Р Е Ц Е Н З И Я

от проф. дмн Йохан Тодоров Давидов,
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

по конкурс за заемане на академичната длъжност **"доцент"**

в област на висше образование *4. Природни науки, математика и информатика*,
професионално направление *4.5 Математика*,
научна специалност *Геометрия*

за нуждите на Софийския университет "Св. Климент Охридски",
Факултет по математика и информатика,

обявен в Държавен вестник No. 21 от 13 март, 2020 и на сайтовете на СУ и ФМИ

Със заповед No. РД 38-266/10.07.2020 на Ректора на Софийския университет "Св. Климент Охридски" проф. дфн Атанас Герджиков съм определен за член на научното жури за процедурата по споменатия по-горе конкурс за заемане на академичната длъжност "доцент". За участие в конкурса е подал документи само главен асистент д-р Александър Владимиров Петков. Като член на научното жури получих от д-р Петков всички документи, изисквани от Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прила-гането на ЗРАСРБ и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в СУ.

Кратки биографични данни на кандидата

Д-р Александър Петков е роден на 17.12.1985 г. в град Монтана. В периода 2004 - 2010 г. той е студент по математика във Факултета по математика и информатика на СУ. Той завършва висшето си образование с отличен успех и магистърска степен по динамични системи и геометрия. От 2011 до 2014 Петков е докторант към катедрата по геометрия на ФМИ. Той успешно защитава дисертация за получаване на ОНС "доктор" на тема "Риманови и суб-Риманови многообразия със структури". От 2014 г. д-р Петков е главен асистент в катедрата по геометрия на ФМИ, СУ. Той два пъти по три месеца е заемал пост-докторска позиция в Института по математика, Факултет по математика на Виенския университет, Австрия. Два пъти по 3 месеца е бил и гостуващ изследовател в Института по математически науки на Америките при Университета на Маями, Флорида, САЩ.

Обща характерситика на научните трудове на кандидата.

Д-р А. Петков е представил 6 научни статии за участие в конкурса. Тези статии удовлетворяват минималните изисквания по ЗРАСРБ. От представените статии три са самостоятелни, две са с двама съавтори и една е с един съавтор. Познавам Александър Петков и неговата математическа дейност от 6 години. Аз бях един от рецензентите на неговата докторска дисертация. За мен няма съмнение, че неговият принос в съвместните статии е равен на приноса на другите съавтори.

Шестте статии, с които Петков участва в конкурса, са цитирани 8 пъти от други автори. Той е представил и списък на всички свои публикации и цитирания, който съдържа 8 статии и 14 цитирания (без самоцитирания).

Доколкото ми е известно, статиите на Петков за конкурса не са били използвани за получаване на ОНС "доктор" или за заемане на академична длъжност.

Бих искал да отбележа още, че не съм открил никакви случаи на плагиатство в статиите на Петков.

Статиите на Петков за конкурса са в областта на диференциалната геометрия, по-точно на суб-Римановата геометрия. Те разглеждат и решават интересни и трудни проблеми в тази област. Повечето от тях са публикувани в престижни математически списания.

