

# РЕЦЕНЗИЯ

на дисертация за придобиване на  
научната степен “Доктор на математическите науки”  
в професионално направление 4.5 Математика

Автор: доц. д-р Надя Пейчева Златева

Рецензент: проф. д-р Надежда Костадинова Рибарска  
20 декември 2017г.

Дисертационният труд на д-р Надя Пейчева Златева “Вариационен анализ: методи и приложения” се състои от 220 страници на английски език (заглавие “Variational Analysis: Methods and Applications”). Изложението се състои от увод, три глави и библиография от 172 заглавия. Авторефератът е на български език и има 96 страници. Получила съм дисертацията и автореферата на хартия и на електронен носител. Освен това на електронен носител дисертантката е представила официални документи (дипломи, заявление, заповед за предзащита), автобиография, справка за цитирания към август 2017 година, както и пълните текстове на единадесетте статии, в които са публикувани резултатите от дисертацията. Почти всички от тези статии са писани след конкурса за доцент.

Научните интереси на доц. Златева са в областта на оптимизацията и математическия анализ. Заглавието на дисертационния труд, “Вариационен анализ: методи и приложения”, е името на съвременна математическа дисциплина, възникнала като наследник на вариационното смятане, но обхващаща и сравнително нови области като негладък анализ, анализ на многозначни изображения, вариационни принципи и други. По-конкретно дисертацията съдържа резултати относно проксимална регулярност, интегруемост на субдиференциали и метрическа регулярност. Трудовете на дисертантката са оценени високо от математическата колегия.

В първа глава на дисертационния труд се изучават функции с квадратична оценка отдолу (primal lower-nice functions) и проксимално регулярни множества (prox-regular sets), като съответният клас от функции и съответният клас от множества са в естествена връзка помежду си. Тези класове са въведени съответно от Poliquin през 1991 г. (в крайномерно пространство) и от Poliquin и Rockafellar през 1996 г. и представляват естествено обобщение на изпъкналите, от една страна, и двукратно гладките, от друга страна, функции и множества. Изградена е богата теория около свойствата на тези класове, включваща регуляризация, интегруемост, свойства от втори ред и др.

В първите два параграфа на тази глава са изложени резултати на Милен Иванов и Надя Златева, които продължават в по-обща ситуация резултати, получени от Poliquin в крайномерно пространство и от Levy, Poliquin и Thibault в хилбертово пространство. По-точно, доказано е, че една полунепрекъсната отдолу функция е с квадратична оценка отдолу точно тогава, когато съществува определено отсичане на нейния субдиференциал, което притежава свойството хипомонотонност. Тази еквивалентност е доказана в банахови пространства и за по-общи субдиференциали. Доказано е, че субдиференциалът на Clarke-Rockafellar и проксималният субдиференциал на функция с квадратична оценка отдолу, дефинирана в  $\beta$ -гладко банахово пространство, съвпадат (където  $\beta$  е дадена борнология в банаховото пространство).

Последните два параграфа на първа глава представляват една от най-важните части на тази дисертация. Резултатите в тях са получени съвместно с Frédéric Bernard и Lionel Thibault и са публикувани в Journal of Convex Analysis и Transactions of the AMS. Продължени са до равномерно изпъкнали банахови пространства важни теореми, доказани за проксимално регулярни множества в хилбертови пространства, и са доказани някои нови техни свойства. Въведено е подходящо продължение на дефиницията на проксимално регулярно множество в равномерно изпъкнало банахово пространство, която използва дуалното изображение с цел да бъдат намерени характеристики на проксималната регулярност, подобни на тези в хилбертово пространство. Интересна е Лема 1.3.8, касаеща  $J$ -хипомонотонни оператори. Нейното доказателство (както и на много други твърдения от тази част на дисертацията) се основава на специфични свойства на дуалното изображение в равномерно изпъкнали пространства. Въведени са  $J$ -регулярни отдолу функции и са получени свойства на техните локални обвивки на Moreau. Установено е, че еднозначността и непрекъснатостта на изображението метрическа проекция върху затворено множество  $C$  е еквивалентна на непрекъснатата диференцируемост на функцията разстояние  $d_C$ . В Теорема 1.3.25 (Теорема 1.3.27) са намерени различни характеристики на свойството (равномерна) проксимална регулярност на множество в термините на диференцируемост на функцията разстояние, от една страна, и еднозначност и непрекъснатост на изображението метрическа проекция, от друга страна. Един от основните резултати в четвъртия параграф на първа глава е доказателството, че в равномерно изпъкнало банахово пространство проксимално регулярните множества са нормално и тангенциално регулярни, в частност за тях конусът на Mordukhovich и проксималният нормален конус съвпадат. Запазването на свойството проксимална регулярност при сечение на краен брой множества и при обратно изображение е получено при определени условия за уравновесеност. Друг важен резултат е, че сходимостта по Attouch-Wets също запазва равномерната  $r$ -проксимална регулярност и че изображението метрическа проекция е непрекъснато по отношение на тази сходимост за такива множества. Разработката в тази част на дисертацията до голяма степен принадлежи на областта на функционалния анализ. Успешно са използвани

