Софийски университет "Св. Климент Охридски"

Факултет по математика и информатика

Локални свойства на динамични системи

Маргарита Николаева Николова

Научен ръководител: проф. дмн Михаил Иванов Кръстанов

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователна и научна степен "доктор" в професионално направление 4.5 Математика, докторска програма "Изследване на операциите"

София, 2023

Глава 1

Увод

В научната литература има много статии, посветени на задачата за достижимост на едно затворено множество за малко време по отношение на траекториите на дадена нелинейна управляема система. Тази задача е нерешена до този момент. За нея са известни някои частични положителни резултати (получени са, например, достатъчни условия от нулев и от първи ред в статиите [12] и [6]). Когато затвореното множество е точка, то тази задача е еквивалентна на задачата за локална управляемост в точка за малко време. Тази задача също не е решена, т.е. до този момент не са известни необходими и достатъчни условия с изключение на някои частни случая (виж, например, [10], [38] и [26]).

Свойството локална управляемост за малко време (ЛУМВ) е едно от най-важните свойства на достижимото множество на нелинейни управляеми системи (вж. [2], [4], [5],[8], [9], [17]). То има решаваща роля при изучаването на различни задачи, свързани с нелинейни управляеми системи (вж. [10], [13], [15],[29], [32],[35]). Например, добре известно е, че функцията на Белман за бързодействие е само полунепрекъсната отдолу (вж. [11]), но когато е в сила достатъчното условие на Хектор Сусман за локална управляемост за малко време, то тази функция е Хьолдерово непрекъсната (и дори Липшицово непрекъсната при допълнителни предположения).

Съществуват различни подходи за изучаване на задачата за локална управляемост в точка за малко време, изискващи различни предположения и използващи различни подходи (виж, например, [10], [18], [14], [16], [34], [36], [37]). В тази работа следваме един общ геометричен подход, предложен от Хектор Сусман (виж [34] и [36]), тъй като с негова помощ е получено едно от най-силните достатъчни условия за локална управляемост за малко време и което обобщава повечето от съществуващите достатъчни условия. Една от отличителните черти на този подход е използването на класическата формула на Кембъл -

Бейкър - Хаусдорф (КБХ формула), която е един от основните резултати на теорията на групите на Ли, чиито алгебри на Ли са крайномерни. Тук трябва да отбележим, че алгебрата на Ли, породена даже от линейна управляема система е безкрайномерна. Това налага да се апроксимират разглежданите системи с подходящи управляеми системи, за които съответните алгебри на Ли са нилпотентни (виж, например, [15]).

През 80-те години на XX век Артър Кренер, Хенри Хермес, Хироши Кунита, Роналд Хиршорн и други стигат до идеята да се дефинира по подходящ начин множество $E^+(x_0)$ от допирателни векторни полета към достижимото множество на гладка управляема система. Основната идея на този геометричен подход е да се построят "вариации на управлението". Евристично казано, ако може да се построят вариации на управлението във всички възможни посоки, то разглежданата система е локално управляема за малко време. Построго казано това означава, че когато нулата е в изпъкналата обвивка на множеството $E^+(x_0)$, то съответната управляема система е локално управляема в точката x_0 за малко време. Но изследването на множеството $E^+(x_0)$ се оказва трудна задача. В следващата глава е дадена една удобна за работа дефиниция на множеството $E^+(x_0)$ (следвайки статиите [38], [25] и [26]) и са показани някои от неговите основни свойства. Силата на този подход е в това, че с негова помощ могат да се получат достатъчни условия за локална управляемост за малко време, които са и необходими (виж, например, [38] и [26]).

В глава 3 на дисертацията са представени основните идеи на подхода, използван от Хектор Сусман (вж. [34] и [36]). Дефиниран е клас от "лоши" скобки на Ли, които са пречка за свойството локална управляемост за малко време. Представен следния общ резултат: ако достижимото множество има непразна вътрешност и "лошите" скобки на Ли могат да бъдат "неутрализирани" с подходящи скобки на Ли, то тогава управляемата система е локално управляема за малко време в началната точка. След това в тази глава е разгледан един специален клас от полиномиални управляеми системи с дясна страна, която е сума от постоянни векторни полета и полиномиално векторно поле, което е хомогенно от втора степен. Трябва да се отбележи, че за този клас от управляеми системи не може да бъде приложен общия подход на Хектор Сусман. Причината е, че за тези системи "лошите скобки" не могат да бъдат неутрализирани по начина, предложен от Хектор Сусман. Изследвайки множеството $E^+(0)$ от допирателни векторни полета към достижимото множество за този клас управляеми системи, намираме негови елементи, които са "лоши скобки" в смисъла на Сусман, но които принадлежат на множеството $E^+(0)$ и следователно не са пречка за локалната управляемост за малко време. В резултат е получено едно ново условие за локална управляемост за малко време.

В глава 4 се разглежда същия клас полиномиални управляеми системи, който е дефиниран в глава 3, и се изследва подпространството, породено от тези векторни полета, които са скобки на Ли две постоянни векторни полета и хомогенното поле. Оказва се, че в това линейно пространство може да се въведе подходящо "тегло". Това "тегло" се различава от известните досега "тегла" и позволява да се дефинира определена структура от конуси и линейни пространства, които се съдържат едно в друго. Тази структура усложнява и обобщава подобни структури, известни за случая на частично линейни системи (виж [38], както и за случая на линейни системи с превключвания (виж [26]). Доказва се, че елементите на тези конуси и подпространства принадлежат на множеството $E^+(0)$. А това влече по естествен начин и едно ново достатъчно условие за локална управляемост за малко време в нулата. Трябва да се отбележи, че за този клас от полиномиални управляеми системи, свойството локална управляемост за малко време се определя и от стойностите на "лошите" скобки на Ли в смисъл на Хектор Сусман, пресметнати в нулата.

Не е изследван още въпросът как идеите, стоящи в основата на доказателствата на новите достатъчни условия за локална управляемост за малко време могат да бъдат използвани за изследване на по-общи класове от нелинейни управляеми системи. Полезни в това отношение могат да бъдат примерите, разгледани в трета и четвърта глави, които мотивират разглеждания подход и показват приложимостта на получените резултати.

Последната част на дисертацията представя ново необходимо условие за локална управляемост за малко време на един клас негладки управляеми системи. На пръв поглед това условие няма никаква връзка с предните глави от дисертацията. Всъщност то е естествено продължение на подхода, разгледан в предните глави в следния смисъл: нека за дадена управляема ситема е изследвано множеството $E^+(0)$ и нека L е негово линейно подпространство с размерност по-малка от размерността на фазовото пространство, в което е дефинирана разглежданата управляема система. Поставен е следният въпрос: кога линейното пространство L и стойностите на дясната страна върху него са такива, че разглежданата система не е локално управляема в нулата? Един илюстративен пример е изследван в детайли, като за него е получена характеризация на свойството локална управляемост за малко време. Показани са връзките на получения резултат с добре известни необходими условия на Хектор Сусман (вж. [34]) и Жана Стефани (вж. [31]).

Глава 2

Един геометричен подход за изучаване на достижимото множество

2.1 Локална управляемост за малко време

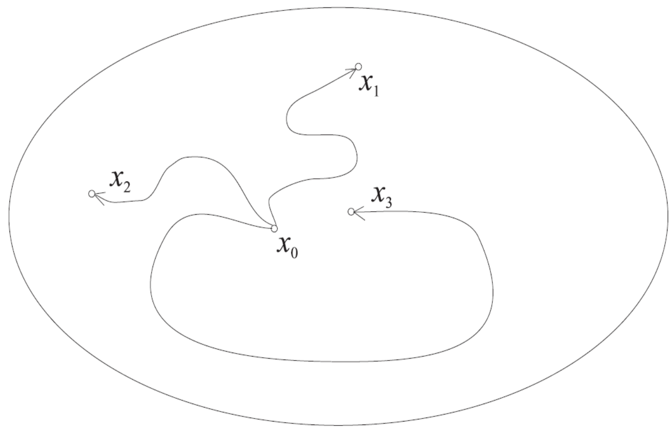
Разглеждаме следната управляема система Σ в $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{2.1}$$

където функцията $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е непрекъсната по отношение на x и u, а множеството U е изпъкнало компактно подмножество на $\mathbb{R}^m$.

Нека фиксираме $T > 0$. Да означим с $\mathcal{U}_T$ множеството от всички измерими функции u дефинирани в $[0, T]$ такива, че $u(t) \in U$ за почти всички $t \in [0, T]$. Елементите на $\mathcal{U}_T$ се наричат допустими управления. Допустима траектория на Σ дефинирана в $[0, T]$ наричаме всяка абсолютно непрекъсната функция $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяваща (2.1) за почти всяко t от $[0, T]$ за някое допустимо управление $u \in \mathcal{U}_T$. Достижимо множество $\mathbf{R}(x_0, T)$ на Σ наричаме множеството от всички точки, достижими за време не по-голямо от T чрез допустима траектория на Σ с начало точката x_0.

Дефиниция 2.1.1 *Управляемата система Σ се нарича локално управляема за малко време (ЛУМВ) в точката x_0 тогава и само тогава, когато x_0 принадлежи на вътрешността на множеството $\mathbf{R}(x_0, T)$ за всяко $T > 0$.*



Фигура 2.1: Свойството ЛУМВ

Съществуват различни подходи за изучаване на локалната управляемост за малко време, водещи до различни резултати и изискващи различни предположения. В дисертацията е следван геометричния подход. Основната му философия се състои в това, че локалните свойства на достижимото множество на управляемата система се определят от стойностите на дясната страна на системата и нейните производни в началната точка. За съжаление, производните на дясната страна не са инвариантни относно смяна на координатната система. Затова естествено е да разгледаме елементите на алгебрата на Ли, породена от векторните полета.

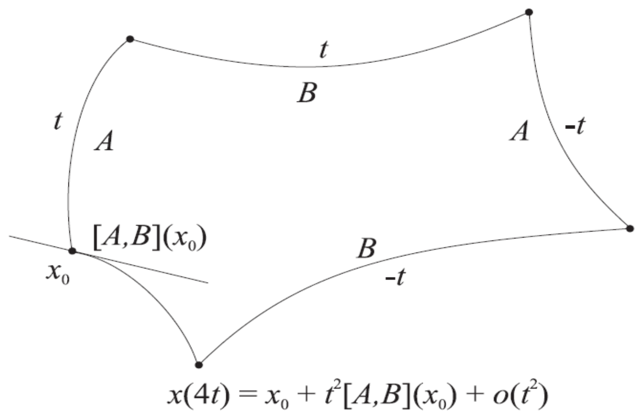
2.2 Скобки на Ли и формула на Кембъл-Бейкър-Хаусдорф

Нека $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ са две произволни векторни полета. С $[X, Y]$ онзачаваме тяхната скобка на Ли $[X, Y] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, дефинирана чрез

$$[X, Y](x) := Y'(x)X(x) - X'(x)Y(x), \text{ за всяко } x \in \mathbb{R}^n,$$

където с $X'(x)$ и $Y'(x)$ са означени съответните производни на изображенията X и Y в точката x. Полагаме $ad^1(X, Y)(x) := [X, Y](x)$ и индуктивно $ad^{k+1}(X, Y)(x) := [X, ad^k(X, Y)](x)$ за всяко естествено число k.

