

Физически факултет
Софийски университет "Св. Климент Охридски"

Виктор Ивайлов Данчев

**Ограничения върху теории на гравитацията в силен режим чрез
анализ на компактни астрофизични обекти**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен
„ДОКТОР“

Професионално направление 4.1 Физически науки
Научна специалност: 01.03.01 Теоретична и математическа физика

Научен ръководител:
проф. д-р Стойчо С. Язаджиев

Научен консултант:
д-р Даниела Д. Донева,
Университет Тюбинген; ИЯИЯЕ БАН

СОФИЯ • 2023

Докторантът е зачислен в редовна докторантура към катедра Теоретична физика при Физически факултет на СУ “Св. Климент Охридски”. Изследванията по дисертацията са проведени във Физическия факултет на Софийски Университет.

Дисертационната работа е съставена от 144 страници разделени в 7 глави. Съдържа 27 фигури, а библиографията обхваща 157 заглавия.

Дисертационният труд е обсъден на заседание на катедрен съвет в катедра Теоретична физика на Физически факултет, СУ “Св. Климент Охридски”, проведено на 18.01.2023 г., и насочен за обсъждане от Факултетен съвет за защита пред научно жури в състав

проф. дфзн Радослав Христов Рашков (ФзФ, СУ)

чл. кор. проф. дфзн Емил Рафаелов Нисимов (ИЯИЯЕ БАН)

чл. кор. проф. дфзн Валентина Борисова Петкова (ИЯИЯЕ БАН)

проф. дфзн Светлана Йорданова Пачева (ИЯИЯЕ БАН)

проф. дфзн Владимир Кръстев Добрев (ИЯИЯЕ БАН)

Съдържание

1	Увод	2
2	Теории на гравитацията	3
2.1	Обща теория на относителността	4
2.2	Скаларно-тензорни теории на гравитацията	5
2.3	Гаус-Боне теории на гравитацията	6
3	Структура и свойства на компактни астрофизични обекти	7
3.1	Компактни обекти	7
3.2	Уравнение на състоянието	8
3.3	Структурни уравнения	9
3.3.1	Уравнения при статичен случай	10
3.3.2	Уравнения при случай на бавно въртене	11
3.3.3	Свойства на време-пространството извън компактни обекти - ISCO, орбитални и епициклични честоти	12
3.4	Универсални съотношения	14
3.5	Гравитационни вълни от бинарни системи	15
4	Числени методи	17
5	Бавновъртящи се топологични неутронни звезди и техните универсални съотношения	19
5.1	Структурни уравнения и методология	19
5.2	Резултати	23
5.3	Коментари	29
6	Универсални съотношения за скаларизирани неутронни звезди в точката на максимална маса за скаларно-тензорни теории	29
6.1	Структурни уравнения и методология	30
6.2	Резултати	32
6.3	Коментари	36
7	Ограничения върху скаларизация в теории на Гаус-Боне чрез наблюдения на бинарни пулсари	37
7.1	Структурни уравнения и методология	38
7.2	Резултати	41
7.3	Коментари	47

Актуалност на темата, цел и задачи на дисертационния труд

В рамките на дисертацията са разгледани три различни класове алтернативни теории на гравитацията, които са обещаващи кандидати за разширение на ОТО, тъй като спазват всички ограничения от наблюденията на космологичен и астрофизичен мащаб. Целта на дисертацията е изследване на компактни обекти в тези теории с цел тяхното ограничение в силен режим на гравитацията посредством различни налични наблюдения.

Разгледани са нов клас компактни обекти, наречени топологични неутронни звезди, в рамките на тензор-мулти-скаларни теории (ТМСТ) на гравитацията. Изследвани са за пръв път техните свойства при бавно въртене и е показано, че се подчиняват на две добре известни универсални съотношения (независещи от уравнението на състоянието), посредством които може да се различава не само теорията, но и топологичния заряд на тези обекти.

Изследвани са някои от важните наблюдателни характеристики в електромагнитния спектър: най-вътрешната стабилна орбита (ISCO), орбиталните и епицикличните честоти за различни маси и ъглови скорости. Дискутирани са възможни нови наблюдателни ефекти, породени от немонотонно поведение на куплиращата функция в теорията.

Разгледани са нов клас универсални съотношения при максималната маса на даден клон от решения в скаларно-тензорни теории (СТТ), които преди това са изследвани само за ОТО. Доказано е, че СТТ спазват този тип универсалност и е показано, че съотношенията имат различни параметри според параметрите на теорията, като за целта са използвани 53 УНС. Показано е как може да се наложи ограничение върху УНС или теорията според началните предположения, като се използват познати физически връзки между свойства на материята. Изследвана е универсалността при добавяне на небарионни УНС, което не е правено преди и в ОТО.

Поставени са силни ограничения върху скаларизацията в скаларни Гаус-Боне (сГБ) теории, използвайки измервания на промяната на орбиталния период за 3 двойки бяло джудже – неутронна звезда и 12 уравнения на състоянието посредством анализ на Бейс. Получените ограничения върху параметрите на теорията са транслирани към ограничения върху максималната маса и топологичен заряд на скаларизирани сГБ черни дупки.

Структура и обем на дисертацията

Глава 1 – Увод.

Глава 2 накратко представя Общата теория на относителността (ОТО) и трите алтернативни теории на гравитацията, които са изследвани в дисертационния труд. Извеждат се релевантните полски уравнения от съответните действия на тези теории.

В глава 3 се извеждат структурните уравнения за компактни астрофизички обекти в ОТО и се обобщава стратегията при извеждането на аналогичните уравнения за алтернативни теории на гравитацията. Представят се основните идеи зад разложение в ред по ъгловата скорост при решения с бавно въртене. Въвежда се понятието за уравнение на състояние и неговото използване при числени пресмятания на компактни обекти. Дефинират се важни свойства на време-пространството около компактни обекти като най-вътрешната стабилна орбита (ISCO), орбитални и епициклични честоти. Разглеждат се две универсални съотношения, които са изследвани по-нататък в дисертацията. Накрая е изложено обобщение на енергийните загуби от гравитационни вълни и последващата от тях деградация на орбитите при бинарни системи от компактни обекти.

В глава 4 са изложени основните числени методи, които авторът е използвал, за да получи различните оригинални резултати.

Глави 5, 6 и 7 са посветени на оригиналните резултати на автора.

В глава 5 са изложени резултатите за нов клас компактни обекти, наречени топологични неутронни звезди в тензор-мулти-скаларни теории (ТМСТ) на гравитацията. Започва с извеждането на релевантните структурни уравнения на статични и бавновъртящи се компактни обекти за този клас теории. След това продължава с представяне на резултатите при две куплиращи функции и няколко параметъра, които са разбити в две части. Първата част показва, че този нов клас неутронни звезди се подчинява на добре известни универсални съотношения, които позволяват да се различава не само теорията, но и топологичния заряд на скаларизираните обекти. Втората част представя резултатите за най-вътрешната стабилна орбита (ISCO), орбиталните и епицикличните честоти за този клас обекти, и се дискутират възможностите за тяхното различаване от обикновени неутронни звезди на базата на разлики в наблюдаемите характеристики на акреционни дискове около тях в рентгенови честоти. Главата завършва с коментари и заключения на база на изложените резултати.

В глава 6 са изложени резултатите за нов клас универсални съотношения при компактни обекти, които са получени от връзка между физически величини при максималната маса на даден клон решения. Валидността на тези отношения е потвърдена за клас скаларно-тензорни теории (СТТ) и е показано, че могат да бъдат използвани за ограничения върху параметрите на гравитационни теории или ограничения върху възможните уравнения на състоянието на база на различни физически закони. Главата завършва с коментари и заключения на база на изложените резултати.

В глава 7 са изложени резултатите относно ограничения на скаларни Гаус-Боне теории на гравитацията посредством директен анализ на Бейс върху двойки неутронна звезда – бяло джудже с много точно измерени скорости на деградация на орбитата. Главата започва с изложение на теорията и получаване на структурните уравнения за този клас теории при две различни куплиращи функции, след което се описва методологията за формиране на вероятностна функция за анализа, който се реализира посредством Монте Карло метод с верига на Марков (МСМС). Главата завършва с изложение на окончателните разпределения за параметрите на разглеждания клас теории, които се интерпретират като ограничения от наблюденията на двойните системи. Накрая, тези ограничения са прехвърлени към наблюдателни ограничения върху максималната маса и максималния скаларен заряд на черни дупки за една от теориите, която не изисква скаларизация индуцирана от въртене.

1 Увод

Присъщата нелинейност на гравитационните теории прави аналитичния прогрес в тази насока почти невъзможен. Има добре развити пертурбативни методи в режим на слабо поле, които позволяват да се работи много точно на мащабите на Слънчевата Система например, но подобни методи не са приложими при силни полета. Познати са много малко точни решения, които обикновено са вакуумни (без източници) или получени при идеализирани разпределения на енергия и маса. Подобни решения са полезни за обща интуиция и могат да бъдат приложими в някои определени ситуации, но реалистичните решения за структурата на време-пространството на мащаба на Вселената или в/около компактни обекти изискват почти напълно работа с числени пресмятания.

Компактните обекти са интересни за различни клонове на физиката, тъй като те са естествени лаборатории за различни ефекти при високи енергии. Решенията на такива обекти в Общата теория на относителността (ОТО) и алтернативни теории изисква работа с числени методи. Налягането във вътрешността на подобни обекти може да стигне, и дори да надвиши това в ядрата на атомите. Тъй като не съществуват експерименти, които да

постигнат подобни плътности, численото моделиране на този тип обекти е изключително важно и за прогреса във физиката на високите енергии, както и ядрената физика.

Измереното ускорително разширение на вселената в края на ХХ-ти век е основната експериментална мотивация за разглеждането на алтернативни теории на гравитацията спрямо ОТО. Макар в ОТО да може да се получи наблюдавания ефект, той изисква допълнителни екзотични типове материя и енергия (общо наречени тъмна енергия), които се характеризират с отрицателна плътност на енергията. Повечето алтернативни теории на гравитацията включват естествено подобни източници и механизми да се получи сходен тип плътност ефективно от допълнителни нелинейни ефекти. Освен това, теоретични опити да се обедини гравитацията с останалите взаимодействия в Природата показват че или квантовата теория на полето (КТП), или общата теория (а най-вероятно и двете) са непълни. При всички случаи, ОТО не може да бъде пренормирана като останалите теории, което е основна причина да се търсят самосъгласувани модификации на действието ѝ. Съществуват множество алтернативи на ОТО, но повечето не предсказват никакви измерими разлики при слаби полета (на мащаба на Слънчевата Система). Именно за това е важно изследването на гравитацията в силен режим. Различните теории водят до различна структура и свойства на компактни обекти като неутронни звезди, които се описват в силен режим. Масата, радиусът, инерчният момент и структурата на време-пространството извън такива обекти зависят от теорията, така че наблюдения на тези обекти и сравнение със симулации могат да ни отведат до потенциалния наследник на ОТО.

Оптичните сензори не са особено ефективни за измерване на тези свойства заради малките размери на компактните обекти и малкото им излъчване в тази част на електромагнитния спектър. Исторически (и все още до днес), най-точните наблюдения на неутронни звезди, и по-специфично класът пулсари, идват от радио или рентгенови наблюдения. Гравитационните вълни наскоро станаха важно средство за астрофизиката, но те могат да бъдат измерени само при крайните етапи на сблъсък между подобни компактни обекти. Подобни измервания вече помагат за ограничаването на възможните свойства на материята в компактни обекти и са от голямо значение. Все пак, имайки предвид честотата на подобни събития, в обозримото бъдеще рентгеновите и радио обсерваториите най-вероятно няма да отстъпят мястото си. Причината да са толкова полезни, е че повечето компактни обекти имат силни магнитни полета и се въртят с голяма скорост, което води до множество електромагнитни ефекти при падането на материя от акреционен диск. Спектърът на подобни дискове е директно свързан със свойствата на обекта, около който се намират. В случая на пулсарите - много прецизните пулсации, които се измерват, са причинени от въртенето им, което дава възможност за точно измерване на това как се забавят заради електромагнитно (и друго) излъчване. В случаите, когато са в двойна система, може да бъдат получени множество точни измервания на орбиталните параметри и характеристиките на двата обекта. При всички случаи, обаче, изследването на този тип обекти и по-доброто ни разбиране на гравитацията и другите взаимодействия е възможно само при общи усилия между теория, числени модели и наблюдения от всички тези източници. Така наречената "multi-messenger astronomy" (едновременни наблюдения от гравитационни и електромагнитни вълни, както и други частици като космично лъчение и неутрино) ще става все по-важна с подобряването на възможностите на различните сензори.

2 Теории на гравитацията

Първата математическа формулировка на теория на гравитацията се появява през 1687-ма година и остава на практика неоспорим закон за почти 200 години. Концепцията за гравитацията на Нютон е толкова дълбоко приета в съзнанията на учените от ХІХ-ти

век, че минават близо 50 години в търсене на несъществуваща планета между Слънцето и Меркурий [1], преди да се стигне до нейното разширение. В този случай, разликата между предсказаното от теорията на Нютон и наблюденията е само 38 дъгови секунди на век в движението на перихелия на Меркурий (по-късно измерено по-прецизно към 43 дъгови секунди на век).

Чак през 1915 Хилберт, Гросман и Айнщайн формулират общата теория на относителността (ОТО), десет години след като нютоновата механика е заменена от специалната теория на относителността. Тази нова теория не променя съществено начините за пресмятане на мащабите на Слънчевата Система, но променя концепцията за сила и разбиране за това какво е гравитацията. Макар ОТО да преминала всички наблюдателни проверки, повечето от тях са в сравнително слаби полета на мащаба на Слънчевата система. Съществуват много мотивации за модификации на ОТО, продиктувани най-вече от наблюдения на космологичен мащаб, както и опити да се квантува гравитацията.

Най-обещаващите разширения на ОТО се базират на допълнителни скаларни, векторни или тензорни полета, които допринасят към гравитационното взаимодействие като допълнителни източници, но и като някакво куплиране с метриката, което води до допълнителни нелинейни ефекти. В някои случаи, самото действие може да бъде по-сложно и да включва допълнителни членове. В по-екзотични сценарии, теорията е неметрична и има торзия в многообразието. При всички случаи, обаче, алтернативните теории на гравитацията трябва да описват всички измервания до момента поне толкова добре колкото ОТО. Това ги ограничава много силно в слабия режим, но както случаят с перихелия на Меркурий ни учи, можем да очакваме разликите да се проявят именно в силен режим.

2.1 Обща теория на относителността

Общата теория на относителността (ОТО) е геометрична теория, зададена от действието на Айнщайн-Хилберт. Гравитационната част в това действие е формирана от най-простия геометричен инвариант на многообразието, с което се описва време-пространството – скалара на Ричи. Всички източници на гравитацията, от друга страна, са генерирани от действията на съответните полета. Това задава пълното действие на теорията като

$$S_{\text{GR}} = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_{\text{m}}(g_{\mu\nu}, \Psi_{\text{m}}), \quad (1)$$

където R е скаларът на Ричи g е детерминантата на метричният тензор, описващ време-пространството, който има компоненти $g_{\mu\nu}$, G е нютоновата гравитационна константа, а S_{m} е действието на всички материални полета, които допринасят с енергия и импулс, сумарно отбелязани като Ψ_{m} . Вариацията на (1) спрямо метричният тензор води до полевите уравнения на теорията

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

където $T_{\mu\nu}$ е т.нар. тензор на енергията и импулса, дефиниран от функционалната производна

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{m}}}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (3)$$

Този тензор дефинира източниците на гравитация, но структурата на (2) носи значителна нелинейност и поражда нетривиална динамика дори без такива източници. Също толкова фундаментално е и уравнението за 4-дивергенцията на тензора на енергията и импулса

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (4)$$

което има смисъл на закон за движение на материята в гравитационното поле и следва от полевите уравнения и контрактираните уравнения на Бианки.

Полевите уравнения (2) могат да бъдат записани и по по-различен начин. Вземайки следата на двете страни на уравненията и дефинирайки $T_\mu^\mu = T$, могат да се доведат до вида

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (5)$$

който е по-удобен при намиране на структурни уравнения на компактни обекти.

За по-голямата част от дисертацията е работено в естествени единици $c = \hbar = 1$, освен където се подразбира различно от текста.

2.2 Скаларно-тензорни теории на гравитацията

В дисертацията разглеждаме два класа скаларно-тензорни теории на гравитацията, които се различават по броя скаларни полета и това къде те приемат своите стойности.

Първият клас са тензорно-мулти-скаларните теории (ТМСТ) на гравитацията, които са математически самосъгласувани и отговарят на всички експериментални ограничения [2, 3]. Те се характеризират с метрика $g_{\mu\nu}$ и N скаларни полета φ^a , които приемат стойности в N -мерен участък от Риманово многообразие \mathbb{E}^N с положително-дефинитна метрика $\gamma_{ab}(\varphi)$. Действието на този клас теории в отправна система на Айнщайн се задава от

$$S = \frac{1}{16\pi G_*} \int d^4 \sqrt{-g} [R - 2g^{\mu\nu} \gamma_{ab} \nabla_\mu \varphi^a \nabla_\nu \varphi^b - 4V(\varphi)] + S_m(A^2(\varphi) g_{\mu\nu}, \Psi_m), \quad (6)$$

където G_* е голата гравитационна константа, R и ∇_μ са скалара на Ричи и ковариантната производна спрямо метриката в отправна система на Айнщайн $g_{\mu\nu}$, а $V(\varphi) \geq 0$ е потенциал, който е функция на скаларните полета. Конформният множител $A^2(\varphi)$, метриката в пространството на стойности на полетата γ_{ab} и скаларният потенциал $V(\varphi)$ задават точната ТМСТ теория.

Вариацията на (6) дава полевите уравнения в отправна система на Айнщайн

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_* \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) + 2\gamma_{ab}(\varphi) \nabla_\mu \varphi^a \nabla_\nu \varphi^b + 2V(\varphi) g_{\mu\nu}, \quad (7)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi^a = -\gamma_{bc}^a(\varphi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi^b \nabla_\nu \varphi^c + \gamma^{ab}(\varphi) \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^b} - 4\pi G_* \gamma^{ab}(\varphi) \frac{\partial \ln A(\varphi)}{\partial \varphi^b} T, \quad (8)$$

където $T_{\mu\nu}$ е тензорът на енергията и импулса в система на Айнщайн, а $\gamma_{bc}^a(\varphi)$ са символите на Кристофел спрямо метриката γ_{ab} , следвайки означенията в [4].

Законът за 4-дивергенцията на тензора на енергията и импулса приема вида

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\partial \ln A(\varphi)}{\partial \varphi^a} T \nabla^\nu \varphi^a, \quad (9)$$

където се сумира по индекса $a = 1, 2, \dots, N$. Стандартно е всички пресмятания да се правят в система на Айнщайн, тъй като са по-лесни в нея, а чак окончателните резултати да се преобразуват до система на Йордан (физическа система). Връзката между двете системи е конформният множител, който задава $\tilde{g}_{\mu\nu} = A^2(\varphi) g_{\mu\nu}$, където величините във физическата система (на Йордан) бележим с тилде. Аналогично, за връзката между тензора на енергията и импулса в двете отправни системи имаме обратната зависимост $T_{\mu\nu} = A^2(\varphi) \tilde{T}_{\mu\nu}$. Налягането, плътността и 4-скоростта между двете отправни системи са свързани с трансформациите $\rho = A^4(\varphi) \tilde{\rho}$, $P = A^4(\varphi) \tilde{P}$ и $u_\mu = A^{-1}(\varphi) \tilde{u}_\mu$, които следват директно от дефиницията на тензора на енергията и импулса за перфектен флуид.

Вторият клас са класически скаларно-тензорни теории, зададени с действие в система на Айнщайн

$$S = \frac{1}{16\pi G_*} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi)) + S_m(A^2(\varphi)g_{\mu\nu}, \Psi_m), \quad (10)$$

което се явява подклас на (10) за едно поле φ , което приема стойности върху време-пространството $\varphi = \varphi(t, \vec{x})$. Този клас теории се определят само от функционалната зависимост на конформния множител $A^2(\varphi)$ и потенциала $V(\varphi)$.

След вариация на (10), полевите уравнения в система на Айнщайн са

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_* \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) + 2\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + \frac{1}{2} V(\varphi) g_{\mu\nu}. \quad (11)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = -4\pi G_* T \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi} + \frac{1}{4} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (12)$$

които отново имат аналогичен вид на (7) и (8). Използвайки равенствата на Бианки и полевите уравнения, за 4-дивергенцията на тензора на енергията и импулса в този клас теории се получава аналогичен закон на (9), но без сумирането

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi} T \nabla^\nu \varphi. \quad (13)$$

2.3 Гаус-Боне теории на гравитацията

Един от класовете алтернативни теории на гравитацията, където е открита скаларизация на компактни обекти преди няколко години [5] са теориите на Гаус-Боне. Те са подклас квадратични теории, дефинирани с добавката на всички възможни геометрични инварианти от втора степен към класическото действие на Айнщайн-Хилберт [6]. Мотивацията зад този клас теории са опитите за квантуване на гравитацията.

В дисертацията работим с клас скаларни Гаус-Боне (сГБ) теории с действието

$$S = \frac{1}{16\pi G_*} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2\nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi + \lambda^2 f(\varphi) \mathcal{R}_{GB}^2] + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m), \quad (14)$$

където използваме стандартните означения за скалар на Ричи и ковариантна производна. В действието влиза и инвариантът на Гаус-Боне, дефиниран като $\mathcal{R}_{GB}^2 = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ спрямо тензорите на Ричи и Риман за време-пространството. Получените поледи уравнения от действието (14) са

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_* \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) - \left(\Gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Gamma g_{\mu\nu} \right) + 2\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \quad (15)$$

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \varphi = -\frac{\lambda^2}{4} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \mathcal{R}_{GB}^2, \quad (16)$$

където $T_{\mu\nu}$ е тензорът на енергията и импулса за материята, $\Gamma_{\mu\nu}$ се дефинира посредством

$$\Gamma_{\mu\nu} = -R(\nabla_\mu \Psi_\nu + \nabla_\nu \Psi_\mu) - 4\nabla^\alpha \Psi_\alpha (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) + 4R_{\mu\alpha} \nabla^\alpha \Psi_\nu + 4R_{\nu\alpha} \nabla^\alpha \Psi_\mu - 4g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Psi_\beta + 4R_{\mu\alpha\nu}^\beta \nabla^\alpha \Psi_\beta, \quad (17)$$

и където са използвани помощните функции $\Gamma = \Gamma_\mu^\mu$ и

$$\Psi_\mu = \lambda^2 \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \nabla_\mu \varphi. \quad (18)$$

От полевите уравнения и уравненията на Бианки се получава аналогичен закон за 4-дивергенцията на тензора на енергията и импулса като в ОТО

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (19)$$

3 Структура и свойства на компактни астрофизични обекти

3.1 Компактни обекти

Компактните обекти са последния етап от живота на всички звезди от главната последователност след като изчерпят ядреното си гориво. В зависимост от началната маса на звездата, тя ще приключи живота си като един от три познати обекта (или техни по-екзотични алтернативи): бяло джудже, неутронна звезда или черна дупка. Както името подсказва, тези обекти са значително по-компактни от звездите от главната последователност или други астрофизични обекти, което означава, че имат много по-малък радиус за същата маса. Този тип обекти поддържат вътрешното си налягане срещу гравитацията не от излъчване или някакъв тип ядрени реакции, а от налягане на изроден газ [7]. Белите джуджета, например, противодействат на гравитацията си чрез налягането на изроден газ от електрони, докато неутронните звезди имат сходен механизъм, но налягането е доминирано от неутрони. Това е и причината неутронните звезди да са толкова по-компактни от белите джуджета, тъй като максималното налягане, което поддържа изроден газ е пропорционално на масата на частиците, от които е съставен. Очаква се, че съществуват и други екзотични типове материя във вътрешността на неутронните звезди, но след определена максимална маса, дори тяхното налягане не може да спре гравитационния колапс, при което се образува черна дупка.

Скалата, по която можем да съдим за това колко силно е гравитационното поле за даден обект, се характеризира с класическата втора космическа скорост на повърхността му спрямо скоростта на светлината посредством

$$\epsilon = \left(\frac{v_e}{c}\right)^2 = \frac{2MG}{c^2 R}, \quad (20)$$

където M и R са масата и радиуса на обекта, а c е скоростта на светлината. Параметърът (20) се използва като характеристична безразмерна сила на гравитацията за различни пертурбативни теории в т.нар. пост-Нютоново разложение.

