Софийски университет
„Св. Климент Охридски“

Факултет по Математика и
Информатика

Вариационен анализ без вариационни принципи

Стоян Райчев Апостолов

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация
за придобиване на образователната и научна степен
Доктор в професионално направление
4.5 Математика
Докторска програма "Математически Анализ"

Научен ръководител:

Проф. дн Надежда Костадинова Рибарска

София, 2022

Съвременният вариационен анализ може да се разглежда като съществено развитие на вариационното смятане с фокус върху оптимизационни задачи при различни ограничения, както и върху чувствителността и устойчивостта на такива задачи по отношение на пертурбации.

Една от най-характерните особености на съвременния вариационен анализ е неизбежното присъствие на негладкост, т.е. необходимостта от работа с недиференцируеми функции, множества с негладки граници и многозначни изображения. Една от причините за развитието на областта без съмнение е наблюдението, че недиференцируемите явления са по-разпространени и играят по-важна роля от гладките. Много фундаментални обекти, които често се появяват в контекста на вариационния анализ (напр. функцията разстояние, функциите, задаващи оптималната стойност в задачи от оптимизацията и оптималното управление, многозначните изображения, съпоставящи на дадена задача множеството от нейните решения и т.н.) са по природа негладки и нееднозначни, изискващи развитието на нови форми на анализ, които включват диференциране в обобщен смисъл.

Дори най-простите и исторически най-ранни задачи на оптималното управление по своята същност са негладки, за разлика от класическото вариационно смятане. Оптималното управление винаги е било основен източник на приложения, както и движеща сила за развитието на модерни методи от вариационния анализ и обобщеното диференциране.

След откриването на принципа на максимума на Понтрягин в зората на теорията на оптимално управление са установени разнородни версии на този резултат при различни технически предположения и с различни доказателства. Още през 1965 г. Дубовицки и Милютин осъзнават важността на изпъкналите приближения на затворени множества за получаване на необходими условия на оптималност за нелинейни задачи в оптимизацията. В поредица от статии (вж. например библиографията на [59]) съответните доказателства се основават на теореми за неотделимост на множества.

Класическото понятие за трансверзалност се прилага успешно като достатъчно условие в резултати за неотделимост. Трансверзалността първоначално е въведена и се изучава в областите на математическия анализ и диференциалната топология. В последните десетилетия намира приложение и във вариационния анализ. Както се посочва в [37], езикът на трансверзалността е изключително естествен и удобен в някои части на вариационния анализ, включително субдиференциалното смятане и негладката оптимизация, както и при доказване на достатъчни условия за линейна сходимост на алгоритъма на алтернативните проекции.

Класическото определение за трансверзалност в обща точка на две гладки многообразия в евклидово пространство изисква сумата от съответните допирателни пространства в общата точка да бъде цялото пространство (вж. [31], [32]).

За да докаже принципа за максимума на Понтрягин (вж. например библиографията на [59]), Хектор Сусман обобщава дефиницията за трансверзалност за затворени изпъкнали конуси в $\mathbb{R}^n$: конусите C^A и C^B наричаме трансверзални, когато

$$C^A - C^B = \mathbb{R}^n$$

и силно трансверзални, ако са трансверзални и $C^A \cap C^B \neq \{0\}$ (вж. дефиниции 3.1 и 3.2 от [59]). В крайномерния случай силната трансверзалност на апроксимиращите конуси от един и същи тип (Кларк или Болтянски) е достатъчно условие за локална неотделимост на множества. Множествата A, B, съдържащи точка x_0, наричаме локално отделими в x_0, ако съществува околност Ω на x_0, така че $\Omega \cap A \cap B = \{x_0\}$. В безкрайномерния случай силната трансверзалност на апроксимиращите конуси от един и същи тип не винаги влече локална неотделимост на множества, както е показано в следния пример.

Пример 1 ([10])**.** *Разглеждаме Хилбертовия куб*

$$A := \{(x_n) \in \ell_2 : \ |x_n| \le 1/n\} \subset \ell_2$$

и лъча $B := \{\lambda y : \ \lambda \ge 0\}$*, където* $y := (1/n^{3/4})_{n=1}^{\infty}$*. Изпълнено е, че съответните допирателни конуси на Кларк* $\widehat{T}_A(\mathbf{0}) = \ell_2$ *и* $\widehat{T}_B(\mathbf{0}) = B$

са силно трансверзални, докато множествата A и B са локално отделими в $\mathbf{0}$.

Съществуват различни свойства от тип трансверзалност, отразяващи различните нужди на възможните приложения. В литературата са разгледани много понятия, обобщаващи класическата трансверзалност, както и трансверзалността на конуси. Някои от тях са въведени под различни имена от различни автори, но всъщност съвпадат. Позоваваме се на [50] за преглед на терминологията и сравнение на наличните дефиниции. Централните сред тях са *трансверзалност* и *субтрансверзалност*. Те също така са обект на изследване в скорошната книга [38]. Една от причините за това е тясната връзка с метричната регулярност и субрегулярност.

Терминът субтрансверзалност е въведен наскоро в [29] във връзка с доказателството на линейна сходимост на алгоритъма на алтернативните проекции. Въпреки това, както беше казано по-рано, той съществува от повече от 20 години, но под различни имена - вижте забележка 4 в [50] и препратките там. Това е ключово предположение за два типа резултати: линейна сходимост на редици, породени от проектиращи алгоритми и достатъчно условие за регулярно сечение по отношение на граничния нормален конус и правила за смятане с гранични субдиференциали. Следните твърдения могат да се използват като еквивалентни дефиниции за трансверзалност и субтрансверзалност.

Твърдение 2 ([36],[47])**.** *Нека A и B са затворени подмножества на нормираното пространство X. Множествата A и B са трансверзални в $\bar{x} \in A \cap B$ тогава и само тогава, когато съществуват $K > 0$ и $\delta > 0$, такива че*

$$d(x,(A-a)\cap(B-b)) \le K(d(x,A-a)+d(x,B-b))$$

за всяко $x \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x})$ и всеки $a, b \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\mathbf{0})$.

Ако $a = b = 0$ в горното неравенство, то получаваме характеризация на свойството субтрансверзалност на A и B.

Друго забележително следствие на субтрансверзалността е получено в [10]. Оказва се, че субтрансверзалността влече общ резултат за неотделимост, който е ключов за получаване на необходими условия за оптималност от типа на принципа за масимума на Понтрягин (включително задачи за оптималното управление с безкрайномерно фазово пространство). Освен това субтрансверзалността е естествено предположение за доказване на абстрактно правило за множители на Лагранж.

Друго понятие за трансверзалност - тангенциална трансверзалност е въведено наскоро от Бивас, Кръстанов и Рибарска в [10]. Авторите достигат до изучаването на трансверзалност на множества при изследване на резултати от типа на принципа за максимума на Понтря3гин за задачи от оптималното управление с терминални условия в безкрайномерно фазово пространство.

Дефиниция 3 ([10]). *Нека A и B са затворени подмножества на метричното пространство X. Казваме, че A и B са тангенциално трансверзални в $\bar{x} \in A \cap B$, ако съществуват $M > 0$, $\delta > 0$ и $\eta > 0$, такива че за всеки две различни точки $x^A \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}) \cap A$ и $x^B \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}) \cap B$, съществуват редици $t_m \searrow 0$, $\{x_m^A\}_{m\geq 1}$ в A и $\{x_m^B\}_{m\geq 1}$ в B, такива че за всяко m е в сила*

$$d(x_m^A, x^A) \leq t_m M, \quad d(x_m^B, x^B) \leq t_m M, \quad d(x_m^A, x_m^B) \leq d(x^A, x^B) - t_m \eta\,.$$

Освен гореспоменатите резултати авторите извеждат и правила за смятане с допирателни конуси в Банахови пространства и някои връзки с масивността на множества. Много въпроси за тангенциалната трансверзалност остават отворени (виж [10], стр. 28).

Тези резултати мотивират едно от изследователските направления в дисертацията, което е свързано с прилагането на субтрансверзалността и тангенциалната трансверзалност за получаване на необходими условия за оптималност в термините на абстрактни множители на Лагранж.

Предизвикателството е да се провери предположението за субтрансверзалност в нетривиални ситуации. Нашата цел е да намерим някои условия, които са достатъчни за субтрансверзалност на две множества. Подходът, който прилагаме обаче, е да докажем тангенциална трансверзалност вместо субтрансверзалност. Обикновено тангенциалната трансверзалност е по-лесна за проверка от субтрансверзалността, когато е налична информация относно тангенциалната структура на множествата.

Представяме общо достатъчно условие за тангенциална трансверзалност (вж. теорема 27). Основната идея е, че в много случаи равномерността на локалната апроксимация на затворено множество може да се използва вместо подходящо предположение за компактност. Това е особено важно в безкрайномерния случай.

Демонстрираме полезността на получените общи резултати, като представяме някои приложения. Едно от тях е намирането на множител на Лагранж, когато едно от множествата е епиграфика на функция, която е Липшицова по една от променливите, равномерно спрямо другата.