На фигура 2.2 може да се види, че чрез скобките на Ли се получават нови посоки от достижимото множество, ако $A, B, -A, -B$ са допустими векторни



Фигура 2.2: Скобки на Ли

полета за разглежданата управляема система. За работа по същество със скобките на Ли ще използваме формулата на Кембъл - Бейкър - Хаусдорф (КБХ формула). Чрез КБХ формулата ще получаваме нови допирателни вектори към достижимото множество. Преди да дефинираме множеството от допирателни векторни полета ще въведем някои означения:

Означаваме с $\mathrm{Exp}(tZ)(x_0)$ стойността на решението на уравнението

$$\dot{x}(\tau) = tZ(x(\tau)),\ x(0) = x_0,$$

в момента $\tau = 1$. Оттук нататък ще използваме означението $\mathrm{Exp}\ (Z_t)(x_0)$ за произволна фамилия от аналитични векторни полета $\{Z_t :\ t \in \mathbb{R}\}$, зависещи непрекъснато от t, както е дефинирано от Сусман (вж. [34]). Тогава формулата на Кембъл - Бейкър - Хаусдорф може да се запише по следния начин: ако X и Y са аналитични векторни полета в $\mathbb{R}^n$, то

$$\mathrm{Exp}\ (t_1X) \circ \mathrm{Exp}\ (t_2Y)(x)\ =$$
$$=\ \mathrm{Exp}\ \left(t_1X + t_2Y + \frac{t_1t_2}{2}[X,Y] + \frac{t_1t_2^2}{12}[Y,[Y,X]] + \frac{t_1^2t_2}{12}[X,[X,Y]] + ...\right)(x), \tag{2.2}$$

където $\circ$ означава суперпозиция и безкрайната сума в дясната страна е сходяща за достатъчно малки $|t_1|$ и $|t_2|$.

Нека означим с $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,Y)$ алгебрата на Ли, породена от векторните полета X and Y. Нека фиксираме $N \in \mathbb{N}$ и означим с $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_N(X,Y)$ крайната алгебра на Ли, породена от векторите полета X и Y, т.е. алгебрата породена от скобките на Ли от ред не по-висок от N.

Ако $\mathcal{S}$ е редът на Ли в $\mathcal{L}$, то $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ е съответната крайна сума от скобки на Ли в $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$. Също така, Exp $(\mathcal{S})_{\mathcal{N}}$ е крайната сума от скобки на Ли в $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$, съответстващ на Exp $(\mathcal{S})$.

Означаваме Exp $(X) \circ$ Exp $(Y) \cong$ Exp $(\mathcal{S})$ тогава и само тогава, когато

$||\text{Exp }(X) \circ \text{Exp }(Y)(x) - \text{Exp }(\mathcal{S})(x)_N|| \leq C(N)t^{N+1}$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$ и всяко $N \in \mathbb{N}$, където $C(N) > 0$.

2.3 Допирателни векторни полета към достижимото множество

Използваният подход се основава на подходящо дефиниране на допирателни векторни полета към достижимото множество на управляемата система, а именно дефинираме множеството E_α^+, $\alpha > 0$ от аналитични векторни полета. Дефиницията на това множество е свързана с работата на Кренер (вж. [27]), Хермес (вж. [14]), Сусман (вж. [33]), Кунита (вж. [28]), Вельов и Кръстанов (вж. [38]), Кръстанов и Куинкампоа (вж. [25]), Кръстанов и Вельов (вж. [26]) и други.

Функция от вида $\sum_{i=1}^{\varrho} c_i t^{d_i}$, където $c_i > 0$ и d_i са положителни реални числа, $i = 1, 2, \dots, \varrho$, се нарича положителен полином. Също така използваме означението $O(t)$ за фамилия от аналитични векторни полета $O(t; x)$ параметризирани с $t > 0$, непрекъснати в (t, x) и такива, че частното $O(t; x)/t$ е ограничено, когато t клони към 0, равномерно по отношение на $x \in \mathbf{B}$. Нека A^0 е множеството от всички фамилии от аналитичнчи векторни полета $a(t) = a(t, x)$ в $\mathbb{R}^n$, параметризирани с t, непрекъснати в (t, x) и такива, че съществуват пположителни реални числа θ и c такива, че $\|a(t, x)\| \leq ct^\theta \|x - x_0\|$ за всяко $x \in \mathbf{B}$.

Дефиниция 2.3.1 *Казваме, че аналитичното векторно поле Z принадлежи на множеството $E_\alpha^+(x_0)$ за управляемата система Σ тогава и само тогава, когато съществуват фамилии от аналитични векторни полета $O(t^w)$, $w > \alpha$, и $a(t) \in A^0(x_0)$ параметризирани с $t > 0$ и положителен полином $p(t)$ такива, че*

$$Exp(t^\alpha Z + a(t) + O(t^w))(x) \in \mathcal{R}(x, p(t))$$

за всяка точка x от околност на точката x_0.

Дефиниция 2.3.2 *Казваме, че аналитичното векторно поле Z принадлежи на множеството $\mathcal{S}$ за управляемата система Σ тогава и само тогава,* *когато съществуват положителни реални числа K and T такива, че за всяка точка x и всяко $t \in [0, T]$*

$$Exp(tZ)(x) \in \mathcal{R}(x, Kt).$$

Забележка 2.3.3 *Чрез полагането $t := t^{\beta/\alpha}$ може да се докаже, че включването $A \in E_\alpha^+(x_0)$ влече това, че $A \in E_\beta^+(x_0)$ за всяко $\beta > \alpha$.*

Забележка 2.3.4 *Означаваме с $E^+(x_0)$ множеството $E_1^+(x_0)$.*

Значението на множеството $E_\alpha^+(x_0)$ за изучаването на локалните свойства на достижимото множество на нелинейна управляема система се вижда от следващите твърдения, доказани в дисертацията.

Твърдение 2.3.5 ***(вж. [14], [25] и [26])*** *Нека $A_1, A_2, \ldots, A_k$ принадлежат на $E_\alpha^+(x_0)$ за някое $\alpha > 0$ и $0 \in int\ co\{A_1(x_0) + A_2(x_0) + \cdots + A_k(x_0)\}$. Тогава управляемата система Σ е ЛУМВ в точката x_0.*

Твърдение 2.3.6 ***(вж. [14], [25] и [26])*** *The set $E_\alpha^+(x_0)$ е изпъкнал конус.*

Твърдение 2.3.7 ***(вж. [14], [25] and [26])*** *Let A_1 and A_2 принадлежат на $E_\alpha^+, \alpha > 0$, $A_1 + A_2 \in A^0$, B принадлежи на $\mathcal{S}^+ \cap A^0$. Тогава съществува $\beta > \alpha$ такова, че скобките на Ли $[B, A_1]$ и $[B, A_2]$ принадлежат на E_β^+.*

Следващите твърдения също са свързани с елементите на E_α^+.

Твърдение 2.3.8 (Сусман, 1978). *Нека $A_1, A_2, \ldots, A_k$ принадлежи на $E_\alpha^+(x_0)$ за някое $\alpha > 0$ и $A_1(x_0)+A_2(x_0)+\cdots+A_k(x_0) = 0$. Тогава $[A_i, A_j]$, $i, j = 1, \ldots, k$ принадлежи на $E_2^+(x_0)$.*

Твърдение 2.3.9 (Хермес, 1978). *Нека A_1 и A_2 принадлежат на $\mathcal{S}$ и $A_1(x_0)+A_2(x_0) = 0$. Тогава $[A_1, [A_1, A_2]] + [A_2, [A_2, A_1]]$ принадлежат на $E_3^+(x_0)$.*

Някои известни резултати (вж. например [36]) ни дават елементи на $E_\alpha^+(x_0)$. Прилагайки горните твърдения, ние получаваме нови елементи на множеството $E_\alpha^+(x_0)$, предлагайки конструкция на елементи от $E_\beta^+, \beta > \alpha$.

2.4 Хомогенни полиномиални векторни полета

Основните резултати в глави 3 и 4 на дисертацията са свързани с управляеми системи с дясна част, която е изображение с хомогенни полиномиални компоненти. Затова са разгледани някои полезни свойства на хомогенните полиномиални векторни полета.

Казваме, че векторното поле $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е хомогенно от степен α тогава и само тогава, когато $\Gamma(\lambda x) = \lambda^\alpha \Gamma(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$ и за всяко $\lambda > 0$.

Лема 2.4.1 *Нека $\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ за хомогенни полиномиални векторни полета от степени съответно α и β. Тогава скобката на Ли $[\Gamma, \Lambda]$ е хомогенно полиномиално векторно поле от степен $\alpha + \beta - 1$ или Λ е тъждествено* 0.

Следствие 2.4.2 *Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е хомогенно полиномиално векторно поле от втора степен и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е постоянно векторно поле. Нека Λ е скобка на Ли на полетата f и g, която съдържа k пъти векторното поле f и m пъти векторното поле g. Тогава Λ е хомогенно векторно поле от степен $k - m + 1$ или Λ е тъждествено* 0.

Следствие 2.4.3 *Нека Λ е скобка на Ли на полетата f и g, която съдържа k пъти векторното поле f и m пъти векторното поле g и Λ е хомогенна от степен 1. Тогава $k = m$. Също така, всички скобки на Ли на полетата f и g, които са хомогенни от степен 0, са с нечетна дължина.*

Следствие 2.4.3 има съществена роля в разглежданата задача в глави 3 и 4 на дисертацията. То определя кои от скобките на Ли са константни, но не са равни на 0. Точно това са скобките, които трябва да бъдат неутрализирани с цел откриване на нови елементи на E_α^+

Глава 3

Класически подход на Сусман и едно достатъчно условие за локална управляемост за малко време

3.1 Общ геометричен подход

В първата секция на трета глава от дисертацията е представен накратко класическия подход на Сусман при изучаване на локалната управляемост на управляеми системи.

Нека разгледаме следната афинна управляема система Σ_a in $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) f_i(x(t)), \tag{3.1}$$

$$x(0) = 0,\ u(t) = (u_1, \ldots, u_m) \in U \cap \bar{\mathbf{B}},$$

където векторните полета $f_i, i = 0, \ldots, m$ са C^∞, $f_0(0) = 0$, $U = [-1, 1]^m$ и $\bar{\mathbf{B}}$ е единичното затворено кълбо е $\mathbb{R}^m$ с център в нулата. Както беше споменато по-рано, свойствата на алгебрата на Ли, породена от векторните полета $f_i, i = 0, \ldots, m$, са от изключително важно значение за управляемостта на раглежданата система.