Обикновени обекти като планети и звезди от главната последователност се характеризират със стойност на параметъра ϵ в порядъка 10^{-9} до 10^{-5} на повърхността си. За бели джуджета, $R \cong 5000$ km и $M \cong 1 - 1.4 M_{\odot}$, което води до $\epsilon \cong 4 \times 10^{-4}$. Типичните радиус и маса за неутронна звезда са $R \cong 10 - 15$ km и $M \cong 1.4 - 2.2 M_{\odot}$, от където за тях ϵ е по порядък 0.14 до 0.33 и вече не може да бъде пренебрегнат. От друга страна, черните дупки нямат физическа повърхност като останалите обекти в списъка, те по дефиниция изпълняват условието $\epsilon = 1$ от (20) (или аналогично условие при въртене), което задава геометричната повърхност на техния хоризонт за статични черни дупки (радиус на Шварцшилд) като

$$R_s = \frac{2MG}{c^2}. \quad (21)$$

Този радиус е геометрична повърхност, отвъд която информация не може да излезе. В по-технически термини: всяка време-подобна или нулеве геодезична крива, която започва вътре в хоризонта, винаги остава в него. Когато говорим за размери на черни дупки, имаме предвид техния хоризонт, или при въртяща се черна дупка, тяхната ергосфера. Масата на черните дупки може да варира от няколко до десетки слънчеви маси за остатъци от свръхнови, или до милиони слънчеви маси за черни дупки в центровете на спирални галактики.

3.2 Уравнение на състоянието

Поради огромната сила на гравитацията им, материята в компактни обекти може да достигне невероятни плътности, дори надвишавайки плътността в атомните ядра. Ядрената плътност е по порядък $2.5 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, което е и релевантният мащаб за описание на материята в неутронните звезди. На този мащаб, описанието на класическа материя не е приложимо и доминират квантови ефекти. На практика, тези ефекти се осредняват от микроскопичната теория и се получават зависимости между ключови макроскопични свойства на материята. В практически ситуации се използва тензор на енергията и импулса за перфектен флуид, който се характеризира с локална изотропност на свойствата си. Такава материя се описва ефективно само от своето налягане P и плътност ρ . Може да се покаже, че тензорът на енергията и импулса за такава материя добива вида

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (22)$$

където ρ е в естествени единици ($c = 1$).

Функцията, която задава връзката между тези величини $P = P(\rho)$ се нарича уравнение на състоянието (УНС). Тази връзка се получава от микроскопичната теория на различните типове частици, които участват в съответната материя и е нужна, за да се решат структурните уравнения на компактният обект. Описанието на материята над ядрената плътност е трудна задача, тъй като няма възможност за директно измерване на свойствата на подобна материя на Земята. Дори ускорители на частици, които използват тежки ядра, не успяват да пресъздадат условията, тъй като в неутронните звезди има много по-голяма асиметрия между типовете нуклони. Това означава, че при решаването на структурните уравнения за компактни обекти, на практика се разчита на теоретични модели за ядрена материя с висока плътност. Това поражда нуждата да се търсят универсалните съотношения, изследвани в дисертационния труд. Подобни зависимости, получени от физическите величини, до голяма степен не зависят от уравнението на състоянието и позволяват да се ограничи гравитационната теория независимо от него. По сходен начин, при предположение за теорията на гравитацията, числените модели на компактни обекти и наблюденията им допринасят за развитието на теорията на ядрените взаимодействия.

Уравненията на състоянието се получават чрез методи на класическия и квантовата статистическа физика, използвайки разложения спрямо ефективни ядрени взаимодействия на каноничен ансамбъл. Повечето модели използват само бариони при по-ниски плътности от ядрената, тъй като свойствата им са добре известни за тези плътности. При надвишаване на ядрената плътност, в повечето случаи се включват различни небарионни примеси на база на очаквани фазови преходи. Освен включените полета, може да има и различни нетривиални фази като цветен свъхпроводник, свръхфлуид и вихрови квазичастици. Стандартно е подобни модели да се параметризират като прост политроп, чиито параметри да бъдат фитирани спрямо получените числени данни за УНС на материята. На практика всички реалистични уравнения на състоянието може да се приближат с до няколко процента точност [8] от мулти-политроп съставен от N сегмента

$$P(\rho) = K_i \rho^{\gamma_i}, \quad (23)$$

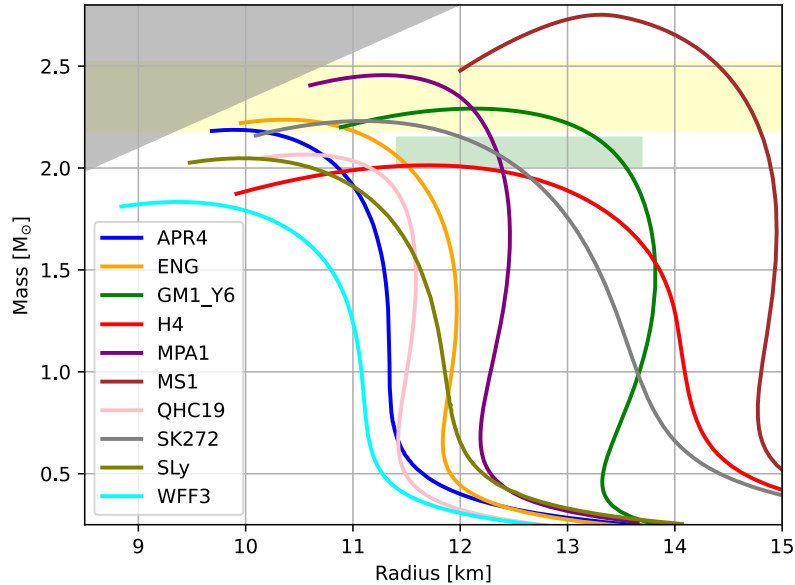
за $i = 1, 2, \dots, N$. Всички останали свойства на подобен политроп могат да се получат от законите на термодинамиката, които репараметризирани в термини на плътността на броя на частиците имат вид

$$P = K_i n_0 m_b \left(\frac{n}{n_0} \right)^{\gamma_i} \quad (24)$$

$$\rho = m_b n + \frac{P}{\gamma_i - 1}, \quad (25)$$

където n_0 е референтна плътност на частиците, а m_b е референтна барионна маса. Преходите между различните фази могат да се получат като стандартни конструкции на Максвел, което позволява да се опишат много сложни уравнения на състоянието без аналитичен вид, с много малка грешка, свеждайки параметрите им до сравнително малко на брой K_i и γ_i ($2N$ според броя на регионите).

Разликата между физическите свойства на обектите според уравнението на състоянието може да се види на Фиг. 1, която показва връзката между маса и радиус на статични неутронни звезди в ОТО за 10 различни уравнения на състоянието, които са сред използваните в дисертацията.



Фигура 1: Сравнение на връзката между маса и радиус на неутронните звезди в ОТО за 10 различни УНС, използвани в дисертацията. Сивата зона в горния десен ъгъл показва границата, където се нарушава причинност на теорията, жълтата и зелената зона съответно показват измерената маса и ограничения върху радиуса за двете най-масивни неутронни звезди към днешна дата PSR J0740+6620 и PSR J0952-0607 респективно.

Както се вижда, ако масата и радиусът могат да бъдат измерени точно дори само за няколко неутронни звезди, това би дало много добра възможност за ограничения върху УНС, но на практика измерване на радиус е много трудно заради малките размери, което ни принуждава да търсим други наблюдателни методи и начини да се справим с тази неопределеност. В дисертацията са използвани както табулирани уравнения на състоянието, така и политропни приближения на такива. Във всички оригинални резултати са използвани множество уравнения на състоянието, за да се изследва зависимостта от този неизвестен параметър и където е възможно, да се доведат резултатите до независими от УНС.

3.3 Структурни уравнения

Астрофизичните обекти имат симетрии, които намаляват сложността на полевите уравнения (5) и техните обобщения за алтернативни теории. За общо време-пространство съществуват 10 независими компонента на метриката, но на практика те могат да се изразят от по-малко на брой функции от симетриите. Записаните с по-малко на брой функции поледи

уравнения се наричат размерно редуцирани полеви уравнения и улесняват задачата. Тези уравнения зависят от самата теория, но стратегията за тяхното намиране е сходна за всички метрични теории. В дисертацията са намрени структурните уравнения за 3-те алтернативни теории на гравитацията в респективните глави, отнасящи се към резултатите за тях.

3.3.1 Уравнения при статичен случай

Като се имат предвид всички инварианти за статично време-пространство със сферична симетрия, метриката на такова се задава с линейния елемент

$$dS^2 = -e^{2\Gamma} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (26)$$

където $\Gamma(r)$ и $\Lambda(r)$ са две функции, които зависят само от радиалната координата r . Имайки предвид вида на тензора на енергията и импулса за перфектен флуид (22), може да се покаже, че и двете страни на (5) са диагонални и от тях остават само две независими уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r(1 - e^{-2\Lambda})) = 8\pi G\rho \quad (27)$$

$$\frac{2}{r} e^{-2\Lambda} \frac{d\Gamma}{dr} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) = 8\pi GP. \quad (28)$$

Може да се дефинира допълнителната функция $m(r)$ с равенството

$$e^{-2\Lambda} \equiv 1 - \frac{2Gm(r)}{r}. \quad (29)$$

Тази функция се получава естествено при интегриране на (27) с дефиницията

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \quad (30)$$

и има интерпретация на масова функция, която дава масата в сфера на радиус r от центъра на обекта. Тази интерпретация важи за ОТО, където масовата функция достига константа извън обекта и неговата маса може да се намери от повърхностната стойност

$$M = \frac{R_s}{2G} (1 - e^{-2\Lambda(R_s)}), \quad (31)$$

където R_s е радиусът на повърхността на обекта, дефиниран от $P(R_s) \equiv 0$.

За алтернативни теории на гравитацията, функцията (30) все още може да се използва за дефиниция на масата на обекта, но тя има смисъл в пространствената асимптотика на време-пространството, така че връзката с масата може да се запише като

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (32)$$

Получава се едно допълнително уравнение от 4-дивергенцията на тензора на енергията и импулса (4), което задава условие за хидростатично равновесие на флуида в гравитационното поле

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho) \frac{d\Gamma}{dr}. \quad (33)$$

Използвайки (33) и дефиницията (29), уравненията (27) и (28) могат да се презапишат в по-познатата форма за ОТО

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G(P + \rho)(m + 4\pi r^3 P)}{r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)} \quad (34)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (35)$$

В този си вид (34) и (35) са познати като уравнения на Толман, Опенхаймер и Волков (ТОВ) [9]. Тъй като съдържат три неизвестни функции $P(r)$, $\rho(r)$ и $m(r)$, а самите уравнения са само две, трябва допълнителна информация за тяхното интегриране. Допълнителната връзка е именно уравнението на състоянието (УНС), което позволява да се изрази алгебричната връзка $P = P(\rho)$ от микроскопични принципи.

При алтернативни теории на гравитацията, типично се работи директно в термини на Γ и Λ , тъй като помощната функция $m(r)$ няма директна интерпретация освен в асимптотиката. Получаването на структурните уравнения (размерно редуцираните уравнения) за други теории е аналогично. Използва се анзац за метриката (26), който води до 2 независими уравнения от полевите уравнения ((11),(7) или (15) в нашия случай). Когато имаме N допълнителни полета, както във всички теории включени в дисертацията, техните собствени полета уравнения добавят съответния брой N диференциални уравнения към структурните. Последно, 4-дивергенцията на тензора на енергията и импулса води до още едно независимо уравнение. В крайна сметка се получават $3 + N$ независими уравнения за $4 + N$ функции: $\Lambda(r)$, $\Gamma(r)$, $P(r)$, $\rho(r)$ и допълнителните N на брой полета. Както и при ОТО, решението на системата изисква още една връзка, която се задава от уравнението на състоянието (УНС). Спецификата на всяка от разгледаните теории се третира в съответната глава с резултатите.

3.3.2 Уравнения при случай на бавно въртене

Компактните астрофизични обекти се въртят с много високи ъглови скорости спрямо звездите от главната последователност и планетите. Този факт се дължи на запазването на момента на импулса при колапса, което води до голямо увеличение на ъгловата скорост, тъй като инерционния момент на обекта типично намалява по порядък 10^{10} до 10^{14} пъти по време на този колапс. Дори началната звезда да се е въртяла много бавно, компактният обект, който тя формира, ще се върти с огромна скорост. След формирането на тези обекти, обаче, те се забавят основно електромагнитно [10, 11], така че крайните честоти на въртене на повечето наблюдавани компактни обекти са в диапазона 10-300 Hz. Най-бързо въртящата се неутронна звезда известна днес е пулсарът PSR J1748–2446ad, който се върти с честота 716 Hz [12].

Все пак, тези ъглови скорости не са толкова високи на фона на характеристичната ъглова скорост, която се задава от размерните параметри на компактните обекти посредством

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{MG}{R_S^3}}, \quad (36)$$

където M и R_S са масата и радиуса на бавновъртящата се (или статична) конфигурация. Уравнение (36) се използва като мащаб за това при какви ъглови скорости ускорението от въртене става съизмеримо с това от гравитацията. За типични неутронни звезди "бързо въртене" е по порядък 1100-2300 Hz, което показва, че дори PSR J1748–2446ad се върти сравнително бавно спрямо този мащаб, тъй като за него $\Omega/\Omega_0 \cong 0.3 - 0.6$ в зависимост от точното уравнение на състоянието. За повечето неутронни звезди това отношение е

0.1-0.3, което ни позволява да използваме разложение по ъгловата скорост. Съществуват методи за непertурбативно числено решение с множество итерации на корекции, като най-известният от тях е този на Коматсу-Еригучи и Хачису (КЕХ метод) [13].

Ние ще работим в пертурбативно приближение, като следваме стандартната процедура на Хартъл, формулирана през 1967–1973 [14, 15, 16]. Тъй като всички обекти, които изследваме числено, са в режим на бавно въртене, използваме само първия член от разложението. Съответно, метриката добива вид сходен на (26)

$$dS^2 = -e^{2\Gamma} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - 2r^2\omega \sin^2\theta dt d\varphi + O(\Omega^2), \quad (37)$$

където до първа степен на ъгловата скорост, Γ , Λ и ω са функции само на радиалната координата r . С $O(\Omega^2)$ бележим отношението $(\Omega/\Omega_0)^2$, което за повечето неутронни звезди е по порядък 1–5 % корекция спрямо поправката от първи ред. Имайки предвид грешките в измерванията на повечето други физически характеристики на неутронните звезди, това приближение не води до обозримо нарушаване на крайната точност.

След заместване на метриката (37) в полевите уравнения (5) и тензора на енергията и импулса (22), единственият компонент с нетривиално равенство е $R_{03} = R_{30}$ за който имаме

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 e^{-\Gamma-\Lambda} \frac{d\bar{\omega}}{dr} \right) + \frac{4}{r} \frac{d}{dr} (e^{-\Gamma-\Lambda}) \bar{\omega} = 0, \quad (38)$$

където сме дефинирали $\bar{\omega} = \Omega - \omega$, а Ω е ъгловата скорост на повърхността на компактният обект. Решението за ъгловата скорост извън обекта се задава от зашиване с вакуумното решение на аксиално-симетрична метрика и има вида

$$\bar{\omega} = \Omega - \frac{2J}{r^3}, \quad (39)$$

където J е момента на импулса на компактният обект. Уравнение (39) ни позволява да намерим инерчния момент на компактният обект, който се явява константа до първа степен по Ω като $I = J/\Omega$. Корекциите от по-висок порядък имат смисъл на деформация заради въртенето и променят инерчния момент, но те са от степен $O(\Omega^3)$ и не допринасят за повече от 2 % промяна на величината за почти всички познати неутронни звезди.

Процедурата може да се обобщи отново за алтернативни теории на гравитацията, което е направено за ТМСТ теорията, разгледана в Глава 5 на дисертацията. Полученото уравнение има вида на (38), но с допълнителни нелинейни членове, които са свързани със скаларните полета. При пресмятане на по-високи степени по процедурата на Хартъл за алтернативни теории на гравитацията [14, 15, 16] е важно да се отчетат също радиални и ъглови пертурбации и в допълнителните полета.

3.3.3 Свойства на време-пространството извън компактни обекти - ISCO, орбитални и епициклични честоти

Имайки предвид малките им размери, повечето физически характеристики на компактни обекти не могат да бъдат измерени директно. Едни от най-богатите източници на информация за тях са свързани с рентгеновото им излъчване, породено от материята, която обикаля около тях с огромни скорости в близост до повърхността. Наблюдения от обсерватории като NICER, LOFT и SKA [17, 18, 19] ни дават важна информация за свойствата на компактните обекти, тъй като те често имат акреционни дискове. Почти всички важни рентгенови характеристики на подобни обекти са свързани с най-вътрешната стабилна кръгова орбита (ISCO), след която акретиращата материя не може да остане в орбита и пада към обекта. Освен нея, повечето модели включват характеристичните

честоти на осцилации за частици по кръгови орбити при малки пертурбации – това са т.нар. епициклични честоти. Макар все още да има спорове относно точните механизми за квази-периодични осцилации ([20] дава пълно ревю), всички теории включват тези основни величини на обектите като водещи за определянето на честотите такива осцилации в електромагнитния спектър.

За обща аксиално-симетрична метрика $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta)$, линейният елемент има вида

$$dS^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2. \quad (40)$$

ISCO и епицикличните честоти могат да бъдат намерени като се изследва движението на масивни частици и техните орбитални свойства в този общ вид на време-пространството. Лесно се вижда, че има два интеграла на движението, генерирани от време-подобен и аксиален килингов вектори $E = -u_t$ и $L = u_\varphi$. Повдигайки индексите с обратната метрика, получаваме контравариантната 4-скорост на масивна частица във време-пространството като

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{Eg_{\varphi\varphi} + Lg_{t\varphi}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}, \quad (41)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{Eg_{t\varphi} + Lg_{tt}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}. \quad (42)$$

Изискването за нормировка $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$, може да се презапише във вида

$$g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + E^2U(r, \theta) = -1, \quad (43)$$

където сме дефинирали потенциала

$$U(r, \theta) = \frac{g_{\varphi\varphi} + 2lg_{t\varphi} + l^2g_{tt}}{g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}, \quad (44)$$

спрямо специфичния момент на импулса $l \equiv L/E$. В екваториалната равнина ($\theta = \pi/2$) тази задача се свежда до едномерна $\dot{r}^2 = V(r)$ с ефективен потенциал

$$V(r) = \frac{1}{g_{rr}} \left[-1 - E^2U \left(r, \theta = \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (45)$$

За дадени E и L , стабилната кръгова орбита на някакъв радиус r_0 се получава от условието $V(r_0) = V'(r_0) = 0$ и $V''(r_0) > 0$, което дефинира ISCO радиуса от условието за маргинална стабилност $V''(r_0) = 0$. Орбиталната ъглова скорост на масивна частица в геометрията се намира от уравненията за геодезиците във форма на Лагранж-Ойлер

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (46)$$

Радиалната компонента на тези уравнения ($\mu = 1$) задава

$$\partial_r g_{tt} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2\partial_r g_{t\varphi} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + \partial_r g_{\varphi\varphi} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (47)$$

от което се получава квадратно алгебрично уравнение за ъгловата скорост на орбитата $\Omega_p = d\varphi/dt = u^\varphi/u^t$. Двете решения за проградно и ретроградно движение спрямо въртенето на звездата са съответно

$$\Omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-\partial_r g_{t\varphi} \pm \sqrt{(\partial_r g_{t\varphi})^2 - \partial_r g_{tt} \partial_r g_{\varphi\varphi}}}{\partial_r g_{\varphi\varphi}}. \quad (48)$$

В сметките по-долу (и в дисертацията) работим само с проградното движение, тъй като стабилността на ретроградните частици винаги се губи по-далече от обекта.

За частица на стабилна кръгова орбита, малки радиални или ъглови пертурбации водят до периодични осцилации около минимума на потенциала респективно спрямо r или θ . Тези честоти се наричат радиални и вертикални епициклични честоти и могат да бъдат намерени от разглеждането на време-зависими пертурбации във вида

$$r(t) = r_0 + \delta r(t), \quad \theta(t) = \frac{\pi}{2} + \delta\theta(t). \quad (49)$$

Замествайки (49) в уравненията на движение (43) и приемайки вид на пертурбациите $\delta r \propto e^{i\omega_r t}$, $\delta\theta \propto e^{i\omega_\theta t}$, получаваме

$$\omega_r^2 = \frac{(g_{tt} + \Omega_p g_{t\varphi})^2}{2g_{rr}} \partial_r^2 U \left(r_0, \frac{\pi}{2} \right), \quad (50)$$

$$\omega_\theta^2 = \frac{(g_{tt} + \Omega_p g_{t\varphi})^2}{2g_{\theta\theta}} \partial_\theta^2 U \left(r_0, \frac{\pi}{2} \right), \quad (51)$$

за радиалните и вертикалните епициклични честоти ($\omega_i = 2\pi\nu_i$). Имайки предвид каква е интерпретацията на тези честоти и пропорционалността между ω_r и $\partial_r^2 U(r_0, \pi/2)$, радиалната епициклична честота е равна на 0 върху ISCO, реална за $r > r_{\text{ISCO}}$ и имагинерна при $r < r_{\text{ISCO}}$. Освен това, вертикалната епициклична честота е равна на орбиталната честота $\omega_\theta = \Omega_p$ за статичния случай ($\Omega = 0$).

Дефиницията на ISCO, както и уравненията (48), (50) и (51) не правят предположение за гравитационната теория, стига тя да е метрична. Валидни са и за алтернативни теории на гравитацията, стига да няма допълнително куплиране между материята и полетата около обекта (т.е. геодезичните уравнения не са променени спрямо ОТО). Единствената разлика, която трябва да се отчете при теории с допълнителни полета е, че всички равенства ще са в сила за метриката във физическата отправна система на Йордан $\check{g}_{\mu\nu}$. Това води до качествени ефекти при структурата на акреционни дискове, тъй като орбиталната ъглова скорост (48) може да стане имагинерна (т.е. няма стабилни кръгови орбити) в региони извън звездата, които са отвъд радиуса на ISCO. Този ефект и последиците от него са коментирани в дисертацията качествено.

3.4 Универсални съотношения

Една от пречките при изучаването на алтернативни теории на гравитацията, чрез компактни обекти като неутронни звезди, е неопределеността в уравнението на състоянието (УНС), което има ключово значение за вътрешната структура на тези обекти. Както беше коментирано в 3.2, УНС е експериментално добре ограничено за плътности по-малки от тази на атомните ядра. Централните региони на неутронните звезди, обаче, имат по-голяма плътност от ядрената, където нямаме експерименти.

Фиг. 1 показва, че ключови характеристики на компактните обекти като връзката между тяхната маса и радиус са много силно повлияни от УНС. Както е показано в резултатите на дисертационния труд, сходни ефекти могат да се очакват при алтернативни теории на гравитацията за едно и също УНС, което прави различаването между двете много трудно при наблюдения. Едно решение на този проблем е да се използват универсални съотношения между различни свойства на неутронните звезди. Под "универсални" се има предвид, че дадени връзки между величини са до голяма степен независими от уравнението на състоянието и могат да характеризират гравитационната теория независимо от точните свойства на материята вътре в обектите. В дисертацията следваме две такива съотношения, които са доказани за ОТО [21, 22], както и за някои алтернативни теории [23, 24, 25]. Освен че универсалността е присъща за много теории, още по-интересно

е, че самите зависимости могат да са различни от една теория към друга, или дори за различни параметри на един клас от теории, което може да позволи различаването им въпреки неопределеността от УНС. Част от оригиналната работа на автора е доказването на тези съотношения за топологични неутронни звезди при различни топологични заряди и параметри на теорията.

Отношенията, които използваме свързват инерчен момент, маса и радиус. Първото отношение е полиномен фит от 4-та степен без втори и трети член, който свързва нормализирания инерчен момент $\tilde{I} = I/MR^2$ като функция на компактността M/R [21, 22]

$$\tilde{I}_{\text{fit}} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \frac{M}{R} + \tilde{a}_2 \left(\frac{M}{R} \right)^4. \quad (52)$$

Второто отношение свързва алтернативна нормировка на инерчния момент, а именно $\bar{I} = I/M^3$ с фит за обратната компактност [22]

$$\bar{I}_{\text{fit}} = \bar{a}_1 \left(\frac{M}{R} \right)^{-1} + \bar{a}_2 \left(\frac{M}{R} \right)^{-2} + \bar{a}_3 \left(\frac{M}{R} \right)^{-3} + \bar{a}_4 \left(\frac{M}{R} \right)^{-4}. \quad (53)$$

И в двата случая съотношенията са безразмерни, тъй като в естествени единици M и R имат еднаква размерност. Коефициентите \tilde{a}_i и \bar{a}_i в уравненията (52) и (53), до много голяма точност не зависят от УНС (типично от порядъка на няколко % както ще видим за ГМСТ).

Освен тези, в дисертацията са изследвани още две универсални съотношения, които свързват различни величини на обектите при максималната възможна маса за дадена теория и УНС. Този нов клас универсални съотношения са предложени и доказани за ОТО в [26]. Съществуват и други универсални съотношения за различните теории на гравитацията, които свързват параметри от по-висок ред за бързовъртящи се компактни обекти, като например т.нар. I-love-Q отношения [27].

3.5 Гравитационни вълни от бинарни системи

Едно от най-интересните нови предсказания на Общата теория на относителността (ОТО) спрямо нютоновата гравитация, е присъствието на гравитационни вълни. Тези вълни се излъчват от системи с две и повече тела и излъчват част от гравитационната енергия, което кара орбитите на тези системи да деградират с времето. Енергията на гравитационните вълни е малка в сравнение с масата на компактните обекти, така че те се третират пертурбативно в т.нар. пост-Нютоново развитие. Отличен източник за тази задача е книгата [28].