знания от тази област, като са преодолените значителни технически трудности.

Втора глава на дисертационния труд е посветена на интегруемост на субдиференциали на функции, като под това се разбира, че условието субдиференциалът на  $g$  да съдържа субдиференциала на  $f$  влече, че  $f$  и  $g$  се различават с константа. Класическият резултат на Moreau-Rockafellar за интегруемост на субдиференциала на полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции, дефинирани в банахово пространство, е предоказан чрез техники на апроксимация и регуляризация, каквато е била и първоначалната идея на Moreau. Резултатът е публикуван в самостоятелна работа на дисертантката. Останалата част от тази глава се основава на три съвместни публикации на Надя Златева и Lionel Thibault. Намерена е количествена версия на субдиференциалната характеристика на липшицови по посока функции и този резултат е използван за установяване на локална интегруемост на субдиференциали на строго липшицови по посока регулярни функции, непрекъснати върху своя домейн (Теорема 2.2.6). В третия параграф на втора глава се изучава свойството интегруемост на функции на две променливи, дефинирани върху банахово пространство, което е произведение на две банахови пространства. Въведени са различни концепции за непрекъснатост, регулярност и липшицовост по посока на функция (с разлика в зависимостта от едната променлива и от другата променлива) и е изследвано как се отнасят те към интегруемостта. Интегруемостта на субдиференциали на локално липшицови функции на две променливи, за които е изпълнено някакво условие за регулярност, е доказана в Теорема 2.3.5, а локална интегруемост на някои липшицови по посока функции на две променливи е получена в Теорема 2.3.16. В последния параграф на тази глава се изучават седловидни функции, дефинирани в банахово пространство, което е произведение на банахови пространства  $X$  и  $Y$ . Такива функции са тясно свързани с минимаксните задачи. Продължени са някои резултати на Rockafellar за клас от седловидни функции, дефинирани в произведение на произволни банахови пространства  $X$  и  $Y$ . Въведени са частично слабо инф-компактни върху кълба седловидни функции и е доказана гъстота на домейна на субдиференциала в домейна на собствена затворена седловидна функция с това свойство, както и максимална монотонност на асоциирания с  $K$  многозначен оператор  $T_K$  за същия клас функции (Теорема 2.4.11, 2.4.12, 2.4.14). Получен е и резултат относно интегруемостта на субдиференциала на такава функция (Теорема 2.4.15, 2.4.16).

Трета глава е посветена на изследването на многозначни изображения и многозначни изображения, зависещи от параметър. В първия параграф се изучава липшицовата непрекъснатост по отношение на параметър на множеството от решения на параметризирана минимаксна задача в банахово пространство, което е произведение на банахови пространства. Намерени са достатъчни условия за това изображението, което на стойност на

параметъра съпоставя множеството от решения на задачата (което е възможно да бъде многозначно и неограничено), да има свойството на Aubin. Дадени са примери, илюстриращи тези условия. Скицирани са и няколко следствия, свързани със случая на изпъкнало-вдлъбнати гладки данни. Резултатите от този параграф са публикувани в работа, съвместна с Marc Quincampoix.