Анализ на научните постижения на кандидата

Във всички статии, представени от А. Петков, се разглеждат кватернионно-контактни многообразия (накратко QC-многообразия). Да напомним, че кватернионно-контактна структура върху $(4n+3)$-мерно многообразие M - понятие, въведено от O. Biquard, се състои от подразслоение H на TM от ранг $4n$, положително дефинитна метрика g върху H и подразслоение Q на $End(H)$ от ранг 3, такива че в околност U на всяка точка на M, съществуват 1-форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ със стойности в $\mathbb{R}^3$ и тройка $\vartheta = (I_1, I_2, I_3)$ сечения на Q със следните свойства: (1) $H|U$ е ядрото на η; (2) Ендоморфизмите (I_1, I_2, I_3) на H са три почти комплексни структури, локално пораждащи Q и удовлетворяващи комутационните тъждества на имагинерните кватерниони: $I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = -Id_H$, $I_1I_2 = -I_2I_1 = I_3$; (3) $d\eta_s(X,Y) = 2g(I_sX,Y)$ за $X, Y \in H|U$. Всеки две тройки от сечения на Q, удовлетворяващи условието (2), са репери на Q, които определят една и съща ориентация, следователно разслоението Q притежава канонична ориентация. Това разслоение се снабдява с ограничението на стандартната метрика на End(H), дефинирана чрез метриката g на H. Съгласно резултат на Biquard, ако $dim\, M > 7$, то съществуват единствено разслоение V, допълващо H до TM, и единствена свързаност ∇ върху M, удовлетворяващи някои специални условия, които тук за по-кратко изложение ще пропуснем, препращайки интересуващите се към статиите на кандидата или към оригиналната статия на Biquard. Едно от свойствата на свързаността ∇ е, че тя запазва разслоението Q. Ако $dim\, M = 7$, то, както бе показано от D. Duchemin, не винаги е възможно да се намерят допълнение V на H и свързаност ∇, такива че свързаността да запазва Q, така че допълнително трябва да се предположи, че ∇ има това свойство. Разслоенията H и V често се наричат "хоризонтално" и "вертикално". Да предположим,че формата $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ и почти комплексните структури $\vartheta = (I_1, I_2, I_3)$ удовлетворяват условията (1), (2), (3) и нека (ξ_1, ξ_2, ξ_3) е реперът на V, дуален на $(\eta_1|V, \eta_2|V, \eta_3|V)$. Векторните полета ξ_1, ξ_2, ξ_3 се наричат полета ма Рийб (Reeb) и имат свойството, че $\imath_{\xi_s} d\eta_t|H = -\imath_{\xi_t} d\eta_s|H$, $s,t = 1,2,3$ (това свойство липсва в размерност 7 без допълнителното предположение за ∇). Съответствието $\xi_s \to I_s$, $s = 1,2,3$, задава изоморфизъм $V \to Q$ на разслоения, който не зависи от избора на η и ϑ. С помощта на този изоморфизъм метриката и ориентацията на Q се пренасят до метрика и ориентация върху V. По този начин върху цялото разслоение TM се дефинира Риманова метрика, която обикновено се означава пак с g, както зададената метрика върху H. Разлагането

$TM = H \oplus V$ е ортогонално, а свързаността ∇ е метрична относно g.

Основната цел на статиите с номера 1,2,3 в списъка на публикациите на кандидата е да се получи теорема за QC-многообразия от типа на класическата теорема на Lichnerowicz-Obata. Резултати от този тип се съдържат и в статия No. 6. Да напомним, че съгласно резултат на A. Lichnerowicz, ако тензорът на Ричи на компактно Риманово многообразие от размерност n удовлетворява неравенството $Ricci(X,X) \geq kg(X,X)$, където g е Римановата метрика, а k е положителна константа, то първото ненулево собствено число на оператора на Лаплас удовлетворява неравенството $\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}k$. Да отбележим, че за единичната сфера S^n с нейната стандартна метрика, имаме $\lambda_1 = n$. M. Obata показа, че обратно, ако $\lambda_1 = n$ за едно компактно Риманово многообразие от размерност n, то многообразието е изометрично на S^n. В случая на QC-многообразия е естествено да се разглежда суб-Лапласиана, вместо Лапласиана, т.е. следата на Хесиана върху хоризонталните вектори, взета със знак минус.

В статия No.1 QC-многообразията, които се разглеждат, са компактни и от размерност 7. Условието върху тензора на Ричи в теоремата на Лихнерович е заменено с неравенството

$$Ricci(X,X) + 6T^0(X,X) \geq kg(X,X)$$

за всеки хоризонтален вектор. В това неравенство $Ricci$ означава QC-тензора на Ричи, т.е. следата на кривината на свързаността на Biquard, взета върху хоризонталните вектори, а T^0 е симетричен безследен тензор, дефиниран чрез торзията на свързаността на Biquard. Това условие наподобява на условието $Ricci(X,X) + \frac{n}{2}T(X,X) \geq kg(X,X)$ относно свързаността на Уебстър-Танака (Webster-Tanaka) върху компактно псевдо-Ермитово многообразие на Коши-Риман (CR-многообразие) от размерност $2n+1$, което Greenleaf (1985) използва, за да получи оценката $\lambda_1 \geq \frac{n}{n+1}k$ за първата собствена стойност на CR суб-Лапласиана в случая $n \geq 3$; за $n = 2$ тази оценка бе получена от S.-Y. Li – H.-S. Luk (2004). Друго предположение в статия No.1 е, че P-функцията на всяка собствена функция на суб-Лапласиана е неотрицателна. Както авторите на статията отбелязват, мотивацията за въвеждането на P-функцията е свързана с ролята на оператора на Paneitz при изучаване на CR-многообразията (а така също и с P-функцията в теорията на елиптичните ЧДУ). Съгласно основният резултат в статията, при направените предположения, първото собствено число λ_1 на суб-Лапласиана удовлетворява неравенството $\lambda_1 \geq \frac{1}{3}k$. Освен това, ако равенството е в сила за компактно 3-Сасакиево (Sasaki) многообразие от размерност 7, то многообразието е 3-Сасакиевата сфера S^7. Доказателството на главния резултат се основава на формула от типа на Бохнер (Bochner) (Лема 3.2).