За разлика от електромагнитните вълни, където водещият член е диполен, в гравитацията диполният момент е еквивалентно 0 при липсата на отрицателна енергия. Централната формула зад гравитационните вълни в ОТО е т.нар. квадруполна формула, която описва пертурбацията към метриката, породена от гравитационни вълни до водещ пост-Нютонов порядък в т.нар. ТТ калибровка (транзверзална и без следа на тензорите)

$$h_{\text{TT}}^{jk} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{\mathcal{I}}_{\text{TT}}^{jk}(\tau) + O\left(\frac{v_c}{c}\right)^2, \quad (54)$$

където τ е забавено време, което отчита времето за пътуване на вълните от източника до детектора $\tau = t - r/c$. Квадруполният момент в ТТ калибровка се получава от интеграла

$$\mathcal{I}_{\text{TT}}^{jk} = \int_{\mathcal{M}} \rho(\tau, \vec{x}') \left(x'^j x'^k - \frac{1}{3} \delta^{jk} r'^2 \right) d^3 x' + O\left(\frac{v_c}{c}\right)^2, \quad (55)$$

където, v_c е характеристикната скорост на източниците, по която се прави развитието, а r е разстоянието до тях. Интегрирането на (55) се случва върху 3-измерна хиперповърхнина \mathcal{M} , която се характеризира с константно време τ и е заградена пространствено от характеристикен радиус, след който плътността ρ в интеграла е ефективно равна на нула. След като се отчете ефективната енергия и импулс на тези вълни, може да се покаже, че дадена гравитационна система излъчва с мощност, която до водещ член има вида

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \ddot{I}_{\text{TT}}^{jk} \ddot{I}_{\text{TT}}^{jk} + O\left(\frac{v_c}{c}\right)^7. \quad (56)$$

На практика самият квадруполен тензор не се смята директно, а за почти всички приложения се използват точкови маси, тъй като индивидуалните деформации на обектите са незначителни, освен при финалната фаза на сблъсък. Средната излъчена енергия за една орбита при система от две тела, където се отчита само орбиталното движение (без индивидуални деформации) се получава от [29]

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32 G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (57)$$

където m_1 и m_2 са масите на двата обекта e е ексцентрицитета на относителната им орбита, a е голямата полуос, а G и c са респективно гравитационната константа и скоростта на светлината.

Тази енергия не може да бъде измерена директно, но тя води до намаляване на голямата полуос на орбитата и съответно намаляване на орбиталния период. Много от алтернативните теории на гравитацията предсказват допълнителни източници, като например ненулев диполен момент, който води до много по-големи загуби. Именно наблюденията на еволюцията на орбиталния период водят до някои от първите и най-стриктни ограничения на алтернативни теории [30, 31, 32].

В Глава 8 от дисертацията е използвана именно измерената промяна на орбиталния период \dot{P}_b на двойни системи, която е сравнена с предсказаната такава според симулацията за различни параметри на теорията. Обръщането на (57) към уравнение за производната на орбиталния период [29], дава промяна заради квадруполно излъчване

$$\dot{P}_b^{\text{quad}} = -\frac{192\pi G^{5/3}}{5c^5} f(e) \left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^{5/3} \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}}, \quad (58)$$

където означенията са променени към маса на пулсара и партньора m_p и m_c респективно, и е дефинирана допълнителната функция на ексцентрицитета

$$f(e) \equiv \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) (1 - e^2)^{-7/2} \quad (59)$$

за по-прости означения.

Може да се получат еквивалентните формули за квадруполно, както и диполно излъчване (ако има такова) при алтернативни теории на гравитацията Следвайки [2], за скаларно-тензорните теории (СТТ) се получава диполно излъчване

$$\dot{P}_b^{\text{dipole}} = -\frac{2\pi G_*}{c^3} g(e) \left(\frac{2\pi}{P_b}\right) \frac{m_p m_c}{m_p + m_c} (\alpha_A - \alpha_B)^2, \quad (60)$$

където всички величини имат същия смисъл като в (58), с добавката на скаларното куплиране на неутронната звезда и партньора α_A и α_B и втора помощна функция на ексцентрицитета

$$g(e) \equiv \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) (1 - e^2)^{-5/2}. \quad (61)$$

Скаларното куплиране на обект с маса m_A се дефинира от производната

$$\alpha_A \equiv \frac{\partial \ln m_A}{\partial \varphi_\infty}, \quad (62)$$

където барионната маса на обекта се държи константна при взимането на производната, а φ_∞ означава асимптотичната стойност на полето.

В дисертацията (60) е модифицирано съответно до еквивалентното куплиране при Гаус-Боне теория, а (58) се използва директно, след като се отчете G_* като гола гравитационна константа, тъй като корекциите от алтернативната теория са от по-висока степен. Тези функции са основата на вероятностната функция, която е формирана, за да бъдат ограничени параметрите на теорията с вероятностен анализ на Бейс.

4 Числени методи

За получаването на оригиналните резултати са използвани множество числени методи, нужни поради нелинейността на задачите. Повечето от тези методи са имплементирани от автора на програмен език C или Python и оптимизирани за съответните задачи. Специфично за Монте-Карло веригата на Марков (MCMC) е използвана готова библиотека на Python [33]. В останалите случаи алгоритмите и тяхната имплементация следват [34] като референция, с малки добавки от автора според спецификата на задачите.

Интерполации

При числена работа с уравненията често се налага използването на интерполация заради табулирани стойности и крайната стъпка на пресмятанията. Основният използван метод за интерполация е кубичен сплайн, който позволява да се построи кубичен полином за апроксимация на функцията във всеки регион между табулирани точки. Предпочитанието за този метод се дължи на това, че получената интерполираща функция е C^2 гладка и е сравнително проста за получаване.

Числено интегриране и диференциране

За числено диференциране и интегриране са използвани стандартни методи, получени от апроксимация на производната на функция с крайни разлики. При диференцирането е използвана производна с точност $O(h^4)$ спрямо числената стъпка h и интерполация на функцията, за да се получи стъпка, която да е оптимална спрямо машинната точност и грешката от закръгляване. За интегрирането са използвани метод на трапците и метод на Симпсън, тъй като грешката на втория намалява с броя точки като $O(1/N^4)$, което е пренебрежимо за целите на определените интеграли, които се налага да се пресмятат в задачите.

Алгебрични уравнения

Търсенето на алгебрични решения за уравнения от вида $f(x) = 0$ е осъществено посредством комбинация от два метода: метод на Нютон-Рафсън и метод на бисекцията. Първият от тези методи е много по-бързо сходим, но не е глобално стабилен и може да попадне в цикли, докато вторият метод винаги получава поне един корен в интервал, в който съществува такъв, макар да е значително по-бавен. В основата на метода на Нютон е линеаризация на функцията в близост до корен и използване на последващи линейни приближения, докато не стигнем до корена със зададената точност. От друга страна, методът на бисекцията използва последователно разделяне на интервал, в който има корен

(т.е. функцията има различни знаци в двата края), докато този интервал не стигне зададената точност. На практика използваме метод на Нютон, но при определени индикации за разходимост, се използват няколко итерации на метод на бисекцията, за да я избегнем. В случаите на многомерно търсене на корени, бисекцията не е приложим метод, за това използваме допълнителна регуляризация на функцията за оптимизация при метод на най-малките квадрати.

Числено интегриране на система ОДУ

Основната част от оригиналните резултати в дисертацията са получените числени решения за структурата на неутронни звезди в различни теории, които се получават посредством числено интегриране на системата редуцирани уравнения. Този тип уравнения са твърди – може да се изисква много малка стъпка, за да се избегне прехвърляне на друго близко решение, което се мени много по-бързо от търсеното. За да се запази адекватна точност без да се забавя кода, и за да може да се интегрира системата от вътрешността на обекта до асимптотиката на време-пространството, авторът използва метод с адаптивна стъпка на Дорманд-Принц [35]. Това е частен случай на метод на Рунге-Кута с вградена оценка за грешката, който позволява оценка на нужната стъпка, за да се подсигури дадена точност. Стъпката се управлява от пропорционално-интегрален регулатор (PI controller), който използва тегло между две поредни стъпки, за да не прави твърде резки промени, като междувременно спазва зададената точност. Този метод е предпочитан от автора пред други сходни методи (като тези на Фелберг и Каш-Карп), тъй като два от редовете на коефициентите в неговата таблица на Бутчър са еднакви, намалявайки броя пресмятания за същата точност.

Метод на стрелбата

В много практически задачи не е известно начално условие, а гранично такова. Например, в пресмятането на структурните уравнения, не са известни началните условия за функциите Γ и стойностите на полетата в центъра на компактния обект, но е известна тяхната асимптотика. В такива случаи е използван метод на стрелбата, който на практика решава алгебрично уравнение за намиране на правилната начална стойност на даден параметър, третирайки самото числено интегриране като вид нелинейна функция. Името на този метод идва именно от аналогията със стрелба, където се променя началното условие в зависимост от това с колко е "изпусната" мишената.

Нелинеен метод на най-малките квадрати

В много физични модели се налага фитирането на различни функции към някакво очаквано аналитично поведение. В повечето случаи, имаме налични точки $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, които очакваме да отговарят на някакъв закон, но в тях има шум от измервания или външни влияния, така че те не описват този закон точно. В такива случаи използваме метод за фитиране на функция, която в най-общия случай е нелинейна. Обикновено фитиращата функция се задава във вида $y = f(x|\vec{a})$, където параметрите \vec{a} се намират така, че да опишат експерименталните данни възможно най-добре. Това означава, че се търси локален минимум на някаква функция, която задава мярка за средното отклонението между всяка от експерименталните точки $\{y_i\}$ и предсказаните от функцията $f(x_i)$. При метода на най-малки квадрати (както подсказва името му), мярката за отклонение се задава от сумата от квадрата на разликата между измерените и предсказаните стойности. Намиране на най-добър фит се свежда до това да се намери минимум на тази функция, което може да бъде получено посредством намиране на корен на нейната производна. Разбира се, за

силно нелинейни функции е възможно да има повече от един локален минимум на тази функция, така че успехът за намиране на добър фит зависи както от избора на фитираща функция, така и от избор на начални условия за метода на Нютон-Рафсън. В дисертацията е използван метод на Левенберг-Марквард [36], който решава регуляризирана задача с Лагранжев множител зависещ от стъпката, вместо да оптимизира директно сумата на квадратите, което спомага за сходимостта в близост до инфлексни точки.

Монте Карло верига на Марков (МСМС)

Монте Карло веригата на Марков е метод за случайно семплиране. Подобно на други Монте Карло методи, може да се използва за оценка на многомерни интеграли в даден регион на пространството от променливите. Разликата му спрямо по-традиционни Монте Карло методи идва от това, че функцията е семплирана на база на стойностите си в дадения регион, докато класическите методи семплират хомогенно. Това е особено полезно при работа с анализ на Бейс - този метод ни позволява да оптимизираме значително броя на семплираните точки, тъй като вероятността дадена точка да бъде семплирана е пропорционална на нейната стойност. С други думи, при наличие на функция на вероятността, която трябва да бъде нормирана, интегрирането ще протече по оптимален начин като включва най-важните участъци на тази функция първи, което може да е от особено значение за скоростта при повече от 3 параметъра на разпределението. В дисертацията е използвана библиотеката `emcee` от [33]. Тя използва афинно-инвариантно семплиране, което е описано в [37]. Този тип семплиране позволява да се намери правилното рескалиране и въртене (афинна трансформация) на параметрите, така че да се оптимизират точките при разпределения със силно асиметрична форма спрямо различните параметри в тях.

5 Бавновъртящи се топологични неутронни звезди и техните универсални съотношения

Разгледани са универсални съотношения и някои от най-важните наблюдателни свойства на бавновъртящи се компактни обекти в определен клас тензор-мулти-скаларни теории (ТМСТ) на гравитацията. Изследвани са нов тип компактни обекти в тези теории, наречени топологични неутронни звезди [4] ([38] за скаларизацията в тези теории). Разгледани са два типа универсални съотношения, които свързват различни нормировки на инерчния момент с компактността на обекта. Тези отношения са изследвани в ОТО от [21, 22] и са по-късно генерализирани към $f(R)$ и скаларно-тензорни теории с масивно скаларно поле от [23, 24, 25]. Следваме методологията в тези работи и сравняваме резултатите за топологичните неутронни звезди и ОТО за няколко уравнения на състоянието (УНС) и при няколко различни параметри на теорията за две различни куплиращи функции. За тези резултати е използвано мулти-политропно УНС, което е приближение на няколко реалистични УНС в различните региони на плътността от [8]. По-специфично, използваните УНС са APR4, SLy, MS1, MPA1, APR2 и H4, за да се верифицира универсалността на отношенията. Пълните резултати са публикувани в [39].

5.1 Структурни уравнения и методология

Следваме теорията в 2.2 с гравитационно взаимодействие описано от метриката на време-пространството $g_{\mu\nu}$ и N скаларни полета φ^a със стойности в N -мерно Риманово многообразие \mathbb{E}^N с положително-дефинитна метрика върху него $\gamma_{ab}(\varphi)$. Действието в система на Айнщайн и получените от него полеви уравнения се задават респективно от (6) и (7). Из-

ползвана е процедура на Хартъл, за пертурбация на статичната метрика до бавно въртене с член от порядък $O(\Omega)$, следвайки методологията в 3.3.2 и линеен елемент (37).

Следвайки [38], използвана е 3-мерната сфера \mathbb{S}^3 като многообразие за стойностите на полетата, която се характеризира с линеен елемент

$$\gamma_{ab}d\varphi^a d\varphi^b = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2)], \quad (63)$$

който се дефинира от радиуса $a > 0$ и стандартните ъглови координати χ, Θ, Φ на сферата. Мотивацията зад този избор е, че \mathbb{S}^3 е сред най-простите пространства за стойностите на полетата, които биха позволили съществуването на сферично-симетрични топологични неутронни звезди. Направени са няколко допълнителни допускания, за да се опростят възможните решения. Прието е, че полето χ зависи само от радиалната координата ($\chi = \chi(r)$), и че полетата Θ и Φ зависят само от съответните ъглови координати ($\Theta = \Theta(\theta)$ и $\Phi = \Phi(\phi)$), което води до единствени решения за последните при изискване за сферична симетрия. Тези решения са $\Theta = \theta$ и $\Phi = \phi$, както е показано в [4].

Статични структурни уравнения

Приемайки тези предположения за вида на полетата, лесно могат да бъдат получени редуцираните полеве уравнения за статичната конфигурация на компактните обекти. Използвайки (7) и законът за 4-дивергенцията на тензора на енергията и импулса (9), структурните уравнения приемат вида

$$\frac{2}{r}e^{-2\Lambda}\Lambda' + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda}) = 8\pi G_* A^4(\chi)\tilde{\varepsilon} + a^2 \left(e^{-2\Lambda}\chi'^2 + 2\frac{\sin^2 \chi}{r^2} \right) + 2V(\chi), \quad (64)$$

$$\frac{2}{r}e^{-2\Lambda}\Gamma' - \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda}) = 8\pi G_* A^4(\chi)\tilde{p} + a^2 \left(e^{-2\Lambda}\chi'^2 - 2\frac{\sin^2 \chi}{r^2} \right) - 2V(\chi), \quad (65)$$

$$\chi'' + \left(\Gamma' - \Lambda' + \frac{2}{r} \right) \chi' = \left[2\frac{\sin \chi \cos \chi}{r^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial V(\chi)}{\partial \chi} + \frac{4\pi G_*}{a^2} A^4(\chi) \frac{\partial \ln A(\chi)}{\partial \chi} (\tilde{\varepsilon} - 3\tilde{p}) \right] e^{2\Lambda}, \quad (66)$$

$$\tilde{p}' = -(\tilde{\varepsilon} + \tilde{p}) \left[\Gamma' + \frac{\partial \ln A(\chi)}{\partial \chi} \chi' \right], \quad (67)$$

Освен стандартните гранични условия за метричните функции, получени от условия за асимптотична плоскост на време-пространството $\Gamma(\infty) = \Lambda(\infty) = 0$ и регулярност на решението в центъра $\Lambda(0) = 0$, подобни условия са нужни и за скаларното поле от съображения за неговата регулярност. Това води до условията $\chi(\infty) = k\pi$ и $\chi(0) = n\pi$, където k и n са цели числа: $k, n \in \mathbb{Z}$. Първото условие може да се приравни на 0 ($k = 0$) без загуба на общност. Тъй като $\chi(\infty) = 0$, изображението $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ е топологично еквивалентно на изображението $\phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ и може да се покаже, че n е неговата степен [4]. От това следва, че решения с $n \neq 0$ са топологично нетривиални.

Изследването е фокусирано върху две куплиращи функции, параметризирани от един единствен безразмерен параметър β . Първата функция е тази използвана в [4], която има вида

$$A(\chi) = e^{\beta \sin^2 \chi}, \quad (68)$$

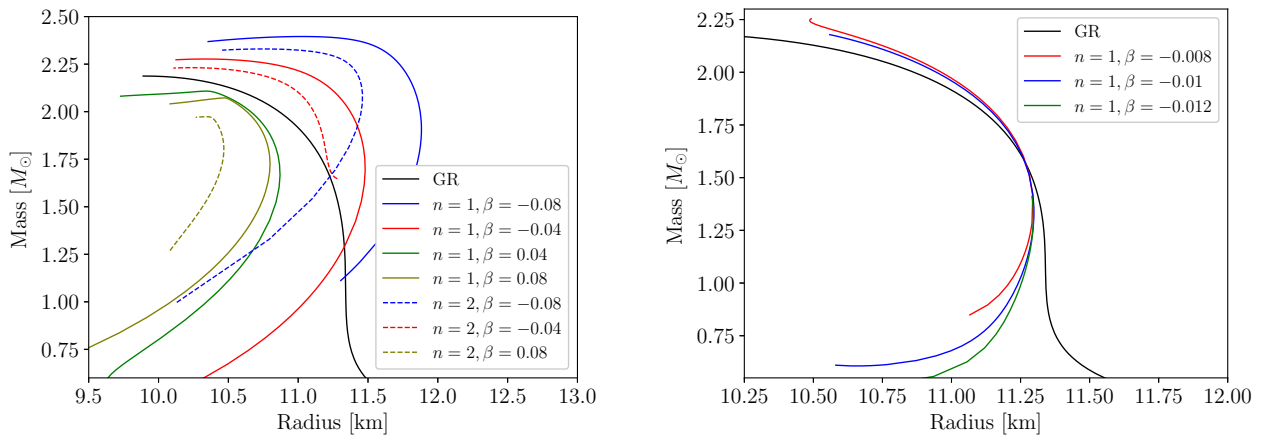
докато втората функция е монотонна по χ във вида

$$A(\chi) = e^{\frac{1}{2}\beta\chi^2}. \quad (69)$$

Двете функции клонят една към друга при $\chi \rightarrow 0$, но както се вижда в резултатите – могат да водят до качествено различни ефекти. Решенията на статичните топологични неутронни звезди се получават като се изберат правилните централни условия за Λ , \tilde{p} (или $\tilde{\varepsilon}$) и χ , след което се използва метод на стрелбата от 4, за да се подберат условията за $(d\chi/dr)|_0$ и $\Gamma(0)$ според асимптотиката на χ и Γ , която играе ролята на гранично условие. За численото интегриране на системата ОДУ е използван адаптивен метод на Дорманд-Принц с вградена естимация на грешката, имплементиран от автора спрямо описанието в 4.

Получената връзка между масата и радиуса за топологичните неутронни звезди се вижда във Фиг. 2а за немонотонната куплираща функция (68). В този случай, съществуват решения за топологичен заряд $n = 1$ и $n = 2$ (освен при $\beta = 0.04$, където решенията с $n = 2$ се появяват след максималната маса на съответния клон). Фиг. 2б от друга страна показва същите резултати за монотонната куплираща функция (69), където съществуват стабилни решения само при топологичен заряд $n = 1$ в много по-малък обхват на параметъра β (около $\beta = -0.01$).

В [4] е показано, че съществуват и други клонове решения за дадена куплираща функция и стойности на n и β , но всички те са нестабилни при радиални пертурбации [38], така че няма да ги разглеждаме.



(а) Зависимост за куплиращата функция (68) (б) Зависимост за куплиращата функция (69)

Фигура 2: Връзка между маса и радиус за УНС APR4 и различни стойности на параметъра β за куплиращата функция (68) вляво и (69) вдясно. Решенията с топологичен заряд $n = 1$ са показани като непрекъснати криви, а тези с $n = 2$ с прекъснати криви със същия цвят (вторите съществуват само за немонотонната функция).

Лесно се вижда, че като цяло клоновете с $n = 1$ са по-масивни от аналогичните с $n = 2$ (където вторите съществуват). Имайки предвид Фиг. 2а, сумарният ефект на отрицателните стойности за β е да се увеличат масите на решенията при същия радиус (правейки ги по-компактни), докато ефектът за положително β е обратен. Самата форма на връзката между маса и радиус, обаче, зависи много силно от стойността на параметрите и ефектите не са лесно предвидими или монотонни по характер.

В повечето случаи "краят" на даден клон (т.е. най-високото налягане, при което са търсени решения) е избран произволно, след като се достигне максималната маса на съответния клон. В някои случаи, обаче, клоновете на решенията могат да се появят за някакво минимално налягане и да изчезнат преди достигане на максимална маса. Такива са решенията за монотонната куплираща функция (69), които се намират в много по-ограничен диапазон от стойности на β и централно налягане. Не бяха открити физически смислени решения за топологичен заряд $n = 2$ в този случай и всеки от трите стабилни

клона на Fig. 26 изчезва, преди да достигне локален максимум на масата.

Структурни уравнения при бавно въртене

Следвайки методологията от 3.3.2, единственото нетривиално уравнение до първа степен по Ω е това за компонентите $R_{03} = R_{30}$ на тензора на Ричи. След като се отчетат статичните уравнения (64)-(67) като варенства, до първа степен по Ω получаваме

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} (r^4 e^{-\Gamma-\Lambda} \bar{\omega}') + \frac{4}{r} \frac{d}{dr} (e^{-\Gamma-\Lambda}) \bar{\omega} + 4a^2 e^{-\Gamma-\Lambda} \bar{\omega} \chi^2 + \frac{4a^2 \omega}{r^2} \sin^2 \chi e^{\Lambda-\Gamma} = 0, \quad (70)$$

където е дефинирана функцията $\bar{\omega} = \Omega - \omega$. Централните стойности на функциите са $\bar{\omega}'(0) = 0$ и $\bar{\omega}(0) = \bar{\omega}_c$ като втората се определя отново по метод на стрелбата, имайки предвид желаната ъглова скорост на звездата Ω от асимптотиката. Ω има една и съща стойност както в система на Йордан, така и в тази на Айнщайн.

След интеграция на (70), може да се използва асимптотиката (39), за да се получи момента на импулса на звездата $J = I\Omega$ и по този начин да се получи инерчния момент по оста на въртене. Алтернативно, двете страни на (70) могат да се интегрират, което води до запазваща се величина. След разделяне по Ω , за асимптотичната и интегралната дефиниции на инерчния момент се получава

$$I_{\text{asympt}} = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{6} r^4 e^{-\Gamma-\Lambda} \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} \right), \quad (71)$$

$$I_{\text{integral}} = \frac{8\pi G_*}{3} \int_0^{rs} A^4(\chi) (\tilde{p} + \tilde{\varepsilon}) e^{\Lambda-\Gamma} r^4 (1 - \tilde{\omega}) dr - \frac{2a^2}{3} \int_0^\infty r^2 \tilde{\omega} e^{\Lambda-\Gamma} \sin^2 \chi dr \quad (72)$$

където $\tilde{\omega} = \omega/\Omega = 1 - \bar{\omega}/\Omega$ е редуцираната ъглова скорост. И двете дефиниции са имплементирани в числения код, за да се валидират резултатите. Действително, относителната разликата между тях е по-малка от 10^{-11} за различните клонове.