Следвайки [34] и [36] разглеждаме абстрактна управляема система: Нека $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_m$ са m символа (наречени "неопределени"). Полагаме $\vec{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_m)$ и фиксираме достатъчно голямо естествено число N. С $\mathcal{A}^N(\vec{X})$ означаваме свободната нилпотентна асоциативна алгебра от ред $N+1$: Ако $I = (i_1, \ldots, i_k)$

е някоя крайна редица, за която $i_j \in \{0,1\}$, тогава означаваме с $\|I\|$ нейната дължина k и полагаме $X_I := X_{i_1} \cdots X_{i_k}$. Нека $X_\emptyset := 1$. Ако $I \circ J$ обозначава конкатенация на I о J, тогава умножението в $\mathcal{A}^N(\vec{X})$ се задава чрез $X_I\, X_J := X_{I\circ J}$, когато $\|I\| + \|J\| \le N$. Ако $\|I\| + \|J\| > N$, тогава произведението $X_I\, X_J$ задаваме да бъде 0. Тогава базисът на $\mathcal{A}^N(\vec{X})$ се състои от всички мономи X_I с дължина по-малка или равна на N.

Означаваме с $\mathcal{L}^N(\vec{X})$ нилпотентната субалгебра на Ли на $\mathcal{A}^N(\vec{X})$, породена от $X_0, X_1, \ldots, X_m$ със скобка на Ли, дефинирана чрез

$$[P,Q] \;:=\; PQ \;-\; QP.$$

Елементите на $\mathcal{L}^N(\vec{X})$ ще наричаме *полиноми на Ли* на $X_0, X_1, \ldots, X_m$. Прилагаме и формулата на Кембъл-Бейкър-Хаусдорф (КБХ формула), според която, ако A и B са полиноми на Ли, тогава съществува полином на Ли C такъв, че

$$\exp\,(A)\,\exp\,(B) \;= \exp\,(C).$$

Тук $\exp\,(P) \;:=\; 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{P^i}{i!}$ за всеки полином на Ли P. Нека напомним, че КБХ формула до ред три има вида

$$C \;=\; A \;+\; B \;+\; \frac{1}{2}\,[A,B] \;+\; \frac{1}{12}\,[A,[A,B]] \;+\; \frac{1}{12}\,[B,[B,A]] \;+\; \cdots$$

Нека дефинираме $\mathcal{G}^N(\vec{X})$ да бъде множеството

$$\mathcal{G}^N(\vec{X}) \;=\; \Big\{\exp\,(A):\; A \in \mathcal{L}^N(\vec{X})\Big\}.$$

Тогава, съгласно КБХ формулата, $\mathcal{G}^N(\vec{X})$ е група.

Следвайки [33], разглеждаме следната управляема система в $\mathcal{A}^N(\vec{X})$:

$$\dot{S}(t) = S(t)(X_0 + u(t)X_1), \text{ където } u(t) \in \mathcal{U} \;\text{ и }\; S(0) = 1. \tag{3.2}$$

С $\mathcal{U}$ е означено множеството от допустимите управления - множеството от всички интегруеми по Лебег функции u, чиято дефиниционна област е компактен интервал $[0,T]$, $T > 0$, и $u(t) \in [-1,1]$ за почти всяко t от $[0,T]$. Времето T ще означаваме с $T(u)$. Ако $u_i : [0, T(u_i)] \to [-1,1]$, i=1,2, са допустими управления, тогава с $u_2 \circ u_1$ означаваме елемент от $\mathcal{U}$ такъв, че $T(u_2 \circ u_1) = T(u_2) + T(u_1)$ и дефинираме следното:

$$u_2 \circ u_1(t) := \begin{cases} u_1(t) & \text{за } t \in [0, T(u_1)), \\ u_2(t - T(u_1)) & \text{за } t \in [T(u_1), T(u_1) + T(u_2)). \end{cases} \tag{3.3}$$

В [33] е доказано, че за всяко управление $u \in \mathcal{U}$, дефинирано в интервала $[0, T(u)]$, решението $S(u)$ на 3.2), удовлетворяващо $S(u)(0) = 1$ е добре дефинирано в $[0, T(u)]$ и

$$S(u)(t) = \sum_{\|I\| \leq N} s_I(u)(t) X_I, \ \forall \, t \in [0, T(u)],$$

където $s_\emptyset(u)(t) := 1$ и за всяко $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, за което $i_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, k$,

$$s_I(u)(t) := \int_0^t \int_0^{t_k} \int_0^{t_{k-1}} \cdots \int_0^{t_2} u^{i_k}(\tau_k) u^{i_{k-1}}(\tau_{k-1}) \cdots u^{i_2}(\tau_2) u^{i_1}(\tau_1) \, d\tau_1 \cdots d\tau_k$$

(тук $u^0(t) = 1$ и $u^1(t) = u(t)$ за всяко $t \in [0, T(u)]$). Дефинираме $\mathrm{Ser}(u)$ да бъде $S(u)(T(u))$.

Достижимото множество $\mathcal{R}^N_{\vec{X}}(T)$ на (3.2) за време $T > 0$ се дефинира като множеството от всички точки от $\mathcal{A}^N(\vec{X})$, които са достижими за време T чрез решение на (3.2) с начало 1. Някои свойства на управляемата система (3.2) са представени по-подробно в [33]. Тук ще споменем само едно следствие от Лема 3.1 от [33]:

$$\mathrm{Ser}\ (u_1 \circ u_2) = \ \mathrm{Ser}\ (u_1)\ \mathrm{Ser}\ (u_2) \tag{3.4}$$

за всеки две произволни управления u_1 и u_2. В допълнение,

$$\text{ако} \qquad \exp\,(A_i) \in \mathcal{R}^N_{\vec{X}}(T_i) \quad \text{за } i = 1, \ldots, k, \qquad \text{тогава}$$

$$\exp\,(A_1) \ \cdot \ \exp\,(A_2) \ \cdots \ \exp\,(A_k) \ \in \ \mathcal{R}^N_{\vec{X}}(T_1 + T_2 + \cdots + T_k).$$

Да напомним, че $\mathcal{L}(\vec{X})$ е свободната алгебра на Ли, породена от неопределените X_0, $X_1, \ldots, X_m$. Нека Λ е скобка на Ли, принадлежаща на $\mathcal{L}(\vec{X})$. Ще отбележим с $\Lambda(\vec{f})$ тези скобки на Ли на $f_0, f_1, \ldots, f_m$, които са получени от Λ заместване на всяко X_0, $X_1, \ldots, X_m$ съответно от $f_0, f_1, \ldots, f_m$. Също така, полагаме $\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \Lambda_i\right)(\vec{f}) := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \Lambda_i(\vec{f})$ за произволни скобки на Ли Λ_i на X_0, $X_1, \ldots, X_m$ и реални числа α_1, $i = 1, \ldots, k$. Ако S е подмножество на $\mathcal{L}(\vec{X})$, тогава span S ще бъде най-малкото линейно подпространство на $\mathcal{L}(\vec{X})$ съдържащо елементите на S,

$$S(\vec{f}) := \left\{\Lambda(\vec{f}) : \Lambda \in S\right\} \ \text{ and } \ S(\vec{f})(x_0) := \left\{\Lambda(\vec{f})(x_0) : \Lambda \in S\right\}.$$

Накрая, с $\mathcal{B}(\vec{X})$ означаваме множеството на всички скобки на Ли на X_0, $X_1, \ldots, X_m$ с нечетна дължина, в които всяко от $X_i, i = 1, \ldots, m$ се съдържа четен брой пъти. Наричаме елементите на $\mathcal{B}(\vec{X})$ "лоши скобки на Ли".

Основната идея в получените достатъчни условия в [3], [7], [33] и [36] е това, че елементите на $\mathcal{B}(\vec{X})$ трябва да бъдат "неутрализирани" за да не "пречат" на локалната управляемост за малко време.
Също така, дефинираме множество от “добри” елементи на множеството П, както следва:

$$\text{Good} \ := \mathcal{L}(\vec{X}) \ \setminus \ \mathcal{B}(\vec{X}),$$

т.е. добри елменти на множеството $\mathcal{L}(\vec{X})$ са тези елементи на $\mathcal{L}(\vec{X})$, които не са лоши скобки на Ли.

Нека фиксираме вектор $r = (r_0, r_1, \ldots, r_m)$, чийто компоненти са естествени числа такива, че $1 \leq r_0 \leq r_i, i = 1, \ldots, m$. Полагаме

$$\|\Lambda\|_r \ := \ r_0|\Lambda|_0 + \sum_{i=1}^{m} r_i|\Lambda|_i, \qquad \text{за всяка } \Lambda \in \mathcal{L}(\vec{X}),$$

където броят на срещанията на X_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, в Λ е означен с $|\Lambda|_i$. Числото $|\Lambda|_i$ се нарича степен на Λ по отношение на X_i, $i = 0, 1, \ldots, m$. По естествен начин дължината $\|\Lambda\|$ на Λ е равна на $|\Lambda|_0 + |\Lambda|_1$. Положителните числа $\|\Lambda\|_r$ и $\|\Lambda\|_r^\sigma$ се наричат *“r-тегло”* на скобката на Ли Λ.

За всяко положително число δ дефинираме множествата

$$\overline{\mathcal{L}}_r^\delta = \left\{ \Lambda \in \mathcal{L}(\vec{X}) : \ \|\Lambda\|_r = \delta \right\}.$$

и

$$\mathcal{L}_r^\delta = \left\{ \Lambda \in \mathcal{L}(\vec{X}) : \ \|\Lambda\|_r \leq \delta \right\}.$$

Нека Λ е скобка на Ли, принадлежаща на $\mathcal{L}(\vec{X})$. Казваме, че Λ_0 може да бъде *r-неутрализирана* ако

$$\Lambda_0(\vec{f}(x_0)) \ \in \ \text{span} \ \left\{ \Lambda(\vec{f})(x_0) : \ \Lambda \in \mathcal{L}(\vec{X}) \text{ и } \ \|\Lambda\|_r < \|\Lambda_0\|_r \right\}.$$

Също така, ако $\Lambda_0(\vec{f})(x_0) = 0$, то Λ_0 е r-неутрализирана.

По-долу са формулирани два класически резултата:

Теорема 3.1.1 *(условие за управляемост на Хермес, вж. Теорема 2.1 от [34]) Разглеждаме управляемата система Σ, за която $m = 1$. Предполагаме, че*

1) dim $\mathcal{L}(\vec{X})(\vec{f})(x_0) = n$;

2) $\mathcal{S}^k(\vec{X})(\vec{f})(x_0) = \mathcal{S}^{k+1}(\vec{X})(\vec{f})(x_0)$ когато k е нечетно (тук $\mathcal{S}^k(\vec{X})$ означава линейната обвивка на всички скобки на Ли на X_0 и X_1, които съдържат X_1 най-много k пъти).