Основното приложение, което получихме, всъщност беше отправната точка на това изследване. Това е добре известното в литературата условие на Обен от [17] за основната задача на вариационното смятане. Ние формулираме абстрактна (безкрайномерна) версия на това условие. Именно тя служи за отправна точка за останалите резултати в тази глава. Показваме, че ако функция (всъщност нейната епиграфика) удовлетворява това предположение и ограничението има специфична форма, може да се намери множител на Лагранж. Специфичната форма е съобразена с ограничението в основната задача на вариационното смятане, формулирана като безкрайномерна оптимизационна задача. Разбира се, доказателството използва нашия основен резултат. Струва си да се отбележи, че в нашата абстрактна теорема за съществуване на множители на Лагранж компактността на оператора, чиято графика определя ограничението, не е необходима. В нашето разсъждение е достатъчно да приемем, че образът на коригиращото множество под действието на оператора L е напълно ограничен в X. Всъщност случаят, когато L е интегралният оператор от $Y = L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ до $X = L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, може да бъде важен за бъдещи приложения на нашите резултати. Ясно е, че този оператор е ограничен, но не е компактен и изпраща слабо компактни множества в Y в напълно ограничени множества в X. Това позволява използването на слабо компактни множества като „кори-гиращи множества". За да мотивираме допълнително нашия основен резултат, показваме, че някои известни достатъчни условия за тангенциална трансверзалност могат да бъдат получени като частни случаи. Конкретно, получаваме Теорема 5.2, взета от [10], и Твърдение 3.3, взето от [11], като следствие от нашия основен резултат, Теорема 27. Освен това добре известното понятие за компактно епи-Липшицово множество е разширено за двойка затворени множества (вж. дефиниция 32) и е показано, че може да се използва и като достатъчно условие за тангенциална трансверзалност. Това изследване е развито в [45], където е доказано по-общо необходимо условие за оптималност, включващо мерки за некомпактност.

Още едно понятие за трансверзалност беше въведено наскоро от Друшвятски, Йоффе и Люис в [29]. То е междинно между субтрансверзалност и трансверзалност и служи като важно достатъчно условие за локална линейна сходимост на алтернативните проекции за решаване на крайномерни неизпъкнали задачи, за търсене на сечение.

Дефиниция 4 ([28],[29])**.** *Затворените множества $A, B \subset \mathbb{R}^d$ са присъщо трансверзални в точката $\bar{x} \in A \cap B$ тогава и само тогава, когато съществуват $\delta > 0$ и $\kappa > 0$, такива че за всяко $x^A \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}) \cap A \setminus B$ и $x^B \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}) \cap B \setminus A$ е в сила*

$$\max\left\{ d\left(\frac{x^A - x^B}{\|x^A - x^B\|},\, N_B\left(x^B\right)\right), d\left(\frac{x^B - x^A}{\|x^B - x^A\|}, N_A\left(x^A\right)\right)\right\} \geq \kappa\,,$$

където $N_D\left(\bar{x}\right)$ е проксималният или граничният нормален конус към D в точката $\bar{x}$.

Значението на присъщата трансверзалност постоянно нараства и редица изследователи разширяват тази концепция до по-общи постановки и изследват нейните преддуални и дуални характеризации. Тези понятия (които някои автори наричат „добри подреждания на множества") и връзките между тях са изучавани в детайли. Вижте, например, [22],[21], [20], [49] и литературата в тях. Все още някои аспекти не са добре разбрани. Действително, една от отправните точки на това изследване беше въпросът на Александър Йоффе за намирането на метрична характеризация на присъщата трансверзалност. Известни са различни характеризации на присъщата трансверзалност в различни постановки (Евклидови, Хилбертови, Асплундови, Банахови и нормирани линейни пространства), но всички те използват линейната структура на пространствата. Причината е, че изследователите са концентрирани основно върху дуалното пространство. Доколкото ни е известно, първата преддуална характеризация на присъщата трансверзалност е получена в [60], където структурата на Хилбертово пространство се предполага в повечето разглеждания.

Тези въпроси, заедно с неизяснената връзка между тангенциалната трансверзалност и присъщата трансверзалност, пораждат друга линия на изследване в дисертацията.

Резултатът от нашето изследване беше донякъде изненадващ: оказа се, че присъщата трансверзалност и тангенциалната трансверзалност са „почти“ еквивалентни. Освен това връзката е много лесна за установяване, като се има предвид характеризацията на присъщата трансверзалност чрез наклона на сдвояващата функция, установена от Йоффе и Люис. По този начин е получена преддуална характеризация на присъщата трансверзалност. Положихме значителни усилия за изясняване на точната връзка между тази характеризация и преддуалната характеризация на присъщата трансверзалност, получена от Тао и колектив в [60], което те наричат свойство $(\mathcal{P})$. Доказахме, че свойството $(\mathcal{P})$ влече нашата характеризация в постановка на общо Банахово пространство, а когато пространството е Хилбертово тя е еквивалентна на свойство $(\mathcal{P})$. Бихме искали да подчертаем, че свойството, което въвеждаме, е по-просто (или поне изглежда по-просто) от свойството $(\mathcal{P})$ - участват по-малко променливи.

Установяването на точната връзка между присъщата трансверзалност и тангенциалната трансверзалност ни помогна да получим преддуални инфинитезимални характеризации на трансверзалност и субтрансверзалност, близки по природа до тангенциалната трансверзалност. По този начин, въпреки че дефинициите и мотивациите за четирите свойства от тип трансверзалност, които разглеждаме, не си приличат, ние получихме характеризации по унифициран начин за всички тях. Това прави очевидни техните близки връзки от една страна, и различията им, от друга страна. Наистина, сега е очевидно, че

$$\text{трансверзалност} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{тангенциална}\\ \text{трансверзалност}\end{array} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c}\text{присъща}\\ \text{трансверзалност}\end{array} \Longrightarrow \text{субтрансверзалност}$$

и нито една от импликациите не е обратима. Тази йерархия на свойствата и техните характеризации хвърля нова светлина върху темата. Известни са преддуални достатъчни условия и преддуални необходими условия за трансверзалност и субтрансверзалност, но няма преддуални характеризации (вижте [21] и [22]). Връзката на нашата характеризация с тези условия е много подобна на връзката между нашата характеризация на присъща трансверзалност и свойство $(\mathcal{P})$ - ние работим с по-малко точки, което прави ситуацията по-проста. След като получим характеризации на тези понятия за трансверзалност по унифициран начин, ние продължаваме да изследваме понятията за регулярност. Получаваме характеризация на свойството на метричната регулярност на многозначно изображение в термините на свойството трансверзалност на множества, асоциирани с графиката на многозначното изображение. Показваме директно, че може да се прехвърлят резултати за субтрансверзалност към резултати за метрична субрегулярност и от трансверсалност към метрична регулярност. Подобни резултати вече са получени в [21], [22] и [14], но там не е ясно формулирана такава взаимозаменяемост. Освен това представяме доказателства за някои известни преддуални характеризации на концепциите за регулярност, като използваме вече изведените характеризации на техните аналози за трансверзалност. Също така показваме как лесно могат да се получат от тези резултати характеризации на метричната регулярност чрез *вариация от първи ред* и *графична производна.*

В последната глава на дисертацията разглеждаме непрекъснатост на изображението на оптималната стойност за абстрактна отпимизационна задача в метрично пространство, където множеството, върху което минимизираме функцията, варира, т.е. зависи от параметър. По-конкретно се занимаваме с функцията

$$S_{\text{val}}(p) := \inf\{g(y) \mid y \in D(p)\},$$

където X и Y са метрични пространства, $D : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение, а $g : Y \to \mathbb{R}$ е функция. Класическата Максимум теорема на Берж ([9]) (в по-общата постановка на топологични пространства) разглежда случая, когато g също зависи от p. Тя твърди, че когато g е непрекъсната (върху $X \times Y$) и D приема компактни стойности и е непрекъснато в $\bar{p} \in X$, то S_{val} е непрекъсната в $\bar{p}$. Тази теорема и резултатите от този тип намират широко приложение в математическата икономика и оптималното управление.

Друга версия на този резултат се дължи на Бердишев ([8]), където се изисква така наречената t-непрекъснатост (която е по-силна от добре познатата непрекъснатост на Помпею-Хаусдорф) за многозначното изображение D (вж. Теорема 41). Резултатът на Бердишев също показва, че когато пространството е метрично и g е равномерно непрекъсната върху Y, непрекъснатостта на Помпею-Хаусдорф е достатъчна, за да се докаже непрекъснатостта на S_{val}. Съответните дефиниции са изложени в явен вид в главата.

Обобщения на класическата теорема на Берж, които разглеждат различни условия за добре поставеност на функцията върху множеството, където се минимизира, които също гарантират непрекъснатост на функцията на оптималната стойност, могат да бъдат намерени в книгата на Лукети ([53]). Подробна дискусия по тази тема има и в книгата на Дончев и Цолеци ([27]).