Най-вътрешна стабилна кръгова орбита, орбитални и епициклични честоти

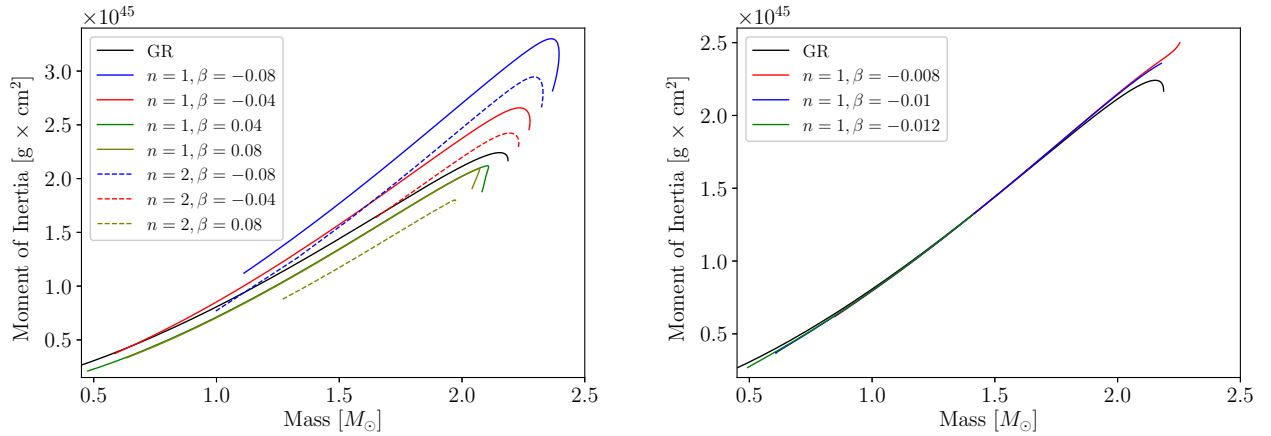
Цялата методология изложена в 3.3.3 може да се следва директно за ТМСТ теориите с една основна разлика – всички производни и величини трябва да бъдат пресмятани в система на Йордан с метрични компоненти $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Това води до интересно поведение за орбиталната ъглова скорост Ω_p , тъй като уравнение (48) може да се даде имагинерен резултат (т.е. не съществуват стабилни кръгови орбити) в региони извън звездата, преди да се появи истинската ISCO. Това поведение може да се проследи до отрицателния член в корена на уравнение (48). В ОТО, производната $\partial_r g_{tt}$ е винаги отрицателна извън звездата (метричната функция g_{tt} е монотонно намаляваща). В алтернативна теория, обаче, съответната величина съдържа и конформния множител $\partial_r (A^2(\chi) g_{tt}) = \partial_r \tilde{g}_{tt}$, така че нейния знак се определя не само от g_{tt} , но и от този на куплиращата функция $A(\chi)$. В случай на монотонна куплираща функция (68), това може да доведе до региони извън ISCO, където не съществуват стабилни кръгови орбити, което би довело до разделяне на акреционния диск. Този ефект е интересен от гледна точка на потенциални наблюдателни характеристики, но изисква по-внимателно изследване за пълни резултати и е оставен за следваща работа. По тази причина, изложените резултати за ISCO и епицикличните честоти са само за случая на монотонна куплираща функция при различни параметри и ъгови скорости за $n = 1$.

5.2 Резултати

Инерчен момент и универсални съотношения

В тази секция са представени резултатите за инерчния момент на бавновъртящи се топологични неутронни звезди и получените универсалните съотношения. Тези съотношения свързват безразмерната компактност M/R с две различни нормировки на инерчния момент $\tilde{I} = I/MR^2$ и $\bar{I} = I/M^3$, описани в 3.4. Резултатите са само за астрофизически-смислените стабилни клонове на решенията, за които е направено сравнение между ОТО и топологични заряди $n = 1$ и $n = 2$ (когато вторите съществуват), използвайки APR4, Sly, MS1, MPA1, APR2 и H4 уравнения на състоянието с различни параметри на теорията.

Самите резултати за инерчния момент са показани на Фиг.3а и 3б като функция на масите на неутронните звезди. Показаните клонове на решения са същите като тези показани на Фиг.2а и Fig. 2б.



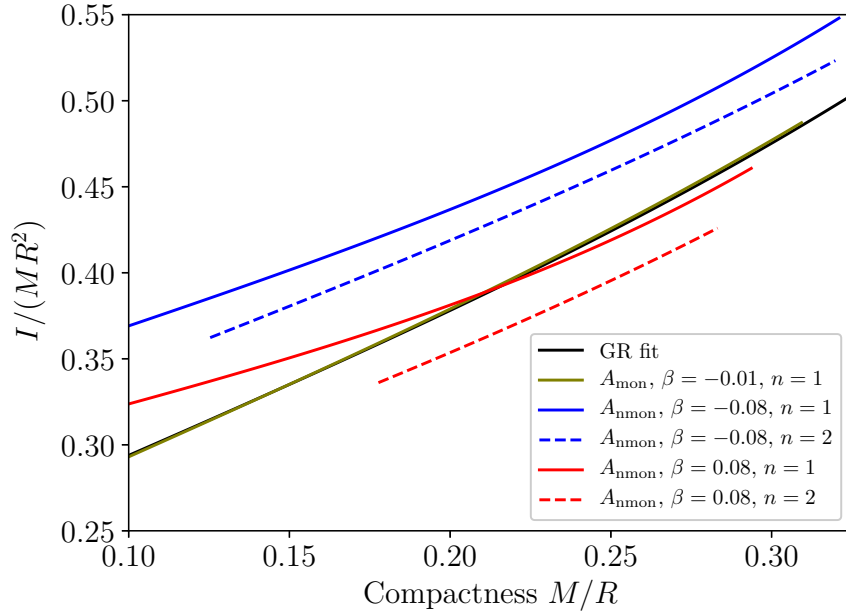
(а) Зависимост за куплиращата функция (68) (б) Зависимост за куплиращата функция (69)

Фигура 3: Зависимост между маса и инерчен момент за APR4 УНС и различни стойности на параметъра β за куплиращата функция (68) вляво и (69) вдясно. Решенията с топологичен заряд $n = 1$ са показани като непрекъснати криви, а тези с $n = 2$ с прекъснати криви със същия цвят. Това са същите клонове решения като във Фиг. 2 респективно.

Поведението на инерчния момент следва това, което вече беше дискутирано за зависимостта между маса и радиус. По-големите топологични заряди водят до по-малки маси и съответно по-малък инерчен момент. Отрицателните стойности на β водят до по-компактни обекти, а положителните стойности на β имат обратния ефект. Изцяло липсва максимум на зависимостта $I(M)$ в случая на монотонна куплираща функция.

Макар зависимостите между маса и радиус, както и тези между маса и инерчен момент за различните УНС да са доста различни по форма, както се вижда от горните графики, всички функции на нормализирания инерчен момент от компактността имат много сходна форма, както ще видим по-долу.

Първо е разгледано фитиране от червърта степен според (52) за нормировката $\tilde{I} = I/MR^2$. За да избегнем твърде претрупани графики, Фиг. 4 първо сравнява получените фитове на \tilde{I}_{fit} за $\beta = -0.01$ на монотонната функция (69), ОТО и двете стойности $\beta = -0.08$ и $\beta = 0.08$ за немонотонната функция (68). Фитирането е получено с равен брой точки от всяко от 6-те УНС (APR4, Sly, MS1, MPA1, APR2 and H4) след полиномен метод на най-малките квадрати. Числените стойности на фитовете са представени в табличен вид в дисертацията и [39]. Вижда се, че фита за монотонната функция $A_{\text{mon}}(\chi)$, зададена от (69), на практика е идентичен с този за ОТО. От друга страна, за немонотонната функция $A_{\text{nonmon}}(\chi)$, зададена от (68) има съществени разлики в параметрите на фита.



Фигура 4: Сравнение между фитите за \tilde{I} получени чрез (52) за различни параметри на теорията. Тъмно-жълтата крива е получена за монотонната куплираща функция (69), а останалите 4 криви показват разликата между различните параметри при немонотонната куплираща функция (68).

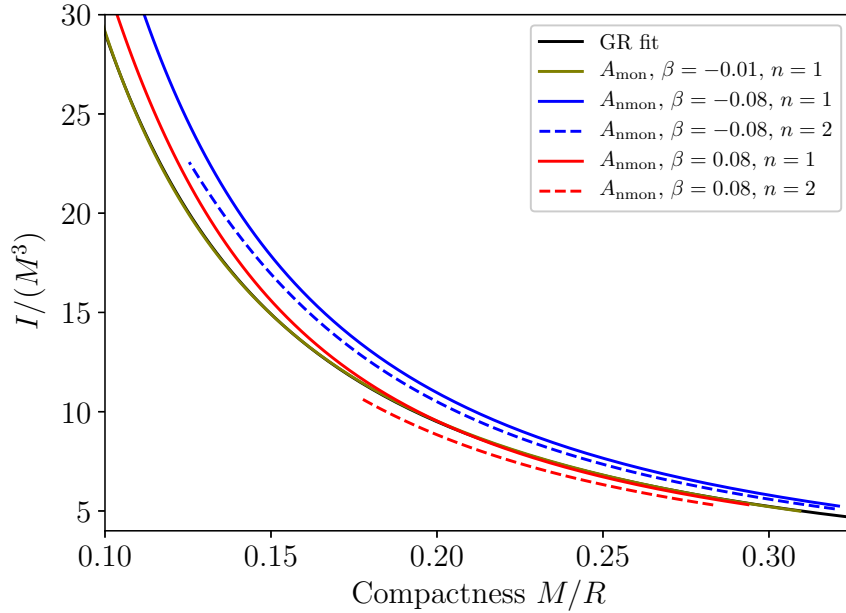
Например, при $\beta = -0.08$, нормираният инерчен момент за немонотонната функция е consistently около 20 % по-голям за различните стойности на компактността. Фитът с $n = 1$ за положителната стойност $\beta = 0.08$ има малко по-различна форма от тази в ОТО, особено за по-малки компактности, но не би могъл да бъде лесно различен от ОТО с наличните наблюдения днес. Стойностите с топологичен заряд $n = 2$ за същото $\beta = 0.08$, обаче, водят до стойности на \tilde{I} с consistently по-малка стойност спрямо ОТО от около 7%.

Второто разгледано фитиране е за $\bar{I} = I/M^3$ според формата (53). Числените стойности за тези фитове отново са налични в дисертацията и [39].

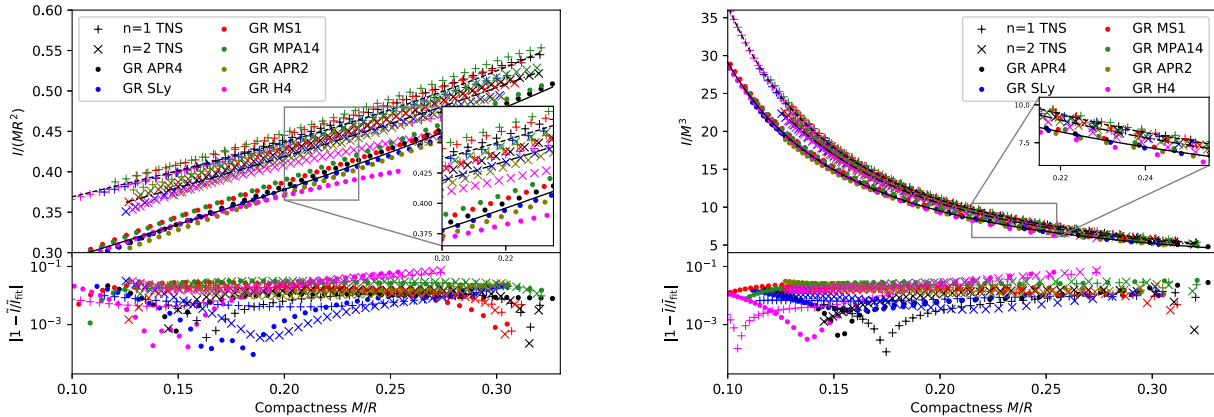
Фиг. 5 сравнява фитите за \bar{I}_{fit} получени при същите параметри на теорията и индикирани със същите цветове като на Фиг. 4. Отново, кривата за куплиращата функция (69) е на практика неразличима от ОТО и най-големите отклонения се наблюдават за немонотонната куплираща функция (68) със заряд $n = 1$ при $\beta = -0.08$ (около 20 % по-високи стойности спрямо ОТО) и със заряд $n = 2$ при $\beta = 0.08$ (около 7 % по-ниски стойности спрямо ОТО).

Следващите две фигури 6а и 6б показват самите точки, които са използвани за фитиране на зависимостите, получени от 6-те уравнения на състоянието. Показана е само стойността $\beta = -0.08$ за немонотонната функция (68), с цел по-добра визуализация и тъй като тя представлява най-голямата разлика спрямо ОТО. Решенията с топологични заряди $n = 1$ и $n = 2$ са показани със знаци "+" и "x" и следват цветовете на решенията в ОТО при различни уравнения на състоянието. Може да се види, че най-голямата относителна грешка (в долната част на фигурите) е от порядъка на 6% (за Н4 УНС). На база на тези грешки за фитите, които се запазват по порядък и при останалите параметри на теорията, универсалността между \tilde{I} и компактността е спазена при топологичните неутронни звезди в ТМСТ поне толкова добре, колкото и за ОТО.

По сходен начин са показани на Фиг. 6б грешката на фитите за втората нормировка на инерчния момент \bar{I} , които не надвишават 6% с максимум на тази грешка отново при



Фигура 5: Сравнение между фитовите за \bar{I} получени чрез (53) за различни параметри на теорията. Тъмно-жълтата крива е получена за монотонната куплираща функция (69), а останалите 4 криви показват разликата между различните параметри при немонотонната куплираща функция (68).



(а) Зависимост за куплиращата функция (68) (б) Зависимост за куплиращата функция (69)

Фигура 6: Нормиран инерчен момент \tilde{I} вляво и \bar{I} вдясно, като функция на безразмерната компактност за ОТО и топологични неутронни звезди с куплираща функция (69), където е избрана стойността $\beta = -0.08$ като представителна графика. Точките показват резултатите за ОТО, докато плюсовете и хиксовете показват резултатите за топологичните неутронни звезди респективно при заряди $n = 1$ и $n = 2$ с една и съща цвятова схема. Непрекъснатите, прекъснатите и прекъснатите с точки черни криви показват фитовите според (52) (вляво) и (53) (вдясно) за ОТО, $n = 1$ и $n = 2$ респективно.

УНС H4, което потвърждава универсалността на отношенията за \bar{I} отново при $\beta = -0.08$. Фитовите за останалите стойности на β и съответните фитове при монотонната куплираща функция имат относителна грешка от същия порядък, потвърждавайки и това универсално съотношение за различните топологични заряди и параметри на теорията, които са разгледани.

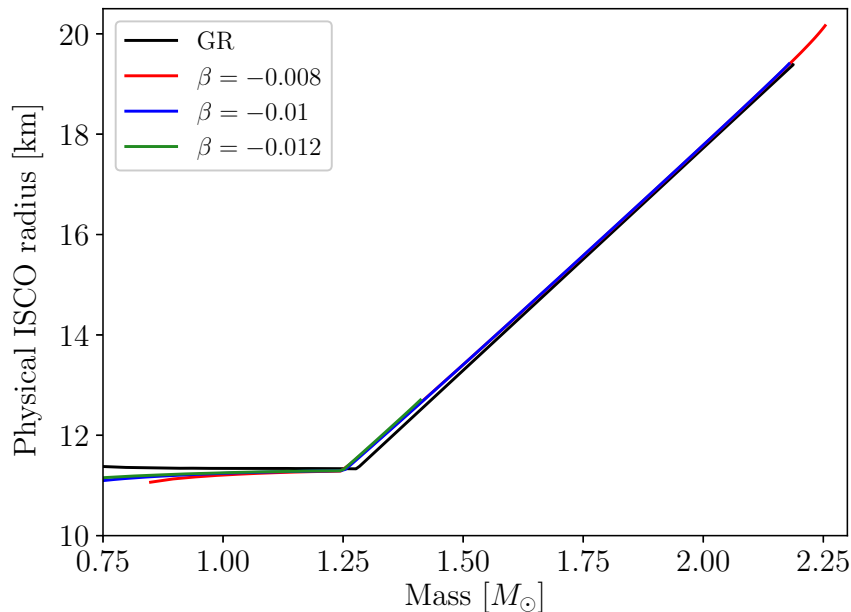
В дисертацията и в [39] са представени и числени стойности за средно-квадратичната грешка от фитите \tilde{I}_{χ^2} и \bar{I}_{χ^2} на репрезентативни случаи, които показват, че универсалността е добре спазена.

Характеристики за електромагнитни наблюдения

Резултатите за най-вътрешната стабилна кръгова орбита (ISCO), орбиталните и епицикличните честоти, са получени при статична конфигурация, както и при честоти на въртене $f = 80$ Hz и $f = 160$ Hz, отговарящи на бавновъртящи се неутронни звезди. За разлика от инерционния момент, който не се влияе от ъгловата скорост до първа поправка по Ω , ISCO и релевантните честоти ν_p , ν_r , ν_θ се променят с въртенето на звездата. Всички резултати в тази секция са представени във физическата система (на Йордан) след трансформация от тази на Айнщайн.

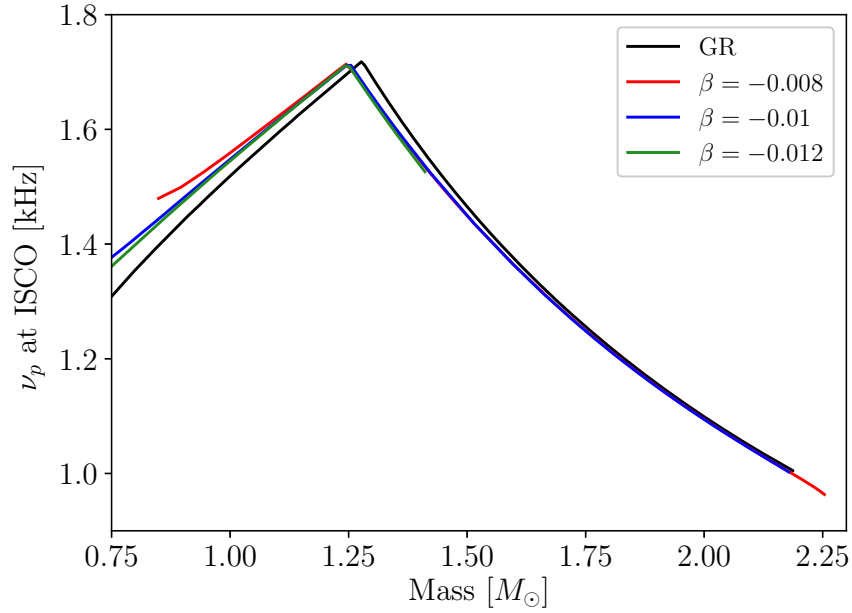
Както беше коментирано по-горе, пресмятането на ISCO в случая на немонотонната куплираща функция (68) не е тривиално и може да доведе до разделяне на акреционния диск на няколко региона. По тази причина, в рамките на дисертацията са получени само резултатите за монотонната функция (69), а немонотонната е оставена за бъдещи изследвания.

Фиг. 7 показва статичния ISCO радиус за стабилните клонове на топологичните неутронни звезди с $n = 1$ при УНС APR4 и няколко различни стойности на β , сравнени с ОТО. Когато ISCO радиусът е по-малък от радиуса на звездата, използваме втория, което причинява видимото прекъсване на производната около $1.25 M_\odot$. На графиката се вижда, че резултатите са много сходни с ОТО и не е много вероятно да бъдат различни за никоя физически-смислена маса на обектите.

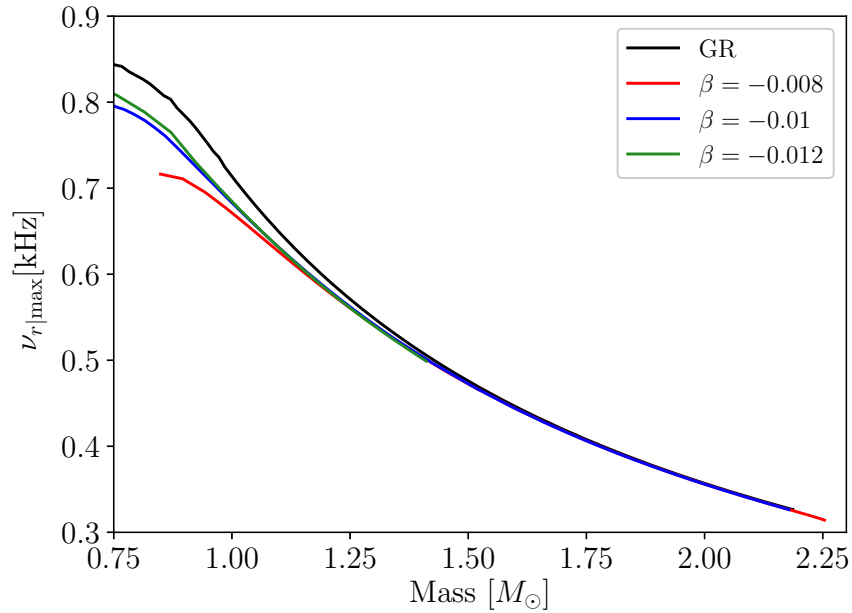


Фигура 7: ISCO радиус (физически) като функция на гравитационната маса за ОТО и ТМСТ с монотонната куплираща функция (69), за $n = 1$, различни стойности на β и $f = 0$ Hz.

От наблюдателна гледна точка, по-варна е орбиталната честота върху ISCO. Фиг. 8 показва резултатите за трите случая на β , получени от (48) отново за статичен случай. И за тази величина, разликите от ОТО са несъществени и не биха могли да се използват за експериментално различаване на топологични неутронни звезди.



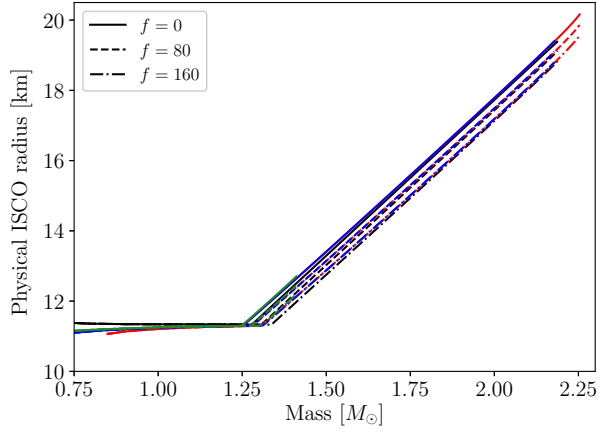
Фигура 8: Орбитална честота върху ISCO радиуса като функция на гравитационната маса за ОТО и ТМСТ с монотонната куплираща функция (69), за $n = 1$, различни стойности на β и $f = 0$ Hz.



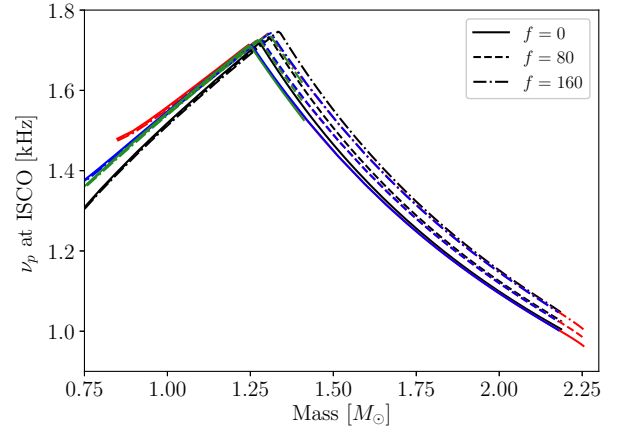
Фигура 9: Модул на максималната стойност за радиалната епициклична честота ν_r като функция на гравитационната маса за ОТО и ТМСТ с монотонната куплираща функция (69), за $n = 1$, различни стойности на β и $f = 0$ Hz.

Накрая, максималната стойност по модул на радиалната епициклична честота за статичния случай е показана на Фиг. 9. Най-голямата разлика между ОТО и ТМСТ е около $1 M_\odot$ и достига 6%. Тъй като на практика не се наблюдават неутронни звезди с маса по-малка от около $1.2 M_\odot$, не се очаква възможност за наблюдателно различаване на този клас обекти и по радиалната епициклична честота.

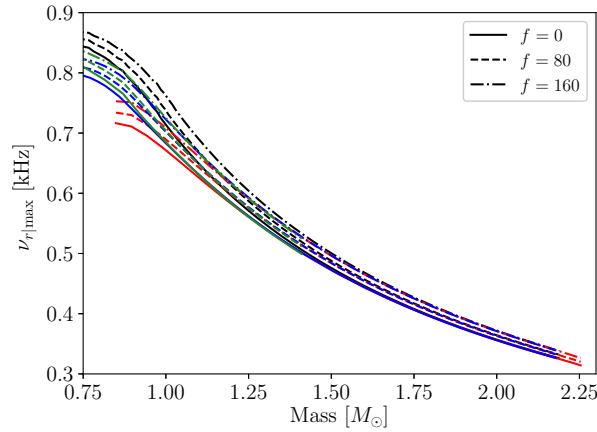
Фиг. 10 показва същите величини, но в случай на бавно въртене, където непрекъсна-



(а) ISCO радиус



(б) Орбитална честота върху ISCO



(в) Максимална радиална епициклична честота

Фигура 10: ISCO радиус, орбитална честота върху ISCO и модул на максималната стойност за радиалната епициклична честота ν_r като функция на гравитационната маса за ОТО и ТМСТ с монотонната куплираща функция (69), за $n = 1$ и различни стойности на β . Непрекъснатите криви отговарят на статичен случай, а прекъснатите и прекъснатите с точки криви отговарят на честоти на въртене $f = 80$ Hz and $f = 160$ Hz. Цветовата схема следва тази на Фиг.7.

