Софийски Университет
„Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Димитър Тодоров Георгиев

Алгоритмични методи за некласически логики

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователна и научна степен „Доктор"

Професионално направление: 4.5 „Математика"
Докторска програма „Математическа логика"

Научен ръководител: проф. д-р. Тинко Тинчев

София, 2017

Съдържание

Абстракт

Дисертацията е в областта на многото различни алгоритми, отнасящи се за модалната логика. Авторът е избрал да се съсредоточи върху изчислимостта и алгоритмите, свързани с модалната теория на съответствието, по-точно въпросите за модална определимост на формулите от първи ред и определимост от първи ред на модалните формули.

Преметът на дисертацията е да дефинира детерминистична версия на алгоритъма SQEMA, да покаже, че тази версия успешно работи над добре известните салквистови и индуктивни формули, както и да покаже някои резултати за модална определимост и определимост от първи ред за два класа структури на Крипке, които са интересни за изкуствения интелект, а именно - KD45 структурите и евклидовите структури.

Научните приноси в дисертацията могат да бъдат групирани в следните групи:

1. **Резултати за алгоритъма "Детерминистична SQEMA", салквистови и индуктивни формули.**

- Дефиниция на нова детерминистична версия на алгоритъма SQMEA с добавени правила за опростяване за универсалната модалност.

- Доказателство, че детерминистичната SQEMA винаги завършва.

- Нова инварианта за изпълнението на детерминистичната SQEMA при входни салквистови формули.

- Доказателство, че детерминистичната SQEMA успява при всяка входна салквистова формула.

- Нова инварианта за изпълнението на детерминистичната SQEMA при входни индуктивни формули.

- Доказателство, че детерминистичната SQEMA успява при всяка входна индуктивна формула.

2. **Резултати за прилагане на детерминистичната SQEMA върху формули от езика на пред-контактните логики (PCL), както и резултати за салквистовите PCL формули**

- Дефиниция на модифицирана транслация на PCL формули до формули от ML($\Box, [U]$).

- Доказателство, че по-горната транслация превръща салквистови PCL формули в салквистови формули от ML($\Box, [U]$).

- Модификация на съществуващата реализация на детерминистичната SQEMA на сайта `http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/sqema`, така че да работи с формули от PCL езика и да успява на всички салквистови PCL формули, използвайки модифицираната транслация.

3. **Резултати за изчислимост и сложност на задачи за съответствието в класа на всички** KD45 **структури на Крипке**

- Доказателство, че всички модални формули от основния модален език са определими с формули от първи ред в класа на всички KD45 структури на Крипке.

- Доказателство, че задачата за модална определимост с формула от основния модален език на формули от първи ред в класа на всички KD45 структури на Крипке е PSPACE-complete.

- Доказателство, че всички модални формули от основния модален език с добавена универсална модалност са определими с формули от първи ред в класа на всички KD45 структури на Крипке.

- Доказателство, че задачата за модална определимост с формула от основния модален език с добавена универсална модалност на формули от първи ред в класа на всички KD45 структури на Крипке е PSPACE-complete.

4. **Резултати за изчислимост и сложност на задачи за определимост в класа на всички евклидови структури на Крипке** - тази група резултати е разгледана в съавторство с Тинко Тинчев и Philippe Balbiani.

- Доказателство, че всички модални формули от основния модален език имат дефиниция от първи ред в класа на всички евклидови структури на Крипке.

- Доказателство, че задачата дали дадена формула от първи ред е общовалидна в класа на всички евклидови структури на крипке е неразрешима.

- Доказателство, че задачата дали дадена формула от първи ред е модално определима в класа на всички евклидови структури на Крипке е неразрешима.

Структура на дисертацията и автореферата

Дисертацията и авторефератът се състоят от 7 части.

1. **„Увод"**. Това е кратък увод в материята. Тук се обясняват накратко реферираните статии с основните резултати от дисертацията.

2. **„Общи понятия"**. Тук са изложени общите понятия и необходимите знания за разбирането на останалата част от дисертацията.

3. **„Детерминистична SQEMA"**. Тук се обяснява алгоритъмът „Детерминистична SQEMA" и основните резултати - инвариантите за салквистови и индуктивни входни формули, както и доказателства, че алгоритъмът винаги успява при двата вида входни формули. Дадена е и модифицирана транслация на формули от езика на пред-контактните логики (PCL) до формули, с които детерминистичната SQEMA може да работи. Доказано е, че детерминистичната SQEMA по този начин успява върху всички салквистови PCL формули.

4. **„$\mathrm{ML}(\Box)$ и $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$"**. Тук се разглеждат някои задачи за определимост в класа на всички KD45 структури на Крипке и е показано, че те са алгоритмично разрешими. Освен това е доказано за разгледаната задача за модална определимост, че е PSPACE-complete.

5. **„$\mathrm{ML}(\Box,[U])$ и $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$"**. Подобно на по-горното, тази част на дисертацията се занимава със задачи за определимост в класа на всички KD45 структури на Крипке. Разликата е, че тук модалният език е $\mathrm{ML}(\Box,[U])$ вместо $\mathrm{ML}(\Box)$.

6. **„$\mathrm{ML}(\Box)$ и $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$"**. Тук авторът, в съавторство с Тинко Тинчев и Philippe Balbiani, показва, че всяка модална формула има дефиниция от първи ред в класа на всички евклидови структури на Крипке. После авторите показват, че задачите за валидност и модална определимост на формули от първи ред са неразрешими в класа на всички евклидови структури.

7. **„Заключение"** Тук се дава резюме на получените резултати.

Благодарности

Авторът би искал да благодари на всички в катедрата на ФМИ „Математическа логика и приложенията ѝ”, за това че помогнаха да се разпали интерес у автора за темите на математическата логика, а и особено на научния ръководител на автора, проф. д-р Тинко Тинчев, който усърдно помогна на автора да „влезе отново в час” в областта на логиката след осемгодишно прекъсване. Дисертацията би била невъзможна без съавторите на [6], проф. д-р Тинко Тинчев and проф. Philippe Balbiani от IRIT, Тулуза. Авторът изпитва дълбока благодарност към научните си ръководители за дипломната му работа, защитена през далечната вече 2006-та година, проф. дмн Димитър Вакарелов и проф. д-р Тинко Тинчев.