Мотивацията за нашите изследвания по този въпрос беше Теорема 5 от Глава IX, Секция 1, в [27], която гласи следното

Теорема 5 ([27])**.** *Да предположим, че за някоя точка $\bar{p}$ от топологичното пространство X, D е непрекъснато в $\bar{p}$ и g е непрекъсната върху $D(\bar{p})$. Тогава S_{val} е непрекъснато в точката $\bar{p}$.*

В [27] обаче не е ясно посочено какъв вид непрекъснатост имат предвид авторите и това може да доведе до объркване. Показваме с пример, че теоремата е невярна, ако предположената непрекъснатост на изображението D е в смисъла на Помпею-Хаусдорф в случая на метрични пространства. Забележете, че в [27] пространствата са топологични (както в теорема 1.1), така че е разумно да се приеме, че топологичната дефиниция на непрекъснатостта е била предполагана. Все пак това не е ясно посочено. Основната цел на тази глава от дисертацията е да разгледа този въпрос (в случая на метрични пространства), а именно кога Теорема 5 е валидна и кога не, и в последния случай да посочим допълнително допускане, при което тя е в сила. Ние изследваме взаимодействието между свойствата на непрекъснатост на f и D, които ще гарантират непрекъснатост на S_{val}. Формулираме условие за непрекъснатост, което зависи едновременно от f и от D, което наричаме Relaxed uniform continuity assumption, (**RUCA**). Показваме, че това е достатъчно за непрекъснатост на S_{val}, но в известен смисъл също е и необходимо. Освен това коментираме как по-ранните резултати се вписват естествено в нашия подход.

В цялата дисертация избягваме използването на вариационни принципи, въпреки че някои от нашите резултати биха могли да бъдат получени и по този начин. Ние обаче предпочитаме да разчитаме повече на геометричната интуиция, която според нашите разбирания прави резултатите и техните доказателства по-естествени и добре мотивирани.

Глава 2 съдържа необходимите предварителни сведения.

В **Глава 3**, *Секция 1* получаваме една преддуална характеризация на понятието субтрансверзалност. В статиите [22] и [21] (вж. Забележка 3.5 в [22]) са представени подобни условия и е доказано, че тези условия са характеризации (едновременно необходими и достатъчни) само в изпъкналия случай.

Нашият подход е донякъде мотивиран от разглежданията в статията [10]. В нея понятието тангенциална трансверзалност (3) е въведено като достатъчно условие за неотделимост на множества, правила за смятане с тангенциални конуси и правило за множители на Лагранж.

Сега въвеждаме по-слабо понятие. Да обърнем внимание, че основната разлика е, че "съществува редица $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ от положителни реални числа, клоняща към нула, така че за всяко t_n, принадлежащо на нея ..."се заменя със " съществува положително реално θ, такова, че ...". Това наистина е значителна разлика, както ще бъде изяснено по-късно. Другото отслабване в дефиницията, „$\bar{x} \in A \cap B$" до "$A \cap \bar{\mathbf{B}}_{\frac{\delta}{2(1+2M)}}(\bar{x}) \neq \varnothing$, $B \cap \bar{\mathbf{B}}_{\frac{\delta}{2(1+2M)}}(\bar{x}) \neq \varnothing$", е по чисто технически причини.

Дефиниция 6. *Нека A и B са затворени подмножества на метричното пространство X и $\bar{x} \in X$. Казваме, че A и B притежават свойство $(\mathcal{T})$ в точката $\bar{x}$, ако съществуват $\delta > 0$ и $M > 0$, такива че $A \cap \bar{\mathbf{B}}_{\frac{\delta}{2(1+2M)}}(\bar{x}) \neq \varnothing$, $B \cap \bar{\mathbf{B}}_{\frac{\delta}{2(1+2M)}}(\bar{x}) \neq \varnothing$ и за всяко $x^A \in A \cap \bar{\mathbf{B}}_{\delta}(\bar{x})$ и $x^B \in B \cap \bar{\mathbf{B}}_{\delta}(\bar{x})$, за които $x^A \neq x^B$, съществуват $\theta > 0$, $\hat{x}^A \in A$ и $\hat{x}^B \in B$, такива че*

$$d(x^A, \hat{x}^A) \leq \theta M \ , \quad d(x^B, \hat{x}^B) \leq \theta M \quad \text{и} \quad d(\hat{x}^A, \hat{x}^B) \leq d(x^A, x^B) - \theta \ .$$

Еквивалентно, A и B притежават свойство $(\mathcal{T})$ в точката $\bar{x}$ тогава и само тогава, когато съществуват $\delta > 0$ и $M > 0$, такива че $A \cap \bar{\mathbf{B}}_{\frac{\delta}{2(1+2M)}}(\bar{x}) \neq \varnothing$, $B \cap \bar{\mathbf{B}}_{\frac{\delta}{2(1+2M)}}(\bar{x}) \neq \varnothing$ и за всяко $x^A \in A \cap \bar{\mathbf{B}}_{\delta}(\bar{x})$ и $x^B \in B \cap \bar{\mathbf{B}}_{\delta}(\bar{x})$, за които $x^A \neq x^B$, съществуват $\hat{x}^A \in A$ и $\hat{x}^B \in B$, такива че

$$d(\hat{x}^A, \hat{x}^B) \leq d(x^A, x^B) - \frac{1}{M} \max\{d(x^A, \hat{x}^A), d(x^B, \hat{x}^B)\}$$

и $\max\{d(x^A, \hat{x}^A), d(x^B, \hat{x}^B)\} > 0$.

Лемата по-долу е основният технически резултат, чиито директни следствия дават възможност за използване на горната дефиниция.

Лема 7. *Нека A и B са затворени подмножества на пълното метрично пространство X и $\bar{x} \in X$. Нека A и B притежават свойство $(\mathcal{T})$ в точката $\bar{x}$ с константи δ и M. Нека $x^A \in A$, за което $d(x^A, \bar{x}) \leq \dfrac{\delta}{1+2M}$ и $x^B \in B$, за което $d(x^B, \bar{x}) \leq \dfrac{\delta}{1+2M}$. Тогава съществува $x^{AB} \in A \cap B$, такова че*

$$d(x^{AB}, x^A) \leq Md(x^A, x^B) \text{ и } d(x^{AB}, x^B) \leq Md(x^A, x^B)\,.$$

Пълнотата е ключова в горната лема. Следващата теорема е формулирана по начин, който ни дава възможност да получим предду-ални характеризации както за субтрансверзалност, така и за трансверзалност.

Теорема 8. *Нека A и B са затворени подмножества на пълното метрично пространство X и $\bar{x} \in X$. Ако A и B притежават свойството $(\mathcal{T})$ в точката $\bar{x}$, тогава съществуват $K > 0$ и $\delta > 0$, такива че*

$$d(x, A \cap B) \leq K(d(x, A) + d(x, B)) \tag{1}$$

за всяко $x \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x})$.

Ако съществуват $K > 0$ и $\delta > 0$, такива че (1) е изпълнено за всяко $x \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x})$, $A \cap \bar{\mathbf{B}}_{\frac{\delta}{4K+10}}(\bar{x}) \neq \varnothing$ и $B \cap \bar{\mathbf{B}}_{\frac{\delta}{4K+10}}(\bar{x}) \neq \varnothing$, тогава A и B притежават свойството $(\mathcal{T})$ в точката $\bar{x}$.

Като следствие получаваме, че свойството $(\mathcal{T})$ ни дава еквивалентна характеризация за субтрансверзалност при наличие на пълнота.

Следствие 9. *Ако $\bar{x} \in A \cap B$, където A и B са затворени подмножества на пълното метрично пространство X, то A и B притежават свойството $(\mathcal{T})$ в точката $\bar{x}$ тогава и само тогава, когато A и B са субтрансверзални в точката $\bar{x}$.*

За формулировката на някои резултати по-нататък, ще имаме нужда от следната дефиниция.

Дефиниция 10 ([28]). *За подмножества A и B на метрично пространство X, така нарчената "сдвояваща функция" $\phi : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ се дефинира чрез*

$$\phi(x, y) = \delta_A(x) + d(x, y) + \delta_B(y)\,,$$

където

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in S \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

е индикаторната функция на множеството S.

Следващото твърдение е преформулировка на Следствие 9.

Твърдение 11. *При наличие на пълнота на пространството X множествата A и B са субтрансверзални в точката $\bar{x}$ тогава и само тогава, когато съществуват $\delta > 0$ и $\kappa > 0$, такива че за всяко $x \in A \cap \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x})$ и $y \in B \cap \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x})$, $x \neq y$ е изпълнено, че*

$$|\nabla\phi|^\diamond(x, y) = \sup_{(u,v)\neq(x,y)} \frac{\max\{\phi(x, y) - \phi(u, v), 0\}}{d((x, y), (u, v))} \geq \kappa.$$

В *Секция 2*, използваме резултатите от Секция 1, за да получим преддуална характеризация на трансверзалността. Директно следствие от дефиницията за трансверзалност и Теорема 8 е характеризацията за трансверзалност в термините на "транслирана" субтрансверзалност.

Твърдение 12. *Нека A и B са затворени подмножества на Banаховото пространство X и $\bar{x} \in A \cap B$. Множествата A и B са трансверзални в точката $\bar{x}$ тогава и само тогава, когато съществуват $\delta > 0$ и $M > 0$, такива че за всяко $a \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\mathbf{0})$ и $b \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\mathbf{0})$, всяко $x^A \in A \cap \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}+a)$ и $x^B \in B \cap \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}+b)$, за които $x^A - a \neq x^B - b$ съществуват $\theta > 0$, $\hat{x}^A \in A$ и $\hat{x}^B \in B$, такива че*

$$\|x^A - \hat{x}^A\| \leq \theta M\ ,\quad \|x^B - \hat{x}^B\| \leq \theta M \quad \text{и}$$

$$\|\hat{x}^A - \hat{x}^B - (a - b)\| \leq \|x^A - x^B - (a - b)\| - \theta\ .$$

Усилване в едната от посока на предишното твърдение дава характеризация на трансверзалност в термините на "транслирана" тангенциална трансверзалност.