тите криви отговарят на $f = 0$ Hz, а прекъснатите и прекъснатите с точки криви дават същите зависимости респективно при $f = 80$ Hz and $f = 160$ Hz. Макар резултатите да са получени в режим на бавно въртене, повечето наблюдавани неутронни звезди попадат в този режим. Освен това има добра индикация, че работа до по-висока степен на Ω няма да промени качествено резултатите [24].

Намаляването на радиуса на ISCO поради въртенето на звездата води до това, че графиките за различните ъглови скорости се припокриват, което прави възможността да се различат ОТО и ТМСТ дори по-трудно, без да се знае много точно честотата на въртене. Дори при налична честота на въртене, графиките не могат да се използват ефективно за експериментално различаване между различните типове компактни обекти. Що се отнася до орбиталната и максималната радиална епициклична честота – няма значима разлика между ОТО и топологичните неутронни звезди със заряд $n = 1$ при функцията (69) за маси над $\cong 1.2 - 1.3M_\odot$, където са основните наблюдавани неутронни звезди.

По всичко изглежда, че монотонната куплираща функция (69) не предсказва значими наблюдателни разлики качествено или количествено спрямо ОТО, що се отнася до

рентгенови наблюдения.

5.3 Коментари

В рамките на дисертацията са изследвани свойствата на нов клас компактни обекти, наречени топологични неутронни звезди, които се появяват в тензор-мулти-скалани теории (ТМСТ) на гравитацията. Те са изследвани в режим на бавно въртене, като в статичния случай са разгледани допълнителни параметри на теорията, различни топологични заряди и различна куплираща функция спрямо предходните им изследвания. Основната цел на работата е изследването на универсални съотношения между инерчния момент, радиуса и масата на тези обекти, както и изследването на важни величини, свързани с акреция на материя при бавно въртене, които не са сравнявани с аналогичните величини в ОТО преди това.

В рамките на дисертационния труд е потвърдена независимостта от УНС на две нормировки на инерчния момент като функция на компактността, като получените резултати за тези графики са сравнени с аналогичните за неутронни звезди в ОТО. За една от куплиращите функции, която е монотонна спрямо скаларното поле, фитовете на тези универсални съотношения са на практика неразличими от стойностите им за ОТО, правейки ги не само независими от УНС, но и до голяма степен от теорията. За по-сложната немонотонна куплираща функция, от друга страна, разликите могат да са значителни и да позволят различаване не само между ОТО и ТМСТ, но и между решения в ТМСТ с различни топологични заряди. Това показва, че бъдещите наблюдения на компактни обекти може да ни помогнат да потвърдим интересната хипотеза за съществуването на топологичен заряд и да различим компактни обекти с такъв.

Освен това, в рамките на дисертацията са получени основните величини, които характеризират акреция на материя около компактен обект като радиус на най-вътрешната стабилна орбита (ISCO), орбитални и епициклични честоти. Всички те са получени за различни ъглови скорости на топологичните неутронни звезди и са сравнени с аналогичните резултати в ОТО. Получените величини за топологични неутронни звезди се различават значително от тези за ОТО само при определени условия върху куплиращата функция. В случай на монотонната куплираща функция, няма качествена разлика между ТМСТ и ОТО, а количествените разлики са много малки, което ги прави много трудно-измерими експериментално. Основната качествена разлика при немонотонна куплираща функция е свързана с потенциално разцепване на акреционния диск, което ще бъде изследвано допълнително в бъдеща работа. Все пак, този тип възможни качествени разлики, и показаните количествени такива са ясен знак, че подобни наблюдения имат възможност да помогнат за различаването на теории на гравитацията и потвърждаване или отхвърляне на ОТО при по-силни полета, за което са нужни по-точни систематични наблюдения.

6 Универсални съотношения за скаларизирани неутронни звезди в точката на максимална маса за скаларно-тензорни теории

Разгледани са нов тип универсални съотношения в клас скаларно-тензорни теории (СТТ) на гравитацията. Въпросните съотношения са показани за пръв път за ОТО в [26] на база на наблюденията в [40], които показват, че ядрена материя с висока плътност може да се параметризира ефективно само с два параметъра. Този тип универсални съотношения са по-различни от стандартните, тъй като дават връзка между различни свойства на компактните обекти при локалния максимум на даден клон от решения.

В дисертацията е обобщено изследването на този тип съотношения в случай на СТТ и с добавка на небарионни уравнения на състоянието (УНС) към ОТО. За целта са изследвани 53 УНС и е показано, че съотношенията са в сила при масивни скаларно-тензорни теории. Получените резултати могат да се използват, за да се търсят ограничения върху УНС за различни теории, или да се изследва вероятността дадена теория да е валидна спрямо ОТО при различни УНС. Пълните резултати са публикувани в [41].

6.1 Структурни уравнения и методология

Резултатите са получени в теория с действие в система на Айнщайн, зададено от (10). Подобно на [42], използваният конформен множител $A(\varphi)$ е с експоненциална форма и се характеризира с един единствен параметър β , във вида

$$A(\varphi) = e^{\frac{1}{2}\beta\varphi^2}. \quad (73)$$

Освен това, използван е най-простият и най-естествен потенциал симетричен спрямо \mathbb{Z}_2 , а именно

$$V(\varphi) = 2m_\varphi^2\varphi^2, \quad (74)$$

където m_φ е масата на скаларното поле. Този избор на $A(\varphi)$ води до СТТ, която е пертурбативно еквивалентна на ОТО в слаб режим, но има допълнителни ефекти в силен режим, като скаларизация на неутронните звезди. В цялата секция $\varphi = \varphi(r)$ се използва за скаларното поле в теорията. В оригиналния анзац на метриката (26), същата буква е използвана за ъглова координата, но не е променена, тъй като задачата е сферично-симетрична и тази координата не се използва.

След заместване на стандартната сферично-симетрична метрика (26) в полевите уравнения (11) са получени редуцираните полеве уравнения в система на Айнщайн във вида

$$\frac{2}{r}e^{-2\Lambda}\frac{d\Lambda}{dr} = 8\pi G_* A^4 \tilde{\rho} - \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda}) + e^{-2\Lambda} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}V(\varphi) \quad (75)$$

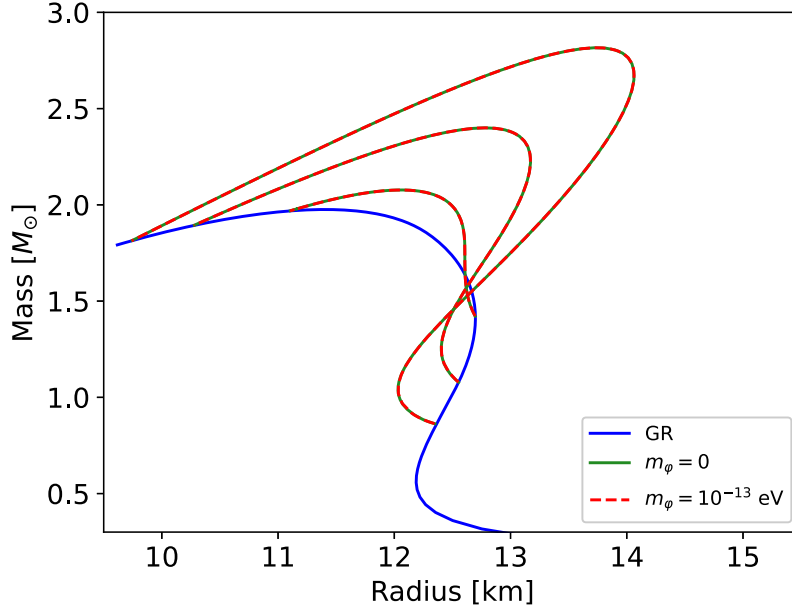
$$\frac{2}{r}e^{-2\Lambda}\frac{d\Gamma}{dr} = 8\pi G_* A^4 \tilde{p} - \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\Gamma}) + e^{-2\Lambda} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}V(\varphi) \quad (76)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dr} = (\tilde{p} + \tilde{\rho}) \left(\frac{d\Gamma}{dr} + \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dr}\right) \quad (77)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = \left(\frac{d\Lambda}{dr} - \frac{d\Gamma}{dr} - \frac{2}{r}\right) \frac{d\varphi}{dr} + 4\pi G_* A^4(\varphi)(\tilde{\rho} - 3\tilde{p})e^{2\Lambda} \frac{d \ln A(\varphi)}{d\varphi} + \frac{1}{4} \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} e^{2\Lambda}. \quad (78)$$

Централните стойности на величините се задават в система на Йордан (физическа система) като $\tilde{\rho}(0) = \tilde{\rho}_c$, $\Lambda(0) = 0$ и $\frac{d\varphi}{dr} = 0$. От асимптотичната плоскост на време-пространството са получени останалите условия $\Gamma(\infty) = 0$, $\Lambda(\infty) = 0$ и $\varphi(\infty) = 0$. Централната стойност $\varphi(0) = \varphi_c$ се определя чрез метод на стрелбата, използвайки асимптотиката като гранично условие. Масата на скаларното поле е зададена като $m_\varphi = 10^{-13}$ eV, за да се подсигури, че неговата дължина на вълната на Комптън е много по-малка от орбиталното разстояние между компактните обекти в наблюдаваните бинарни системи от пулсари. Ефектите от толкова малка маса са на практика неразличими от безмасовия случай, както се вижда на Фиг.11 (и както е показано числено за останалите УНС).

Числено, относителната разлика между масите, радиусите и останалите релевантни параметри между безмасовия случай $m_\varphi = 0$ и $m_\varphi = 10^{-13}$ eV, не надвишава 10^{-2} (1%) след проверка с няколко много различни УНС. По тази причина, крайните пресмятания за фитовете са направени за безмасово поле, тъй като това не променя коефициентите.



Фигура 11: Връзка между маса и радиус за ALF2 УНС за ОТО и случаите $\beta = -5, -6, -7$ на СТТ. Резултатите за безмасово поле и такова с маса $m_\varphi = 10^{-13}$ eV са показани за всяка стойност на β като респективно непрекъснати зелени и прекъснати червени криви.

Рационалността на това приближение е, че самите фитове имат няколко пъти по-голямо средно отклонение спрямо тази грешка, което прави приближението за безмасово поле спрямо $m_\varphi = 10^{-13}$ eV пренебрежим източник на грешка върху всякакви крайни заключения.

Универсални съотношения при максимална маса

Линдблум [40] показва, че за широк набор от УНС модели, зависимостта $P(\rho)$ в ядрото на неутронни звезди може да се апроксимира много добре само с два параметъра. Следвайки тази идея, Офенгайм показва, че в ОТО, наборът точки (M_*, R_*, x_{c*}) върху максималната маса на даден клон неутронни звезди, принадлежи с голяма точност на една 2-измерна повърхност [26], която може да се приближи добре с аналитична зависимост. В тези означения, M_* и R_* са масата и радиусът на неутронната звезда върху локалния максимум на дадения клон, а $x_* = \tilde{\rho}_{c*}, \tilde{p}_{c*}, \tilde{c}_{sc*}$ приема стойност на централна плътност, налягане или скорост на звука за съответното решение. В дисертацията е използвана същата аналитична форма на повърхнината като в [26], зададена от

$$x_* = x_0 \left(\frac{a_x}{R_{\text{mix},x}^* - b_x} \right)^{p_x}, \quad (79)$$

където е направена малка промяна в означенията с дефиницията

$$R_{\text{mix},x}^* = R_* \cos \phi_x + r_{g*} \sin \phi_x. \quad (80)$$

Променливата ϕ_x има смисъл на ъгъл на смесване между правата по посока на R_* и проекцията на x_* върху хоризонталната равнина, образувана от M_* и R_* . Параметърът r_{g*} е просто радиуса на Шварцщайлд върху точката с максимална маса на съответния клон $r_{g*} = 2G_* M_*/c^2$. Четирите параметъра a_x, ϕ_x, b_x и p_x се варират по нелинеен метод на най-малките квадрати, за да се минимизира грешката на (79), докато x_0 носи правилната размерност на налягане, плътност или скорост. Тези размерности са избрани от ядрената

плътност за симетрична ядрена материя и скоростта на светлината както следва: $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$, $P_0 = \rho_0 c^2$ и $c_0 = c$.

Приемайки $\rho_{c^*}(M_*, R_*)$ и $P_{c^*}(M_*, R_*)$ като система уравнения в аналитичен вид, тяхната зависимост може да се обърне. Замествайки резултатите от това обърщане във фитата c_{sc^*} , може да се получи втори набор фитове, които са изцяло свързани с оригиналните

$$y_* = y_0 \left\{ A_y \left[(\rho_0 / \tilde{\rho}_{c^*})^{1/p_{\tilde{\rho}}} \cos \Phi_y + (\rho_0 c^2 / \tilde{P}_{c^*})^{1/p_{\tilde{P}}} \sin \Phi_y - B_y \right] \right\}^{q_y}, \quad (81)$$

където $y_* = M_*, R_*, \tilde{c}_{sc^*}$.

Лесно се вижда, че $q_{\tilde{\rho}_{c^*}} = q_{\tilde{P}_{c^*}} = 1$ и $q_{\tilde{c}_{sc^*}} = -p_{\tilde{c}}$. Останалите параметри са изцяло зависими от оригиналните фитове с правилните условия за нормализация. Дефинирана е и допълнителната смесена променлива

$$\chi_{\text{mix},y} = \left(\frac{\tilde{\rho}_0}{\tilde{\rho}_{c^*}} \right)^{\frac{1}{p_{\tilde{\rho}}}} \cos \Phi_y + \left(\frac{\tilde{\rho}_0 c^2}{\tilde{P}_{c^*}} \right)^{\frac{1}{p_{\tilde{P}}}} \sin \Phi_y. \quad (82)$$

Тези зависимости и грешките на техните фитове ни позволяват да разгледаме няколко ограничения в дисертацията, които са базирани на причинност в теорията и наличните измервания за максималните маси на неутронни звезди. За разлика от аналогичните ограничения в ОТО, те могат да бъдат интерпретирани или като ограничения върху УНС, или като такива върху теорията, на база на наблюдателни ограничения.

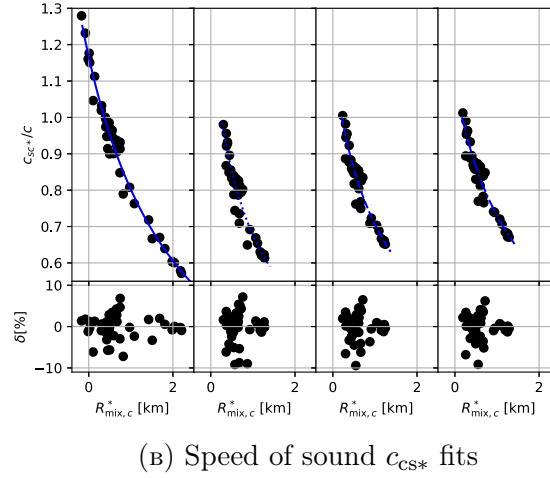
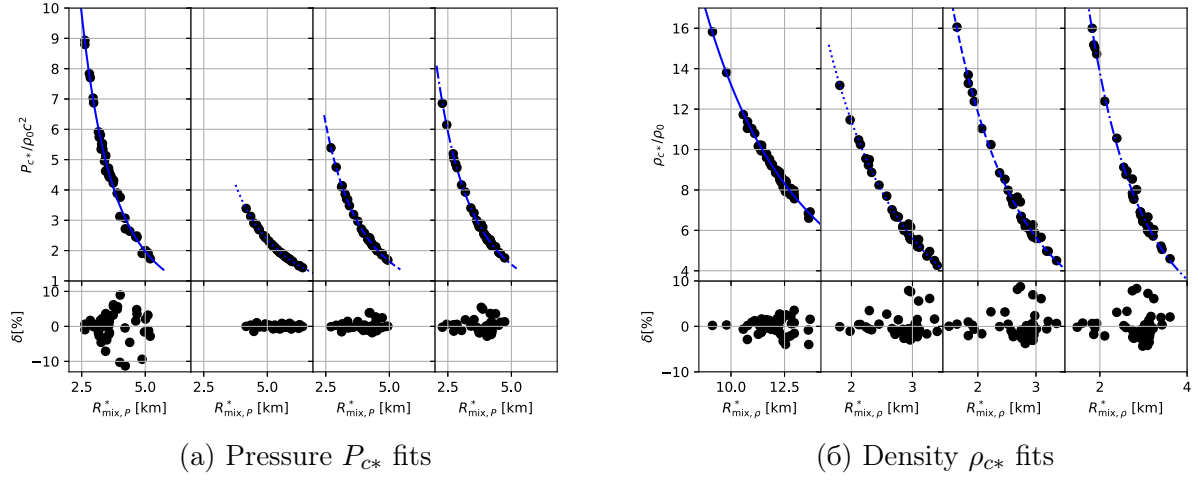
6.2 Резултати

В дисертацията са изследвани общо 53 УНС включващи различни фази и модели. 24 от тях са мулти-политропни приближения на базата на [8], включително SLy, APR1-4, MPA1, MS1-2, MS1b, H1-H7, WFF1-3, ENG и ALF1-4. Останалите 29 са табулирани УНС, получени от CompStar Online Supernovae Equations of State (CompOSE) [43] и включват GM1_Y4-6 [44, 45, 46], QHC18-19 [47, 48, 49, 50], SK255, SK272, SKa/b [46, 51, 52, 53], SkI2-6, SkMr, SkOr [46, 53, 54, 55], SLy2,4,9,230a [46, 53, 56, 57, 58] и други [53, 59, 60, 61, 62, 63, 64]. За всяко от тези УНС са пресметнати поредица от модели (клон от решения) на база на метода с адаптивна стъпка на Дорманд-Принц [35] и числено е намерена точката с локален максимум на масата за тази поредица. По този начин са получени параметрите P_{c^*} , ρ_{c^*} , c_{sc^*} , M_* и R_* за ОТО и 5 различни стойности на параметъра β на теорията от (73). Фитирането на данните спрямо функционалния вид (79) и (81) е посредством нелинеен метод на най-малките квадрати. Конкретните стойности на параметъра са $\beta = \{-5, -5.5, -6, -6.5, -7\}$.

Фиг. 12 показва основните фитове спрямо (79), получени от всички барионни УНС за ОТО и три от теориите с различни стойности на β . Пълните данни за параметрите на фитовете са налични в дисертацията, но на графиките са оставени само репрезентативни случаи, за да се подобри четимостта им.

От относителните грешки се вижда, че точността на фитата за всички стойности на СТТ параметъра е поне толкова добра, колкото и за ОТО. Точните стойности на средно квадратично отклонение и максимално отклонение за всяка теория са добавени в табличен вид в дисертацията. От графиките и табличните резултати се вижда, че параметрите имат значителни разлики в числените стойности между фитовете с различни стойности на β и ОТО. Въпреки, че универсалността е на лице, количествено тя е зависима от теорията и това би позволило добро различаване между алтернативни теории и ОТО, но и ограничение на параметрите на дадена алтернативна теория.

Отделно в дисертацията са дадени и всички данни с пълните налични УНС (включително небарионните такива). Коефициентите за тези случаи са много подобни, но средно-квадратичните грешки са много по-големи, за което допринасят небарионните УНС. Това се вижда най-ясно при фитиране на скоростта на звука в центъра. За по-добра четимост,

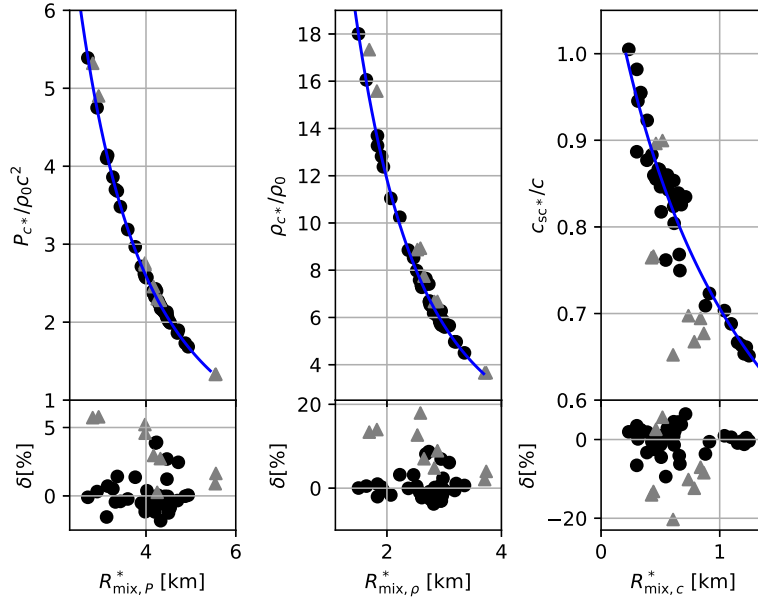


Фигура 12: $x_*(R_{\text{mix},x}^*)$ фитиране на (79) отляво надясно: ОТО (непрекъснатата крива), $\beta = -5$ (крива на точки), $\beta = -6$ (прекъснатата крива) и $\beta = -7$ (прекъснатата крива с точки) за скалярно-тензорната теория.

на Фиг. 13 е включена само една такава графика, която показва този ефект при $\beta = -6$, където са добавени различните УНС в различен цвят според това дали те са барионни или включват и небарионни съставки. В тази фигура $R_{\text{mix},x}^*$ зависи от параметрите на фита, така че x стойностите на всички точки са пресметнати спрямо оригиналните коефициенти (само за бариони), но това има значение само за визуализацията, не за числените стойности в таблиците на дисертацията.

Вторичните фитове във вида (81) за смесена променлива (82) от своя страна са показани на Фиг. 14 за барионните УНС. Отново, относителната грешка между фитовете за ОТО и СТТ са от един и същи порядък, показвайки, че СТТ спазват този тип универсални съотношения.

Таблиците с пълните данни за фитовете в дисертацията отново показват, че фитирането е много по-добро само с барионни уравнения на състоянието, особено в случая на скоростта на звука c_{SC^*} . Най-голямата грешка на фитирането се увеличава средно 4–5 пъти след добавяне на небарионните УНС. Същото се случва и за ОТО, така че ефектът не е породен от спецификата на СТТ. За всички теории и параметри, УНС QHC18 и QHC19 водят до най-голямо отклонение от универсалността, с почти 25 % относителна грешка за скоростта на звука. Премахването на небарионните УНС подобрява фитирането значително, като най-голямата грешка спада до около 5 %. Макар това подобрене да не е



Фигура 13: $x_*(R_{\text{mix},x_*}^*)$ фитиране на (79) на всички УНС при $\beta = -6$. Барионните УНС са показани като черни точки, а небарионните като сиви триъгълници.

толкова значително за фитирането на M_* и R_* все пак и при тях се вижда подобрене след премахване на небарионните УНС. Това ясно показва, че този тип универсални съотношения зависят силно от типовете УНС, които се използват. По-специфично, показва, че дори малко на брой небарионни УНС със силни фазови преходи водят до голяма загуба на точност за подобно универсално поведение. Тази загуба на точност не води до значителни промени на самите параметри на фитите, но увеличава значително техните средно-квадратични грешки, както се вижда във включените таблици с резултати в дисертацията.

След получаването на стойностите за фитите (79) и (81), различни връзки между характеристики на неутронните звезди могат да бъдат изобразени като ограничения на УНС или за ограничение върху теорията. В дисертацията е демонстрирано как може да се направи това, като се използва условието за причинност в ядрото на компакния обект и измерените най-масивни неутронни звезди до момента. Тези ограничения могат да се допълнят с други, на база на възможна максимална компактност или ограничения от наблюдения на сливанията на двойки компактни обекти.