1 Увод

Задачите за модална определимост и определимост от първи ред са важни теми в модалната логика. Първият голям резултат в тази област е салквистовия клас от модални формули, които са определими от първи ред, в [48]. Този резултат води до въпроса на ван Бентъм дали задачите са разрешими в [56][57], както и до създаването на алгоритъма на ван Бентъм за намиране на формули от първи ред, които са съответни на салквистовите. Чагрова, първо в [12] и [13], а по-късно с Чагров в [9], [10] и [11], показва, че двете задачи са неразрешими в класа на всички структури на Крипке.

Въпреки този негативен резултат, двете задачи за определимост имат алгоритмични решения за някои класове от структури на Крипке, като например някои класове, използвани в изкуствения интелект. Например Балбиани и Тинчев показват в [2] и [1], че задачите за модална определимост на формули от първи ред и определимост от първи ред на модални формули са разрешими в класа на всички структури на Крипке с релации на еквивалентност в езиците ML($\Box$) и ML($\Box, [U]$). Но в [3], същите двама автори създават метод за свеждане на задачата за разрешаване на валидността на затворени формули от първи ред над някои класове от структури на Крипке към задачата за модална определимост на затворени формули от първи ред в същите класове от структури. По този начин те показват, че задачата за модална определимост на формули от първи ред е неразрешима в доста на брой класове от структури на Крипке.

Съществуват класове от модални формули, освен салквистовите, за които алгоритмично може винаги да се намерят съответни формули от първи ред в класа на всички структури на Крипке. Например, класът на индуктивните формули, въведен в [31][54][16][32].

Съществуват и други алгоритми за намиране на съответни формули от първи ред при дадена модална формула. Например в [23] Габай и Олбах задават алгоритъма SCAN, а в [52], Шалас представя DLS. SCAN се основава на метод на резолюцията, приложен върху скулемизиран превод на модалната формула в език от втори ред, докато DLS работи със същия превод, но се основава на лема на Акерман. И двата алгоритъма използват процедура за дескулемизация, която не винаги успява.

Недетерминистичният алгоритъм SQEMA (Second-order Quantifier Elimination using a Modal Ackermann lemma) за намиране на съответни от първи ред на модални формули е въведен в [17][18][19][21][20][15]. Той използва модална версия на добре известната лема на Акерман. SQEMA работи директно с модални формули, без да използва превод до формули от втори ред и без да използва скулемизация. Така SQEMA успява не само за всички салквистови формули, но също така и за индуктивните формули, споменати по-горе. Има примери на модални формули, за които SQEMA успява, докато SCAN и DLS не успяват, например $(\Box(\Box p \leftrightarrow q) \to p)$. Както е доказано в [17][18][19] [15] SQEMA успява само за входни формули, които са d-persistent (за език с номинали) или di-persistent (за темпорални езици с номинали) — и следователно, подобно на [8][16][30][32][15], канонични формули. С други думи, ако алгоритъмът SQEMA успее за някоя входна формула, той не само намира съответна формула от първи ред, но освен това доказва, че входната формула е канонична. Този резултат се отнася и до произволни множества от модални формули, за които SQEMA упсява. Така SQEMA може да се използва за автоматично доказване на пълнота на някои модални логики относно каноничните им модели.

Програмна реализация на SQEMA на езика Java е представена в [25]. Някои допълнителни опростявания са добавени в реализацията, благодарение на предложение от Ренате Шмит, с чиято помощ реализацията успява за формули като $((\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p) \lor (\Box p \to \Diamond p))$, чрез опростяване на $(\Box p \land \Box\neg p)$ до $\Box\bot$.

Универсалната модалност и номиналите се въвеждат в [45].

В [26], авторът показва версия на SQEMA за езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$, който е разширение на основния модален език с добавена универсална модалност.

В [18] е представена SQEMA за темпорален език с номинали, обещавайки разширение с $[U]$. В [21], е разгледана SQEMA с монотонност данолу в правилото на Акерман. В [55][20], се разглежда разширение на алгоритъма SQEMA за темпорален език с $[U]$ и номинали, чийто изход е формула от μ-смятането от първи ред.

В [27] авторът дава дефиниция на детерминистична и завършваща за краен брой стъпки стратегия за използването на правилата на SQEMA за език с универсална модалност, най-много изброимо много двойки от обратни една на друга модалности и номинали, $\mathrm{ML}(T, U)$. Авторът показва, че Deterministic SQEMA винаги успява на всички салквистови и индуктивни формули. Съществуващото доказателство за това за огириналната SQEMA от [17] е неприложимо за Deterministic SQEMA, например за входната формула $(\neg\Box\Box p \lor \Diamond p)$. При водната формула без номинали, подобно на [17], авторът е показал, че ако детерминистичната SQEMA успее, то входната формула е d-устойчива. Ако входната формула е от хибриден темпорален език с универсалната модалност, подобно на [18], детерминистичната SQEMA успява само за di-устойчиви формули. Аксиоматичната система за $\mathrm{ML}(T, U)$ и нейната пълнота е пказана в [27], с доказателства близки до [45][46][24][8]. Подобно на [8][30][16][53][32][18], е доказана каноничността на di-устойчивите формули. Също така в дисертацията е показана аксиоматичната система за нехибридни езици, използвайки същите източници, а също така е доказана и каноничността на d-устойчивите формули. Така детерминистичната SQEMA може да се използва, за да се докаже каноничността на дадена формула.

В статията [27] е показано как да се разшири детерминистичната SQEMA до езика на пред-контактните логики (PCL). Там се използва модифицирана форма на транслацията от [5]. С нейна помощ получаваме салквистови формули от салквистови PCL формули, които са дефинирани в [4]. Така показваме, че детерминистичната SQEMA успява на всички такива формули. Пълнотата на всички PCL формули е доказана в [5].

В [28][29] са разгледани задачи за определимост в класа на всички KD45 структури на Крипке. Този клас се аксиоматизира от каноничната и разрешима модална логика KD45. Интересът към този клас произхожда от областта на изкуствения интелект. Затова логиката KD45 е добре анализирана в литературата. Първо тя се разглежда като логическата система DE4 в [37] и [49]. По-късно се разглежда като нормално разширение на K5 в [42] и [43]. Пълнотата и сложността на KD45 е изследвана в [34] и [35], а също и системи, в които участват както S5, така и KD45 модалности, за които може да се намери информация и в [58], [41] и [40]. Табло система за KD45 е представена в [33]. Добър обзор в тази област има в [7].