Твърдение 13. *Нека A и B са затворени подмножества на Банаховото пространство X и $\bar{x} \in A \cap B$. Множествата A и B са трансверзални в точката $\bar{x}$ тогава и само тогава, когато съществуват $\delta > 0$ и $M > 0$, такива че за всяко $a \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\mathbf{0})$ и $b \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\mathbf{0})$, всяко $x^A \in A \cap \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}+a)$ и $x^B \in B \cap \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}+b)$, за които $x^A - a \neq x^B - b$ съществуват $\{x_m^A\}_{m\geq 1} \subset A$, $\{x_m^B\}_{m\geq 1} \subset B$ и $t_m \searrow 0$, такива че за всяко m*

$$\|x_m^A - x^A\| \leq t_m M \ , \quad \|x_m^B - x^B\| \leq t_m M \quad \text{и}$$

$$\|x_m^A - x_m^B - (a-b)\| \leq \|x^A - x^B - (a-b)\| - t_m \ .$$

Забележка 14. *В горното твърдение може да получим (формално) по-силния факт, че съществува $\lambda > 0$, такова че последното неравенство е изпълнено за всяко $t \in (0, \lambda]$ вместо за редицата $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, клоняща към нула отгоре.*

Аналогично на Твърдение 11 може да получим подобни характеризации на трансверзалност, използващи наклона на сдвояващата функция.

В *Секция 3* получаваме метрична характеризация за присъща трансверзалност. Тя може да бъде използвана като дефиниция за този вид трансверзалност в общи метрични пространства. Освен това показваме, че присъщата трансверзалност е "почти" еквивалентна на тангенциална трансверзалност. Накрая показваме, че получената метрична характеризация на присъщата трансверзалност е еквивалентна в Хилбертови пространства на характеризация предложена и изучавана в [60].

Започваме секцията с характеризация за тангенциална трансверзалност в термините на наклона на сдвояващата функция.

Твърдение 15. *Подмножествата A и B на метричното пространство X са тангенциално трансверзални в точката $\bar{x}$ тогава и* *само тогава, когато съществуват $\delta > 0$ и $\kappa > 0$, такива че за всеки две различни точки $x \in A \cap \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x})$ и $y \in B \cap \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x})$ е изпълнено, че*

$$|\nabla\phi|(x,y) = \limsup_{(u,v)\to(x,y)} \frac{\max\{\phi(x,y) - \phi(u,v), 0\}}{d((x,y),(u,v))} \geq \kappa\,.$$

Друшвятски, Йоффе и Люис намират характеризация за присъща трансверзалност в крайномерни пространство в термините на наклона на сдвояващата функция (вж. Твърдение 4.2 в [29]). Ние използваме тази характеризация като дефиниция за присъща трансверзалност в общи метрични пространства.

Дефиниция 16. *Нека X е метрично пространство. Затворените множества $A, B \subset X$ са присъщо трансверзални в точката $\bar{x} \in A \cap B$, ако съществуват $\delta > 0$ и $\kappa > 0$, такива че за всяко $x^A \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}) \cap A \setminus B$ и $x^B \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}) \cap B \setminus A$ е в сила, че*

$$|\nabla\phi|(x^A, x^B) \geq \kappa\,.$$

Очевидно е наблюдението че тангенциална трансверзалност влече присъща трансверзалност, като дори има "почти" еквивалентност между тях. Все пак съществува прост контрапример (Пример 3.3.5 от дисертацията), който показва, че двете понятия са различни.

Въвеждаме следното свойство.

Дефиниция 17 (Свойство $(\mathcal{LT})$)**.** *Казваме, че затворените множества A и B изпълняват свойство $(\mathcal{LT})$ в точката $\bar{x} \in A \cap B$, ако съществуват $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$, такива че за всеки две различни точки $x^A \in \bar{\mathbf{B}}_\varepsilon(\bar{x}) \cap A \setminus B$ и $x^B \in \bar{\mathbf{B}}_\varepsilon(\bar{x}) \cap B \setminus A$, съществуват редиците $t_m \searrow 0$, $\{x^A_m\}_{m\geq 1} \subset A$ и $\{x^B_m\}_{m\geq 1} \subset B$, такива че за всяко m*

$$d(x^A_m, x^A) \leq t_m, \quad d(x^B_m, x^B) \leq t_m, \quad d(x^A_m, x^B_m) \leq d(x^A, x^B) - t_m\theta\,.$$

Горните разсъждения водят до следното

Следствие 18. *Множествата A и B са присъщо трансверзални в точката $\bar{x} \in A \cap B$ тогава и само тогава, когато изпълняват свойство $(\mathcal{LT})$ в $\bar{x}$.*

По този начин отговаряме на въпрос на Александър Йоффе относно намирането на метрична характеризация за присъща трансверзалност, както и на някои въпроси, поставени в [10].

Известно е, че присъщата трансверзалност и субтрансверзалността съвпадат за изпъкнали множества в крайномерни пространства (вж. Твърдение 6.1 в [37] или Следствие 3.4 в [49] за алтернативно доказателство). И двете доказателства използват съществено дуалните характеризации на двата типа трансверзалности. Сега можем лесно да покажем по-силния резултат.

Следствие 19. *Нека X е Банахово пространство. Изпъкналите затворени множества $A, B \subset X$ са тангенциално трансверзални в точката $\bar{x} \in A \cap B$ тогава и само тогава, когато са субтрансверзални в $\bar{x}$.*

В статиите [49] и [60] е изведено обобщение за присъща трансверзалност в Хилбертови пространства.. То се основава на нормалната структура - Дефиниция 2(ii) в [49] и Дефиниция 3 в [60]. Освен това в статията [60] е въведено свойство $(\mathcal{P})$. То е в термините на преддуалното пространство и е доказано, че е еквивалентно на гореспоменатото разширение на присъща трансверзалност в Хилбертови пространства, базирано на нормалната структура.

За да го въведем, се нуждаем от следното означение - за нормирано пространство X,

$$\mathrm{d}(A, B, \Omega) := \inf_{x \in \Omega, a \in A, b \in B} \max\{\|x - a\|, \|x - b\|\}, \quad \text{за } A, B, \Omega \subset X$$

с конвенцията, че инфимум върху празното множество е равен на $+\infty$.

Следва съответната дефиниция

Дефиниция 20 (Свойство $(\mathcal{P})$, [60])**.** *Двойка затворени множества $\{A, B\}$ изпълнява свойството $(\mathcal{P})$ в точката $\bar{x} \in A \cap B$ ако съществуват числа $\alpha \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$, такива че за всяко $a \in (A \setminus B) \cap \bar{\mathbf{B}}_\varepsilon(\bar{x})$, $b \in (B \setminus A) \cap \bar{\mathbf{B}}_\varepsilon(\bar{x})$, $x \in \bar{\mathbf{B}}_\varepsilon(\bar{x})$ с $\|x - a\| = \|x - b\|$ и число $\delta > 0$, съществува $\rho \in (0, \delta)$, такова че*

$$\mathrm{d}\left(A \cap \bar{\mathbf{B}}_\lambda(a), B \cap \bar{\mathbf{B}}_\lambda(b), \bar{\mathbf{B}}_\rho(x)\right) + \alpha\rho \le \|x - a\|, \text{ където } \lambda := (\alpha + 1/\sqrt{\varepsilon})\rho$$

Следващата теорема е основната за Секция 3.

Теорема 21. *Нека X е нормирано пространство, A и B са затворени подмножества на X и $\bar{x} \in A \cap B$. Да предположим, че изпълняват свойство $(\mathcal{P})$ в $\bar{x}$. Тогава те удовлетворяват свойство $(\mathcal{LT})$ в $\bar{x}$. Ако X е Хилбертово пространство, тогава обратното също е вярно - ако множествата изпълняват свойство $(\mathcal{LT})$ в $\bar{x}$, то те изпълняват и свойство $(\mathcal{P})$ в $\bar{x}$.*

В *Секция 4* показваме, че регулярността и субрегулярността могат да бъдат характеризирани в термините на трансверзалността и субтрансверзалността. Същите ключови множества, които участват във формулировката по-долу, се появяват и в статиите [21](Теорема 5.2), [22] (Теорема 4.2) и [14] (Теорема 4), но еквивалентността със (суб)регулярност не е изрично формулирана.

Теорема 22. *Нека $F : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение между метричните пространства X и Y, а $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr\, F$. Дефинираме множествата $A := Gr\, F$ и $B := X \times \{\bar{y}\}$. Тогава F е субрегулярен в $(\bar{x}, \bar{y})$ тогава и само тогава, когато A и B са субтрансверзални в $(\bar{x}, \bar{y})$.*

Следствие 23. *Нека $F : X \rightrightarrows Y$, където X и Y са метрични пространства и $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr\, F$ както по-горе. Дефинираме $A := Gr\, F$ и $B_y := X \times \{y\}$. Тогава F е регулярно в $(\bar{x}, \bar{y})$ тогава и само тогава, когато съществуват константи $\delta > 0$ и $K > 0$ такива че за всеки $(x, y) \in \bar{\mathbf{B}}_\delta((\bar{x}, \bar{y}))$ и $\hat{y} \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{y})$ е в сила*

$$d((x, y), A \cap B_{\hat{y}}) \leq K(d((x, y), A) + d((x, y), B_{\hat{y}})) . \tag{2}$$

Ако в допълнение X и Y са нормирани пространства, тогава това е също еквивалентно на трансверзалността на множествата A и $B := B_{\bar{y}}$ в точката $(\bar{x}, \bar{y})$.