Формула от типа на Бохнер, доказана в статия No.3 (Теорема 3.1), се използва в статия No.2, в която е получена друга версия на теоремата на Лихнерович за суб-Лапласиана на компактно QC-многообразие от размерност 7. В тази версия условие за P-функцията не фигурира, а условието върху QC-тензора на Ричи е заменено с неравенството

$$Ricci(X,X) - 2T^0(X,X) - \frac{36}{k}A(X) \geq kg(X,X),$$

където $A(X)$ се дефинира за хоризонтални вектори чрез QC-скаларната кривина, торзията и нейни ковариантни производни относно свързаността на Biquard. Условие от подобен тип относно свързаността на Уебстър-Танака е използвано от S.-Y. Li – H.-S. Luk (2004) за получаване на оценката за λ_1 на Greenleaf в случая на 3-мерно CR-многообразие.

Случаят на компактно QC-многообразие от произволна размерност $4n+3>7$ се разглежда в статия No.3. В нея се предполага, че

$$Ricci(X,X)+\frac{2(4n+5)}{2n+1}T^0(X,X)+\frac{6(2n^2+5n-1)}{(n-1)(2n+1)}U(X,X)\geq kg(X,X),$$

където U е безследен симетричен тензор, дефиниран чрез торзията на свързаността на Biquard. Основният резултат в статията е, че $\lambda_1\geq\frac{n}{n+2}k$. Тук ще отбележим, че тензорите T^0 и U са въведени от Иванов-Минчев-Василев. Те се дефинират с помощта на симетричната, съответно, анти-симетричната части на торзионните ендоморфизми $V\ni\xi\to T(\xi,.)$. Тензорът U е нула върху 7-мерните многообразия (т.е., когато $n=1$). Така, пренебрегвайки коефициента пред U по-горе, можем да кажем, че при $n=1$ условието в статия No.3 се свежда до едно от условията в статия No.2. В този случай и в двете статии се дава една и съща оценка за λ_1. Друг важен резултат в статия No.3 е, че ако многообразието е QC-Айнщайново с QC-скаларна кривина $16n(n{+}2)$, т.е. $Ricci(X,X)=4(n{+}2)g(X,X)$ и ако долната граница за λ_1 се достига, т.е. $\lambda_1=4n$, то QC-многообразието е 3-Сасакиевата сфера от размерност $4n{+}3$. В частност, всяко компактно 3-Сасакиево многообразие (снабдено със стандартната му QC-структура) от размерност $4n+3$, върху което $\lambda_1=4n$, е еквивалентно на S^{4n+3}.

В статия No.4 е решен проблемът на Ямабе (Yamabe) са компактни QC-многообразия M. Той се състои в намирането на нова метрика $\overline{g}=fg$ в конформния клас на дадената метрика g върху хоризонталното разслоение H, така че новата QC-структура, определена от подходящо кратно $\overline{\eta}$ на дадената контактна форма η и от метриката $\overline{g}$ да е с постоянна QC-скаларна кривина. Подобно на случаите на Риманово или CR-многообразие функцията f удовлетворява уравнението на Ойлер-Лагранж за подходящо дефиниран функционал $\Upsilon_M(\eta)$, наречен функционал на Ямабе. Ако f е такава функция и $\overline{\eta}=f^{1/n+1}\eta$, то QC-структурата $(\overline{\eta},\overline{g})$ е с постоянна QC-скаларна кривина. Главният резултат в статия No.4 е, че ако едно компактно QC-многообразие от размерност $4n+3$ не е локално еквивалентно на QC-структурата на 3-Сасакиевата сфера S^{4n+3}, то проблемът на Ямабе има решение. Идеята на доказателството е да се покаже, че константата на Ямабе $\lambda(M)$ на многообразието M, т.е.минимумът на функционала на Ямабе, е по-малка от константата на Ямабе $\lambda(S^{4n+3})$ на сферата S^{4n+3}, която е пресметната от Иванов-Минчев-Василев. След това резултатът следва от теорема на W. Wang. За да покажат, че $\lambda(M)<\lambda(S^{4n+3})$, авторите намират асимптотична формула за стойностите $\Upsilon_M(\eta^\varepsilon)$ на функционала на Ямабе върху контактните форми $\eta^\varepsilon=(f^\varepsilon)^{1/n+1}\eta$, $\varepsilon>0$, където, при фиксирано $q\in M$, f^ε са гладки функции, подходящо дефинирани чрез така наречените QC-нормални координати около q, конструирани от C. Kunkel. Асимптотичната формула има видът $\Upsilon_M(\eta^\varepsilon)=\lambda(S^{4n+3})(1{-}c(n))||W^{QC}(q)||^2\varepsilon^4{+}O(\varepsilon^5)$, където $c(n)$ е положителна константа и W^{QC} е QC-конформният тензор на кривината, въведен от Иванов-Василев, които показаха, че едно QC-многообразие е локално еквивалентно на S^{4n+3} тогава и само тогава, когато $W^{QC} = 0$. Съгласно направеното предположение за M, $W^{QC}(q) \neq 0$ за някое $q \in M$ и от асимптотичната формула следва, че $\Upsilon_M(\eta^\varepsilon) < \lambda(S^{4n+3})$ за достатъчно малко ε, следователно $\lambda(M) < \lambda(S^{4n+3})$. Както авторите отбелязват, подобна схема е използвана от D. Jerison - J.M. Lee (1989), за да докажат съществуване на решение на CR-проблема на Ямабе за компактно строго псевдоизпъкнало CR-многообразие ($\equiv$ положително дефинитна форма на Levi) от размерност $2n+1$, което не е локално CR-еквивалентно на S^{2n+1}. Докато тяхното доказателство е в сила за размерност $2n+1 > 3$, доказателството за случая на QC-многообразие важи за произволна размерност. Ще отбележим още, че проблемът на Ямабе за сферата S^{4n+3} и по-общо за компактни 3-Сасакиеви многообразия, е решен от Иванов-Минчев-Василев.