В [28] и [29] авторът показва, че всички формули от езиците $\mathrm{ML}(\Box)$ и $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ имат определение от първи ред в класа на всички KD45 структури на Крипке, а също така, че задачата за модална определимост на формули от първи ред във всеки от езиците $\mathrm{ML}(\Box)$ и $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ в класа на всички KD45 структури е в PSPACE. Използват се идеи от [2] и [1] в основата на доказателствата. Използва се начин на доказване от [3], за да се покаже, че в един от случаите задачата е PSPACE-hard.

Модалната логика K5 и свойствата на нейните структури на Крипке са излсед-вани от Nagle в [42] и по-късно съвместно с Thomason в [43]. Тези теми са също така изследвани от Halpern и Rêgo в [36].

В [6], Balbiani, авторът на дисертацията и Тинчев показват, че всички $\mathrm{ML}(\Box)$ формули имат определение от първи ред в класа на всички K5 (евклидови) структури на Крипке. Също така а доказано, използвайки основния похват от [3], че задачата за модална определимост на формули от първи ред в този клас от структури на Крипке е алгоритмично неразрешима.

Дисертацията обобщава резултатите за SQEMA и детерминистичната SQEMA от [26] и [27], а също и резултатите от [28], [29] и [6]. В секция 3 може да се види, че детерминистичната SQEMA може да се разшири до език без номинали. Използва се похвата на топологичното доказателство от [17], за да се докаже, че алгоритъмът успява само при d-устойчиви формули от нехибридните езици. Така се така доказва, че алгоритъмът може да се използва за доказване на аксиоматична пълнота (каноничност). Така резултатите от [26] се вкючват в дисертацията, включително правилата за универсалната модалност, които са въведени там. В същата секция се показват резултатите от [27], включително разширението на детерминистичната SQEMA до език ана пред-контактните логики (PCL). В секция 4 и секция 5 се разглеждат резултатите от[28] и [29], а именно разрешимостта на две задачи за определимост в класа на всички KD45 структури на Крипке относно всеки от езиците $\mathrm{ML}(\Box)$ и $\mathrm{ML}(\Box, [U])$. В секция 6 се показват детайлно резултатите от [6], където е доказано, че всички модални формули от $\mathrm{ML}(\Box)$ имат определение от първи ред в класа на всички евклидови структури, а също така и че задачата за модална определимост на формули от първи ред в този клас от структури на Крипке е алгоритмично неразрешим.

Подходящ учебник по логика от първи ред е [50]; за модална логика – [39] и [8]; за теория на моделите – [14] и [22]; за изчислителна сложност – [44]. Дисертацията използва теоремата на Stockmeyer от [51] за сложността на задачата дали дадена формула е теорема в теорията на равенството от първи ред.

2 Общи понятия

В дисертацията говорим за няколко различни модални езика и няколко различни езика от първи ред.

2.1 Модални езици

Нека първо да дефинираме модалните езици, които ни интересуват.

Означаваме с $a \nearrow b$ т.с.т.к. думата или символът a участва в думата b. Отрицанието на участие се означава чрез $\not\nearrow$.

Първо, да дефинираме символите, които използваме за модалности. Нека $Box =_{def} \{\Box_0, \Box_1, \Box_2, \dots\}$ е изброимо безкрайно множество от символи, които наричаме *квадратчета*. Нека $RevBox =_{def} \{\Box_0^{-1}, \Box_1^{-1}, \Box_2^{-1}, \dots\}$ е изброимо безкрайно множество от *обърнати квадратчета*. По подобен начин дефинираме $Diamond =_{def} \{\Diamond_0, \Diamond_1, \Diamond_2, \dots\}$ – множеството на *ромбчета* и $RevDiamond =_{def} \{\Diamond_0^{-1}, \Diamond_1^{-1}, \Diamond_2^{-1}, \dots\}$ – множеството на *обърнати ромбчета*. От тези символи, тези с нулев индекс имат специално значение. Означаваме $\Box_0$ с $[U]$ и го наричаме *универсалното квадратче*, а също така означаваме $\Diamond_0$ с $\langle U \rangle$, което наричаме *универсалното ромбче*.

Нека $PROP =_{def} \{p_1, p_2, \dots\}$ е изброимо безкрайно множество от символи, които наричаме *съждителни променливи*. Означаваме съждителните променливи с буквите p и q. Нека $NOM =_{def} \{c_1, c_2, \dots\}$ е изброимо безкрайно множество от *номинали*.

Приемаме, че множествата $PROP$, NOM, Box и $RevBox$ не се пресичат.

Използваме главни латински букви A и B за модални формули. Общият синтаксис на модалните езици, които разглеждаме, е следният:

$A ::= \bot \mid \top \mid p_i \mid c_j \mid \neg A \mid (A \vee A) \mid (A \wedge A) \mid \Diamond_s A \mid \Diamond_d^{-1} A \mid \Box_s A \mid \Box_d^{-1} A$

където $i \in \mathbb{N}, j \in J, s \in S, d \in D$, $D \subseteq S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$, а J е или $\emptyset$, или $\mathbb{N}$.

Можем също така да ползваме $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$ както обикновено. Можем да пропускаме скоби, използвайки стандартните правила за старшинство. Съждителните променливите и номиналите наричаме *атомарни формули*.

В дисертацията се приема, че формулата A е *позитивна* т.с.т.к. всички участия на съжидтелни променливи в A са позитивни, игнорирайки участията на номинали. Приемаме, че формулата A е *негативна* т.с.т.к. всички участия на съждителни променливи са негативни, игнорирайки участията на номинали.

Нека L е един от модалните езици, дефиниран по-горе. Ако $J = \mathbb{N}$, казваме, че L е *хибриден модален език* или просто *хибриден език*, иначе ако $J = \emptyset$, казваме, че L е *нехибриден модален език* или просто *нехибриден език*. Ако $D = S$, казваме, че L е *темпорален език*. Ако $0 \in S$, казваме, че L *съдържа универсалната модалност*.

Ако L е модален език и $\Box$ е едно от квадратчетата или обърнатите квадратчета на L, означаваме с $\Box^{-1}$ съответното обърнато квадратче или квадратче (ако то е в L). Същото означение прилагаме и за ромбчета и обърнати ромбчета.