В *Секции 5 и 6* доказваме характеризации на субергулярност и регулярност, използвайки получените по-рано характеризации за трансверзалност и субтрансверзалност. Като следствия получаваме класичките характеризации от тип "скорост на намаляване" за субергулярност и регулярност.

Използвайки горната теорема, установяваме характеризации на метрична регулярност на многозначно изображение $F : X \rightrightarrows Y$, където X – пълно метрично пространство, а Y – Банахово пространство, използвайки така наречената *вариация от първи ред* $F^{(1)}(x, y)$. Това е направено за първи път в [30] (виж също Теорема 4.13 и Забележка 4.14(c) в [5] за доказателство в Банахови пространства, или [40] за алтернативно доказателство). За $(x, y) \in \mathrm{Gr}F$, дефинираме $F^{(1)} : X \times Y \rightrightarrows Y$ чрез

$$F^{(1)}(x, y) := \limsup_{t \to 0_+} \frac{F(\bar{\mathbf{B}}_t(x)) - y}{t} ,$$

където lim sup означава лимес супериор за множества в смисъла на Куратовски. Доказателството ни се базира на редична характеризация за метрична регулярност, която не сме виждали формулирани в известната ни литература.

Следствие 24. *Да разгледаме $F : X \rightrightarrows Y$ със затворена графика, където X е пълно метрично пространство, а Y е Банахово пространство. Тогава следните са еквивалентни*

(i) F е регулярно в $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr\ F$

(ii) съществуват $\delta > 0$ и $r > 0$, такива че

$$\mathbf{B}_r(\mathbf{0}) \subset F^{(1)}(x, y) \text{ за всеки } (x, y) \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{x}, \bar{y}) \cap Gr\ F$$

(iii) съществуват $\delta > 0$ и $\tau > 0$, такива че за всяко $(x, y) \in Gr\ F \cap \bar{\mathbf{B}}_\delta((\bar{x}, \bar{y}))$ и всяко $\hat{y} \in \bar{\mathbf{B}}_\delta(\bar{y})$, съществува редица $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 1} \subset Gr\ F \setminus \{(x, y)\}$ сходяща към (x, y), такава че за всяко n е в сила

$$\|y_n - \hat{y}\| \leq \|y - \hat{y}\| - \tau d((x_n, y_n), (x, y)) .$$

Получаваме също като следствие класическия резултат (вж. Теорема 1.2 в [25] и Теорема 4.13 и Забележка 4.14(b) в [5]), който установява връзка между метричната регулярност на многозначно изображение $F : X \rightrightarrows Y$, X и Y – Банахови пространства, и неговата *графична производна.*

В **Глава 5**, *Секция 1 и 2*, излагаме необходимите предварителни дефиниции и резултати, които засягат главно равномерните допирателни множества.

Дефиниция 25 ([43])**.** *Нека A е затворено подмножество на банаховото пространство X и $x_0 \in A$. Ограничено множество D ще наричаме равномерно допирателно множество към A в точката x_0, ако за всяко $\eta > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $t \in [0, \delta]$ е в сила*

$$A \cap (x_0 + \delta \bar{\boldsymbol{B}}) + tD \subset A + t\eta \bar{\boldsymbol{B}}$$

След това припомняме класическото понятие за компактно епи-липшицови множества в Банахови пространства. То е въведено от Дж. Борвейн и Н. Стройвас през 1985 г. в [13] и всички затворени множества в крайномерни пространства, както и всички епи-липшицови множества в Банахови пространства са компактно епи-липшицови. Това е важно понятие в негладкия анализ и често се използва в достатъчни условия за получаване на правила за смятане с гранични Fréchet конуси и субдиференциали (в Асплундови пространства, вж. [54] и [55]) и G-конуси и G-субдиференциали (в общи Банахови пространства, срв. [42] и [37]). Компактно епи-липшицовите множества се наричат *масивни* в [38]. Ето и съответната

Дефиниция 26 (Компактно епи-липшицово множество, [13])**.** *Нека A е затворено подмножество на банаховото пространство X и $x_0 \in A$. Казваме, че A е компактно епи-липшицово (масивно) в точката x_0, ако съществуват $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и компактно множесто $K \subset X$, такива че за всяко $t \in [0, \delta]$ е в сила*

$$(x_0 + \delta \bar{\boldsymbol{B}}) \cap A + t\varepsilon \bar{\boldsymbol{B}} \subseteq A + tK$$

В *Секция 3*, излагаме основния резултат в главата.

За неговата формулировка се нуждаем от понятието ε-гъстота: казваме, че множеството A е ε-гъсто в множеството B, ако за всяко

$v \in B$ съществува $u \in A$ такова че $\|v-u\| < \varepsilon$. Резултатът е отчасти мотивиран от понятието масивност на множество, което сега е "разбито" между две множества.

Теорема 27. *Нека A и B са затворени подмножества на Банаховото пространство X и нека $x_0 \in A \cap B$. Да предположим, че съществуват $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, такива че $q_1 + q_2 < 1$ и:*

(i) съществуват ограничени "покриващи кълбо" множества M_A и M_B такива че $M_A - M_B$ е εq_1-гъсто в $\varepsilon\overline{\boldsymbol{B}}$ и "коригиращи" множества U_A, U_B такива че

$$A \cap (x_0 + \delta\overline{\boldsymbol{B}}) + tM_A \subset A + tU_A \text{ и } B \cap (x_0 + \delta\overline{\boldsymbol{B}}) + tM_B \subset B + tU_B$$

за всяко $t \in [0, \delta]$;

(ii) Съществуват две ограничени множества D_A и D_B такива че $D_A - D_B$ е εq_2-гъсто в $U_A - U_B$ и те са "η-равномерни" за $\eta := (1 - q_1 - q_2)/3$, т.е. за всяко $t \in [0, \delta]$

$$A \cap (x_0 + \delta\overline{\boldsymbol{B}}) + tD_A \subset A + t\eta\overline{\boldsymbol{B}} \text{ и } B \cap (x_0 + \delta\overline{\boldsymbol{B}}) + tD_B \subset B + t\eta\overline{\boldsymbol{B}}.$$

Тогава A и B са тангенциално трансверзални в x_0.

В *Секция 4* представяме приложения на основния резултат. Две достатъчни условия, а именно Теорема 5.2, взета от [10], и Твърдение 3.3, взето от [11], се получават като следствие на основния резултат в главата по унифициран начин. Нов резултат, който също е следствие, е следната

Теорема 28. *Нека X и Y са сепарабелни банахови пространства и нека $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ е собствена и полунепрекъсната отдолу. Нека L е непрекъснат линеен оператор от Y в X и*

$$S = \{(Ly, y) \mid y \in Y\}.$$

Нека $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$ е точка, за която съществуват $\bar{\delta} > 0$ и $K > 0$, такива че за всяко $y \in \bar{y} + \bar{\delta}\bar{\boldsymbol{B}}_Y$ и всеки $x' \in \bar{x} + \bar{\delta}\bar{\boldsymbol{B}}_X$, $x'' \in \bar{x} + \bar{\delta}\bar{\boldsymbol{B}}_X$ е изпълнено

$$|f(x', y) - f(x'', y)| \le K\|x' - x''\|.$$

Нека още $\widehat{T}_{epi\ f}((\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))) - \widehat{T}_{S\times(-\infty, f(\bar{x},\bar{y})]}((\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y})))$ *е гъсто в* $X \times Y \times \mathbb{R}$. *Тогава* epi f *и* $S \times (-\infty, f(\bar{x}, \bar{y})]$ *са тангенциално трансверзални.*

По-долу формулираме абстрактна (безкрайномерна) версия на добре познатото условие на Обен от [17] за основната задача на вариационното смятане:

Дефиниция 29 ([17]). *Нека* X *и* Y *са банахови пространства и* $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *е собствена и полунепрекъсната отдолу функция, която има крайна стойност в точката* $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$. *Казваме, че* f *удовлетворява условието на Обен в точката* $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$, *ако съществуват* $\bar{\delta} > 0$ *и* $K > 0$, *такива че за всяко* $t \in [0, \bar{\delta}]$ *е изпълнено*

$$\operatorname{epi} f \cap \left((\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y})) + \bar{\delta} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{X\times Y\times R}\right) + t\left(\bar{\mathbf{B}}_X, \mathbf{0}, 0\right) \subset$$
$$\subset \operatorname{epi} f + t\left(\mathbf{0}, K \cdot \bar{\mathbf{B}}_Y, K \cdot [-1, 1]\right).$$

Забележка 30. *Ако* f *изпълнява условията от Теорема 28, то* f *изпълнява условието на Обен (за съответната точка).*

Теорема 31. *Нека* X *и* Y *са банахови пространства и* $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *е собствена и полунепрекъсната отдолу функция, която изпълнява условието на Обен в точката* $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$. *Нека* $L : Y \longrightarrow X$ *е компактен линеен оператор и* $S := \{(Ly, y) : y \in Y\}$. *Да предположим, че*

$$\hat{T}_{\operatorname{epi} f}(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y})) - S \times (-\infty, 0]$$

е гъсто в $X \times Y \times R$. *Тогава* epi f *и* $S \times (-\infty, f(\bar{x}, \bar{y})]$ *са тангенциално трансверзални в* $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$.

