RC(X)$ и $H = cl_X(W) \in RC(X)$. Очевидно, $F = G \cup H$. Следователно $G \cap H \nsubseteq F^* = X \setminus U$, т.е. $G \cap H \cap U \neq \emptyset$. Тъй като $cl_X(V) \cap U = cl_U(V) = V$ и $cl_X(W) \cap U = cl_U(W) = W$, то получаваме, че $G \cap H \cap U = \emptyset$ - противоречие. Значи $Int_X(F)$ е свързано множество.

3. Твърдение (i) от Теорема 5.1, стр. 24, би трябвало да се формулира така:

"(i) There exists a compact semiregular T_0-space X and a dense embedding of $\underline{D}$ into the contact algebra $RC(X)$ of all regular closed subsets of X,"

тъй като в теоремата от [8], на която се опира доказателството, се твърди, че пространството X не е само топологично, но е и компактно, семирегулярно и T_0, а влагането е гъсто.

4. На стр. 40, ред 5 отдолу, се казва, че имаме равенството "$\{2,3\} = \{2\} \cup$

$\{3\}$"; множествата $\{2\}$ и $\{3\}$ са отворени, но въпреки това не се заключава, че множеството $\{2,3\}$ не е свързано, а се доказва (съвършено излишно) до края на страницата, че $\{2\}$ и $\{3\}$ са затворени подмножества на множеството $\{2,3\}$.

5. Номерираните формули трябва да са на отделен ред (вж., напр., формули (1) и (2) от страница 41).

6. На страница 6 е написано "present paper", а би трябвало да бъде "present thesis" или "present dissertation".

7. На стр. 45 е написано "a subset of B Γ is", а би трябвало да бъде "a subset Γ of B is". Подобни грешки има и на други места в дисертацията (вж., напр., стр. 40, ред 18 отдолу и ред 19 отдолу).

8. На стр. 2, ред 1 и 2 отгоре е написано "considered analogs", а би трябвало да бъде "considered as analogs". На много други места в дисертацията се среща отново "considered" вместо "considered as" (вж., напр., стр. 3, ред 14 отдолу). Също така, на стр. 3, ред 2 отгоре, е написано "by means" вместо "by means of". На стр. 8, ред 1 отгоре, е написано "discrette" вместо "discrete"; същата грешка е допусната на стр. 70 (вж. ном. 10 от литературата). На стр. 17, ред 6 отдолу, е написано "expresses" вместо "expressed". На стр. 24, ред 1 отгоре е написано "regular-closed" вместо "regular closed".

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Представеният дисертационен труд съдържа интересни и оригинални резултати в една трудна област на математиката, изискваща усвояването и творческото прилагане от дисертантката на нови нетривиални методи на границата на три абстрактни области: логика, алгебра и обща топология. Освен това представената дисертация напълно отговаря на критериите на "Закона за развитието на академичния състав в Република България" и съответните подзаконови наредби и правилници, отнасящи се за СУ и ФМИ, за придобиване на образователната и научна степен "доктор". Ето защо убедено препоръчвам тази степен да бъде присъдена на дисертантката Татяна Иванова.

София, 02.09.2016 ....