Основният модален език $\mathrm{ML}(\Box)$ е модален език, при който $J = \emptyset$, $S = \{1\}$ и $D = \emptyset$. *Основният модален език, разширен с добавена универсална модалност*, $\mathrm{ML}(\Box, [U])$, е модален език, при който $J = \emptyset$, $S = \{0, 1\}$ и $D = \emptyset$. Когато говорим за тези два езика, използваме просто $\Box$ и $\Diamond$ за означаване на неуниверсалните квадратчета и ромбчета.

Ако A е модална формула, тогава $PROP(A)$ е множеството на съждителните променливи, които се срещат в A, а $NOM(A)$ е множеството на номиналите, които се срещат в A.

Ако споменем *език*, имаме предвид модален език.

2.2 Семантика на Крипке за модалните езици

Нека L е модален език и нека S да е множеството от индексите на квадратчетата на L. Казваме, че наредената двойка $\mathrm{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ е *структура на Крипке за* L т.с.т.к. $W \neq \emptyset$ е *носител на* F и за всяко $i \in S$, $\mathcal{R}(i) \subseteq W \times W$ са *релациите на достижимост*, където ако $0 \in S$, $\mathcal{R}(0) = W \times W$. Ако $w \in W$, казваме че състоянието или светът w е *в* F. Ако S е крайно, можем да пропуснем $\mathcal{R}(0)$ ако $\Box_0$ е в езика и така можем да представим F с наредената $(n+1)$-торка $\langle W, R_{i_1}, \ldots, R_{i_n} \rangle$, където $n > 0$, $W \neq \emptyset$, $S = \{i_1, \ldots, i_n\}$ и $R_{i_1}, \ldots, R_{i_n}$ са бинарни релации над W. Така например $\langle W, R \rangle$ е структура на Крипке за езиците $\mathrm{ML}(\Box)$ и $\mathrm{ML}(\Box, [U])$. Също така, ако ни трябва структура на Крипке за език с две неуниверсални квадратчета, можем да бележим $\mathrm{F} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$.

Нека $\mathrm{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ е структура на Крипке за модалния език L. *Модел на Крипке за* L, или просто *модел за* L, е наредената тройка $\mathrm{M} = \langle \mathrm{F}, V, H \rangle$, където $V : PROP \to \mathbb{P}(W)$ е *оценка на съждителните променливи*, а $H : NOM(L) \to W$ е *оценка на номиналите*. Ако L е без номинали, можем да използваме вместо това наредената двойка $\langle \mathrm{F}, V \rangle$, защото H е празната функция. Казваме, че моделът $\mathrm{M} = \langle \mathrm{F}, V, H \rangle$ е *базиран на* или е *над* F. Ако $w \in W$, казваме, че w е *в* M. Ако $\mathrm{M} = \langle \mathrm{F}, V, H \rangle$ е модел за хибриден език, казваме, че M е *наименован* т.с.т.к. H е сюрективна функция. Вместо F, можем да използваме $W, \mathcal{R}$. Така например $\mathrm{M} = \langle W, \mathcal{R}, V, H \rangle$ е модел на Крипке. Ако езикът е нехибриден, можем да пропуснем H.

Оценката на модална формула $A \in L$ в даден модел M за L се дефинира по стандартния за модалната логика начин: $[\![p]\!]_{\mathrm{M}} = V(p)$, $[\![c]\!]_{\mathrm{M}} = \{H(c)\}$, $[\![\Diamond_i A]\!]_{\mathrm{M}} = \{w \in W \mid \exists v \in [\![A]\!]_{\mathrm{M}} : \langle w, v \rangle \in \mathcal{R}(i)\}$ и т.н.

Използваме стандартните за модалната логика означения за истинност и валидност, $\Vdash$.

2.3 Езици от първи ред

Използваме стандартната дефиниция за *език от първи ред* и за *теория от първи ред*, както са зададени в [50]. В дисертацията работим само с езици от първи ред изброимо безкрайно много индивидни променливи $VAR = \{x_1, x_2, \ldots\}$, с равенство, без константи и без функционални символи, и имащи само унарни ($\{P_1, P_2, \ldots\}$) и бинарни ($\{r_1, r_2, \ldots\}$) предикатни символи.

Такива езици от първи ред, които не съдържат унарни предикатни символи, наричаме *езици на съответствието*, и можем да използваме структури на Крипке като структури за тях.

В по-голямата част на дисертацията, FOL е просто езикът без унарни предикатни символи, който съдържа всички възможни бинарни предикатни символи. В секции 4, 5 и 6, FOL означава езика от първи ред без унарни предикатни символи и с единствен бинарен предикатен символ r.

2.4 Разрешимост и сложност

Използваме стандартните понятия за разрешимост ([50]) и сложност ([44]).

2.5 Задачата за съответствието

Следните две дефиниции за определимост са адаптирани от [8], вж. Дефиниция 3.2 на стр. 126.

Дефиниция 1 (Определимост от първи ред) Нека $\mathcal{C}$ е клас от структури на Крипке. Казваме, че класът $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ е *определим от първи ред над* $\mathcal{C}$ т.с.т.к. съществува FOL формула ψ, такава че за всички $\mathrm{F} \in \mathcal{C}$ е вярно, че $\mathrm{F} \in \mathcal{C}'$ т.с.т.к. $\mathrm{F} \vDash \psi$. В този случай казваме, че ψ *определя* $\mathcal{C}'$ *над* $\mathcal{C}$.

Дефиниция 2 (Модална определимост) Нека $\mathcal{C}$ е клас от структури на Крипке за даден модален език L. Казваме, че класът $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ е *модално определим над* $\mathcal{C}$ *в* L т.с.т.к. съществува модална формула $A \in L$, такава че за всички $\mathrm{F} \in \mathcal{C}$ е вярно, че $\mathrm{F} \in \mathcal{C}'$ т.с.т.к. $\mathrm{F} \Vdash A$. В този случай казваме, че A *определя* $\mathcal{C}'$ *над* $\mathcal{C}$ *в* L.

Има две основни задачи за съответствието, които са описани в уводите на [1], [2] и [10]. Тук използваме следните имена:

Дефиниция 3 (Определимост от първи ред на модални формули) Нека L е модален език и нека $\mathcal{C}$ е клас от структури на Крипке за L. Задачата за определимост от първи ред за L над $\mathcal{C}$ е следната: При дадена модална формула $A \in L$, съществува ли FOL формула ψ, такава че за всички $\mathrm{F} \in \mathcal{C}$ е вярно, че $\mathrm{F} \Vdash A$ т.с.т.к. $\mathrm{F} \vDash \psi$? Ако има такава формула ψ, казваме, че ψ е *определение от първи ред на* A *над* $\mathcal{C}$. Също така казваме, че A и ψ са глобално съответни над $\mathcal{C}$.