Тогава управляемата система Σ е локално управляема за малко време в точката x_0.

Теорема 3.1.2 *([36]) Предполагаме, че*

1) dim $\mathcal{L}(\vec{X})(\vec{f})(x_0) = n$;

2) ако Λ е лоша скобка на Ли, тогава тя може да бъде r-неутрализирана

Тогава управляемата система Σ е локално управляема за малко време в точката x_0.

3.2 Един клас полиномиални управляеми системи

В следващата секция е разгледан един клас полиномиални управляеми системи. Да разгледаме следната управляема система Σ_1 в $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t), \tag{3.5}$$

$$x(0) = 0,\ u(t) \in U \cap \bar{\mathbf{B}}$$

където U е затворен изпъкнал конус в $\mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{B}}$ е единичното затворено кълбо в $\mathbb{R}^n$ с център в нулата и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ изображение, чийто компоненти са хомогенни полиномим от втора степен, т.е. $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ за всяко $\lambda > 0$ и всяко $x \in \mathbb{R}^n$.

За съжаление общите достатъчни условия от предишните секции (Теорема 3.1.1 и Теорема 3.1.2) не са приложими към разглежданата управляема система (4.1). Причината за това обикновено е съществуването на лоши скобки на Ли, които не могат да бъдат неутрализирани по вече разгледания начин.

Следната управляема система Σ_A е разгледана в [1]:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ \dot{y} = q_1(x) + q_2(y), \end{array} \right. \tag{3.6}$$

където фазовата променлива е $z = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^m$ е управляемата променлива, а $q_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ и $q_2 : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ са хомогенни квадратични полиноми, т.е. $q_1(\lambda x) = \lambda^2 q_1(x)$ и $q_2(\lambda y) = \lambda^2 q_2(y)$ за всяко $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^r$. дефинираме множествата Q_1 и Q_2 както следва:

$$Q_1 := \{q_1(u) : \ u \in \mathbb{R}^m\}, \ Q_2 := \{q_2(y) : \ \pm y \in Q_1\}$$

и означаваме с cone S най-малкият изпъкнал затворен конус, съдържащ множеството $S \subset \mathbb{R}^r$. Тогава резултатът от [1] може да бъде формулиран по следния начин:

Теорема 3.2.1 *Ако*

$$\text{cone } Q_1 + \text{cone } Q_2 = \mathbb{R}^r,$$

тогава системата (3.6) е локално управляема за малко време в нулата.

Резултатът на Агилар е разгледан като следствие на достатъчното условие, доказано в следващата секция.

За да покажем основната идея на нашия подход, разглеждаме следния пример:

Пример 3.2.1 *нека разгледаме следната двумерна управляема система* Σ_2*:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u, \ x(0) = 0, \ u \in [-1, 1], \\ \dot{y}(t) &= v - x^2, \ y(0) = 0, \ v \in [0, 1], \end{aligned}$$

По-горе формулираните Твърдение 2.3.5, Твърдение 2.3.6 и Твърдение 2.3.7 водят до това, че системата Σ_2 е локално управляема за малко време в началото. За съжаление обаче, достатъчното условие в [1] не е приложимо, тъй като множеството от допустими стойности на управленията би трябвало да е симетрично спрямо нулата.

Взимайки под внимание Твърдение 2.3.5, достатъчно е да намерим краен брой елементи на сечението на $\mathcal{L}_2$ и $E^+_\alpha(0)$ за някое $\alpha > 0$, такива, че съдържат нулата в $\mathbb{R}^n$ във вътрешността на изпъкналата им затворена обвивка.

3.3 Предварителни сведения

Въведени са някои означения. Ако u е произволен елемент на $U \cap \bar{\mathbf{B}}$, тогава означаваме с g_u константното векторно поле дефинирано чрез $g_u(x) := u$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$. нека предположим, че линейната обвивка $\mathcal{M}_0$ е породена от елементите $u_i \in U \cap \bar{\mathbf{B}}$, $i = 1, \ldots, \mu$, и нека означим с $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f, g_{u_1}, \ldots, g_{u_\mu})$ алгебрата на Ли, породена от векторните полета f и g_{u_i}, $i = 1, \ldots, \mu$. С $\mathcal{L}_{const}$ означаваме субалгебрата на Ли от константни векторни полета, съдържаща се в $\mathcal{L}$. Джорджевич и Купка (вж. [18]) са доказали, че $\mathcal{L}_{const}$ е най-малкото векторно поле от константни векторни полета, което съдържа векторните полета g_{u_i}, $i = 1, \ldots, \mu$, и което съдържа всички векторни полета $[g_v, [g_w, f]]$, където g_v и g_w са произволни елементи на $\mathcal{L}_{const}$.

Означаваме с $\mathbb{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ автоморфизма, дефиниран чрез $\mathbb{A}(f) = f$ и $\mathbb{A}(g_{u_i}) = -g_{u_i}$, $i = 1, \ldots, \mu$. Използваме също така изображението "обръщане на времето" $\mathbb{T}$, дефинирано от Сусман в [36]. Изображенията $\mathbb{A}$ и $\mathbb{T}$ са линейни, т.е. ако $\mathbb{C} \in \{\mathbb{A}, \mathbb{T}\}$ и $\sum_{i \in I} \alpha_i \Lambda_i$ е ред на Ли от скобки на Ли от $\mathcal{L}$, тогава

$$\mathbb{C}\left(\sum_{i \in I} \alpha_i \Lambda_i\right) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{C}(\Lambda_i).$$

и $\mathbb{C}(Exp(\mathcal{S})) = Exp(\mathbb{C}(\mathcal{S}))$ за всеки ред на Ли $\mathcal{S}$ от скобки на Ли на f и g_{u_i}, $i = 1, \ldots, \mu$. Също така, може да се получи, че $\mathbb{T}(\Lambda) = (-1)^{k+1}\Lambda$ за всяка скобка на Ли Λ от $\mathcal{L}$ с дължина k. По-нататък ще използваме следните групи от автоморфизми $\Theta^{\pm} := \{Id, \mathbb{A}, \mathbb{T}, \mathbb{A}\mathbb{T}\}$ и $\Theta := \{Id, \mathbb{T}\}$, където Id е идентитетът. Ясно е, че скобките на Ли Λ от $\mathcal{L}$, които са инвариантни по отношение на действието на групата Θ, са с нечетна дължина, докато скобките на Ли Λ от $\mathcal{L}$, които са инвариантни по отношение на действието на групата $\Theta^{\pm}$, са с нечетна дължина и всяко g_{u_i}, $i = 1, \ldots, \mu$, се среща в Λ четен брой пъти.

Нека фиксираме компактна околност Ω_0 на нулата и нека $\Omega := 2\Omega_0$. Тогава съществува $T_0 > 0$ такова, че всяка траектория x на Σ с начална точка $x_0 \in \Omega_0$ и съответстваща на някое допустимо управление от $\mathcal{U}_T$ за $T \le T_0$ е добре дефинирано в интервала $[0, T]$ и остава в Ω, т.е. $x(t) \in \Omega$ за всяко $t \in [0, T]$. Тогава следната крайна композиция на експоненти

$$Exp(t_1(f + g_1)) \circ Exp(t_2(f + g_2)) \circ \cdots \circ Exp(t_k(f + g_k))(x)$$

е добре дефинирана за всяко $x \in \Omega_0$, всяко $t_i > 0$ с $T := t_1 + \cdots + t_k \le T_0$ и всяко $g_i \in \{g_u : \; u \in U \cap \bar{\mathbf{B}}\}$, $i = 1, \ldots, k$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $T_0 > 0$ е достатъчно малко така, че (съгласно формулата КБХ) съществува ред на Ли $\mathcal{S}$ такъв, че

$$Exp(\mathcal{S}) \cong Exp(t_1(f + g_1)) \circ Exp(t_2(f + g_2)) \circ \cdots \circ Exp(t_k(f + g_k)). \qquad (3.7)$$

Наричаме $Exp(\mathcal{S})$ **допустим поток за** Σ. Очевидно

$$Exp(\mathcal{S})(x) \in \mathcal{R}(x, T). \qquad (3.8)$$

Съгласно свойствата на автоморфизма $\mathbb{T}$ (вж. [36]), имаме, че

$$\mathbb{T}\left(Exp(t_1(f+g_1))\circ\cdots\circ Exp(t_k(f+g_k))\right)=Exp(t_k(f+g_k))\circ\cdots\circ Exp(t_1(f+g_1))$$

Напомняме, че множеството $\mathcal{M}_0$ е линейната обвивка породена от векторите $g_{u_1}(0), g_{u_2}(0), \ldots, g_{u_\mu}(0)$, $i=1,\ldots,\mu$. Ако векторното полета g_i, $i=1,\ldots,k$, принадлежи на множеството set $\{g_{u_1}, g_{u_2},\ldots,g_{u_\mu}\}$, то имаме, че

$$\mathbb{A}\left(Exp(t_1(f+g_1))\circ\cdots\circ Exp(t_k(f+g_k))\right)=Exp(t_1(f-g_1))\circ\cdots\circ Exp(t_k(f-g_k))$$

$$\text{и } \mathbb{A}\left(Exp(\mathcal{S})\right)(x)\in\mathcal{R}(x,T). \tag{3.9}$$

Подобно на предишната глава, дефинираме "тегло" в алгебрата на Ли $\mathcal{L}$. Нека фиксираме произволен вектор $r:=(p,q)$, чийто компоненти са положителни реални числа, удовлетворяващи неравенствата $1\le p\le q$. Нека Λ е произволна скобка на Ли на векторните полета f и g_{u_i}, $i=1,\ldots,\mu$. Дефинираме нейно r-тегло, както следва:

$$\|\Lambda\|_r := p|\Lambda|_0+\textstyle\sum_{i=1}^{\mu} q|\Lambda|_i,$$

където с $|\Lambda|_0$ е означен броят на срещанията на полето f в Λ, а с $|\Lambda|_i$ $i=1,\ldots,\mu$, е означен броят на срещанията на полето g_{u_i} в Λ. Ако Λ и Γ са произволни скобки на Ли от $\mathcal{L}$, тогава може да се провери, че $\|[\Lambda,\Gamma]\|_r=\|\Lambda\|_r+\|\Gamma\|_r$. Всеки израз от вида

$$\Lambda^{w,\sigma}(\varepsilon):=\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\varepsilon^{\|\Lambda_j\|_r}\Lambda_j \text{ with } \|\Lambda_j\|_r\in[w,\sigma],\ \alpha_j\in\mathbb{R},\ \text{and } \varepsilon\in(0,1),$$

се нарича **допустим полином на Ли на ε (по отношение на теглото $\|\cdot\|_r$)**. Полагаме

$$Bra(\Lambda^{w,\sigma}):=\{\Lambda_j:\ j=1,\ldots,J\}.$$

Нека $\tilde{\Theta}$ е група от автоморфизми, дефинирани в $\mathcal{L}$ и Λ в скобка на Ли. Казваме, че Λ е инвариантна (неинвариатна) по отношение на $\tilde{\Theta}$ ако $\mathcal{C}(\Lambda)=\Lambda$ за всяко ($\mathcal{C}(\Lambda)\neq\Lambda$ за някое) $\mathcal{C}\in\tilde{\Theta}$. Казваме, че $\Lambda^{w,\sigma}(\varepsilon)$ е инвариантен (неинвариантен) по отношение на $\tilde{\Theta}$ ако всички елементи на $Bra(\Lambda^{w,\sigma})$ са инвариантни (неинвариантни) по отношение на $\tilde{\Theta}$.