Следващата дефиниция е разширение на понятието "масивност на множество" до "масивност" на две множества като двойка.

Дефиниция 32. *Нека A и B са затворени подмножества на банаховото пространство X и $x_0 \in A \cap B$. Казваме, че A и B са масивни в съвкупност в x_0, ако съществуват $\varepsilon > 0$, $\bar{\delta} > 0$, ограничени множества $M_A \subset X$, $M_B \subset X$ и компактно множество $K \subset X$, такива че:*

(i) $M_A - M_B$ *е гъсто в* $\varepsilon \bar{\boldsymbol{B}}_X$*,*

(ii) $A \cap (x_0 + \bar{\delta}\bar{\boldsymbol{B}}) + tM_A \subset A + tK$ *и* $B \cap (x_0 + \bar{\delta}\bar{\boldsymbol{B}}) + tM_B \subset B + tK$ *за всяко* $t \in [0, \bar{\delta}]$.

Лесно се съобразява, че ако множествата A и B са затворени, $x_0 \in A \cap B$ и A е масивно в x_0, то A и B са масивни в съвкупност в x_0.

Следващото твърдение е директно обощение на Теорема 4.3 от [10].

Твърдение 33. *Нека A и B са масивни в съвкупност в x_0 и $\widehat{T}_A(x_0) - \widehat{T}_B(x_0)$ е гъсто в X. Тогава A и B са тангенциално трансверзални в x_0.*

Получените достатъчни условия могат да бъдат приложени с Теорема 3.3 от [10], за да се получат множители на Лагранж в различни ситуации, както е обобщено в следната теорема.

Теорема 34 (Множители на Лагранж)**.** *Нека X и Y са банахови пространства, $f : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена и полунепрекъсната отдолу функция, S е затворено подмножество на $X \times Y$. Нека $(\bar{x}, \bar{y})$ е решение на минимизационната задача $\inf\limits_S f$. Нека още едно от следните три условия е изпълнено*

1. *X и Y са сепарабелни, $S = \{(Ly, y) \mid y \in Y\}$, където L е непрекъснат линеен оператор и съществуват $\bar{\delta} > 0$ и $K > 0$, такива че за всяко $y \in \bar{y} + \bar{\delta}\bar{\boldsymbol{B}}_Y$ и всеки $x' \in \bar{x} + \bar{\delta}\bar{\boldsymbol{B}}_X$, $x'' \in \bar{x} + \bar{\delta}\bar{\boldsymbol{B}}_X$ е изпълнено $|f(x', y) - f(x'', y)| \le K\|x' - x''\|$*

2. *epi f и $S \times (-\infty, f(\bar{x}, \bar{y})]$ са масивни в съвкупност в точката $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$.*

3. $S = \{(Ly, y) \mid y \in Y\}$*, където* L *е компактен линеен оператор и* f *изпълнява условието на Обен в точката* $(\bar{x}, \bar{y})$

Ако 1. или 3. е в сила, то съществува наредена тройка $(\xi, \eta, \theta) \in X^{\star} \times Y^{\star} \times \mathbb{R}$*, такава че*

(i) $(\xi, \eta, \theta) \neq (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, 0)$,

(ii) $\theta \in \{0, 1\}$,

(iii) $\langle \xi, Ly\rangle + \langle \eta, y\rangle = 0$ *за всяко* $y \in Y$,

(iv) $\langle \xi, v\rangle + \langle \eta, w\rangle + \theta s \geq 0$ *за всяко* $(v, w, s) \in \widehat{T}_{epi\ f}(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$.

Ако 2. е в сила, то (i), (ii), (iv) са в сила за някоя наредена тройка $(\xi, \eta, \zeta) \in X^* \times Y^* \times \mathbb{R}$*, а (iii) е заместено от* $\langle \xi, u\rangle + \langle \eta, v\rangle \leq 0$ *за всяка* $(u, v) \in \widehat{T}_S(\overline{x}, \overline{y})$.

В **Глава 5** изучаваме изображението задаващо оптималната стойност на дадена оптимизационна задача. Ще считаме, че S_{val} приема само крайни стойности. В цялата глава всички топологични пространства ще бъдат метрични пространства със свойството, че всяко отворено кълбо е свързано (очевидно това е така за нормираните линейни пространства).

За подмножество A на X и $\varepsilon > 0$ дефинираме

$$A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} \mathbf{B}_\varepsilon(x) = \{z \in X \mid \exists x \in A,\ \rho(z, x) < \varepsilon\}.$$

Ще разглеждаме само мнозначни изображения със затворени стойности.

Съществуват редица понятия за непрекъснатост на многозначни изображения, които обикновено са обвързани със съответните понятия за сходимост на редици от множества; сред тях е известната непрекъснатост на Куратовски-Пенлеве ([26]), базирана на идеята за сходимост на множества, въведена от Пенлеве и разработена от Куратовски. Добра справка за сходимост на множества е изследването на Зонтаг и Залинеску[58].

В нашите разглеждания ще използваме следните два типа непрекъснатост.

Дефиниция 35 ([8]). *Полунепрекъснатост отгоре:*

- *Топологическа полунепрекъснатост отгоре (t-usc).* $F : X \rightrightarrows Y$ *се нарича t-usc в точка* $\bar{x} \in X$*, ако за всяко отворено множество* U*, съдържащо* $F(\bar{x})$*, съществува отворена околност* V *на* $\bar{x}$*, такава че* $F(x) \subseteq U$ *за всяко* $x \in V$*.*

- *Помпею-Хаусдорф полунепрекъснатост отгоре (h-usc).* $F : X \rightrightarrows Y$ *се нарича h-usc в точка* $\bar{x} \in X$*, ако за всяко* $\varepsilon > 0$*, съществува отворена околност* V *на* $\bar{x}$*, такава че* $F(x) \subseteq F(\bar{x})_\varepsilon$ *за всяко* $x \in V$*.*

Очевидно t-usc влече h-usc. Обратната импликация обаче може да не е валидна, тъй като по принцип има отворени множества U, съдържащи $F(\bar{x})$, които не съдържат множества от вида $F(\bar{x})_\varepsilon$. Въпреки това, двете понятия съвпадат, когато $F(\bar{x})$ е компактно, както е отбелязано в [4], [8], [26].

Дефиниция 36 ([8]). *Полунепрекъснатост отдолу и непрекъснатост:*

- *Топологическа полунепрекъснатост отдолу (t-lsc).* $F : X \rightrightarrows Y$ *е t-lsc в точката* $\bar{x} \in X$*, ако за всяко отворено множество* U*, такова че* $U \cap F(\bar{x}) \neq \varnothing$*, съществува отворена околност* V *на* $\bar{x}$ *такава че* $U \cap F(x) \neq \varnothing$ *за всяко* $x \in V$*.*

- *Помпею-Хаусдорф полунепрекъснатост отдолу (h-lsc).* $F : X \rightrightarrows Y$ *е h-lsc в точката* $\bar{x} \in X$*, ако за всяко* $\varepsilon > 0$*, съществува отворена околност* V *на* $\bar{x}$*, такава че* $F(\bar{x}) \subseteq F(x)_\varepsilon$ *за всяко* $x \in V$*.*

- *Ще казваме, че едно многозначно изображение е непрекъснато (в даден смисъл), ако е едновременно полунепрекъснато отгоре и полунепрекъснато отдолу (в този смисъл).*

Секция 1 започва с пример, който показва, че Теорема 5 не е вярна, ако сходимостта е в смисъла на Помпею-Хаусдорф.

Пример 37. *Нека $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$. Да разгледаме*

$$D(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -|p|\}$$

и

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & y \leq -\frac{1}{1+x^2} \\ (1+x^2)y + 1, & -\frac{1}{1+x^2} < y < 0 \\ 1, & y \geq 0 \end{cases}$$

Може лесно да се провери, че D е непрекъсната в $\bar{p} = 0$ (в смисъла на Помпею-Хаусдорф), g е непрекъсната навсякъде в $\mathbb{R}^2$, $S_{val}(0) = 1$, но също така при $p \neq 0$ е изпълнено $S_{val}(p) = 0$.

Ясно е, че заключението на теоремата не е вярно, защото функцията g е "неограничено стръмна" около $\partial D(0)$. За да заобиколим тази възможност, въвеждаме "отслабена"равномерна непрекъснатост около $\partial D(\bar{p})$.

Доколкото е известно на автора, следващата дефиниция е нова.

Дефиниция 38. *Нека $F : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение и $f : Y \to \mathbb{R}$ е функция. Казваме, че двойката (F, f) удовлетворява предположение за отслабена равномерна непрекъснатост (**RUCA**) в $\bar{x}$, ако*

$$(\boldsymbol{RUCA}) \left| \begin{array}{l} \text{за всяко } \varepsilon > 0 \text{ съществува } \delta > 0, \text{ такова че за всяко } x \\ \text{за което } \rho(x, \bar{x}) < \delta, \text{ ако } y \in \partial F(\bar{x}) \text{ и } z \in F(x) \setminus F(\bar{x}) \\ \text{са такива, че } \rho(y, z) < \delta, \text{ то } |f(y) - f(z)| < \varepsilon \end{array} \right.$$

Теорема 39. *Да предположим, че за някое $\bar{p} \in X$, D е h-непрекъсната в $\bar{p}$ и g е непрекъсната върху $D(\bar{p})$. Нека още двойката (D, g) удовлетворява (**RUCA**) в $\bar{p}$. Тогава S_{val} е непрекъсната в $\bar{p}$.*

Лесно се проверява, че двойката (D, g) от Пример 37 не удовлетворява (**RUCA**). От тази теорема получаваме следствие, което също може да бъде извлечено като специален случай на теоремата на Берж, тъй като, както беше отбелязано, когато $D(\bar{p})$ е компакт, h-непрекъснатостта е еквивалентна на t-непрекъснатостта.