Дефиниция 4 (Модална определимост на формули от първи ред) Нека L е модален език и нека $\mathcal{C}$ е клас от структури на Крипке за L. Задачата за модална определимост за L над $\mathcal{C}$ е следната: При дадена формула от първи ред $\psi \in \mathrm{FOL}$, съществува ли модална формула $A \in L$, такава че за всички $\mathrm{F} \in \mathcal{C}$ е вярно, че $\mathrm{F} \Vdash A$ т.с.т.к. $\mathrm{F} \vDash \psi$? Ако съществува такава формула A, казваме че A е *модално определение на* ψ *над* $\mathcal{C}$. В този случай казваме, че A и ψ са глобално съответни над $\mathcal{C}$.

При даден модален език L, интересуваме се дали годните две задачи са разрешими над някои класове от структури на Крипке за L.

Ако по-горните задачи са неразрешими над класа на всички структури за Крипке за L, то съществуват ли интересни алгоритми за разрешаване на части от проблемите, които успяват за колкото може повече формули?

Забележете, че горните две дефиниции са за глобална определимост и глобално съответствие. Понякога е по-лесно да решим задачата за локално съответствие – това е понятие, което ще дефинираме по-късно и лесно се вижда, че при неговото наличие следва и глобално съответсвие.

2.6 Стандартната транслация

Използваме стандартната транслация в секция 5 и секция 6, както е дефинирана в [8], глава 2.4, вж. Дефиниция 2.45. Ясно е, че ако модалният език съдържа номинали, е необходимо езикът от първи ред за стандартната транслация да съдържа съответни константни символи. Обаче, ние няма да използваме обикновената стандартна транслация за хибридни езици в секция 3. Вместо това, там използваме модифицирана стандартна транслация за формули без съждителни променливи.

2.7 P-морфизми, disjoint unions и породени подструктури

В секции 4, 5 и 6 използваме добре известни понятия от теория на моделите за модални езици без номинали. Това са: p-морфни образи, disjoint unions (за езици без универсалната модалност) и породени подструктури (за езици без универсалната модалност). Дефинициите могат да се видят в [8], страници 139–143. Означаваме disjoint union с $\biguplus$.

2.8 Обобщени структури на Крипке

В секция 3 използваме обобщени структури на Крипке, за да покажем аксиоматична пълнота на някои модални формули. Дефинициите могат да се видят в [8], на страници 27–29.

Също така се интересуваме от *дескриптивни* и *дискретни* обобщени структури на Крипке. Вж. Дефиниция 5.65 от [8], стр. 308.

Ако $\mathfrak{g} = \langle \mathrm{F}, \mathbb{W} \rangle$ е обобщена струкура на Крипке, то с $\mathfrak{g}_{\#}$ означаваме F.

2.9 D-устойчивост и Di-устойчивост

Дефиниция 5 Нека $\mathcal{C}$ е клас от обобщени структури на Крипке за някой модален език L и нека $A \in L$ е модална формула. Казваме, че A е *устойчива спрямо* $\mathcal{C}$ *и* L т.с.т.к. за всички $\mathfrak{g} \in \mathcal{C}$ е вярно, че $\mathfrak{g}_{\#} \Vdash A$ т.с.т.к. $\mathfrak{g} \Vdash A$. Тогава ако $\mathcal{C}$ е класът на всички дескриптивни обобщени структури на Крипке за L, то A се нарича *d-устойчива спрямо* L, а ако $\mathcal{C}$ е класът на всички дискретни обобщени структури на Крипке за L, то A се нарича *di-устойчива спрямо* L.

2.10 Нормални модални логики, пълнота и каноничност

Приемаме, че ще разглеждаме нормални модални логики (или просто логики) само за такъв модален език L, за който е вярно, че ако в езика има номинали, то в езика има и универсална модалност. Използваме аксиоматична система, подобна на тази в [45], [46] и [24].

Минималната нормална модална логика за L бележим с K_L. Минималната нормална модална логика за L, която включва дадена формула $A \in L$ се бележи с $K_L + A$, където A наричаме *аксиомата* на $K_L + A$. Подобно на това, означаваме логиката с множество от аксиоми $\Gamma \subseteq L$ с $K_L + \Gamma$.

Строим канонични модели за логики използвайки максимални теории, подобно на [45], [46] и [24]. Дадена нормална модална логика $\Lambda \subseteq L$ е *канонична спрямо* L т.с.т.к. е валидна в каноничните си структури на Крипке за L. Формулата $A \in L$ наричаме *канонична спрямо* L т.с.т.к. $K_L + A$ е канонична спрямо L.

В литературата е добре известно, напр. в [8][30][16][53][32][18][27], че някои видове устойчивост на формули влекат валидност в структурата на Крипке на каноничните модели спрямо езика в дадена хилбертова аксиоматична система.

Например, в [8] е показано, че d-устойчивост влече каноничност в нехибридни езици, в [53] са разгледани хибридни езици и di-устойчивост, а в [27] е показано, че di-устойчивост влече каноничност в темпорални хибридни езици с универсалната модалност.

Ако $\Lambda \subseteq L$ е нормална модална логика, то с $Fr(\Lambda)$ означаваме класа на всички структури на Крипке за L, в които е валидна Λ.

2.11 Свойство на крайните модели

Дефиниция 6 Нека L е модален език и нека $\mathcal{C}$ е клас от структури на Крипке за L. Казваме, че $\mathcal{C}$ има *свойството на крайните модели* т.с.т.к. за всяка формула $A \in L$, такава че $\mathcal{C} \nVdash A$, съществува краен модел M над някоя крайна структура на Крипке $\mathrm{F} \in \mathcal{C}$ и съществува състояние w в M, такива че $\mathrm{M}, w \nVdash A$. Ако L е такъв модален език, че ако в L има номинали, то в L има и универсална модалност и ако $\Lambda \subseteq L$ е нормална модална логика, казваме, че Λ има *свойството на крайните модели* т.с.т.к. $Fr(\Lambda)$ има свойството на крайните модели.