Ще използваме следното следствие от Твърдение 5.1 от [36]:

Твърдение 3.3.1 *Нека $\tilde{\Theta}$ е една от групите от автоморфизми Θ или $\Theta^{\pm}$ и $\varepsilon_0>0$. Нека $Exp(\mathcal{S}(\varepsilon))$ е произволен допустим поток за Σ такъв, че*

$$Exp(\mathcal{S}(\varepsilon))(x)\in\mathcal{R}(x,T(\varepsilon)),$$

където $\mathcal{S}(\varepsilon) = \Lambda^{1,w-1}_{inv}(\varepsilon) + \Lambda^{1,\sigma-1}_{not\ inv}(\varepsilon) + \Lambda^{w,\sigma-1}_{inv}(\varepsilon) + O(\varepsilon^{\sigma})$ *и* $2 \leq w \leq \sigma - 1$*;* $\Lambda^{1,w-1}_{inv}(\varepsilon)$*,* $\Lambda^{1,\sigma-1}_{not\ inv}(\varepsilon)$ *и* $\Lambda^{w,\sigma-1}_{inv}(\varepsilon)$ *са допустими полиноми на Ли на* ε *(по отношение на теглото* $\|\cdot\|_r$*),* $T(\varepsilon)$ *е положителен реален полином с* $T(\varepsilon) \in (0, T_0)$ *за* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*, а* x *принадлежи на околността* Ω_0 *на нулата. Също така, нека предположим, че* $\Lambda^{1,w-1}_{inv}(\varepsilon)$ *и* ${\Lambda_{inv}}^{w,\sigma-1}$ *са инвариантни, но* $\Lambda^{1,w-1}_{not\ inv}(\varepsilon)$ *са неинвариантни по отношение на* $\tilde{\Theta}$*. Тогава съществуват естествено число* m *и допустим поток* $Exp(\mathcal{S}_{inv}(\varepsilon))$ *такива, че*

$$Exp(\mathcal{S}_{inv}(\varepsilon))(x) \in \mathcal{R}(x, mT(\varepsilon)) \textit{ for each } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \textit{ for which } mT(\varepsilon) \in (0, T_0),$$

където

$$\mathcal{S}_{inv}(\varepsilon) = m\Lambda^{1,w-1}_{inv}(\varepsilon) + \bar{\Lambda}^{1,w-1}_{inv}(\varepsilon) + {\bar{\Lambda}_{inv}}^{w,\sigma-1}(\varepsilon) + \bar{O}(\varepsilon^{\sigma}),$$

$\bar{\Lambda}^{1,w-1}_{inv}(\varepsilon)$ *и* ${\bar{\Lambda}_{inv}}^{w,\sigma-1}(\varepsilon)$ *са допустими полиноми на Ли на* ε *(по отношение на теглото* $\|\cdot\|_r$*), които са инвариантни по отношение* $\tilde{\Theta}$*. Също така е изпълнено, че* $\bar{\Lambda}^{1,w-1}_{inv}$ *е сума на скобки на Ли на елементи на* $Bra(\Lambda^{1,w-1}_{inv})$ *и* $Bra(\Lambda^{1,\sigma-1}_{not\ inv})$*.*

Нашата цел е да изучим лошите скобки в този частен случай на хомогенните полиномиални системи от втора степен.

3.4 Достатъчно условие

За да формулираме основния резултат в тази глава сме използвали означението rec C - най-голямото линейно пространство, съдържащо се в изпъкналия затворен конус C. Дефинирани са множествата: sets:

1. $\mathcal{K}_0 = U$ and $\mathcal{M}_0 = rec\, \mathcal{K}_0$;
2. $\mathcal{K}_1 = cone\ (\{f(u) : u \in \mathcal{M}_0\} \cup U)$ и $\mathcal{M}_1 = rec\, \mathcal{K}_1$;
3. $\mathcal{K}_2 = cone\ \{f(u) : u \in \mathcal{M}_1\}$.

Теорема 3.4.1 *Ако изпъкналия конус* $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$ *съвпада с* $\mathbb{R}^n$*, тогава управляемата система* Σ *е локално управляема за малко време в нулата.*

Забележка 3.4.2 *При предположенията на Теорема 3.2.1 (забележете, че управленията са неограничени) получаваме, че*

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{M}_0 = U = \mathbb{R}^m \times \{\mathbf{0}\},\ \mathcal{K}_1 = cone\ (\{f(u) : u \in \mathbb{R}^m\} \cup U) =$$

$$= cone\ \left(\{(0, q_1(u))^T : u \in \mathbb{R}^m\} \cup U\right) = \mathbb{R}^m \times cone\ Q_1,$$

$$\mathcal{M}_1 = rec\ \mathcal{K}_1 = \mathbb{R}^m \times rec\ cone\ Q_1$$

$$\mathcal{K}_2 = cone\ \{f(u) : u \in \mathcal{M}_1\} \supseteq cone\ \{(0, q_2(y))^T : \pm y \in\ Q_1\} = \{\mathbf{0}\} \times cone\ Q_2.$$

Очевидно равенството $cone\ Q_1 + cone\ Q_2 = \mathbb{R}^r$ *води до равенството* $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \mathbb{R}^{m+r}$*, което означава, че Theorem 3.2.1 е следствие от Theorem 3.4.1. Съществуват прости примери на управляеми системи, които са ЛУМВ (според Теорема 3.4.1), но тяхната локална управляемост за малко време не следва от Теорема 3.2.1.*

3.5 Доказателство на достатъчното условие

Доказателството на достатъчното условие се основава на построяването на подходящи траектории, осигуряващи неутрализирането на лоши скобки с лоши скобки със същото тегло.

Глава 4

Едно ново линейно подпространство на множеството E_α^+ и още едно достатъчно условие за локална управляемост за малко време

Основната идея в тази глава е да се подобри и усъвършенства подхода, основаващ се на допирателните векторни полета към достижимото множество. Тук ние получаваме нови елементи на E_α^+ - смесени скобки от вида $[g_u, [g_v, f]]$. За да постигнем това е необходимо поне една от скобките $-[g_u, [g_u, f]]$ и $-[g_v, [g_v, f]]$ да бъде елемент на $E^+(0)$.

4.1 Основен резултат

Разгледана е отново управляемата система Σ_1 в $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t), \tag{4.1}$$

$$x(0) = 0,\ u(t) \in U \cap \bar{\mathbf{B}}$$

където U е затворен изпъкнал конус в $\mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{B}}$ е единичното затворено кълбо в $\mathbb{R}^n$ с център в нулата и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is е изображение, чийто компоненти си хомогенни полиноми от втора степен, т.е. $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ за всяко $\lambda > 0$ и всяко $x \in \mathbb{R}^n$.

За да се представи авторския подход и да се формулира второто достатъчно условие, са дефинирани следните множества:

1. $\mathcal{K}_0 = \ U$, $\mathcal{M}_0 = rec\, \mathcal{K}_0$;

2. $\mathcal{K}_1 = cone\,(\{f(u) : u \in \mathcal{M}_0\} \cup U)$
   $\mathcal{N}_1 = \{u \in \mathcal{M}_0 : -f(u) \in \mathcal{K}_1\}$
   $\mathcal{M}_1 = span\,(\{[g_u, [g_v, f]](0) : v \in \mathcal{M}_0, u \in \mathcal{N}_1\} \cup \mathcal{M}_0)\,$;

3. За $s = 1, 2, 3, ...$ дефинираме множествата $\mathcal{K}_{s+1}$, $\mathcal{N}_{s+1}$ и $\mathcal{M}_{s+1}$ по следния рекурсивен начин:
   $\mathcal{K}_{s+1} = cone\,(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{M}_s)$
   $\mathcal{N}_{s+1} = \{u \in \mathcal{M}_0 : -f(u) \in \mathcal{K}_{s+1}\}$
   $\mathcal{M}_{s+1} = span\,(\{[g_u, [g_v, f]](0) : v \in \mathcal{M}_0, u \in \mathcal{N}_{s+1}\} \cup \mathcal{M}_s)\,$;

   Накрая, нека $\kappa = min\{s : \mathcal{M}_{s+1} = \mathcal{M}_s\}$. Очевидно $\kappa \leq n$.

Основният резултат в четвърта глава е следната

Теорема 4.1.1 *Множеството* $\{g_u : u \in \mathcal{K}_\kappa\}$ *е подмножество на* E^+.

Следствие 4.1.2 *Нека*

$$\mathcal{L} = cone\ \{f(u) : u \in f\,(\mathcal{M}_0)\,, -u \in \mathcal{K}_1\}.$$

Ако $cone(\mathcal{L} \cup \mathcal{K}_\kappa)$ *съвпада с* $\mathbb{R}^n$*, то тогава управляемата система* Σ *е локално управляема за малко време в нулата.*

Два примера илюстрират приложенията на достатъчните условия, разгледани в дисертацията.

4.2 Примери

Пример 4.2.1

Нека разгледаме следната управляема система:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = u(t),\ u(t) \in [-1,1],\\
&\dot{y}(t) = v(t),\ v(t) \in [-1,1],\\
&\dot{z}(t) = x^2(t) - y^2(t),\\
&\dot{p}(t) = z^2(t) - x(t)y(t).
\end{aligned}$$

Полагаме $f(x,y,z,p) := (0,0,x^2-y^2,z^2-xy)^T$, $g_1(x,y,z,p) := (1,0,0,0)^T$ и $g_2(x,y,z,p) := (0,1,0,0)^T$.

Може да се пресметне, че

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{K}_0 = \{(x,y,0,0)^T : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\begin{gathered}
\mathcal{K}_1 \supset \{(x,y,z,0)^T : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{N}_1 \supset \{(x,0,0,0)^T : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y,0,0)^T : y \in \mathbb{R}\}\\
\mathcal{M}_1 \supset \{(x,y,0,p)^T : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{K}_2 = \{(x,y,z,p)^T : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}\}.
\end{gathered}$$

Прилагайки Теорема 4.1.1, получаваме, че $\{g_u(0) : u \in \mathcal{K}_2\} \subset E^+$. Тъй като $\mathcal{K}_2 = \mathbb{R}^4$, може да заключим, че (взимайки под внимание Лема 2.3.6) разглежданата управляема система е локално управляема за малко време.