Следствие 40. *Нека X е пълно метрично пространство. Да предположим, че за някое $\bar{p} \in X$, D е h-непрекъсната в $\bar{p}$, g е непрекъсната върху $D(\bar{p})$ и $D(\bar{p})$ е напълно ограничено (ограничено, ако X е крайномерно пространство). Тогава S_{val} е непрекъсната в $\bar{p}$.*

В *Секция 2* насочваме вниманието си към случая на t-непрекъснатостта на многозначното изображение. Както беше отбелязано по-рано, следната теорема следва от резултат на Бердишев [8] (и по същество е еквивалентна на него в случая на метрични пространства).

Теорема 41 ([8])**.** *Нека за някое $\bar{p} \in X$, D е t-непрекъсната в $\bar{p}$ и g е непрекъсната върху $D(\bar{p})$. Тогава S_{val} е непрекъсната в $\bar{p}$.*

Резултатите, показани в края на секцията, обобщават предишната теорема. Друг резултат, следващ от работата на Бердишев, е следната

Теорема 42 ([8])**.** *Нека $\bar{p} \in X$, D е h-непрекъсната в $\bar{p}$ и g е равномерно непрекъсната върху $D(\bar{p})$. Тогава S_{val} е непрекъсната в $\bar{p}$.*

Тя може да се разглежда като следствие на резултатите досега. По-нататък включваме мярката за некомпактност като междинно понятие за получаване на характеризация на t-usc чрез (**RUCA**).

Очевидно (**RUCA**) за (F, f) при $\bar{x}$ е свойство, зависещо както от многозначното изображение F, така и от функцията f. Въпреки това, в някои случаи силните свойства само на един от обектите осигуряват (**RUCA**) независимо от другия обект. Например, ако функцията f е равномерно непрекъсната върху цялото Y, (**RUCA**) се удовлетворява независимо от свойствата на многозначното изображение F. От друга страна, както в Следствие 40, ако F е h-usc в $\bar{x}$ и $F(\bar{x})$ е напълно ограничено, тогава (**RUCA**) е удовлетворено за всяка функция f, която е непрекъсната върху $F(\bar{x})$. Следното твърдение пояснява кога е налице такава ситуация. Показваме, че ако F

е h-usc в $\bar{x}$, тогава (**RUCA**) за (F, f) в $\bar{x}$ важи за всяка функция f, която е непрекъсната върху $F(\bar{x})$, тогава и само тогава, когато F е t-usc.

Твърдение 43. *Нека $F : X \rightrightarrows Y$ и $\bar{x} \in X$. Следващите са еквивалентни.*

(i) *F е t-usc в $\bar{x}$;*

(ii) *F е h-usc в $\bar{x}$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува отворена околност V на $\bar{x}$, такава че*

$$\alpha\left(\bigcup_{x \in V} F(x) \setminus F(\bar{x})\right) < \varepsilon;$$

(iii) *F е h-usc в $\bar{x} \in X$ и за всяка функция $f : Y \to \mathbb{R}$, която е непрекъсната върху $F(\bar{x})$, двойката (F, f) удовлетворява (**RUCA**) в $\bar{x}$.*

1 Авторска справка

Това са основните постижения в дисетацията през погледа на автора:

1. Получено е общо достатъчно условие за тангенциална трансверзалност. Показано е, че то включва като частни случаи някои известни достатъчни условия за тангенциална трансверзалност;

2. Общото условие за тангенциална трансверзалност е приложено за доказване на тангенциална трансверзалност на допустимото множество на минимизационна задача и епиграфиката на разглежданата функция в дадена референтна точка. По-конкретно, разгледани са три различни сценария: функцията удовлетворява Липшицово условие по отношение на първата променлива, равномерно спрямо втората, допустимото множество е графиката на непрекъснат линеен оператор и съществува равномерно допирателно множество, пораждащо допирателния конус на Кларк към епиграфиката в референтната точка; функцията удовлетворява условието на Обен в референтната точка и допустимото множество е графика на компактен линеен оператор; епиграфиката и допустимото множество са масивни в съвкупност в референтната точка. Във всеки от трите случая използваме получената тангенциална трансверзалност, за да изведем правило за множител на Лагранж, ако референтната точка е решение на минимизационната задача.

3. Характеризации на субтрансверзалността, трансверзалността и присъщата трансверзалност са получени в духа на оригиналната дефиниция на тангенциалната трансверзалност, т.е. характеризациите са в термините на преддуалното пространство. Даден е отговор на въпроса за връзката между всички тези понятия. Извежда се характеризация на трансверзалността в термините на „транслирана“ тангенциална трансверзалност.

4. Предлага се обобщение на присъщата трансверзалност за безкрайномерни пространства. Показано е, че предложената де-

финиция е по-обща от предложено в (вж. [60]) обобщение, и е доказано, че двете съвпадат в случая на Хилбертови пространства.

5. Ясно е посочено и доказано, че трансверзалността и субтрансверзалността могат да се използват като характеризация на метричната регулярност и метричната субрегулярност. Това по-късно се използва за получаване на нови доказателства за добре известни преддуални характеризации на тези понятия – от тип "скорост на намаляване" (за метрична регулярност и субрегулярност), чрез вариация от първи ред и чрез графичната производна (за метрична регулярност).

6. Разглежда се изображението, задаващо оптималната стойност, свързана с минимизационна задача, чието допустимо множество варира в зависимост от параметър. Даден е контрапример за възможна интерпретация на резултат относно непрекъснатостта на такова изображение. Предлагаме допълнително предположение (**RUCA**), при което бихме могли да докажем непрекъснатост. Показваме, че (**RUCA**) в известен смисъл е необходимо за получаване на непрекъснатост на изображението: (**RUCA**) се удовлетворява за всички непрекъснати функции, точно когато многозначното изображение, което дефинира допустимото множество, е топологически непрекъснато.

2 Публикации, свързани с дисертацията

1. Apostolov, S.; Krastanov, M.; Ribarska, N. (2020) *"Sufficient Condition for Tangential Transversality"*, Journal of Convex Analysis 27, 19-30

2. Apostolov, S. (2021) *"On continuity of optimal value map"*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, Vol 74, No4, pp 506-513

3. Apostolov, S.; Bivas, M.; Ribarska, N. (2022) *"Characterizations of*

Some Transversality-Type Properties". Set-Valued and Variational Analysis. https://doi.org/10.1007/s11228-022-00633-4

4. Apostolov, S.; Bivas, M. *Characterizations of metric (sub)regularity via (sub)transversality*, submitted.

3 Апробация на дисертацията

Резултатите от дисертацията са представени на следните доклади:

1. *"Sufficient conditions for tangential transversality*", 47th Winter School in Abstract Analysis, Svratka, Czech Republic, 2019, https://www2.karlin.mff.cuni.cz/ lhota/ (based on a joint work with Mikhail Krastanov and Nadezhda Ribarska)

2. *"Intrinsic transversality and tangential transversality*", 15-th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics, June 28 - July 2, 2021, Borovets, Bulgaria, http://www.math.bas.bg/ bio/WP21/ (based on a joint work with Mira Bivas and Nadezhda Ribarska)

3. *"Intrinsic transversality and tangential transversality*", The 13th International Conference on Large-Scale Scientific Computations LSSC 2021, June 7 - 11, 2021, Sozopol, Bulgaria (based on a joint work with Mira Bivas and Nadezhda Ribarska)

4. *"Intrinsic transversality and tangential transversality*", Spring Scientic Session, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 27 March 2021 (based on a joint work with Mira Bivas and Nadezhda Ribarska)

5. *"On continuity of optimal value map*", Spring Scientic Session, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, 26 March 2022

4 Декларация за автентичност

Авторът декларира, че дисертацията съдържа автентични резултати, получени от него или в сътрудничество с неговите съавтори. Използването на резултати от други учени е придружено със съответно цитиране.

5 Благодарности

Бих искал да изкажа най-искрените си благодарности на професор Надежда Рибарска за нейната безценна помощ, мотивация и подкрепа. Изказвам и най-сърдечни благодарности за напътствията и подкрепата на професор Асен Дончев, който, за съжаление, ни напусна през миналата есен.

Литература

[1] Apostolov, S. (2021) *"On continuity of optimal value map"*, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, Vol 74, No4, pp 506-513

[2] Apostolov, S.; Bivas, M.; Ribarska, N. (2022) Characterizations of Some Transversality-Type Properties Set-Valued and Variational Analysis. https://doi.org/10.1007/s11228-022-00633-4

[3] Apostolov, S.; Krastanov, M.; Ribarska, N. (2020) *"Sufficient Condition for Tangential Transversality"*, Journal of Convex Analysis 27, 19-30

[4] Aubin, J.-P.; Frankowska, H. (2009) Set-valued analysis, Boston. Reprint of the 1990 edition [MR1048347]. Modern Birkhauser Classics. *Birkhauser Boston, Inc.*. xx+461 pp.