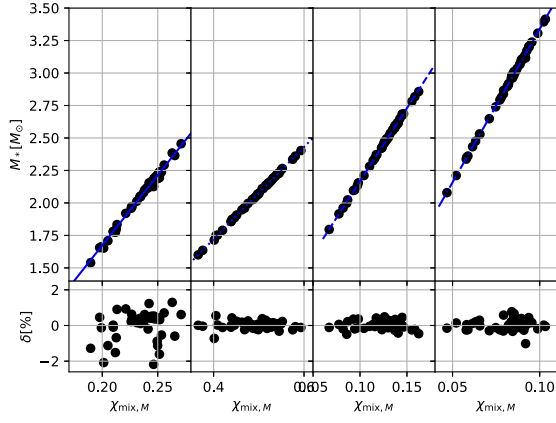
В случая на ограничението от причинност в ядрото, идеята е да се изобрази условието $c_{sc*}(1 \pm \epsilon_{f,c}) = 1$, където $f = \{MR, P\rho\}$ така че $\epsilon_{f,c}$ отговаря на някаква относителна грешка на фитирането $c_{sc*} = c_{sc*}(M_*, R_*)$ и $c_{sc*} = c_{sc*}(\rho_*, P_*)$ респективно за двете стойности на индекса. Предвид дефинициите (79) и (81), може да се покаже, че условието $c_{sc*} = 1$ е еквивалентно на региона между двете криви

$$\left(\frac{\rho_0 c^2}{P_{c*}}\right)^{\frac{1}{p_P}} + \cot \Phi_c \left(\frac{\rho_0}{\rho_{c*}}\right)^{\frac{1}{p_\rho}} = \frac{1}{\sin \Phi_c} \left[B_c + \frac{(1 \pm \epsilon_{P\rho,c})^{-\frac{1}{q_y}}}{A_c} \right] \quad (83)$$

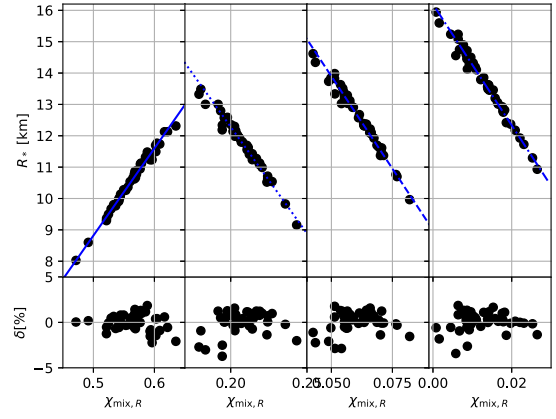
в равнината $\rho_{c*}-P_{c*}$ и региона между двете прави

$$M_* + R_* \cot \phi_c = \frac{1}{\sin \phi_c} \left[b_c + a_c (1 \pm \epsilon_{MR,c})^{\frac{1}{p_c}} \right] \quad (84)$$

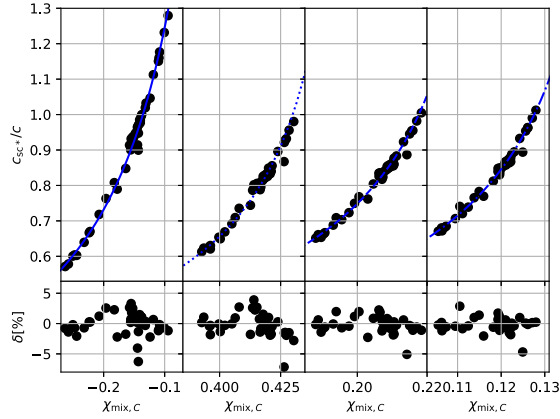
в равнината M_*-R_* .



(a) Mass M_* fits



(б) Radius R_* fits



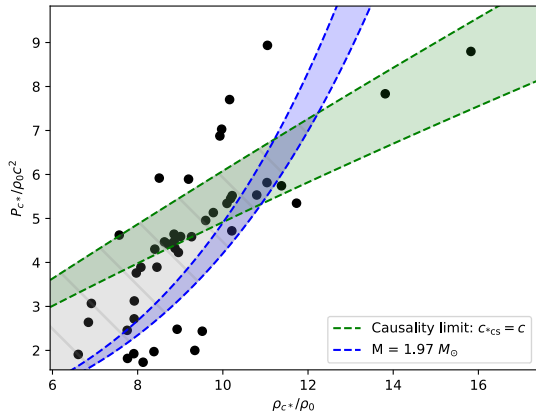
(в) Speed of sound c_{CS*} fits

Фигура 14: $y_*(\chi_{\text{mix}}, y_*)$ фитиране на (81) отляво надясно: ОТО (непрекъсната крива), $\beta = -5$ (крива на точки), $\beta = -6$ (прекъсната крива) и $\beta = -7$ (прекъсната крива с точки) за скаларно-тензорната теория.

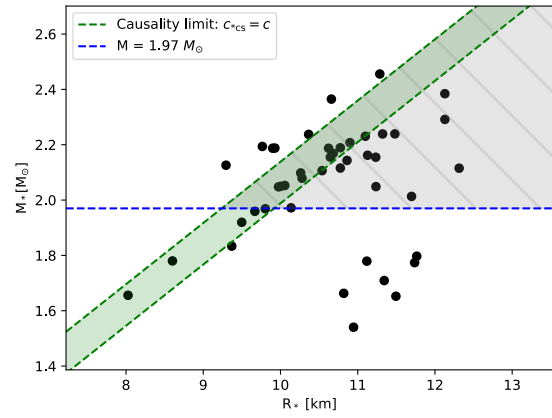
Относно максималната маса – можем да я изобразим директно $M_* > 1.97M_\odot$ на равнината M_*-R_* (отчитайки най-малката стойност спрямо грешката от измерванията). По сходен начин можем да преведем това ограничение върху равнината $\rho_{c*}-P_{c*}$, използвайки фитирането $M_* = M_*(\rho_*, P_*)$ с дадена максимална грешка $\epsilon_{P\rho, M}$. Условието за някаква максимална маса $M_* = \bar{M} = \text{const}$ се превръща в условие $M_*(\rho_*, P_*)(1 \pm \epsilon_{P\rho, M}) = \bar{M}$. То се получава лесно от (81) във вида

$$P_{c*} = \left[\frac{1}{\sin \Phi_M} \left(\frac{\bar{M}^{\frac{1}{q_M}}}{A_M} + B_M \right) - \left(\frac{\rho_0}{\rho_{c*}} \right)^{\frac{1}{p_\rho}} \cot \Phi_M \right]^{-p_P}. \quad (85)$$

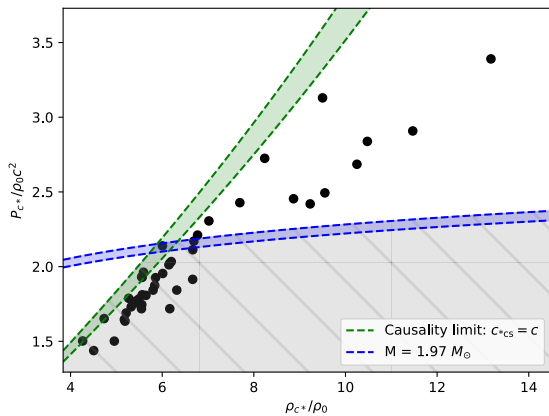
Всички ограничения от всяка от 6-те теории с различни стойности на β са получени и на двете равнини (радиус-маса и налягане-плътност). Ефектите за ОТО и $\beta = -5$ са показани на Фиг. 15. На фигурата и от дефиницията е очевидно, че по-големи грешки във фитирането водят до значително отслабване на ограниченията (т.е. повече УНС са позволени). Действително, ако се включат небарионните уравнения, грешките на фитирането са твърде големи и не може да се поставят ограничения по смислен начин, докато някои УНС са изключени дори само от тези две условия при само барионни УНС.



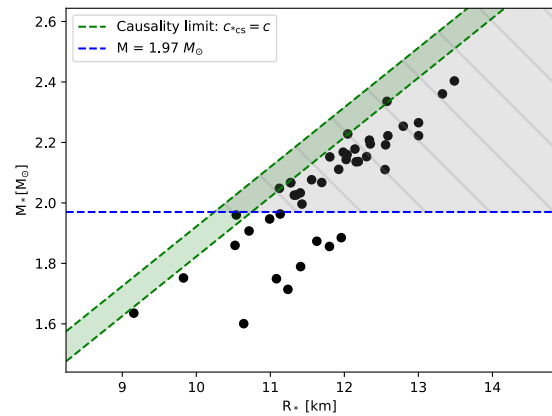
(a) GR restrictions in $P(\rho)$ plane



(б) GR restrictions in $M(R)$ plane



(в) $\beta = -5$ restrictions in $P(\rho)$ plane



(г) $\beta = -5$ restrictions in $M(R)$ plane

Фигура 15: Крайни ограничения върху равнините на маса-радиус и налягане-плътност при използване на само барионни УНС за ОТО и СТТ с $\beta = -5$. Зоната в сиво показва регионът, който е позволен на база на сечението между двете ограничения.

6.3 Коментари

Добре позната пречка при изучаването на алтернативни теории на гравитацията чрез неутронни звезди е неопределеността в уравнението на състоянието (УНС), което влияе значително на вътрешната им структура. Макар да е добре известно УНС за материя с плътност под ядрената, централните региони на компактните обекти стигат по-голяма плътност и точното състояние на материята там не може да се определи експериментално.

В дисертацията са потвърдени нов тип универсални съотношения в СТТ за величини около локалния максимум на масата за даден клон решения. Този тип съотношения са потвърдени за различни параметри на теорията без обозрима разлика в точността им за СТТ теории спрямо ОТО. По-интересното е, че позволяват да се различат теории с различни параметри по начин, който не зависи от УНС. Сумарният ефект от скаларно-тензорната теория спрямо ОТО може да се разбие в две части. Първо, скаларното поле води до допълнителна вътрешна енергия срещу колапс, която е пропорционална на стойността на β и позволява съществуването на обекти с по-голяма максимална маса. Вторият ефект, който следва от това, е че точката на максимална маса се достига при по-ниско налягане за по-високи стойности на параметъра на теорията β . Следователно, дори УНС, които нарушават условието за причинност в ОТО, могат да са позволени при стойности за този параметър по-малки от $\beta = -5$. Действително, за стойности $\beta < -6$ на практика

нито едно УНС от използваните 53 не може да бъде изключено като възможно на база на наблюденията.

Освен изследването на тези универсални съотношения извън ОТО, за пръв път са добавени небарионни УНС както в СТТ, така и в ОТО, за които се оказва, че точността на фитовете се влошава значително. В дисертацията са използвани общо 53 различни УНС, които позволяват богат анализ, тъй като включват както табулирани, така и политропни приближения на реалистични, както и няколко нереалистични УНС. Важното за добавката на небарионни УНС е, че самите стойности на коефициентите за нелинейните фитове не се променят значително, а само тяхното средно отклонение. От друга страна параметрите за СТТ теориите са значително по-различни от тези за ОТО, така че дори с по-голямата грешка на фита бихме могли да ги различим в обозримо бъдеще.

Накрая са получени ограничения на позволените УНС в равнините на маса-радиус и налягане-плътност на база на наблюдения и физическо изискване за причинност в центъра на обектите след налагане на универсалните съотношения като функционални зависимости с определената точност. В повечето случаи, обаче, само съотношенията с единствено барионна материя могат да дадат достатъчно добри ограничения, поради големите квадратични отклонения при добавянето на небарионна материя. Този метод може да се използва по няколко начина:

- При добре известна гравитационна теория, универсалните съотношения могат да се използват, за да ограничат физическите УНС на база на различни наблюдения или теоретични граници като максимална възможна маса или причинност. Това е от особено значение, тъй като много наблюдения в момента се интерпретират индиректно с допускане, че ОТО е правилната теория на гравитацията.
- В случай, че УНС е допълнително ограничено от експерименти в бъдеще, този тип отношения могат да се използват, за да се ограничат възможните стойности на параметъра β за конкретния клас СТТ. Новите експерименти със сблъсъци на тежки йони най-вероятно ще позволят подобно приложение в рамките на следващите няколко десетилетия.
- При наличие на нови, независими ограничения върху свойствата на компактните обекти в бъдеще, като например наблюдения в електромагнитни и гравитационни вълни, едновременно им прилагане може да ограничи възможните теории на гравитацията и УНС независимо. С други думи, възможно е да се окаже, че този тип ограничения не допускат цели региони на параметъра за което и да било УНС, но ограничават УНС за други региони на параметъра.

7 Ограничения върху скаларизация в теории на Гаус-Боне чрез наблюдения на бинарни пулсари

В дисертацията са получени първите строги ограничения върху скаларни Гаус-Боне (сГБ) теории посредством анализ на Бейс. По-специфично, ограниченията се получават от сравнение на еволюцията на орбиталния период за двойки пулсар – бяло джудже, породена от излъчване на гравитационни вълни. Статистическите заключения са достигнати чрез Монте Карло верига на Марков (МСМС), семплирайки параметрите на теорията, както и централното налягане на обектите и използвайки диполната и квадруполна формула за излъчване на гравитационни вълни в сГБ за сформирани на вероятностната функция.

Скаларизацията в този клас теории оригинално е разгледана в контекста на черни дупки, но е възможна и за неутронни звезди [65, 66, 67]. Подобен тип ограничения липсват в този клас теории до момента, поради което резултатите в дисертацията са значителни

за изследването им. Като наблюдения са използвани най-подходящите двойки пулсар – бяло джудже, които са използвани и за ограничението на скаларизацията в ДЕФ модела [68]. Пълните резултати са публикувани в [69].

7.1 Структурни уравнения и методология

Резултатите са получени в скаларна Гаус-Боне (сГБ) теория, описана в 2.3, в която са разгледани статични неутронни звезди с метрика (26). Използвайки перфектен флуид с тензор на енергията и импулса във вида (22) и предполагайки статичност и сферична симетрия за флуида и скаларното поле, полевите уравнения (15) и (16) водят до редуцирани уравнения за компактните обекти във вида

$$\frac{2}{r} \left[1 + \frac{2}{r}(1 - 3e^{-2\Lambda})\Psi_r \right] \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{(e^{2\Lambda} - 1)}{r^2} - \frac{4}{r^2}(1 - e^{-2\Lambda}) \frac{d\Psi_r}{dr} - \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = 8\pi G_* \rho e^{2\Lambda}, \quad (86)$$

$$\frac{2}{r} \left[1 + \frac{2}{r}(1 - 3e^{-2\Lambda})\Psi_r \right] \frac{d\Gamma}{dr} - \frac{(e^{2\Lambda} - 1)}{r^2} - \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = 8\pi G_* P e^{2\Lambda}, \quad (87)$$

$$\frac{d^2\Gamma}{dr^2} + \left(\frac{d\Gamma}{dr} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right) + \frac{4e^{-2\Lambda}}{r} \left[3 \frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} - \frac{d^2\Gamma}{dr^2} - \left(\frac{d\Gamma}{dr} \right)^2 \right] \Psi_r - \frac{4e^{-2\Lambda}}{r} \frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Psi_r}{dr} + \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = 8\pi G_* P e^{2\Lambda}, \quad (88)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{2}{r} \right) \frac{d\varphi}{dr} - \frac{2\lambda^2}{r^2} \frac{df(\varphi)}{d\Gamma} \left\{ (1 - e^{-2\Lambda}) \left[\frac{d^2\Gamma}{dr^2} + \frac{d\Gamma}{dr} \left(\frac{d\Gamma}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right) \right] + 2e^{-2\Lambda} \frac{d\Gamma}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} \right\} = 0, \quad (89)$$

където от (18) се получава

$$\Psi_r = \lambda^2 \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dr}. \quad (90)$$

Освен това, условието за хидростатично равновесие приема вида

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{d\Gamma}{dr}, \quad (91)$$

което както в ОТО следва от (19) при заместване на тензора за перфектен флуид. В цялата секция $\varphi = \varphi(r)$ се използва за скаларното поле в теорията. В оригиналния анзац на метриката (26), същата буква е използвана за ъглова координата, но не е променена, тъй като задачата е сферично-симетрична и тази координата не се използва.

От регулярност в центъра и изискването за асимптотична плоскост на време-пространството се получават условията

$$\Lambda|_{r \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad \frac{d\Gamma}{dr} \Big|_{r \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad (92)$$

$$\Lambda|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Gamma|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (93)$$

Водещата асимптотика на скаларното поле има вида

$$\varphi \approx \frac{D}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (94)$$

където скаларният заряд D е константа, която е директно свързана с излъчването на гравитационни вълни от бинарни системи, посредством (60), приложено за Гаус-Боне теорията, както е описано по-долу.

Съществуването и стабилността на скаларизирани неутронни звезди в класа сГБ теории е изследвано в [66]. За целите на изследването са използвани уравнения (86)–(89) със следната куплираща функция

$$f(\varphi) = \frac{\epsilon}{2\beta}[1 - \exp(-\beta\varphi^2)] \quad (95)$$

където $\beta > 0$ и $\epsilon = \pm 1$. Макар да съществуват скаларизирани неутронни звезди и за двата знака на ϵ , съществуването на статични скаларизирани черни дупки е възможно само за $\epsilon = 1$ [70]. Отрицателният знак на ϵ е свързан с т.нар. скаларизация индуцирана от въртене [71, 72], където стойността на скаларното поле става непренебрежима само при достатъчно големи скорости на въртене. За целта на изследването са получени различни решения за скаларизирани неутронни звезди при различните стойности на параметрите на теорията β и λ . Както вече е показано в [66], теорията клони към ОТО при $\beta \rightarrow \infty$. Следователно, за да се избегне нарастваща вероятност при все по-големи стойности на β в пространството от параметрите, за целите на анализа (95) е репараметризирана с обратния параметър $\kappa \equiv \beta^{-1}$ за всички числени пресмятания и крайни графики.

Макар да съществуват други възможни куплиращи функции, (95) е избрана пред алтернативите, поради стабилността на неутронните звезди и черните дупки за нея, което позволява транслирането на ограниченията към последните. Въпреки това, както показват други изследвания в този тип теории [73, 74], различни куплиращи функции биха довели до количествено подобни резултати, стига поведението им да е сходно спрямо съществуването и стабилността на скаларизирани компактни обекти.

В резултатите са използвани някои от най-новите измервания на набор от три двойки неутронна звезда – бяло джудже (НЗ-БД), които са описани в Таблица 1, следвайки стратегията в [68], за да получим ограничения в пространството $\kappa - \lambda$. Въпросните двойки са J0348+0432, J1012+5307 и J2222–0137, а числените стойности на параметрите за всяка система са в таблицата. Важно е да се отбележи, че въпросните пулсари се въртят с честота в диапазона 30-200 Hz, което е в режим на слабо въртене. Предвид това, дори статичните решения са добро приближение, имайки предвид общата неопределеност на изследването. Това е особено вярно за масите на обектите и скаларния заряд, където корекциите от въртене са от втора степен по ъгловата скорост, което не би довело до повече от 3 % поправка. По тази причина резултатите са получени за статични модели на скаларизирани неутронни звезди със сферична симетрия, което е направено и при изследването на ограниченията върху ДЕФ модела в [68].

Quantity	J0348+0432 values	J1012+5307 values	J2222–0137 values
Orbital Period (\bar{P}_b) in days	$0.102424062722 \pm 7 \times 10^{-12}$	$0.60467271355 \pm 3 \times 10^{-11}$	$2.445759995471 \pm 6 \times 10^{-12}$
Eccentricity (e)	$2.6 \times 10^{-6} \pm 9 \times 10^{-7}$	$1.2 \times 10^{-6} \pm 3 \times 10^{-7}$	$3.8092 \times 10^{-4} \pm 4 \times 10^{-8}$
Intrinsic \dot{P}_b^{int} in (fs.s ⁻¹)	-274 ± 45	-2.1 ± 8.6	-10 ± 8
NS to WD mass ratio $q \equiv m_p/m_c$	11.70 ± 0.13	10.44 ± 0.11	n/a
Pulsar mass m_p^{obs} in M_\odot	$*2.0065^{+0.0755}_{-0.0570}$	$*1.72^{+0.18}_{-0.17}$	1.81 ± 0.03
Observed WD mass m_c^{obs} in M_\odot	$0.1715^{+0.0045}_{-0.0030}$	0.165 ± 0.015	1.312 ± 0.009

Таблица 1: Физически параметри за системите НЗ–БД, използвани за получаване на ограниченията. Стойностите са получени от [75, 76, 77, 78, 79], където наблюдаваните производни по време са коригирани спрямо галактическия потенциал от [80]. Стойности маркирани с * не са директно наблюдавани, а са получени от останалите измервания.

В резултатите на дисертационния труд се вижда, че колкото по-масивен е един пулсар, толкова по-добро ограничение може да даде той върху теорията. Двойните системи от

Таблица 1 са избрани специфично заради точността на измерването на промяната в орбиталния период и масите на обектите. Макар вече да има измерена двойка с по-масивен пулсар J0740+6620 [81], за тази система все още няма директно измерен \dot{P}_b , което не позволява тя да се използва за получаване на ограничение. Както е показано още в [66], при по-голямо λ , бифуркацията на скаларизираните решения от ОТО решенията се получава при по-ниска маса. Следователно, неутронни звезди с по-малка маса като цяло могат да ограничат по-високи λ стойности и обратно. Това се вижда ясно в резултатите за трите двойки в следващата секция 7.2. Тъй като J0348+0432 съдържа най-масивния пулсар с добре измерена промяна на орбитата до момента, тази система дава най-добрите ограничения. Същата стратегия е възможно да бъде приложена в бъдеще при сходни измервания за НС–БД система с по-масивен пулсар. Имайки предвид, обаче, че максималната маса на неутронна звезда е малко над 2 слънчеви маси, очакваното подобрение не е значително.

За целите на анализа следваме теорема на Бейс с променливи на крайното разпределение $\vec{\zeta} \equiv (\kappa, \lambda)$. Хипотезата \mathcal{H} е сГБ теорията при дадени стойности на параметрите κ и λ . В Монте Карло веригата на Марков се интегрира по всички останали параметри, за да се достигне до крайно разпределение. За дадена система, диполната радиация се описва от 3 свободни параметъра: двата параметъра на теорията (κ, λ) и централното налягане P_c или централната плътност ρ_c на пулсара, приемайки, че всички останали орбитални данни като ексцентрицитет, орбитален период, т.н. са добре измерени. Централната стойност на скаларното поле φ_c се получава чрез метод на стрелбата от изискването за зануляване на скаларното поле на безкрайност $\varphi_\infty = 0$.

Веригата на Марков променя 3-те параметъра на базата на афинно-инвариантен семплер от споменатия Python пакет `emcee`, построен спрямо [37, 33] и описан в 4. Началното разпределение е хомогенно в региони на пространството (κ, λ) , където съществуват скаларизирани решения. P_c също се семплира хомогенно, но в диапазон, който би довел до наблюдаваните маси на съответните пулсари, отчитайки тяхната неопределеност от измерването. Структурните уравнения (86) – (89) се решават на всяка стъпка с адаптивен метод. Самата вероятностна функция се получава като се сравни наблюдаваната промяна на орбиталния период на бинарната система с получената в сГБ теорията за дадените параметри на МСМС стъпката. Следвайки [68], логаритмичната вероятност е зададена с

$$\ln \mathcal{L} \propto -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\dot{P}_b^{\text{int}} - \dot{P}_b^{\text{th}}}{\sigma_{\dot{P}_b}^{\text{obs}}} \right)^2 + \left(\frac{m_p/m_c - q}{\sigma_q^{\text{obs}}} \right)^2 \right], \quad (96)$$

където m_p и m_c са масите на пулсара и бялото джудже на системата, q е наблюдаваното отношение на масите, \dot{P}_b^{int} е наблюдаваната промяна на орбиталния период (след трансформация в отправна система на двойката), \dot{P}_b^{th} е предсказаната промяна от теорията, а σ_X^{obs} е неопределеността от измерването на съответната величина X . Вторият член в (96) се адаптира спрямо това дали отношението q и масата на бялото джудже m_c , или и двете маси от системата са измерени, както следва от Таблица 1. Орбиталната промяна и съответно промяната в периода на орбитата са доминирани от диполния скаларен и квадруполния тензорен членове, които са адаптирани от (60) и (58) респективно, променяйки диполния член за сГБ гравитация както следва

$$\dot{P}_b^{\text{dipole}} = -\frac{2\pi G_*}{c^3} g(e) \left(\frac{2\pi}{P_b} \right) \frac{m_p m_c}{m_p + m_c} \left(\frac{D}{m_p} \right)^2, \quad (97)$$

докато функциите $g(e)$ и $f(e)$ запазват оригиналните си дефиниции от (61) и (59). Освен това, в (58) се замества G с голата гравитационна константа G_* за ГБ теорията. Различните величини в (97) имат същото значение като еквивалентните за СТТ, единствено диполният заряд D е добавен, измерен в M_\odot . Следователно, за целите на симулациите,

промяната в периода се изчислява като $\dot{P}_b^{\text{th}} = \dot{P}_b^{\text{dipole}} + \dot{P}_b^{\text{quad}}$, използвайки получените резултати от (97) и (58).

7.2 Резултати

Всички числени резултати са получени с куплиращата функция (95) и обратния параметър $\kappa = \beta^{-1}$ за двата знака на ϵ . Навсякъде е работено в безразмерния параметър, дефиниран от размерната стойност чрез

$$\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{R_0}, \quad (98)$$

където $R_0 \cong 1.4766 \text{ km}$ е половината радиус на Шварцшилд за обект с една слънчева маса. Численото интегриране на уравненията на всяка стъпка се получава по метод на Дорманд-Принц [35] и метод на стрелбата на базата на различните асимптотични условия за φ_c and Γ_c , след което се намират масата и скаларния заряд от асимптотиката на крайното решение. Както е вече изследвано в [66], методът на стрелбата не винаги се сходя към решение лесно и за получаването на крайните резултати имаше нужда от ръчна намеса в това да се подберат правилните начални условия за различни региони на пространството от параметрите (κ, λ) .