Пример 4.2.2

Нека разгледаме следната управляема система:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = u(t),\ u(t) \in [-1,1],\\
&\dot{y}(t) = v(t),\ v(t) \in [-1,1],\\
&\dot{z}(t) = x^2(t) - y^2(t),\\
&\dot{p}(t) = z^2(t) - y^2(t).
\end{aligned}$$

Използвайки Теорема 4.1.1 и Следствие 4.1.2, не можем да направим извод, че разглежданата система е ЛУМВ в нулата.

Всъщност достижимото множество на тази система е линейно подпространство на полупространство и тази система не е ЛУМВ в нулата.

4.3 Доказателство на Теорема 4.1.1

Основна роля в доказателството на достатъчното условие в четвърта глава на дисертацията имат множествата

$$\mathcal{U}^+ := \Bigg\{ u : (0, \varepsilon_u) \to U \cap \bar{\mathbf{B}} : u(\varepsilon) := \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{\alpha_i} u_i,$$

$$u_i \in U \cap \bar{\mathbf{B}}, \alpha_i > 1, i = 1, \dots, m, \varepsilon_u \in (0,1),\ m \in I\!N \Bigg\},$$

и

$$\mathcal{U} := \Bigg\{ u : (0, \varepsilon_u) \to (\text{rec } U) \cap \bar{\mathbf{B}} : u(\varepsilon) := \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{\alpha_i} u_i,$$

$$u_i \in (\text{rec } U) \cap \bar{\mathbf{B}},\ \alpha_i > 1, i = 1, \dots, m, \varepsilon_u \in (0,1),\ m \in I\!N \Bigg\},$$

където с $I\!N$ е означено множеството на естествените числа. Очевидно, ако $u \in \mathcal{U}$, то $-u$ също принадлежи на $\mathcal{U}$.

Избираме произволни елементи $u_0 \in \mathcal{U}^+$ и $u_1, \dots, u_s$ от $\mathcal{U}$, полагаме $\hat{u} := (u_0, u_1, \dots, u_s), \varepsilon_{\hat{u}} = min\{\varepsilon_{u_i}, i = 1, \dots, s\} > 0$ и разглеждаме функцията

$$(0, \varepsilon_{\hat{u}}) \ni \varepsilon \to g_{u_0(\varepsilon)} + \sum_{i=1}^{s} f\left(u_i(\varepsilon)\right).$$

Наричаме такава функция *допустима сума от скобки на Ли.*

Нека фиксираме реалните числа $\alpha > 1$ и $\beta > 0$ такива, че са изпълнени следните неравенства

$$1 < 2^{\kappa-1}\beta < 2^{\kappa+1}\beta < \alpha. \tag{4.2}$$

Полагаме $\mu := 2^{\kappa}\beta$,

$$\mu_1 := 2^{\kappa-1}\beta, \mu_2 := 2^{\kappa-1}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\beta, \mu_s := 2^{\kappa-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{s-1}}\right)\beta,$$

за всяко $s = 1, \dots, \kappa$. Тогава неравенството (4.2) води до

$$1 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\kappa < \mu \text{ и } 2\mu < \alpha. \tag{4.3}$$

Първо, за показано е, че за все два елемента p и q на множеството $\{1, \dots, \kappa\}$, за които $p < q$, е изпълнено неравенството

$$\mu_p + \mu \le 2\mu_q. \tag{4.4}$$

След това е доказано следното ключово твърдение

Твърдение. За всяко естествено число $q \in \{1, 2, \ldots, \kappa\}$ и всеки елемент $\big[g_{u_q}, \big[g_{v_q}, f\big]\big] \in \mathcal{M}_q$ съществуват $\varepsilon_{u_q v_q} \in (0,1)$, $v_{qi} \in \mathcal{M}_0$ и $\delta_{qi} \geq 0$, $i = 1, \ldots, \bar{q}$, такива, че функцията

$$(0, \varepsilon_{u_q v_q}) \ni \varepsilon \to \varepsilon^{\mu_q + \mu} \big[g_{u_q}, \big[g_{v_q}, f\big]\big] + \varepsilon^{2\mu} \sum_{i=1}^{\bar{q}} \varepsilon^{\delta_{qi}} f(v_{qi}) \tag{4.5}$$

е допустима сума от скобки на Ли, т.е. съществуват $u_0 \in \mathcal{U}^+$ и $u_\alpha \in \mathcal{U}$, $\alpha = 1, \ldots, s$, за които

$$\varepsilon^{\mu_q + \mu} \big[g_{u_q}, \big[g_{v_q}, f\big]\big] + \varepsilon^{2\mu} \sum_{i=1}^{\bar{q}} \varepsilon^{\delta_{qi}} f(v_{qi}) = g_{u_0(\varepsilon)} + \sum_{\alpha=1}^{s} f(u_\alpha(\varepsilon)),$$

за всяко $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{u_q v_q})$.

Прилагайки горното твърдение и формулата КБХ получаваме, че $\big[g_{u_p}, \big[g_{v_p}, f\big]\big] \in E^+$.

Глава 5

Необходимо условие за локална управляемост за малко време

5.1 Мотивация и основен резултат

В пета глава на дисертацията е разгледана следната управляема система Σ_n в $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{5.1}$$

при предположенията:

A1. Функцията $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е непрекъсната по отношение на променливите x и u;

A2. Множеството U е компактно подмножество на $\mathbb{R}^m$;

A3. Съществуват реални числа $\rho \in (0, 1)$ и $K > 0$, такива че е изпълнено неравенството

$$\|f(x_2, u) - f(x_1, u)\| \leq K\|x_2 - x_1\|$$

за всяко u от U и всеки два елемента x_2 и x_1 от $\rho\bar{\mathbf{B}}$ (с $\bar{\mathbf{B}}$ е означено единичното затворено кълбо $\mathbb{R}^n$ с център в нулата).

С цел обяснение на основната идея на използвания подход е разгледан следния

Пример 5.1.1 *Нека разгледаме следната тримерна управляема система* Σ_3*:*

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = 0,\ u(t) \in [-1, 1],\\
&\dot{y}(t) = v(t),\ y(0) = 0,\ v(t) \in [-1, 1],\\
&\dot{z}(t) = ax^2(t) + bx(t)y(t) + cy^2(t) + dx(t)z(t), z(0) = 0,
\end{aligned}$$

където a*,* b*,* c *и* d *са константи.*

Естествена стъпка в изследването на системата в нулата е разглеждането на линеаризираната система:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \\ &\dot{y}(t) = v(t), \quad y(0) = 0, \\ &\dot{z}(t) = 0, \qquad z(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Съгласно критерия на Калман тази линейна система не е локално управляема за малко време в нулата. от друга страна, лесно се проверява, че за всяко положително време $T > 0$ съществува реално число $\mu > 0$ такова, че всяка точка от линейното пространство

$$L := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$$

(с p^T е означен транспонираният вектор на p) с норма по-малка от μ е достижима от нулата за време не повече от T чрез траектория от линеаризираната система (5.2).

Този факт ни мотивира да изследваме стойностите на дясната страна на системата Σ_3 върху линейното пространство L и да обясним значението на линейната обвивка L, която се появява във формулировката на изложеното по-долу предположение A4. По-нататък в дисертацията се връщаме към изследването на локалните свойства на достижимото множество на системата Σ_3.

За формулирането на основния резултат се нуждаем от вече споменатото предположение A4:

A4. Съществува собствено линейно подпространство L на $\mathbf{R}^n$ (т.е. $L \neq \mathbf{R}^n$) такова, че

$$\mathrm{rec}(\ \mathrm{cone}\ (\{f(x,u) :\ x \in \rho\bar{\mathbf{B}} \cap L, u \in U\}\ \cup\ L\ )\ ) \subseteq L.$$

Тук с cone (S) е означен най-малкият изпъкнал затворен конус, съдържащ множеството S, а с rec (C) - най-голямото линейно пространство съдържащо се в изпъкналия затворен конус C.

Теорема 5.1.1 *Нека са в сила предположенията A1, A2, A3 и A4. Тогава управляемата система Σ_n не е ЛУМВ в нулата.*

Теорема 5.1.1 води директно до долното следствие, което обобщава необходимото условие (вж. Теорема 1) от [33]. Наистина, нека разгледаме случая, в който $L = \{\mathbf{0}\}$. Тогава предположение A4 придобива вида:

A4'. $\mathrm{rec}\ (\ \mathrm{cone}\ (\ \{f(\mathbf{0},u) :\ u \in U\}\ )\ ) = \{\mathbf{0}\}$

и получаваме следното

Следствие 5.1.2 *Нека предположения A1, A2, A3 и A4' са изпълнени. Тогава управляемата система Σ_n не е ЛУМВ в нулата.*

Пример 5.2 (продължение) За да приложим Теорема 5.1.1, трябва да се уверим в истинността на предположение A4. Лесно се проверява, че множеството от лявата страна на предположение A4 е $rec\ (cone\ (D \cup L))$, where

$$D := \left\{ (u, v, ax^2 + bxy + cy^2)^T : \begin{array}{l} u \in [-1, 1], \\ v \in [-1, 1] \\ x^2 + y^2 \leq \rho^2 \end{array} \right\}$$

Разглеждаме възможните случаи:

Случай I: $b^2 - 4ac \leq 0$. В този случай знакът на третата координата на всички елементи на множеството D е един и същ, следователно $rec\ (cone\ (D \cup L)) \subseteq L$. Прилагайки Теорема 5.1.1, получаваме, че управляемата система Σ_3 не е локално управляема за малко време в нулата. Важно е да отбележим, че този извод не следва от известни необходими условия, получени от Сусман ([34]), Стефани ([31]), Кавски ([19]) и Кръстанов ([24]), защото тези необходими условия за ЛУМВ засягат само случая на скаларно управление.

Случай II: $b^2 - 4ac > 0$. В този случай е показано, че управляемата система Σ_3 е локално управляема за малко време в нулата. Да отбележим, че това не следва от общия резултат на Сусман ([36]). Забелязвайки, че системата Σ_3 е афинна управляема система с квадратична дясна част и скаларно управление, бихме могли да се опитаме да приложим достаъчното условие на Агилар ([1]). за съжаление, ЛУМВ на системата от разглеждания пример не следва от този резултат. Поради тази причина прилагаме геометричния подход от глави 3 и 4, за да определим възможните посоки на разширение на достижимото множество на гладка управляема система. Както вече разгледахме, този подход се основава на подходящо дефинираното в глава 2 множество E^+ от аналитични векторни полета. Дефинирането на това множество е свързано с работата на Кренер ([27]), Хермес ([14]), Сусман ([33]), Кунита ([28]), Вельов и Кръстанов ([38]), Хиршорн ([16]), Кръстанов и Куинкампоа ([25]), Кръстанов и Вельов ([26]) и други.