Според мен следващите два параграфа от тази глава също са един от центровете на тази дисертация наред с втората половина на първа глава. Във втория параграф на трета глава се изследва метрическа регулярност на многозначни изображения. Доказан е критерий за метрическа регулярност на многозначно изображение, използващ така наречените графични (или контингентни) производни на изображението. Основният резултат е Теорема 3.2.1 (наречен критерий на Aubin), който може да се разглежда като частично разширение на Theorem 5.4.3 в книгата на Aubin и Frankowska. Получена е и свързана с него теорема за неявното изображение (Теорема 3.2.3). Като приложение е показано как критерият на Aubin директно води до известния факт, че изображение, описващо система от равенства и неравенства, е метрически регулярно тогава и само тогава, когато е в сила условието на Mangasarian-Fromovitz. Освен това е получено ново необходимо и достатъчно условие за силна регулярност на вариационни неравенства върху многостенни множества. Представено е ново доказателство на теоремата за радиуса на метрическа регулярност, основано на критерия на Aubin. Резултатите от този параграф са публикувани в съвместна статия на дисертантката с Асен Дончев и Marc Quincampoix. Нека да отбележим, че на тази статия се падат близо половината от всички цитати на работите, включени в дисертацията.

В третия параграф на трета глава е доказан принцип за дълга орбита или празна стойност за многозначно изображение, който се отличава със своята простота и елегантност. Като непосредствено следствие от този принцип е получена теоремата за фиксирана точка на Caristi-Kirk. Отново като следствие от принципа за дълга орбита или празна стойност е получена оригинална теорема за сюрективност (Теорема 3.3.8). Грубо казано, в тази теорема се твърди, че ако приближената контингентна производна е линейно отворена с равномерна скорост в околност, такава е и самата функция. Като следствие от този резултат е получена изключително важната Теорема на Graves, както и критерия на Aubin за метрическа регулярност в частния случай на непрекъснатата функция. Резултатите от този параграф са публикувани в съвместна статия с Милен Иванов. Нямам никакво съмнение, че резултатите от тази статия тепърва ще бъдат развивани и ще бъдат оценени по достойнство от колегията.

Основните резултати от дисертационния труд са публикувани в 11 статии. От тях 9 са в списания с импакт фактор – Journal of Convex Analysis, Transactions of the AMS, SIAM J. Optim., Nonlinear Anal.: Theory Meth. Appl., Proceedings of the AMS, Math. Oper. Res., Compt. rend. Acad. bulg. Sci. (Доклади на БАН), а две статии са публикувани в Доклади на

БАН преди списанието да получи импакт фактор.

Статиите, върху които е основана дисертацията, към момента на започване на процедура по предзащита имат 157 цитирания (без автоцитирания и без автоцитирания на съавтори) в статии и монографии, от които 96 в статии, които са публикувани в списания с импакт фактор, и 12 в монографии. Освен това те имат и 9 цитирания в дисертационни и хабилитационни трудове. От справката за цитиранията се вижда, че общо работите на дисертантката са цитирани поне 218 пъти. Това е изключително високо постижение и надхвърля с повече от порядък изискванията на правилника на ФМИ. Да отбележим, че сред цитиралите работи на доц. Златева личат имената на математици като J.-P. Aubin, J.M. Borwein, M. Fabian, A.D. Ioffe, B.S. Mordukhovich, J.P. Penot, R.-T. Rockafellar.

Убедена съм, че доц. Златева има равностоен принос във всички статии, в които е съавтор.

Единствената ми критична забележка е липсата на достатъчно лидерски (самостоятелни или съвместни със студенти) статии на дисертантката. Разбира се, този недостатък се компенсира с излишък от високото ниво на професионализъм, демонстрирано от нея.

#### **Заклучение:**

Научните приноси, изложени в дисертацията на доц. Златева и като качество, и като количество (формално - брой публикации в списания с импакт фактор, брой цитирания и пр.) многократно надхвърлят изискванията на Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности във ФМИ-СУ за придобиване на степеня “доктор на математическите науки”.

**Убедено препоръчвам на уважаемото Научно жури да присъди на д-р Надя Пейчева Златева научната степен “доктор на математическите науки”.**

20.12.2017

(проф. д-р Н.Рибарска)