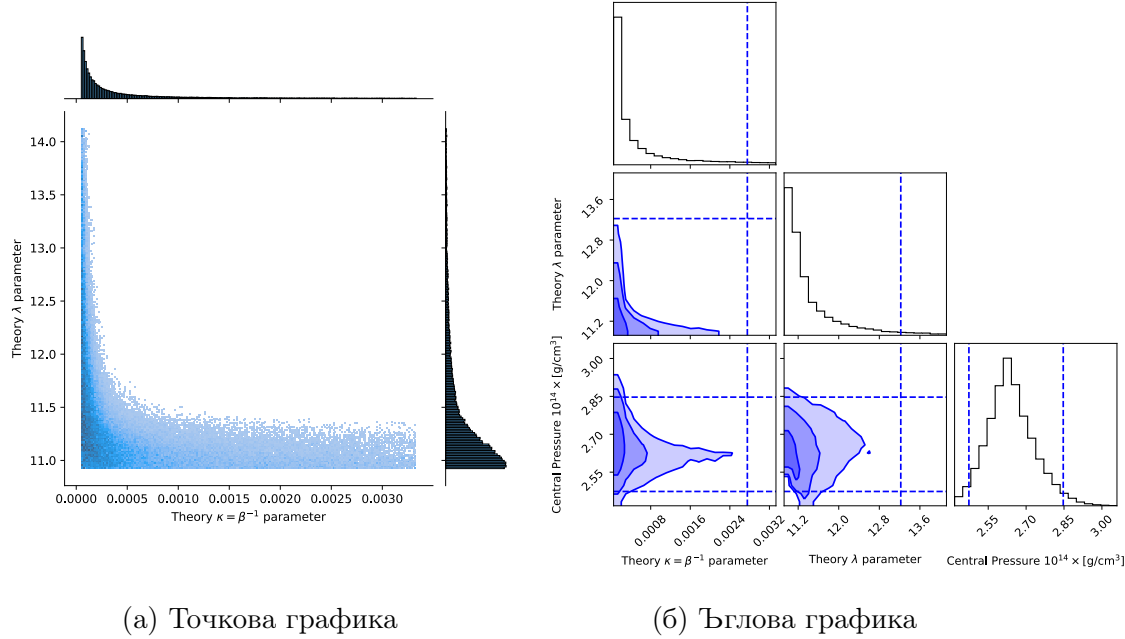
Всяко пускане на веригата на Марков (MCMC) от `emcee` използва общо 416000 точки, без да се използват началните "загриващи" точки, които са 41600 и чиято цел е да се забравят началните случайни условия в пространството от параметрите, които са избрани хомогенно. Семплирането е извършено паралелно с 32 процеса, като тази бройка е избрана заради масималния брой на тредове на машината. Тъй като случаят $\epsilon = 1$ е по-труден числено, там са използвани двойно повече точки. Макар това да не промени крайните резултати за ограниченията върху теорията (по-малко от 1% промяна спрямо началните опити), подобри качеството на графиките значително.

Границите на параметрите (κ, λ) са избрани на базата на няколко експеримента с поведението на крайните ограничения. $\kappa \rightarrow 0$, или еквивалентно $\beta \rightarrow \infty$ ни дава граничен преход към ОТО с отделно скаларно поле, но води до проблеми с численото интегриране, тъй като трябва да се интегрират уравненията със скаларно поле, клонящо към 0, което бързо достига до числената грешка на машината. От друга страна, получаването на решения за голяма стойност на κ също е по-трудно числено, тъй като клоновете от решения стават все по-къси и решенията се появяват само много близо до самата точка на бифуркация, както се вижда в [66]. В резултатите по-долу се вижда, че това са изцяло числени проблеми, и че могат да се намерят скаларизирани решения за произволно малки или големи стойности на κ . Все пак, тези ограничения налагат задаването на най-малка и най-голяма стойност, които да се приемат за ефективните гранични преходи. Изборът на тези стойности е направен така, че при удвояването на най-голямата стойност или намаляването на половина на най-малката стойност за κ , разликата в крайното ограничение да не надвишава 2%, което е много по-малка грешка спрямо грешката от неопределеност в УНС.

От друга страна, изборът на минимално λ е естествен, поради описаното поведение. За фиксирана маса на неутронната звезда m_p , намаляване на λ за дадено УНС ще доведе до критична точка $\lambda_{\text{bif}}(m_p)$, при която бифуркацията на скаларизирани решения от ОТО ще се случи точно върху m_p . Тази стойност зависи и от УНС, както се вижда по-долу, и характеризира най-малкото λ , за което пулсар с дадена маса m_p може да даде някакво ограничение, тъй като скаларизирани решения не биха могли да съществуват за по-малки стойности.

Резултати при $\epsilon = -1$

Резултатите за всеки МСМС анализ са представени по два начина: като точкова диаграма, която показва семплираните точки в пространството на параметрите и като т.нар. ъглови графики, които показват интервалите за различни кумулативни вероятности. Фиг. 16 е пример за тези типове визуализация на резултатите за един и същи МСМС анализ при УНС МРА1 с двойката J0348+0432 за $\epsilon = -1$.



Фигура 16: Сравнение между точкова и ъглова графики за УНС МРА1 и двойката НЗ–БД J0348+0432 при $\epsilon = -1$. Лявата графика показва директно семплираните точки в пространството на параметрите, докато дясната графика показва едностранните квантили за 95%, 80% и 65% кумулативна вероятност в различните двумерни сечения. Маргинализираните едномерни разпределения за всяка от величините са показани и на двете графики като хистограми.

Най-лесният начин за сравняване на различните ограничения е да се сравняват техните квантили. Разпределенията за всички двойки НЗ–БД са много сходни като форма и имат няколко общи характеристики. Във всички случаи, разпределението за централното налягане има максимум около очакваното централно налягане за дадената маса на пулсара в ОТО, както може да се очаква. Освен това, във всички случаи маргинализираните разпределения по κ и λ имат много сходна форма, намалявайки рязко с по-големи стойности и на двата параметъра и с максимални стойности около $\kappa = 0$ и $\lambda = \lambda_{\text{bif}}$ респективно. Формата на разпределението за κ е лесна за разбиране интуитивно, като се има предвид, че при по-ниските стойности на κ , решенията клонят по-близо до ОТО за все по-голям възможен диапазон от стойности на λ , което прави скаларизираните решения неразличими от стандартните ОТО решения за на практика всякакво λ при стойности $\kappa < 10^{-4}$. Действително, основната разлика между разпределенията при различни двойки и УНС е в това къде се появяват решенията, или с други думи къде е λ_{bif} , под която не можем да направим никакви заключения, както и горната граница за λ от разпределението. Поради това, в работата е прието, че λ_{bif} и 95% едностранен квантил за λ са правилните числени стойности, които характеризират добре ограничението за дадено УНС и дадена система НС–БД.

Двойка НЗ–БД	λ_{bif}	95% квантил за λ
J0348+0432	10.92	13.22
J1012+5307	13.33	14.59
J2222–0137	12.47	14.12

Таблица 2: Резултати за линията на бифуркация (λ_{bif}) и едностранния 95% квантил за трите пулсара с УНС МРА1 при $\epsilon = -1$.

Резултати за различни двойки НЗ–БД при $\epsilon = -1$

Таблица 2 обобщава резултатите за УНС МРА1, приложено в МСМС анализ с трите различни двойки при знак на куплиращата функция $\epsilon = -1$. От тези данни се вижда, че най-силното граничение идва именно от най-масивния пулсар сред тези в двойките.

Фиг. 17 показва как изглеждат точковите графики за МРА1 за всяка от 3-те системи и отразява суровите резултати, които водят до данните в Таблица 1. За всяка бинарна система (показана с различен цвят), прекъснатата линия показва точката на бифуркация λ_{bif} , под която не съществуват скаларизирани решения, докато точките на графиката са тези семплирани от МСМС процедурата и плътността им е директно пропорционална на крайната вероятност за дадената точка от пространството на параметрите. Регионите под прекъснатите линии не са оцветени, за да се подобри разбирането на графиката, но за всяка от системите – не е възможно да се даде ограничение под правата с респективния цвят. Маргинализираните разпределения за λ , получени за всяка от системите могат да се видят отъясно.

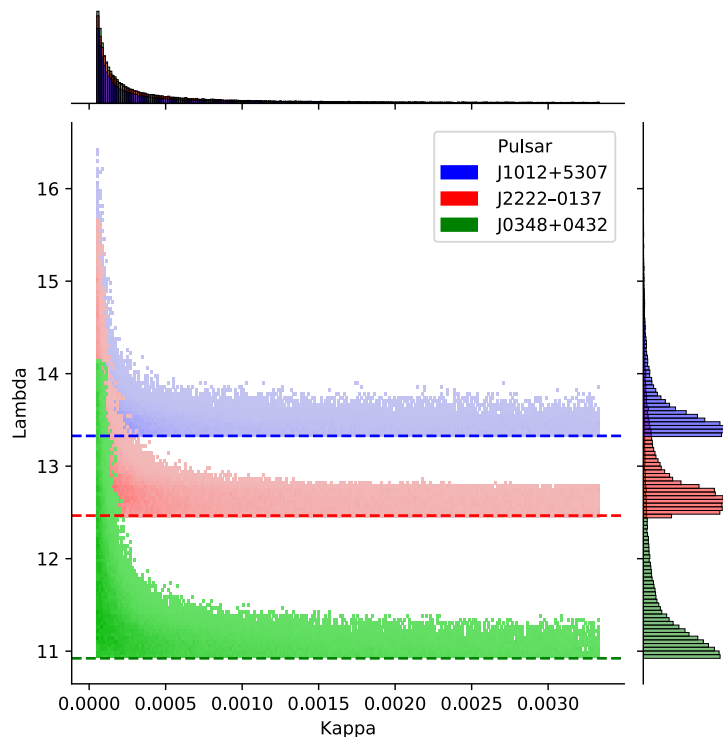
Както се вижда, трите двойни системи на практика изобщо не се комплементират една друга, тъй като ограниченията им почти нямат сечение. Докато J2222-0137 и J1012+5307 например, могат да дадат ограничение само за $\lambda > 12.5$, J0348+0432 почти изцяло ограничава региона $\lambda > 12$ и изцяло обезсмисля използването на останалите, освен при много малките стойности на κ .

Фиг. 17 показва, че най-силните ограничения от всички двойки НЗ–БД ще бъдат получени от J0348+0432 и няма да бъдат афектирани от добавянето на останалите двойки от Таблица 1. Това е причината да се продължи само с ограничен брой двойки, макар оригинално да бяха разгледани по-голям брой от списъка в [82]. При разглеждането на това как ограниченията се променят за различни УНС, ще използваме само системата с най-масивен пулсар J0348+0432, която ще даде най-големи ограничения.

Единственият по-масивен пулсар в система с бяло джудже, който потенциално може да даде по-големи ограничения е този от системата J0740+6620, която вече беше спомената. На база на измерените параметри в [81], неговата точка на бифуркация е $\lambda_{\text{bif}} = 10.26$. След измерване на \dot{P}_b , тази двойка може да подобри ограниченията с спрямо J0348+0432 с около 5%. Имайки предвид, обаче, че наблюденията в момента показват максимална маса на неутронните звезди не много по-голяма от две слънчеви маси, не може да се очаква значително подобрение над това.

Резултати за различни УНС при $\epsilon = -1$

След като беше показано, че най-масивният пулсар от J0348+0432 дава най-големите ограничения върху теорията, в дисертацията е изследвана и зависимостта от уравнението на състоянието. Таблица 3 показва данните за 10 различни УНС на база на мулти-политропни приближения от [8]. Използваните УНС са МРА1, APR3, APR4, ENG, H4, SLy, WFF1, WFF2, MS1 и MS1b. Останалите УНС от [8] не са използвани поради твърде малките им максимални маси, които не позволяват формирането на пулсар с масата на този в



Фигура 17: Сравнение на точката на бифуркация λ_{bif} (прекъснати прави) и семплираните точки от МСМС анализа за трите двойки пулсар–бяло джудже от Таблица 1 с УНС МРА1. Цветните региони за всяка бинарна система показват съществуване на скаларизирани неутронни звезди с диполна радиация, която не нарушава наблюдателните ограничения за дадената система. Регионът под прекъснатата права за дадената двойка не може да доведе до ограничение, тъй като е под точката на бифуркация и не съществуват скаларизирани неутронни звезди там. Макар това да е позволен регион, не е оцветяван за никоя от двойките, за да се избегне претрупване на цветовете.

J0348+0432 и по тази причина се считат за нереалистични.

Фиг. 18 показва границите на бифуркационната точка $\lambda = \lambda_{\text{bif}}$ (прекъснатата права) и семплираните точки от МСМС анализа като точкова графика за 8 от използваните УНС. Единствено данните за системата J0348+0432 са на графиката, тъй като тя води до най-силните възможни ограничения върху теорията. УНС MS1 и MS1b не са включени в графиката за по-добра визуализация, тъй като ограниченията от тях са при $\lambda_{\text{bif}} > 15$ и не подпомагат останалите за ограничаване на теорията.

Отново се вижда, че освен няколко УНС, регионите на взаимни ограничения са много малки. Най-силните ограничения идват от SLy и WFF1, като останалите УНС не водят до почти нищо допълнително на техния фон. Важно е да се отбележи, че интервалите от параметъра λ , където вероятността не е пренебрежима над точката на бифуркация са със сходни размери, както се вижда и от Таблица 3. От тук се вижда, че точката на бифуркация действително е от основното значение за крайните ограничения в пространството на параметрите (λ, κ) . Появата на бифуркацията, обаче, не е директно проследима до конкретни характеристики на УНС, които могат да се измерят числено. Основната зависимост, която се вижда, е че УНС, които поддържат по-голяма максимална маса, като цяло водят до по-малки ограничения върху λ . Имайки предвид това, не може да се очаква, че реалистично уравнение на състоянието може да подобри значително ограничението поставено от WFF1 на Фиг. 18.

УНС	λ_{bif}	95% квантил за λ
MS1	16.02	17.94
MS1b	15.79	17.73
MPA1	10.92	13.22
APR3	9.63	11.98
ENG	8.72	11.11
H4	8.60	10.83
APR4	7.67	9.99
WFF2	7.38	9.94
SLy	6.78	9.40
WFF1	6.34	8.93

Таблица 3: Резултати за линията на бифуркация (λ_{bif}) и едностранния 95% квантил за 10 различни УНС при анализ на двойката J0348+0432 с $\epsilon = -1$.

УНС	λ_{bif}	95% квантил за λ
MS1	34.51	35.35
MPA1	23.98	24.51
WFF1	14.78	15.51

Таблица 4: Резултати за линията на бифуркация (λ_{bif}) и едностранния 95% квантил за 3 репрезентативни УНС при анализ на двойката J0348+0432 с $\epsilon = 1$.

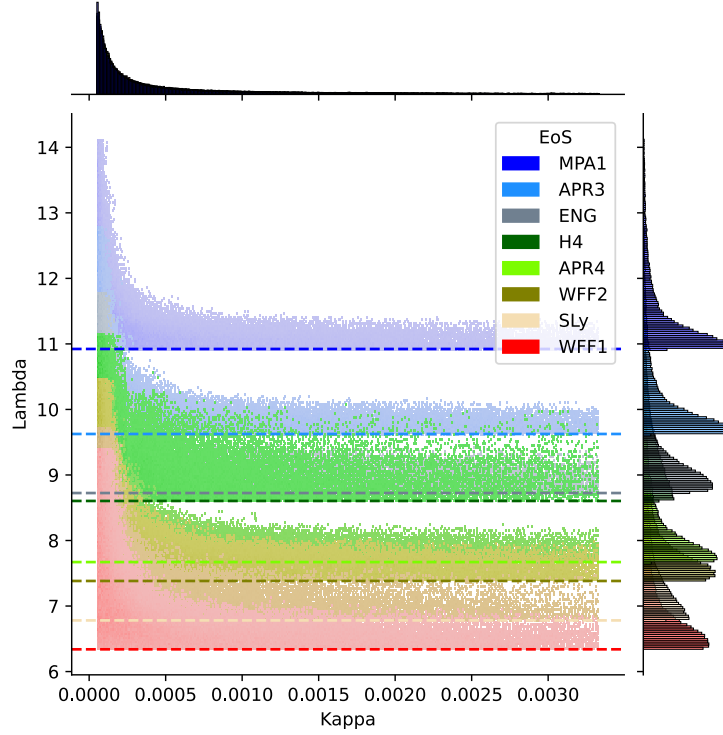
Резултати при $\epsilon = 1$

За разлика от случая $\epsilon = -1$, решенията при куплиращата функция с $\epsilon = 1$ с реалистични параметри спрямо наблюденията, са много по-трудни за намиране. Както показват фигурите по-долу, интервалите на позволени скаларизирани решения над точката на бифуркация λ_{bif} са много по-малки за този случай. Причината е, че диполната радиация за този знак на куплиращата функция е много по-силна и води до стойности за промяна на периода на орбитата, които са извън експерименталните граници, при стойности само около 4% над точката на бифуркация λ_{bif} за всички изследвани случаи.

Самите резултати за $\epsilon = 1$ отново са анализирани и визуализирани като точкови и ъглови графики. Тези за УНС MPA1 с данните за системата J0348+0432 са показани на Фиг. 19, за да се видят приликите и разликите спрямо аналогичната Фиг. 16. Веднага се вижда, че интервалът от възможни λ стойности е много по-малък и едностранният 95% квантил е много близо до правата на λ_{bif} (само около 4% над нея).

Имайки предвид по-трудното намиране на решения за $\epsilon = 1$ на куплиращата функция, изследвани са само няколко УНС със системата J0348+0432 за този случай. Резултатите за трите най-релевантни УНС са дадени в Таблица 4 в същия формат като резултатите от Таблица 3.

Фиг. 20 показва границите за точката на бифуркация $\lambda = \lambda_{\text{bif}}$ (прекъснати прави) и точковите графики от МСМС анализа на същите три УНС, отново използвайки само системата J0348+0432, тъй като тя води до най-големи ограничения. Както се вижда от маргинализираните графики на фигурата в дясно, регионите с позволени стойности на λ са много по-малки, спрямо тези при $\epsilon = -1$ от Фиг. 18. Причината за това, както беше коментирано по-горе, е много по-бързото нарастване на скаларен заряд (а от там и по-силната диполна радиация) на решенията при $\epsilon = 1$ спрямо тези при $\epsilon = -1$, което води до предсказана промяна на орбитата извън наблюдателния диапазон много по-бързо. Поради това, в случая на положително ϵ , основното ограничение идва директно от $\lambda =$



Фигура 18: Сравнение на точката на бифуркация λ_{bif} (прекъснати прави) и семплираните точки от MCMC анализа за J0348+0432, използвайки 8 реалистични УНС. Цветните региони за всяко УНС показват съществуване на скаларизирани неутронни звезди с диполна радиация, която не нарушава наблюдателните ограничения за дадената система. Регионът под прекъснатата права за даденото УНС не може да доведе до ограничение, тъй като е под точката на бифуркация и не съществуват скаларизирани неутронни звезди там. Макар това да е позволен регион, не е оцветяван за никое от уравненията на състоянието, за да се избегне претрупване на цветовете върху графиката.

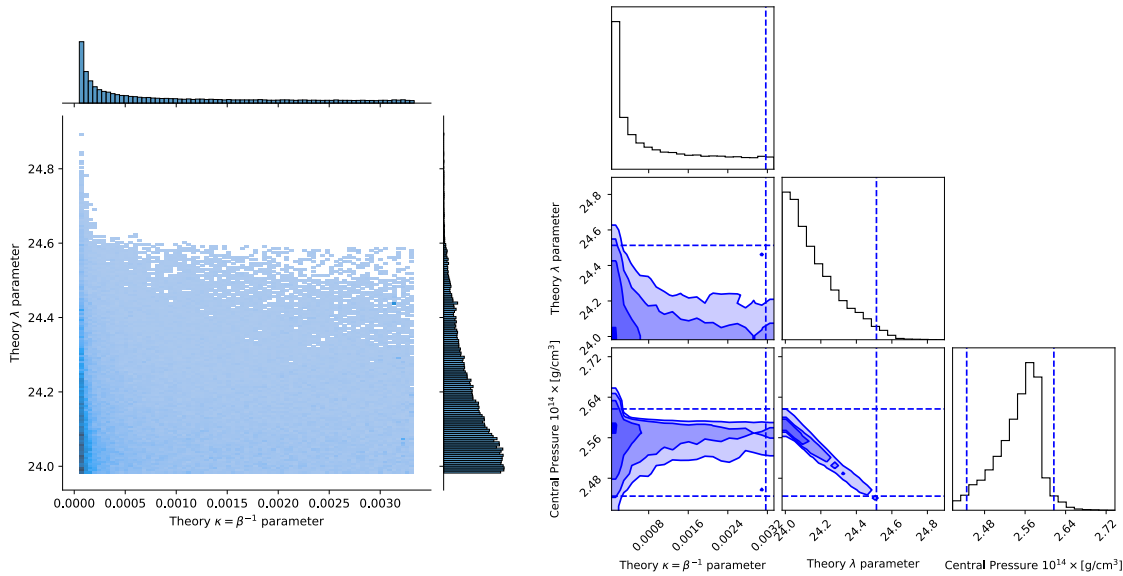
λ_{bif} , тъй като дори малко по-големи стойности за параметъра λ водят до нарушаване на наблюденията.

Както може да се установи от Таблица 4, стойностите на λ_{bif} и на едностранния 95% квантил са в рамките на 4% една от друга. Това показва, че случаят $\epsilon = 1$ се характеризира на практика изцяло от бифуркационната точка и няма никаква възможност различните УНС да се комплементират едно-друго при ограничение на параметрите. От друга страна, много по-големите числени стойности на λ_{bif} показват, че тази куплираща функция е по-малко ограничаваща спрямо параметъра на ГБ теорията.

Ограничения върху скаларизирани черни дупки при $\epsilon = 1$

За прехвърлянето на получените ограничения върху скаларизирани черни е използван отново параметъра β от (95) като по-стандартен. За дадени стойности λ и β може да съществува цял клон от скаларизирани черни дупки с маси от точката на бифуркация до пренебрежима такава (нула). В дисертацията са разгледани две основни характеристики на тези клонове: масата на черната дупка в точката на бифуркация, която е максимална за дадения клон и зависи само от λ , както и максималния скаларен заряд, който може да се получи за дадена точка от пространството на параметрите λ и β .

Фиг. 21 показва ограниченията от Таблица 4 нанесени върху максималния скаларен заряд и максималната маса на скаларизирани черни дупки в сГБ теорията за различните стойности на (β, λ) . Показаните ограничения са само за двете УНС с най-силно и най-слабо



(а) Точкова графика

(б) Ъглова графика

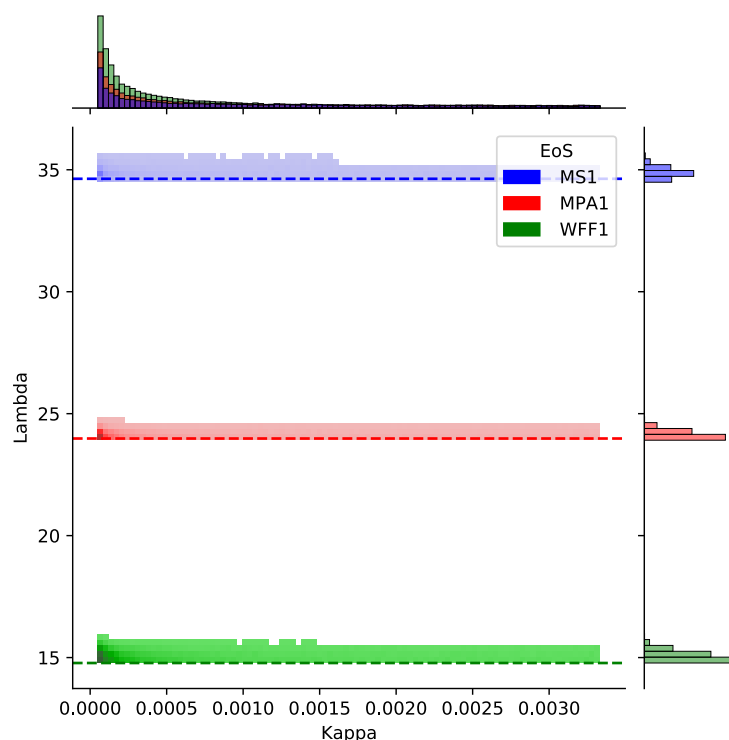
Фигура 19: Сравнение между точкова и ъглова графики за УНС МРА1 и двойката НЗ–БД J0348+0432 при $\epsilon = 1$. Лявата графика показва директно семплираните точки в пространството на параметрите, докато дясната графика показва едностранните квантили за 95%, 80% и 65% кумулативна вероятност в различните двумерни сечения. Маргинализираните едномерни разпределения за всяка от величините са показани и на двете графики като хистограми.

ограничение от същата таблица, респективно WFF1 и MS1.