Обикновено за доказване на свойството на крайните модели се използва методът на *филтрацията*, виж [8]. В дисертацията използваме факта, че логиките S5 и KD45 в контекста на езика $\mathrm{ML}(\Box)$ имат свойството на крайните модели. Това са добре известни факти в литературата. В дисертацията те се доказват чрез свойствата на игрите на Ehrenfeucht-Fraïssé и теоремата на Ehrenfeucht, за която може да се прочете в [22] - вж. лема 18 в секция 4. Показваме подобен резултат за езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ в секция 5, използвайки и стандартната транслация.

3 Детерминистична SQEMA

3.1 Увод в детерминистичната SQEMA

Тук ще разгледаме само някои модални езици. Казваме, че езикът L е *от тип 1* т.с.т.к. L е нехибриден език. Казваме, че езикът L е *от тип 2* т.с.т.к. L е хибриден темпорален език с универсална модалност.

За алгоритъма детерминистична SQEMA, ще приемем, че входната формула е от език, който е или от тип *1*, или от тип *2*. Разликата между двата типа езици е, че ако една формула е от език от тип *1*, L_1, и формулата е d-устойчива по отношение на L_1, то тя е канонична по отношение на L_1, а ако формулата е от език от тип *2*, L_2, и формулата е di-устойчива по отношение на L_2, то тя е канонична по отношение на L_2.

Детерминистичната SQEMA успява само при входни формули, които, ако са от език от тип *1*, то те са d-устойчиви по отношение на езика, а ако са от език от тип *2*, то те са di-устойчиви по отношение на езика. Така действително детерминистичната SQEMA може да се използва за доказване на каноничността на входната формула по отношение на нейния език, стига тои да е или от тип *1*, или от тип *2*. За да може детерминистичната SQEMA да се използва за доказване на каноничността на входната формула по отношение на друг вид хибриден модален език, се налага да се въведат някои допълнителни ограничения на това как да се прилагат правилата за преобразуване, които алгоритъмът използва, както може да се види в [18]. Дисертацията не разглежда този въпрос.

Дефиниция 7 (Локално Съответствие) Нека L е модален език. Казваме, че дадена формула $A \in L$ и дадена FOL формула $\psi(x)$ са *локално съответни по отношение на даден клас $\mathcal{C}$ от структури на Крипке за L*, означено с $A \sim \psi(x)$, т.с.т.к. за всички структури на Крипке $\mathrm{F} \in \mathcal{C}$ и всички състояния w в F е вярно, че $\mathrm{F}, w \Vdash A$ т.с.т.к. $\mathrm{F} \vDash \psi[x \to w]$. Очевидно, ако A и $\psi(x)$ са локално съответни по отношение на $\mathcal{C}$, то те са и глобално съответни по отношение на $\mathcal{C}$.

Ако L е език, означаваме с $\mathcal{C}_L$ класа на всички структури на Крипке за L.

Целта е да намерим, ако е възможно, формула от първи ред, която е локално съответна на дадена формула A от език L (който е от тип *1* или *2*), по отношение на $\mathcal{C}_L$, както и в същото време да докажем, че A е канонична по отношение на L.

За тази цел, първо разширяваме езика L до език L' по следния начин. Нека S е множеството на индексите на ромбчетата в L и нека D е множеството на индексите на обърнатите ромбчета в L. Нека L' е темпорален хибриден език с множество от индекси на ромбчета и обърнати ромбчета S. Така за всички модалности от L, съответните им обърнати модалности са L' и освен това може да сме добавили номинали в езика. Така алгоритъмът работи, приемайки входна формула от L и работейки с формули от L'.

Дефиниция 8 (Чисти формули) Казваме, че модалната формула A е *чиста* т.с.т.к. тя не съдържа срещания на съждителни променливи.

Използваме дефиниция на специална стандартна транслация на чисти формули, както се вижда в Дефиниция 18 от [27] и в дисертацията. Така получаваме функция $st(n, x, A)$ за чисти формули A, която произвежда FOL формула със свободни променливи $x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$, където $c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}$ са всички номинали, които се срещат в A.

3.2 Алгоритъмът детерминистична SQEMA

Следваме дефинициите в [17] и [21].

Дефиниция 9 Казваме, че модалната формула A е в *отрицателна нормална форма* т.с.т.к. отрицанието се среща само непосредствено пред срещания на $\top$, $\perp$, съждителни променливи или номинали. (Тук приемаме, че дефинираният символ за импликация, $\to$, не се среща в A.)

Дефиниция 10 *Уравнение* наричаме формула от вида $(c' \to \Diamond c'')$ или от вида $(A \veebar B)$, такава че A и B са в отрицателна нормална форма, а $\veebar$ е символ, който използваме вместо $\vee$, за да покажем, че формулате е уравнение. *Система* наричаме формула от вида $\neg\bigwedge(\chi_1,\ldots,\chi_n)$ за някое $n\geq 0$, където $\chi_1,\ldots,\chi_n$ са уравнения. Означаваме системите от уравнения с σ, а уравненията – с χ. Казваме, че системата σ е *решена спрямо* p т.с.т.к. σ не съдържа срещания на p. Системата σ се нарича *решена* т.с.т.к. σ е чиста. По-долу казваме, че c_m е *нов номинал*, ако c_m е такъв, че: ако $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ са всички формули, които са получени като вход или по време на изпълнението на някой клон от алгоритъма досега, то номиналите, които участват в $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$ са измежду $\{c_1,\ldots,c_{m-1}\}$.

Ако σ е $\neg\bigwedge(\chi_1,\ldots,\chi_m)$, означаваме със $\sigma[\chi_j//\chi'_1,\ldots,\chi'_m]$: $\neg\bigwedge(\chi_1,\ldots,\chi_{j-1},\chi'_1,$ $\ldots,\chi'_m,\chi_{j+1},\ldots,\chi_n)$.

Означаваме със $\sigma[p//\neg p]$ системата от уравнения, получена от σ чрез едновременно заместване на всяко положително срещане на p с $\neg p$ и на всяко срещане на $\neg p$ с p. Тази операция наричаме *смяна на поляритета на p в σ*.

По-долу, под „квадратче” ще разбираме произволно квадратче или обърнато квадратче, а под „ромбче” ще разбираме произволно ромбче или обърнато ромбче.