В статия No.5 се разглежда уравнението на топлопроводността върху QC-многообразие, т.е. уравнението $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u$, където Δ е суб-Лапласианът. В статията е получена интегрална формула за производната по времето на функционала на енергията. Тази формула за ентропията е използвана, за да се докаже, че ако условието от типа на Лихнерович в стати No.3 е в сила при $k = 0$, то функционалът на енергията е монотонно нерастяща функция на времето за решенията на уравнението на топлопроводността в случая $n > 1$. За $n = 1$ това е вярно при едно допълнително предположение за P-функцията.

Формулата за ентропията, получена в статия No.5, се използва в статия No.6 за да се предокаже резултатите от типа на Лихнерович в статии No.1 и No.3. Освен това е установена долна граница за първото собствено число λ_1 на суб-Лабласиана върху компактно QC-многообразие при предположение, че е в сила условието от статия No.3, споменато по-горе, но с произволно $k \in \mathbb{R}$, както и едно предположение за така наречения C-оператор на QC-многообразието, въведен в статия No.1. Както авторът отбелязва, методът на доказателство е подсказан от статия на S.-C. Chang – C.-T. Wu (2010) за псевдо-Ермитови CR-многообразия, но разбира се той има свои особености и трудности за преодоляване.

В края на този преглед бих искал да подчертая, че пресмятанията в разгледаните статии са нетривиални и изискват математически умения от висока класа.

Педагогическа дейност

Александър Петков е водил упражнения във ФМИ по Диференциална геометрия и по Геометрия. Той е водил и упражнения по Линейна алгебра и аналитична геометрия във Физическия факултет и във Факултета по химия и фармация на СУ. Чел е лекции и е водил упражнения по Аналитична геометрия за студентите в специалностите "Статистика" и "Математика и информатика" (задочно обучение). Имал е лекции и упражнения по дисциплината Математика за специалност "Геология" в СУ.

Участие в научни проекти

А. Петков е участвал в 12 научни проекта. Три от тях са били финансирани от Фонд "Научни изследвания", осем - от Софийския университет и един от Министерството на образованието и науката.

Участие в научни конференции

А. Петков е представил получените от него резултат на международни конференции в редица европейски страни, САЩ и Мексико. Той е изнесъл доклади на 17 конференции и е представил постери на 5 конференции. Освен това е имал доклади на 4 семинара у нас и 3 семинара в САЩ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Документите и материалите, представени от гл. ас, Александър Петков, отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и Правилника за реда и условията за получаване на академична степен и заемане на академична длъжност на СУ ”Св. Кл. Охридски”.

Резултатите, получени от А. Петков, са важен принос в развитието на една трудна и актуална област на съвременната диференциална геометрия. Неговите научни постижения надхвърлят обичайните изисквания за заемане на академичната длъжност ”доцент”.

Въз основа на гореизложеното, препоръчвам на научното жури да предложи на компетентния орган по избора на Факултета по математика и информатика при СУ "Св. Климент Охридски"да гласува положително гл. ас. д-р Александър Владимиров Петков да заеме академичната длъжност ”доцент” в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, научна специалност ”Геометрия”.

03.09.2020 Рецензент:

(проф. дмн Йохан Давидов)