Нека продължим с разглеждането на примера. Фиксираме $\varepsilon_0 > 0$ и компактна околност Ω на нулата. Без ограничение на общността можем да предположим, че Ω и $\varepsilon_0 > 0$ са достатъчно малки, че композициите Υ, Υ^2 и Υ^4, които ще се появят по-долу, са добре дефинирани.

Полагаме $p := (x, y, z)^T$ и дефинираме векторните полета $f : R^3 \to R^3$ и $g : R^3 \to R^3$, както следва

$$f(p) = (0, 0, ax^2 + bxy + cy^2 + dxz)^T, g_{\alpha,\beta}(p) := (\alpha, \beta, 0)^T,$$

където α и β са произволни елементи на интервала $[-1, 1]$. Тъй като

$$\mathrm{Exp}\ \left(\varepsilon(f + g)\right)(p) \in \mathbf{R}(p, \varepsilon)$$

за всяка точка $p \in \Omega$ и всяко $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, както и това, че $f(\mathbf{0}) = (\mathbf{0})$, може да заключим, че векторното поле $g_{\alpha,\beta}$ принадлежи на множеството $E^+(\mathbf{0})$.

Нека фиксираме произволно $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и произволни $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ от интервала $[-1, 1]$. Полагаме $g := g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$ и $\Upsilon(\varepsilon) := \text{Exp }(\varepsilon(f + g)) \circ \text{Exp }(\varepsilon(f - g))$. Тогава $\Upsilon(\varepsilon)(p)$ принадлежи на $\mathbf{R}(p, 2\varepsilon)$ за всяка точка $p \in \Omega$. Прилагайки формулата КБХ, получаваме

$$\Upsilon(\varepsilon) = \text{Exp }\left(2\varepsilon f + \varepsilon^2 [g, f] + \frac{\varepsilon^3}{3}[g, [g, f]] + O(\varepsilon^4)\right).$$

Следвайки доказателството на Твърдение 5.1 в [36] (вж. също [34]), разглеждаме автоморфизма λ който изпраща f в f и g в $-g$. Ако we set

$$\Upsilon^2(\varepsilon) := \Upsilon(\varepsilon) \circ \lambda\left(\Upsilon(\varepsilon)\right),$$

то получаваме, че

$$\Upsilon^2(\varepsilon)(p) \in \mathbf{R}(p, 4\varepsilon) \text{ за всяко } p \in \Omega.$$

От друга страна, прилагайки формулата КБХ, получаваме $\Upsilon^2(\varepsilon) =$

$$= \text{Exp }\left(4\varepsilon f + 2\varepsilon^3 [f, [f, g]] + \frac{2\varepsilon^3}{3}[g, [g, f]] + O_1(\varepsilon^4)\right).$$

След полагането $\Upsilon^4(\varepsilon)) := \Upsilon^2(\varepsilon) \circ \lambda\left(\Upsilon^2(\varepsilon)\right)$ се получава, че

$$\Upsilon^4(\varepsilon)(p) \in \mathbf{R}(p, 8\varepsilon) \text{ за всяко } p \in \Omega.$$

Прилагайки формулата КБХ, получаваме, че

$$\Upsilon^4(\varepsilon)) = \text{Exp }\left(8\varepsilon f + \frac{4\varepsilon^3}{3}[g, [g, f]] + O_2(\varepsilon^4)\right).$$

Тъй като $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, векторното поле $[g, [g, f]]$ принадлежи на множеството $E^+(\mathbf{0})$ за всеки избор на параметрите $\bar{\alpha} \in [-1, 1]$ и $\bar{\beta} \in [-1, 1]$. Тогава

$$[g, [g, f]](x, y, z) = 2(0, 0, a\bar{\alpha}^2 + b\bar{\alpha}\bar{\beta} + c\bar{\beta}^2)^T.$$

Нека

$$A := \left\{(\alpha, \beta, 0)^T : \ \alpha, \beta \in [-1, 1]\right\}$$

и

$$B := \left\{2(0, 0, a\bar{\alpha}^2 + b\bar{\alpha}\bar{\beta} + c\bar{\beta}^2)^T : \ \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in [-1, 1]\right\}.$$

Тъй като нулата в $\mathbf{R^n}$ принадлежи на вътрешността на изпъкналата обвивка на множеството $A \cup B$, съществуват краен брой елементи $c_i \in A \cup B$, $i = 1, \ldots, k$ такива, че $\mathbf{0}$ принадлежи на вътрешността на изпъкналата обвивка на множеството $\{c_i : \ i = 1, \ldots, k\}$. Тъй като елементите на $A \cup B$са стойностите на елементи от $E^+(\mathbf{0})$, то съществуват елементи $Z_i \in E^+$, за които $Z_i(\mathbf{0}) = c_i$ за всяко $i = 1, \ldots, k$. Прилагайки Лема 2.3.5, получаваме, че управляемата система Σ_3 е локално управляема за малко време в нулата.
Трябва да отбележим, че локалната управляемост за малко време на системата Σ_3 се определя напълно от стойностите на параметрите a, b и c и не зависи от параметъра d. $\square$

5.2 Някои следствия

Във втората секция на пета глава са разгледани някои следствия от полученото необходимото условие Теорема 5.1.1. Тези следствия са свързани с вече добре известни резултати.

Нека $A_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$ са линейни изображения и C_i, $i = 1, \ldots, k$ са изпъкнали затворени конуси в $\mathbf{R}^n$. Разглеждаме управляемата система Σ_s (наричана "система с превключване"):

$$\dot{x}(t) \in A_i x(t) + C_i, i = 1, \ldots, k.$$

Допустима траектория на системата Σ_1 дефинирана в $[0, T]$ е произволна абсолютно непрекъсната функция $x : [0, T] \to R^n$, краен брой индекси $i_1, i_2, \ldots, i_p$, реални числа $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_p \leq T$ и интегруеми функции $u_j : [t_{j-1}, t_j] \to C_{i_j}$, $j = 1, \ldots p$, удовлетворяващи

$$\dot{x}(t) = A_{i_j} x(t) + u_j(t) \text{ за почти всяко } t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Следствие 5.2.1 *Нека L е собствено подпространство на R^n, такова че*

$$rec \ (\ cone \ (\ \{\bigcup_{i=1}^{k} (A_i x + C_i) \mid x \in \rho \bar{\mathbf{B}} \cap L, u \in U\} \ \cup \ L \ ) \ ) \subseteq L.$$

Тогава системата с превключване Σ_s не е локално управляема за малко време в нулата.

Нека L е линейно подпространство на R^n, такова че:

B1. L е инвариантно по отношение на A_i, $i = 1, \ldots, k$, т.е. $A_i x \in L$ за всяко $x \in L$;

B2. $\text{rec}\ \left(\text{cone}\ \left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\ \cup\ L \right) \right) \subseteq L$.

Следствие 5.2.2 *Нека B1 и B2 са изпълнени. Тогава управляемата система Σ_s не е локално управляема за малко време в нулата.*

Следствието съвпада с необходимото условие на Кръстанов и Вельов (2005). Нещо повече, ако условия B1 и B2 не са изпълнени, то тогава разглежданата система с превключване е ЛУМВ в нулата.

Нека разгледаме системата Σ_S

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t) g_i(t), \tag{5.3}$$

Необходимото условие от Теорема 1 в [33] в случа на управляемата система Σ_S може да се преформулира по следния начин:

Разглеждаме случа $L = \{\mathbf{0}\}$. Тогава предположение A4 приема вида:

A4'. $\text{rec}\ (\ \text{cone}\ (\ \{f(\mathbf{0}, u) :\ u \in U\}\ )\ ) = \{\mathbf{0}\}$

и получаваме директно следствието

Следствие 5.2.3 *Нека предположение A1, A2, A3 и A4' са изпълнени. Тогава управляемата система Σ не е ЛУМБ в нулата.*

Следствието съвпада с Теорема 1 от [33]).

Теорема 5.2.4 (Сусман (1978)) *Нека нулата не принадлежи на изпъкналата обвивка на стойностите $f(\mathbf{0}, u)$, съответстващи на тези $u \in U$, за които $f(\mathbf{0}, u) \neq 0$. Тогава управляемата система Σ_S не е ЛУМВ в нулата.*

Нека разгледаме следната управляема система: Σ_{2b}:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t)b,$$

където f е полиномиално изображение, хомогенно от втора степен, b е фиксиран вектор в $\mathbf{R}^n$ и $u \in [-1, 1]$.

Нека разгледаме следствие от Теорема 5.1.1.

Следствие 5.2.5 *Нека* $\hat{L}_1 := \{\alpha b : \alpha \in \mathbb{R}\}$ *е собствено подпространство на* $\mathbb{R}^n$*. Да допуснем, че* $rec\ (\ cone\ (\ \{ad^2(g_\xi, f)(0) + 2ub :\ \xi \in \rho B \cap \hat{L}_1, u \in [-1,1]\}\ \cup\ \hat{L}_1\ )\ ) \subseteq \hat{L}_1$*. Тогава управляемата система* Σ_{2b} *не е ЛУМВ в нулата.*

Това следствие води до следната теорема на Сусман, преформулирана за този случай.

Теорема 5.2.6 (Сусман (1983)) *Нека* L_1 *е линейната обвивка на всички скобки на Ли на полетата* f *и* b*, които съдържат* b *най-много веднъж. Допускаме, че* $[g_b, [g_b, f]](0) \notin L_1(0)$*. Тогава управляемата система* Σ_2 *не е ЛУМВ в нулата.*

Нека разгледаме следната управляема система $\Sigma_{2k'}$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t)b,$$

където f полиномиално изображение хомогенно от степен $2k$, b е фиксиран вектор в $\mathbf{R}^n$ и $u \in [-1,1]$. Теоремата 5.1.1 приема формата:

Следствие 5.2.7 *Нека* $\hat{L}_{2k-1} := \{\alpha b : \alpha \in \mathbb{R}\}$ *е собствено подпространство на* $\mathbb{R}^n$*. Да допуснем, че* $rec\ (\ cone\ (\ \{ad^{2k}(g_\xi, f)(0) + 2ub :\ \xi \in \rho B \cap \hat{L}_{2k-1}, u \in [-1,1]\}\ \cup\ \hat{L}_{2k-1}\ )\ ) \subseteq \hat{L}_{2k-1}$*. Тогава управляемата система* $\Sigma_{2k'}$ *не е ЛУМВ в нулата.*

и необходимото условие на Стефани (вж. [31]), приложено за системата $\Sigma_{2k'}$ е следствие от Теорема 5.2.7 .