Дефиниция 11 (Алгоритъмът детерминистична SQEMA)

ВХОД: $A\in L$, където L е език от тип *1* или *2*, а L' е неговото хибридно темпорално разширение.
ИЗХОД: $\langle success, fol(A)\rangle$ или $\langle failure\rangle$

СТЪПКА 1: Преобразува се A в отрицателна нормална форма. След това се разпределят квадратчетата, които не са в областта на действие на ромбче, а и дизюнкциите, над конюнкциите, колкото е възможно, използвайки следните семантични еквивалентности:
Правило 1.1: $\Box(A_1\wedge A_2)\equiv(\Box A_1\wedge\Box A_2)$
Правило 1.2: $((A_1\wedge A_2)\vee A_3)\equiv((A_1\vee A_3)\wedge(A_2\vee A_3))$
Правило 1.3: $(A_1\vee(A_2\wedge A_3))\equiv((A_1\vee A_2)\wedge(A_1\vee A_3))$

Така получаваме $A\equiv\bigwedge(A_1,\ldots,A_n)$, където е невъзможно повече да се прилагат правилата 1.1, 1.2 или 1.3 върху някое A_i. Резервираме номинал c_k, такъв че всички номинали, които участват в A, са измежду $c_1,\ldots,c_{k-1}$. Този номинал ще се използва във всички стъпки. Продължава се със стъпка 2, приложена отделно върху всяка от подформулите A_i, а след това, ако стъпка 2 успее за всички A_i, се продължава със стъпка 5. Иначе, ако някой от клоните за някое i пропадне, то нека изходът да е $\langle failure\rangle$ и се спира работа.

СТЪПКА 2: Нека A_i да е един от конюнктите от стъпка 1. Нека A' да е *нормализираната* форма на $\neg A_i$, която ще дефинираме по-долу, но засега стига да отбележим, че A' трябва да е в отрицателна нормална форма и всяка съждителна променлива, която участва или само позитивно, или само негативно в $\neg A_i$ е била заместена съответно с $\top$ или $\bot$. Построява се уравнението $(\neg c_k \veebar A')$, където c_k е номиналът от стъпка 1. Опитва се решаване на системата σ: $\neg\bigwedge((\neg c_k\veebar A'))$ чрез изпълнение на стъпка 3 и резултатът се връща към стъпка 1.

СТЪПКА 3: Нека текущата система е σ. Всяка пермутация на $PROP(\sigma)$ се опитва като *ред за елиминация на променливите*, с нов, празен *бектрекинг стек*, който се използва за текущата пермутация, чрез опит за елиминация на всяка променлива в този ред чрез изпълнение на стъпка 4. Ако някоя пермутация е успешна, т.е. успешно са елиминирани съждителните променливи от текущата система, то се продължава със стъпка 5. Ако всички редове за елиминация пропаднат, то пропада решаването на текущата система и се връща изпълнението към стъпка 2.

СТЪПКА 4: Входът за тази стъпка е съждителна променлива p за елиминация и система σ_0. Записва се контекст за бектрекинг $\langle p, \sigma_0 \rangle$ в стека, за да може да се изпълни смяна на поляритета, но само ако входът не е дошъл от стека. Прилагат се правилата на SQEMA по детерминистичен начин, за да се опита елиминирането на срещанията на p, превръщайки σ_0 в σ_1. Използваме детерминистична стратегия за прилагането на правилата на SQEMA, която е показана по-долу. Ако p е елиминирана успешно, стъпката е успешна и нормализираната форма на σ_1 (която ще опишем по-долу) се връща на стъпка 3, за да се опита елиминация на останалите променливи. Ако това пропадне, се проверява дали бектрекинг стека е празен. Ако е празен, стъпката пропада, неуспявайки да елиминира p, и управлението се връща на STEP 3, за да се опитат други пермутации. Иначе се използва бектрекинг от стека, взимайки последния контекст, $\langle p', \sigma_0' \rangle$, от върха на стека, който може да се отнася за предишна променлива. След това се изпълнява стъпка 4 отново, този път с вход p' and $\sigma_0'[p'//\neg p']$, пропускайки записването на контекст за бектрекинг в стека.

СТЪПКА 5: Ако тази стъпка е достигната от всички клони на изпълнението, то всички съждителни променливи са били елиминирани от всички системи, получени от началната входна формула. Нека всички чисти системи са $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. За всяка чиста система σ_i, нека $NOM(\sigma_i) \setminus \{c_k\} = \{c_{j_1^i}, \ldots, c_{j_{l_i}^i}\}$ и нека c_{m_i}, така че всички номинали, срещащи се в $\{c_k, \sigma_i\}$, бъдат сред $c_1, \ldots, c_{m_i-1}$.

Нека $fol_i(A)$ е: $\forall x_{j_1^i} \ldots \forall x_{j_{l_i}^i} \exists x_{m_i} st(m_i + 1, x_{m_i}, \sigma_i)$.

Нека $fol(A)$ be $\bigwedge(fol_1(A), \ldots, fol_n(A))$.

Нека изходът да е $\langle success,\ fol(A) \rangle$. Стоп.

В дисертацията се съдържат доказателства, че детерминистичната SQEMA е коректна, т.е. че тя винаги завършва, и че ако успее, наистина дава локална съответна от първи ред, и че наистина дадената входна формула от език от тип *1* или *2* е канонична. Подобни доказателства могат да се намерят в [27] за езици от тип *2* и в [17] за основния модален език.

Сега дефинираме: а) нормализацията на формула, която се използва в стъпка 2 с „извличане на ромбчета", б) нормализацията на системи от уравнения, която се използва в стъпка 4 и в) стратегията за прилагането на правилата на детерминистичната SQEMA.

Използваме правилата от таблицата по-долу, където $\Box$ е произволно квадратче или обърнато квадратче, а $\Diamond$ е произволно ромбче или обърнато ромбче:

За $j \in \{1, 2\}$, пишем U_j вместо $[U]$ или $\langle U \rangle$, пишем $\overset{\wedge}{\vee}$ вместо $\vee$ или $\wedge$.