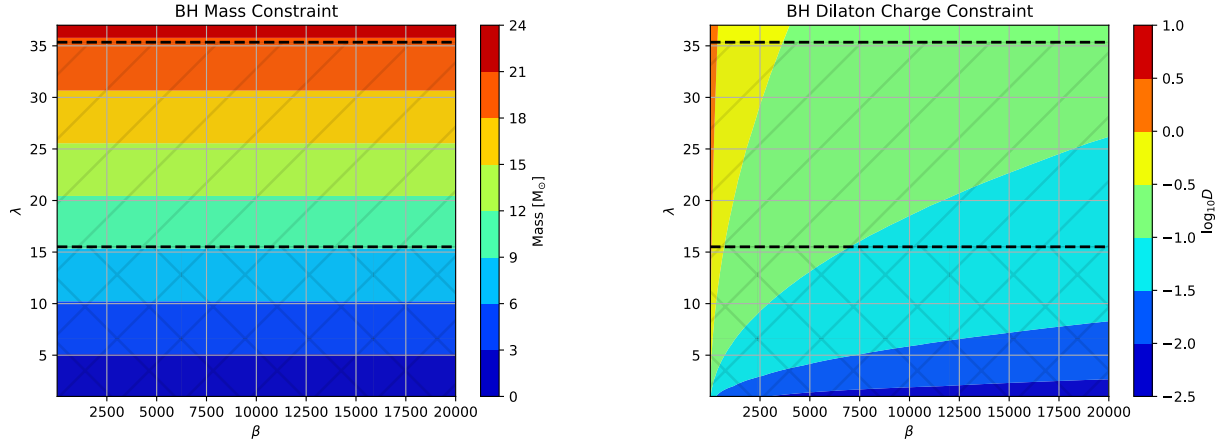
7.3 Коментари

Резултатите показват, че колкото по-масивен е един пулсар, толкова по-силни ограничения може да даде той върху сГБ теорията. Освен това, тези ограничения са силно зависими от УНС, но именно това е причината да са използвани 10 реалистични УНС, за да се изследва тази зависимост и как тя може да се отрази на ограниченията. На базата на резултатите и астрофизичните наблюдения спрямо максималната възможна маса за неутронна звезда, не се очаква значително подобрение на получените ограничения (не повече от около 10 %). Разбира се, тези резултати са валидни в сГБ теория с масивно скаларно поле. При наличие на маса, скаларният заряд е нула и няма да има скаларна гравитационна радиация, както при ДЕФ модела, което ще доведе до липса на ограничения от подобен тип измервания.

Имайки предвид получените ограничения върху параметрите за безмасовия случай, те са успешно прехвърлени върху ограничения за скаларизирани черни дупки и по-специфично ограничение върху тяхната максимална маса и максимален скаларен заряд. Получените резултати показват, че максималната маса на статична скаларизирана черна дупка е около $20M_{\odot}$ ако приемем голям набор УНС и около $9M_{\odot}$ ако се ограничим до УНС в по-реалистичен диапазон на твърдост спрямо данните от NICER и сливания на бинарни НЗ. Това на практика премахва възможността за скаларизация на поне две трети от сливанията на бинарни черни дупки, които са наблюдавани с гравитационни вълни до момента. Това означава, че дори да съществуват скаларизирани черни дупки в сГБ, те могат да бъдат наблюдавани в доста ограничен брой събития в близкото бъдеще. От друга страна, максималната стойност на скаларния заряд за тези обекти е доста по-слабо ограничена от измерванията.



Фигура 20: Сравнение на точката на бифуркация λ_{bif} (прекъснати прави) и семплираните точки от МСМС анализа за J0348+0432, използвайки 3 реалистични УНС. Цветните региони за всяко УНС показват съществуване на скаларизирани неутронни звезди с диполна радиация, която не нарушава наблюдателните ограничения за дадената система. Регионът под прекъснатата права за даденото УНС не може да доведе до ограничение, тъй като е под точката на бифуркация и не съществуват скаларизирани неутронни звезди там. Макар това да е позволен регион, не е оцветяван за никое от уравненията на състоянието, за да се избегне претрупване на цветовете на графиката.



(а) Максимална маса на черната дупка в M_{\odot} (б) Логаритъм на максималния скаларен заряд

Фигура 21: Сравнение между най-слабото и най-силното ограничение от системата J0348+0432 спрямо различните УНС с едностранен 95% квантил за интервала на λ . Маркираният регион с “x” показва частта от пространството, където нито едно от УНС не ограничават параметрите (т.е. не съществуват скаларизирани неутронни звезди). Маркираният регион с “/” показва къде поне едно от УНС задава ограничение върху параметрите (т.е. съществува скаларизация за поне едно УНС). Регионът без маркер е изключен като възможен на база на наблюденията.

Всички тези резултати са за сравнително обща форма на куплиращата функция. На база на резултати от сходни задачи, ограниченията не се очаква да се променят значително при промяна на формата на куплиращата функция със сходни качествени характеристики, които да позволят скаларизация и стабилност на решенията.

В рамките на дисертацията не са поставени ограничения върху скаларизация на черни дупки при $\epsilon = -1$. Причината е, че за този случай, единствено въртящи черни дупки могат да имат скаларен заряд при т.нар. скаларизация индуцирана от въртене. За изследването на този ефект трябва да се намерят решения за въртящи черни дупки в сГБ теорията и се появява още един свободен параметър – ъгловата скорост на черната дупка, което прави поставянето на ограничения значително по-трудно.

Приноси на дисертационния труд:

- За пръв път са изследвани бавновъртящи топологични неутронни звезди. Показано е, че този клас компактни обекти в тензор-мулти-скаларните теории (ТМСТ) на гравитацията спазват стандартни универсални съотношения, свързващи инерчния момент, масата и радиуса на обектите независимо от уравнението на състоянието. Освен това е показано, че параметрите на самите фитирания за универсалните съотношения са различни не само между ТМСТ и ОТО, но и между компактни обекти с различен топологичен заряд в ТМСТ. Въпросните изследвания са направени за две различни куплиращи функции. За едната от тях (монотонна функция на скаларното поле), е показано, че решенията са ограничени в много по-малка част от пространството на параметрите, и че универсалните съотношения за нея са на практика неразличими от ОТО. За другата куплираща функция (немонотонна функция на скаларното поле) е показано, че води до значителни разлики спрямо ОТО, от над 25 % относителна разлика.

- За пръв път са пресметнати числено важни свойства за акреция около топологични неутронни звезди като най-вътрешната стабилна кръгова орбита (ISCO), орбитални и епициклични честоти за различни статични и бавновъртящи конфигурации. Показано е, че всички тези свойства не водят до различни наблюдателни очаквания спрямо ОТО за монотонната куплираща функция. От друга страна, показано е, че може да има качествени разлики в поведението за немонотонната куплираща функция, които могат да се използват за наблюдателни характеристики на топологичните неутронни звезди след по-задълбочено изследване.

- Изследвани са нов клас универсални съотношения за маса, радиус и централно налягане/плътност/скорост на звука в локалния максимум на масата за даден клон от решения за скаларизирани неутронни звезди, като е показана тяхната валидност за пръв път в клас СТТ теории. Показано е, че параметрите на фитите на този клас универсални съотношения зависят силно от теорията и нейните параметри, и че могат да се използват потенциално за поставяне на ограничения върху уравненията на състоянието (УНС) или самите теории, според наблюдения и теоретични ограничения върху различни величини. Освен това е показана валидността на този нов клас универсални съотношения и при добавката на небарионни УНС, използвайки общо 53 УНС за различните фитове. Макар че универсалността се запазва, показано е, че точността на фитите се влошава значително при добавката на тези небарионни УНС.

- За пръв път са поставени силни ограничения върху скаларизацията на неутронни звезди в сГБ теории, използвайки наблюдения на двойни системи с неутронна звезда и бяло джудже. Тези ограничения са получени с две различни куплиращи функции на теорията и с помощта на 12 различни УНС чрез вероятностен анализ на Бейс. Вероятностната функция за ограничаването на параметрите е получена от разликата между предсказаната и наблюдаваната промяна в орбиталния период на системите, породени от излъчване на гравитационни вълни. Освен това, получените ограничения са прехвърлени върху скаларизирани черни дупки за една от куплиращите функции, която позволява скаларизация без черните дупки да са в режим на бързо въртене. Тези ограничения показват, че скаларизирани черни дупки в теорията не могат да надхвърлят около 10-20 слънчеви маси, според точните уравнения на състоянието. От друга страна, скаларният им заряд може да достигне сравнително големи стойности.

Публикации в реферируеми списания включени в дисертацията

Публикации в международни реферируеми списания

- Danchev, V. I., Doneva, D. D. & Yazadjiev, S. S., Slowly rotating topological neutron stars: universal relations and epicyclic frequencies. *Eur. Phys. J. C* **80**, 878 (2020)
- Danchev, V. I. & Doneva, D. D., Constraining the equation of state in modified gravity via universal relations. *Phys. Rev. D* **103**, 024049 (2021)
- Danchev, V. I., Doneva, D. D. & Yazadjiev, S. S., Constraining scalarization in scalar-Gauss-Bonnet gravity through binary pulsars. *Phys. Rev. D* **106**, 124001 (2022)

Благодарности

Бих искал да благодаря заедно на научния си ръководител проф. дфн. Стойчо Язаджиев и на научния си консултант д-р Даниела Донева за тяхната отдаденост, подкрепа и менторско отношение по време на докторантурата ми. Поотделно, бих искал да благодаря на проф. Язаджиев за многото уроци в различни аспекти на математическия апарат и спецификите на теоретичната физика още преди да започна докторантурата си, а на д-р Донева за споделените съвети и разбиране относно числени методи, които са ми помогнали да се придвижа напред в много случаи.

Искам да благодаря на всичките си колеги в ЕндуроСат за разбирането и подкрепата им през последните 3 години. Най-вече искам да благодаря на Райчо Райчев за неговите съвети и уроци по много теми, свързани с кариерното ми развитие, които са еднакво важни в бизнеса, науката и технологиите.

Бих искал да благодаря на семейството си за проявеното търпение и специфично на годеницата си Зехра Абдрахим, за нейното разбиране, непрестанна подкрепа и много полезни разговори по време на докторантурата ми. На родителите ми – благодаря ви, че запалихте искрата на любопитството в мен от много ранна възраст.

Бих искал също да благодаря на мои учители и ментори през годините, които имат най-големи заслуги за моето научно израстване и вдъхновение, настрана от научния ми ръководител: Петьо Николов, Никола Каравасилев, проф. Николай Витанов, доц. Христо Димов, д-р Стоян Писов и проф. Тодор Мишонов.

Също така бих искал да отдам специални благодарности на приятелите ми, които също са физици, и които са спомогнали за моето собствено разбиране на физиката чрез много разговори и дискусии (без специфична подредба): Елтон Шумка, Григори Матейн, Алберт Варонов, Господин Караиванов, Велизар Стоянов, Иван Цонев, Чавдар Данчев и Дейвид Едуин Алварез Кастило.

Накрая, бих искал да поднеса благодарности на д-р С. Пийт Уордън, който ме е вдъхновявал по време на всичките ни дискусии, и който продължава да ме вдъхновява с отдадеността си да направи човечеството междувъзвезден вид!

Литература

- [1] Richard Baum and William Sheehan. *In search of planet Vulcan : the ghost in Newton's clockwork universe*. Plenum Trade, New York, USA, 1997.
- [2] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farese. Tensor multiscalar theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 9:2093–2176, 1992.
- [3] M. Horbatsch, H. Silva, D. Gerosa, P. Pani, L. Gualtieri E. Berti, and U. Sperhake. Tensor-multi-scalar theories: relativistic stars and $3 + 1$ decomposition. *Class. Quant. Grav.* **32**, 204001, 2015.
- [4] Daniela D. D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev. Topological neutron stars in tensor-multi-scalar theories of gravity. *Phys. Rev. D* **101**, 064072, 2020.
- [5] P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, and E. Winstanley. Dilatonic black holes in higher curvature string gravity. *Phys. Rev. D*, 54:5049–5058, 1996.
- [6] K. S. Stelle. Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 16:953–969, 1977.
- [7] Wolfgang Pauli. Über den zusammenhang des abschlusses der elektronengruppen im atom mit der komplexstruktur der spektren. *Zeitschrift für Physik*, 31:765–783, 1925.
- [8] Jocelyn S. Read, Benjamin D. Lackey, Benjamin J. Owen, and John L. Friedman. Constraints on a phenomenologically parameterized neutron-star equation of state. *Phys. Rev. D*, 79:124032, 2009.
- [9] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374–381, Feb 1939.
- [10] Thomas Gold. Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources. *Nature*, 218:731–732, May 1968.
- [11] Thomas Gold. Rotating neutron stars and the nature of pulsars. *Nature*, 221:25–27, Jan 1969.
- [12] Jason W. T. Hessels, Scott M. Ransom, Ingrid H. Stairs, Paulo C. C. Freire, Victoria M. Kaspi, and Fernando Camilo. A radio pulsar spinning at 716 hz. *Science*, 311(5769):1901–1904, 2006.
- [13] Hidemi Komatsu, Yoshiharu Eriguchi, and Izumi Hachisu. Rapidly rotating general relativistic stars - I. Numerical method and its application to uniformly rotating polytropes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 237(2):355–379, 03 1989.
- [14] James B. Hartle. Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure. *Astrophysical Journal*, 150:1005, Dec 1967.
- [15] James B. Hartle. Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars. *Astrophysical Journal*, 153:807, Sep 1968.
- [16] James B. Hartle. Slowly rotating relativistic stars. *Astrophysics and Space Science*, 24:385–405, Oct 1973.
- [17] M. Feroci and LOFT Consortium. The Large Observatory for X-ray Timing (LOFT). *Experimental Astronomy*, 34:415–444, Oct 2012.

- [18] Robert Braun, T L Bourke, James A Green, Evan Keane, and Jeff Wagg. Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array. *PoS, AASKA14*:174, 2015.
- [19] A. V. Bilous, A. L. Watts, A. K. Harding, T. E. Riley, Z. Arzoumanian, S. Bogdanov, K. C. Gendreau, P. S. Ray, S. Guillot, W. C. G. Ho, and D. Chakrabarty. A nicer view of psr j0030+0451: Evidence for a global-scale multipolar magnetic field. *The Astrophysical Journal Letters*, 887(1):L23, dec 2019.
- [20] *Compact Stellar X-ray Sources*. Cambridge Astrophysics. Cambridge University Press, 2006.
- [21] J. M. Lattimer and B. F. Schutz. Constraining the equation of state with moment of inertia measurements. *ApJ* **629**, 979, 2005.
- [22] C. Breu and L. Rezzolla. Maximum mass, moment of inertia and compactness of relativistic stars. *MNRAS* **459**, 646, 2016.
- [23] D. D. Doneva, S. S. Yazadjiev, and K. D. Kokkotas. I-q relations for rapidly rotating neutron stars in f(r) gravity. *Phys. Rev. D* **92**, 064015, 2015.
- [24] Kalin V. Staykov, Daniela D. Doneva, and Stoytcho S. Yazadjiev. Moment-of-inertia-compactness universal relations in scalar-tensor theories and ∇^2 gravity. *Phys. Rev. D*, 93:084010, Apr 2016.
- [25] Daniela D. Doneva Dimitar Popchev, Kalin V. Staykov and Stoytcho S. Yazadjiev. Moment of inertia-mass universal relations for neutron stars in scalar-tensor theory with self-interacting massive scalar field. *Eur. Phys. J. C* **79**, 178, 2019.
- [26] D. D. Ofengeim. Universal properties of maximum-mass neutron stars: A new tool to explore superdense matter. *Phys. Rev. D*, 101:103029, May 2020.
- [27] Kent Yagi and Nicolás Yunes. Approximate universal relations for neutron stars and quark stars. *Physics Reports*, 681:1–72, 2017. Approximate Universal Relations for Neutron Stars and Quark Stars.
- [28] Eric Poisson and Clifford M. Will. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, New York, USA, 2014.
- [29] P. C. Peters. Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses. *Phys. Rev.*, 136:B1224–B1232, 1964.
- [30] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farese. Tensor - scalar gravity and binary pulsar experiments. *Phys. Rev. D*, 54:1474–1491, 1996.
- [31] Nicolás Yunes and Xavier Siemens. Gravitational-Wave Tests of General Relativity with Ground-Based Detectors and Pulsar Timing-Arrays. *Living Rev. Rel.*, 16:9, 2013.
- [32] Brian C. Seymour and Kent Yagi. Testing General Relativity with Black Hole-Pulsar Binaries. *Phys. Rev. D*, 98(12):124007, 2018.
- [33] Daniel Foreman-Mackey, David W. Hogg, Dustin Lang, and Jonathan Goodman. emcee: The MCMC Hammer. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, 125:306–312, 2013.
- [34] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, USA, third edition, 2007.

- [35] J.R. Dormand and P.J. Prince. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1):19–26, 1980.
- [36] Donald W. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):431–441, 1963.
- [37] Jonathan Goodman and Jonathan Weare. Ensemble samplers with affine invariance. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 5(1):65–80, January 2010.
- [38] Daniela D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev. Nontopological spontaneously scalarized neutron stars in tensor-multiscalar theories of gravity. *Phys. Rev. D* **101**, 104010, 2020.
- [39] Victor I. Danchev, Daniela D. Doneva, and Stoytcho S. Yazadjiev. Slowly rotating topological neutron stars: universal relations and epicyclic frequencies. *Eur. Phys. J. C* **80**, 878, 2020.
- [40] Lee Lindblom. Spectral representations of neutron-star equations of state. *Phys. Rev. D*, 82:103011, Nov 2010.
- [41] Victor I. Danchev and Daniela D. Doneva. Constraining the equation of state in modified gravity via universal relations. *Phys. Rev. D*, 103:024049, Jan 2021.
- [42] Thibault Damour and Gilles Esposito-Farèse. Nonperturbative strong-field effects in tensor-scalar theories of gravitation. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2220–2223, Apr 1993.
- [43] Compstar online supernovae equations of state. <https://compose.obspm.fr>. Accessed: 2022-12-24.
- [44] N. K. Glendenning and S. A. Moszkowski. Reconciliation of neutron-star masses and binding of the Λ in hypernuclei. *Phys. Rev. Lett.*, 67:2414–2417, Oct 1991.
- [45] Douchin, F. and Haensel, P. A unified equation of state of dense matter and neutron star structure. *A&A*, 380(1):151–167, 2001.
- [46] M Oertel, C Providência, F Gulminelli, and Ad R Raduta. Hyperons in neutron star matter within relativistic mean-field models. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 42(7):075202, jun 2015.
- [47] A. Akmal, V. R. Pandharipande, and D. G. Ravenhall. Equation of state of nucleon matter and neutron star structure. *Phys. Rev. C*, 58:1804–1828, Sep 1998.
- [48] H. Togashi, K. Nakazato, Y. Takehara, S. Yamamuro, H. Suzuki, and M. Takano. Nuclear equation of state for core-collapse supernova simulations with realistic nuclear forces. *Nuclear Physics A*, 961:78–105, 2017.
- [49] Gordon Baym, Tetsuo Hatsuda, Toru Kojo, Philip D Powell, Yifan Song, and Tatsuyuki Takatsuka. From hadrons to quarks in neutron stars: a review. *Reports on Progress in Physics*, 81(5):056902, mar 2018.
- [50] Gordon Baym, Shun Furusawa, Tetsuo Hatsuda, Toru Kojo, and Hajime Togashi. New neutron star equation of state with quark-hadron crossover. *The Astrophysical Journal*, 885(1):42, oct 2019.
- [51] H.S. Köhler. Skyrme force and the mass formula. *Nuclear Physics A*, 258(2):301–316, 1976.

- [52] B. K. Agrawal, S. Shlomo, and V. Kim Au. Nuclear matter incompressibility coefficient in relativistic and nonrelativistic microscopic models. *Phys. Rev. C*, 68:031304, Sep 2003.
- [53] Paweł Danielewicz and Jenny Lee. Symmetry energy i: Semi-infinite matter. *Nuclear Physics A*, 818(1):36–96, 2009.
- [54] L. Bennour, P-H. Heenen, P. Bonche, J. Dobaczewski, and H. Flocard. Charge distributions of ^{208}Pb , ^{206}Pb , and ^{205}Tl and the mean-field approximation. *Phys. Rev. C*, 40:2834–2839, Dec 1989.
- [55] P.-G. Reinhard and H. Flocard. Nuclear effective forces and isotope shifts. *Nuclear Physics A*, 584(3):467–488, 1995.
- [56] E. Chabanat. Ph.d. thesis: Interactions effectives pour des conditions extrêmes d’isospin. 1995.
- [57] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer. A skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities. *Nuclear Physics A*, 627(4):710–746, 1997.
- [58] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer, and R. Schaeffer. A skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities part ii. nuclei far from stabilities. *Nuclear Physics A*, 635(1):231–256, 1998.
- [59] J. Friedrich and P.-G. Reinhard. Skyrme-force parametrization: Least-squares fit to nuclear ground-state properties. *Phys. Rev. C*, 33:335–351, Jan 1986.
- [60] M. Baldo, I. Bombaci, and G. F. Burgio. Microscopic nuclear equation of state with three-body forces and neutron star structure. *Astronomy and Astrophysics*, 328:274–282, Dec 1997.
- [61] Douchin, F. and Haensel, P. A unified equation of state of dense matter and neutron star structure. *A&A*, 380(1):151–167, 2001.
- [62] T. Gaitanos, M. Di Toro, S. Typel, V. Baran, C. Fuchs, V. Greco, and H.H. Wolter. On the lorentz structure of the symmetry energy. *Nuclear Physics A*, 732:24–48, 2004.
- [63] V. Dexheimer and S. Schramm. Proto-neutron and neutron stars in a chiral $\text{su}(3)$ model. *The Astrophysical Journal*, 683(2):943, aug 2008.
- [64] Bombaci, Ignazio and Logoteta, Domenico. Equation of state of dense nuclear matter and neutron star structure from nuclear chiral interactions. *A&A*, 609:A128, 2018.
- [65] Hector O. Silva, Jeremy Sakstein, Leonardo Gualtieri, Thomas P. Sotiriou, and Emanuele Berti. Spontaneous scalarization of black holes and compact stars from a Gauss-Bonnet coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 120(13):131104, 2018.
- [66] Daniela D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev. Neutron star solutions with curvature induced scalarization in the extended Gauss-Bonnet scalar-tensor theories. *JCAP*, 04:011, 2018.
- [67] Rui Xu, Yong Gao, and Lijing Shao. Neutron stars in massive scalar-Gauss-Bonnet gravity: Spherical structure and time-independent perturbations. 11 2021.
- [68] Lijing Shao, Noah Sennett, Alessandra Buonanno, Michael Kramer, and Norbert Wex. Constraining nonperturbative strong-field effects in scalar-tensor gravity by combining pulsar timing and laser-interferometer gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. X*, 7(4):041025, 2017.

- [69] Victor I. Danchev, Daniela D. Doneva, and Stoytcho S. Yazadjiev. Constraining scalarization in scalar-gauss-bonnet gravity through binary pulsars. *Phys. Rev. D*, 106:124001, Dec 2022.
- [70] Daniela D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev. New Gauss-Bonnet Black Holes with Curvature-Induced Scalarization in Extended Scalar-Tensor Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 120(13):131103, 2018.
- [71] Alexandru Dima, Enrico Barausse, Nicola Franchini, and Thomas P. Sotiriou. Spin-induced black hole spontaneous scalarization. *Phys. Rev. Lett.*, 125(23):231101, 2020.
- [72] Daniela D. Doneva, Lucas G. Collodel, Christian J. Krüger, and Stoytcho S. Yazadjiev. Spin-induced scalarization of Kerr black holes with a massive scalar field. *Eur. Phys. J. C*, 80(12):1205, 2020.
- [73] Daniela D. Doneva, Stella Kiorpelidi, Petya G. Nedkova, Eleftherios Papantonopoulos, and Stoytcho S. Yazadjiev. Charged Gauss-Bonnet black holes with curvature induced scalarization in the extended scalar-tensor theories. *Phys. Rev. D*, 98(10):104056, 2018.
- [74] William E. East and Justin L. Ripley. Dynamics of Spontaneous Black Hole Scalarization and Mergers in Einstein-Scalar-Gauss-Bonnet Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 127(10):101102, 2021.
- [75] John Antoniadis et al. A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary. *Science*, 340:6131, 2013.
- [76] K. Lazaridis et al. Generic tests of the existence of the gravitational dipole radiation and the variation of the gravitational constant. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 400:805–814, 2009.
- [77] Y. J. Guo¹, P. C. C. Freire, et al. PSR J2222-0137. I. Improved physical parameters for the system. *A&A*, 654(A16):17, 2021.
- [78] D. Mata Sánchez, A. G. Istrate, M. H. van Kerkwijk, R. P. Breton, and D. L. Kaplan. PSR J1012+5307: a millisecond pulsar with an extremely low-mass white dwarf companion. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 494(3):4031–4042, 2020.
- [79] Hao Ding, Adam T. Deller, Paulo Freire, David L. Kaplan, T. Joseph W. Lazio, Ryan Shannon, and Benjamin Stappers. Very long baseline astrometry of PSR J1012+5307 and its implications on alternative theories of gravity. *Astrophys. J.*, 896(1):85, 2020. [Erratum: *Astrophys.J.* 900, 89 (2020)].
- [80] Paul J. McMillan. The mass distribution and gravitational potential of the Milky Way. *MNRAS*, 465:76–94, 2017.
- [81] E. Fonseca et al. Refined mass and geometric measurements of the high-mass psr j0740+6620. *The Astrophysical Journal Letters*, 915(1), July 2021.
- [82] Pulsar mass measurements and tests of general relativity. <https://www3.mpifr-bonn.mpg.de/staff/pfreire/NSmasses.html>. Accessed : 2021 – 12 – 28.