Теорема 5.2.8 (Стефани (1986)) *Нека* L_{2k-1} *е линейната обвивка на всички скобки на Ли на полетата* f *и* b*, които съдържат* b *най-много* $2k-1$ *пъти. Допускаме, че* $ad^{2k}(b, f)(0) \notin L_{2k-1}(0)$*. Тогава управляемата системата* $\Sigma_{2k'}$ *не е ЛУМВ в нулата.*

Освен това, необходимото условие 5.1.1 е приложимо и в случая на управляема система $\Sigma_{2k''}$ с повече от едно управление: :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)b_i,$$

Следствие 5.2.9 *Нека* $\hat{L}_{2k-1} := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m \right\}$ *е собствено линейно пространство на* $\mathbb{R}^n$*. Ако* $rec\ (\ cone\ (\ \{ad^{2k}(g_b, f)(0) + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i :\ x \in \rho B \cap \hat{L}_{2k-1}, u \in U\} \ \cup\ \hat{L}_{2k-1}\ )\ ) \subseteq \hat{L}_{2k-1}$*, то управляемата система* $\Sigma_{2k''}$ *не е локално управляема за малко време в нулата.*

Последното следствие е ново и не следва от известни в литературата резултати.

5.3 Доказателство на необходимото условие

За да докажем достатъчността, прилагаме диференциално-геометричния подход, основан на използването на подходящи допирателни векторни полета към достижимото множество. Става въпрос за множеството E^+, което е дефинирано във втора глава. За да докажем необходимостта, използваме идеи, предложени в статиите [20], [30], [33], [38] и [26].

Глава 6

Заключение

6.1 Авторска справка

Основните приноси на дисертацията според автора са:

1. Разширяване на подхода на Сусман за неутрализиране на скобки на Ли. Получено е ново достатъчно условие за локална управляемост за малко време на хомогенни полиномиални системи, използвайки неутрализиране на "лоши" скобки със скобки със същото тегло.

2. Разработен е нов метод за конструиране на елементи на множеството от допирателни векторни полета към достижимото множество на полиномиални управляеми системи с дясна страна хомогенно векторно поле от втора степен.

3. Разширено е разбирането на понятието "тегло" на скобка. Разработен е нестандартен и комплексен метод за конструиране на "тегло" на скобка на Ли.

4. Получено е ново необходимо условие за локална управляемост за малко време при естествени предположения.

6.2 Публикации, свързани с дисертацията

1. M. I. Krastanov, M. N. Nikolova, A necessary condition for small-time local controllability, Automatica,2020, ISSN (online):0005-1098, Ref, IF (5.541 - 2019), Web of Science Quartile: Q1 (9/63 Automation & ControlSystems)

2. M. I. Krastanov, M. N. Nikolova, A sufficient condition for small-time controllability of a polynomial control system, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, vol:73, issue:12, 2020, pages:1638-1649, Ref, IF (0.343 - 2019), Web of Science Quartile: Q4 (66/71 Multidisciplinary Sciences)

3. M. I. Krastanov, M. N. Nikolova, On the small-time local controllability, Systems & Control Letters, vol:177, 2023, Ref, Web of Science, IF (2.742 - 2023), Web of Science Quartile: Q1 (Computer Science), SCOPUS, SJR (1.519 - 2022), SCOPUS Quartile: Q1 (Computer Science)

6.3 Апробация на резултатите

Резултатите от дисертацията са представени на следните конференции и семинари:

1. "A sufficient condition for small-time controllability of a polynomial control systems Seminar on Optimization, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 3 ноември 2020 (по съвместна работа с М. Кръстанов)

2. "Approximations of control affine systems Seminar on Optimization, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 10 May 2021 (по статия на Х. Хермес)

3. "On small-time local controllability The 13th International Conference on Large-Scale Scientific Computations LSSC 2021, 7 - 11 юни 2021, Созопол, България, (по съвместна работа с М. Кръстанов)

4. "A sufficient condition for small-time controllability"Spring Scientific Session, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 26 март 2022 (по съвместна работа с М. Кръстанов)

5. "A sufficient condition for small-time controllability"Seminar on Optimization, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 6 юни 2022 (по съвместна работа с М. Кръстанов)

6. "High-order small-time local controllability"Spring Scientific Session, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 25 март 2023 (по съвместна работа с М. Кръстанов)

7. "High-order small-time local controllability The 14th International Conference on Large-Scale Scientific Computations LSSC 2023, 5 - 9 юни 2023, Sozopol, Bulgaria, (по съвместна работа с М. Кръстанов)

8. "On small-time local controllability 16-th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics , 3 - 7 юли 2023, Боровец, България, (по съвместна работа с М. Кръстанов)

Забелязани цитирания:

1. U. Boscain, D. Cannarsa, V. Franceschi, M. Sigalotti, Local controllability does imply global controllability,(2021) arxiv preprint, arXiv:2110.06631
2. D Cannarsa, Surfaces in three-dimensional contact sub-Riemannian manifolds and controllability of nonlinear ODEs (2021), PhD Thesis, https://theses.hal.science/tel-04053226/

6.4 Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че дисертацията съдържа автентични резултати, получени от него или в сътрудничество с неговите съавтори. Използването на резултати от други учени е придружено със съответно цитиране.

6.5 Благодарности

Бих искала да изкажа най-искрените си благодарности на професор Михаил Кръстанов за неговата безценна помощ и подкрепа.

Библиография

[1] Aguilar, C., Local controllability of control-affine systems with quadractic drift and constant control-input vector fields, IEEE Conference Decision and Control, (2012), 1877–1882.

[2] Agrachev, A., Gamkrelidze, R. , The exponential representation of flows and the chronological calculus, Math. USSR Sb. **107** (1978) 467–532.

[3] Agrachev, A., Gamkrelidze, R., Local controllability and semigroups of diffeomorphisms. *Acta Applicandae Mathematicae*, **32** (1993), 1–57.

[4] Aubin, J.-P., Frankowska, H. , Olech Cz., Controllability of convex processes, *SIAM J. Control Optimization*, **24** (1986), 1192–1211.

[5] Bardi M., Falcone M. , An Approximation Scheme for the Minimum Time Function, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **28** (1990).

[6] Bacciotti, A., Stefani, G., Self-accessibility of a set with respect to a multivalued field. *JOTA*, **31** (1980), 535–552.

[7] Bianchini, R.-M., Stefani, G., Graded approximation and controllability along a trajectory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **28** (1990), 903–924.

[8] Bianchini, R.-M., Stefani, G., Controllability along a trajectory: A variational approach. *SIAM J. Control Optimization*, **31 (4)** (1993), 900–927.

[9] Bianchini, R.-M., Stefani, G., Time optimal problem and time optimal map *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino*, **48 (3)** (1990), 401–429.

[10] Brunovsky, P. Local controllability of odd systems, Math. Control Theory, Proc. Conf. Zakopane 1974, Banach Center Publications, Warsaw **1** (1976) 39–45.

[11] Cardaliaguet, P., Quincampoix, M., Saint Pierre, P., Minimal times for constrained nonlinear control problems without controllability, Appl. Math. Optim. **336** (1997) 21–42.

[12] Clarke,F.H., Quincampoix, M., Wolenski, P.R. Control of systems to sets and their interiors, JOTA **88** (1996), 3–23.

[13] Hermes, H., Controllability and the singular problem, SIAM J. Control and Optimization **2** (1965)

[14] Hermes, H., Lie algebras of vector fields and local approximation of attainable sets, SIAM J. Control and Optimization , Vol. 16, No. 5, (1978), 715–727

[15] H. Hermes, Nilpotent and High-Order Approximations of Vector Field Systems SIAM Review, Vol. 33, No. 2, (1991), 238–264

[16] Hirshorn R. , Strong controllability of nonlinear systems, SIAM J. Control Optim. 16, No. 2, (1989), 264–275

[17] Frankowska, H. Local controllability of control systems with feedback. *J. Opt. Theory Appl.*, **60**, (1989), 277–296.

[18] Jurdjevic, V. , Kupka, I., Polynomial Control Systems. *Mathematische Annalen*, **272** (1985), 361–368.

[19] M. Kawski, A Necessary Condition for Local Controllability, Differential geometry: the interface between pure and applied mathematics, Proc. Conf., San Antonio/Tex. 1986, Contemporary Mathematics **68** (1987) 143–155.

[20] Korobov, V., A geometrical criterion for local controllability of dynamic systems with restrictions on controls. *Differ. Equations*, **15** (1980), 1136–1142.

[21] Krastanov, M.I., Nikolova, M.N., A necessary condition for small-time local controllability *Automatica*, **15**, (2020).

[22] Krastanov, M.I., Nikolova, M.N., A sufficient condition for small-time controllability of a polynomial control system *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, **73** (2021), 1638-1649.

[23] Krastanov, M.I., Nikolova, M.N., On the small-time local controllability *Systems & Control Letters*, **177**, (2023)

[24] M. I. Krastanov, A necessary condition for small time local controllability, J. Dyn. Control Syst. **4** (3) (1998) 425–456.

[25] M. I. Krastanov, M. Quincampoix, Local small time controllability and attainability of a set for nonlinear control system, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations **6** (2001) 499–516.

[26] M. I. Krastanov, V. M. Veliov, On the controllability of switching linear systems, Automatica **41** (2005), 663–668.

[27] A. Krener, The high order maximal principle and its applications to singular extremals, SIAM J. Control Optim. **15** (1977), 256–293.

[28] H. Kunita, On the controllability of nonlinear systems with application to polynomial systems, Appl. Math. Optim. **5(2)** (1979), 89–99.

[29] Liverovskij, A. A. & Petrov, N. N., Normal local controllability. Differ. Equations, 24 (9), (1988), 996–1002.

[30] Samborskij, S. N., On the attainable set of linear control systems in Banach spaces, Kibernetika, **2**, (1982), 123–135.

[31] Stefani, G. . On the local controllability of a scalar input control system, in *Theory and Applications of Nonlinear Control Systems*, C.Birnes, A.Lindquist, eds., North-Holland, Amsterdam, (1986), 167–179.

[32] Stefani, G. . On the minimum time map, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **127**, (1981), 383–394.

[33] H. J. Sussman, A sufficient condition for local controllability, SIAM J. Control and Optimization **16** (1978), 790–802.

[34] H. J. Sussman, Lie brackets and local controllability: a sufficient condition for scalar-input systems, SIAM J. Control and Optimization **21** (1983), 686–713.

[35] H. J. Sussman, Lie brackets and real analyticity in control theory, Mathematical Control Theory Banach Venter Publications **14** (1985), 515–542.

[36] H. J. Sussman, A general theorem on local controllability, SIAM J. Control and Optimization **25** (1987), 158–193.

[37] Veliov, V. M. . On the controllability of control constrained linear systems, *Mathematica Balkanica, New Series* **2** (1988) , 147–155.

[38] V. M. Veliov, M. I. Krastanov, Controllability of piecewise linear systems, Systems & Control Letters **7** (1986), 335–341.