[5] Azé, D. (2006) A unified theory for metric regularity of multifunctions. J. Convex Analysis 13, 225-252

[6] Azé, D.; Corvellec J.-N. (2004) Characterizations of error bounds for lower semicontinuous func- tions on metric spaces, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 10 , 409–425

[7] Azé, D.; Corvellec, J.-N.; Lucchetti R. E. (2002) Variational pairs and applications to stability in nonsmooth analysis, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 49A(5) 49 ,643–670

[8] Berdysev, V. I. (1977) Stability of the minimization problem in the case of the perturbation of the set of admissible elements. (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* 103(145), no. 4, 467-479, 630.

[9] Berge, C. (1997) Topological spaces. Including a treatment of set-valued functions, vector spaces and convexity. Translated from the French original by E. M. Patterson. Reprint of the 1963 translation. *Dover Publications, Inc., Mineola, NY,* xiv+270 pp.

[10] Bivas, M.; Krastanov, M.; Ribarska, N. (2020) On tangential transversality, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 481, Issue 1, 123445, ISSN 0022-247X, `https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123445`

[11] Bivas, M.; Krastanov, M.; Ribarska, N. (2018) On strong tangential transversality, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 490, Issue 1, 124235, ISSN 0022-247X, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124235.

[12] Bivas, M.; Ribarska, N.; Valkov, M. (2018) Properties of uniform tangent sets and Lagrange multiplier rule, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 71 (7), 875-884

[13] Borwein, J.M.; Strojwas, (1985) H.M. Tangential approximations, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 9 (12), 1347-1366

[14] Bui, H.T.; Cuong, N.D.; Kruger, A.Y. (2020) Geometric and Metric Characterizations of Transversality Properties, Vietnam Journal of Mathematics 48:277-297 https://doi.org/10.1007/s10013-020-00388-1

[15] Bui, H. T.; Kruger, A. Y. (2019) Extremality, Stationarity and Generalized Separation of Collections of Sets, J Optim Theory Appl, 182, 211-264

[16] Cibulka, R.; Fabian, M. (2016) On primal regularity estimates for set-valued mappings, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 438(1), 444–464

[17] Clarke, F. (2005) Necessary Conditions in Dynamic Optimization, Memoirs of the American Mathematical Society

[18] Cuong, N. D.; Kruger, A.Y. (2019) Nonlinear transversality of collections of sets: Primal space characterizations, Preprint, arXiv: 1902.06186

[19] Clarke, F. (1990) Optimization and Nonsmooth Analysis, Canadian Mathematical Society series of monographs and advanced texts, Canadian Mathematical Society

[20] Cuong, N. D.; Kruger, A.Y. (2020) Dual sufficient characterizations of transversality properties, Positivity, 1–47.

[21] Cuong, N. D.; Kruger, A.Y. (2021) Transversality properties: Primal sufficient conditions, Set-Valued and Variational Analysis 29, no. 2, 221-256

[22] Cuong, N. D.; Kruger, A.Y. (2021) Primal Space Necessary Characterizations of Transversality Properties, Positivity, 25:531-558 https://doi.org/10.1007/s11117-020-00775-5

[23] De Giorgi, E.; Marino, A.; Tosques, M. (1980) Problemi di evoluzione in spazi metricie curve di massima pendenza, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 68, 180–187

[24] Dolecki, S.; Rolewicz, S. (1978) A characterization of semicontinuity-preserving set-functions. *J. Math. Anal. Appl.* 65, no. 1, 26-31.

[25] Dontchev, A. L.; Quincampoix M.; Zlateva, N. (2006) Aubin criterion for metric regularity, Journal of Convex Analysis, 13, No 2, 281-297

[26] Dontchev, A. L.; Rockafellar, R. T. (2014) Implicit functions and solution mappings. A view from variational analysis. Second edition. New York, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. *Springer,* xxviii+466 pp.

[27] Dontchev, A. L.; Zolezzi, T. (1993) Well-posed optimization problems, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, 1543. *Springer-Verlag* xii+421 pp.

[28] Drusvyatskiy, D.; Ioffe, A. D.; Lewis, A.S. (2014) Alternating projections and coupling slope, `http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2014/01/4217.html`

[29] Drusvyatskiy, D.; Ioffe, A. D.; Lewis, A.S. (2015) Transversality and alternating projections for nonconvex sets, Found. Comput. Math., 15, 1637-1651

[30] Frankowska, H. (1990) Some inverse mapping theorems, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, 7, 183-234

[31] Guillemin, V.; Pollack, A. (1974) Differential Topology. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, N.J.

[32] Hirsch, M. (1976) Differential Topology. Springer, New York

[33] Ioffe, A. D. (1984) Approximate subdifferentials and applications I: The finite dimensional theory, Trans. Amer. Math. Soc., 281, 389-416

[34] Ioffe, A. D. (1989) Approximate subdifferentials and applications III: The metric theory, Mathematica, 36 (1), 1-38

[35] Ioffe, A. D. (1999) Variational methods in local and global nonsmooth analysis, In Clarke F.H., Stern, R.J. (eds.) Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control, NATO Science Series C:

Mathematical and Physical Sciences, vol. 258, pp. 447-502. Kluwer, Dordrecht, Boston, London

[36] Ioffe, A. D. (2000) Metric regularity and subdifferential calculus, Russian Math.Surveys 55(3), 501–558

[37] Ioffe, A. D. (2017) Transversality in Variational Analysis, J Optim Theory Appl 174(2), 343–366

[38] Ioffe, A. D. (2017) Variational Analysis of Regular Mappings: Theory and Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer

[39] Ivanov, M.; Zlateva, N. (2016) Long Orbit or Empty Value Principle, Fixed Point and Surjectivity Theorems, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 69, No 5, 553-562

[40] Ivanov, M.; Zlateva, N. (2020) On Characterizations of Metric Regularity of Multi-Valued Maps, Journal of Convex Analysis 27, No. 1, 381–388

[41] Jech, T. (1978) Set theory, Academic press

[42] Jourani, A.; Thibault, L. (1996) Extensions of subdifferential calculus rules in Banach spaces, Canadian Journal of Mathematics, 48 (4), 834-848

[43] Krastanov, M. I.; Ribarska, N. K. (2017) Nonseparation of Sets and Optimality Conditions, SIAM J. Control Optim., 55 (3), 1598-1618

[44] Krastanov, M. I.; Ribarska, N. K. (2018) A Functional Analytic Approach to a Bolza Problem, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Control Systems and Mathematical Methods in Economics, 687, Gustav Feichtinger, Raimund Kovacevic, Gernot Tragler, 97–117

[45] Krastanov, M. I.; Ribarska, N. K. (2021) A necessary optimality condition involving measures of noncompactness, Pure and applied functional analysis, Volume 6, Number 6, 1361-1381

[46] Krastanov, M. I.; Ribarska, N. K.; Tsachev, Ts. Y. (2011) A Pontryagin maximum principle for infinite-dimensional problems, SIAM Journal on Control and Optimization, 49 (5), 2155–2182

[47] Kruger, A. Y. (2006) About regularity of collections of sets, Set-Valued Anal. 14, 187–206

[48] Kruger, A. Y. (2015) Error bounds and metric subregularity, Optimization, 64:1, 49-79, DOI: 10.1080/02331934.2014.938074

[49] Kruger, A. Y. (2018) About Intrinsic Transversality of Pairs of Sets, Set-Valued Var. Analysis 26, 111-142, https://doi.org/10.1007/s11228-017-0446-3

[50] Kruger, A. Y.; Luke, D. R.; Thao, N. H. (2018) Set regularities and feasibility problems, Mathematical Programming B 168, 279–311

[51] Kruger, A. Y.; Thao, N. H. (2015) Quantitative Characterizations of Regularity Properties of Collections of Sets, Journal of Optimization Theory and Applications, 164 (1),41-67

[52] Lucchetti, R. (1989) Stability in optimization. *Serdica* 15, no. 1, 34-48.

[53] Lucchetti, R. (2006) Convexity and well posed problems, New York, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 22, *Springer*, xiv+305 pp

[54] Mordukhovich, B. S. (2006) Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, New York

[55] Penot, J. P. (2013) Calculus Without Derivatives, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York

[56] Rockafellar, R. T. (1979) Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets in R^n, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 3 (1), 145 –154.

[57] Rockafellar, R. T. (1980) Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions, Canad. J. Math., 32, 257-280

[58] Sonntag, Y.; Zalinescu, C. (1993) Set convergences. An attempt of classification. *Trans. Amer. Math. Soc.* 340 , no. 1, 199-226.

[59] Sussmann, H. (2006) On the validity of the transversality condition for different concepts of tangent cone to a set, Proceedings of the 45-th IEEE CDC, San Diego, CA, December, 3-15, 241–246.

[60] Thao, N. H.; Bui, H. T.; Cuong, N.D.; Verhaegen, M. (2020) Some new characterizations of intrinsic transversality in Hilbert spaces, Set-Valued and Variational Analysis volume 28, pages 5-39

[61] Van Ngai, H.; Théra, M. (2008) Error bounds in metric spaces and application to the perturbation stability of metric regularity. SIAM Journal on Optimization 19(1), 1–20