Replace	with	Replace	with
$(c_1 \to \langle U\rangle c_2)$	$\top$	$(\langle U\rangle\gamma_1 \vee \gamma_2)$, for $\gamma_2 \equiv \neg\gamma_1$	$\top$
$U_1U_2\gamma$	$U_2\gamma$	$(\langle U\rangle\gamma \vee \Diamond\gamma)$	$\langle U\rangle\gamma$
$\Box U_1\gamma$	$(U_1\gamma \vee \Box\bot)$	$(\langle U\rangle\gamma \vee \gamma)$	$\langle U\rangle\gamma$
$[U](U_1\gamma_1 \overset{\wedge}{\vee} U_2\gamma_2)$	$(U_1\gamma_1 \overset{\wedge}{\vee} U_2\gamma_2)$	$(\langle U\rangle\gamma \wedge \Diamond\gamma)$	$\Diamond\gamma$
$[U](U_1\gamma_1 \overset{\wedge}{\vee} \gamma_2)$	$(U_1\gamma_1 \overset{\wedge}{\vee} [U]\gamma_2)$	$(\langle U\rangle\gamma \wedge \gamma)$	γ
$[U]\neg c$	$\bot$	$([U]\gamma_1 \wedge \gamma_2)$, for $\gamma_2 \equiv \neg\gamma_1$	$\bot$
$\Diamond U_1\gamma$	$(U_1\gamma \wedge \Diamond\top)$	$([U]\gamma \wedge \Box\gamma)$	$[U]\gamma$
$\langle U\rangle(U_1\gamma_1 \overset{\wedge}{\vee} U_2\gamma_2)$	$(U_1\gamma_1 \overset{\wedge}{\vee} U_2\gamma_2)$	$([U]\gamma \wedge \gamma)$	$[U]\gamma$
$\langle U\rangle(U_1\gamma_1 \overset{\wedge}{\vee} \gamma_2)$	$(U_1\gamma_1 \overset{\wedge}{\vee} \langle U\rangle\gamma_2)$	$([U]\gamma \vee \Box\gamma)$	$\Box\gamma$
$\langle U\rangle c$	$\top$	$([U]\gamma \vee \gamma)$	γ

а) Ясно е как да получим формула в отрицателна нормална форма за дадна формула γ, такава че $\Box_0^{-1}$ и $\Diamond_0^{-1}$ не се срещат. Използваме тази процедура и за да намалим броя на срещащи се подформули в изхода, чрез прилагане на някои очевидни булеви и модални закони, а също и чрез прилагане на правилата за универсалната модалност от по-горната таблица. След това, дефинираме процедура за получаване на *конюнктивна нормална форма*, използвайки стандартната за това понятие дефиниция. Ясно е как тази нормална форма може да бъде конструирана. По време на построението, също така се извършва *извличане на ромбчета*, чрез прилагане на правилото $(\Diamond A' \vee \Diamond A'') \equiv \Diamond(A' \vee A'')$. Опитваме се в същото време да елиминираме семантично еквивалентни или противоположни членове на всяка дизюнкция, чрез сравняване на техните нормални форми. Изходната формула от тази процедура не бива да съдържа подформули от вида $\neg\top$, $\neg\bot$, $(\bot \overset{\wedge}{\vee} \gamma)$ или $(\gamma \overset{\wedge}{\vee} \bot)$.

Могат да се направят две подобрения: по време на елиминацията може да се иползва tableaux метод за входния език, за доказване на еквиваленция на подформули, вместо да се сравняват нормалните им форми. Още, при построението на конюнкцията, може да се използва модална резолюция като в пример 6.14 от [18].

Ето нормализиращата прцедура за γ, която дава *нормалната форма на* γ: Първо, преобразуваме γ до отрицателна нормална форма, после преобразуваме резултата до конюнктивна нормална форма, едновременно с извличането на ромбчета, после прилагаме извличане на квадратчета чрез прилагане на семантичната еквиваленция $(\Box A_1 \wedge \Box A_2) \equiv \Box(A_1 \wedge A_2)$, а накрая заместваме всяка променлива, която участва или само позитивно, или само негативно в γ, съответно с $\top$ или $\bot$. Повтаряме целия процес, докато получената формула не се променя повече.

б) Сега нормализираме система от уравнения σ. Нека σ е $\neg\bigwedge(\chi_1, \ldots, \chi_n)$. Нека A' е нормалната форма на $\bigwedge(\chi_1, \ldots, \chi_n)$. Ако A' е от вида $(\neg c \vee A'')$, то *нормалната форма на* σ е $\neg\bigwedge((\neg c \veebar A''))$; иначе, нормалната форма на σ е $\neg\bigwedge((\bot \veebar A'))$.

с) Детерминистичната стратегия за прилагането на правилата на SQEMA за дадена променлива p е многократно да прилагаме функцията *step* (зададена подолу), докато достигнем или до формула без срещания на p, или до *failure*.

Дефиниция 12 (Детерминистична SQEMA: Step) Описваме една стъпка на стратегията, която е еднозначно дефинирана за дадени σ и p.

(1) Ако $p \not\nearrow \sigma$, то резултатът е σ.

(2) Иначе, ако σ is $\neg \bigwedge \{(\alpha_1 \veebar p), \dots, (\alpha_{n_a} \veebar p), \beta_1, \dots, \beta_{n_b}, \theta_1, \dots, \theta_{n_t}\}$, където $n_a \geq 0$, $n_b \geq 0$, $n_t \geq 0$, $p \not\nearrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_a}, \theta_1, \dots, \theta_{n_t}\}$, а $\beta_1, \dots, \beta_{n_b}$ са формули, които са *негативни* в p, тогава можем да приложим правилото на Акерман за p и σ. Нека за $1 \leq l \leq n_b$, β'_l да са получени от β_l чрез замяна на всички срещания на $\neg p$ с $\bigwedge(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_a})$. Тогава резултатът за σ е $\neg \bigwedge(\beta'_1, \dots, \beta'_{n_b}, \theta_1, \dots, \theta_{n_t})$.

(3) Ако не попадаме в някой от по-горните случаи, тогава има поне едно положително срещане на p в σ, което не е в уравнение от вида $(\alpha \veebar p)$, така че $p \not\nearrow \alpha$. За идобство, нека σ е $\neg \bigwedge(\chi_1, \dots, \chi_m)$, нека j е най-малкото число, такова че p участва позитивно в χ_j, χ_j не е във вида, описан по-горе, и нека χ_j е $(A' \veebar A_1)$.

   (3.1) Ако A_1 е $(A_2 \wedge A_3)$, то резултатът за σ е $\sigma[\chi_j//(A' \veebar A_2), (A' \veebar A_3)]$.

   (3.2) Ако A_1 е $(A_2 \vee A_3)$, то има три случая. Ако $p \not\nearrow A_2$, то резултатът за σ е $\sigma[\chi_j//((A' \vee A_2) \veebar A_3)]$. Иначе ако $p \not\nearrow A_3$, то резултатът за σ е $\sigma[\chi_j//((A' \vee A_3) \veebar A_2)]$. Иначе резултатът за σ е *failure*.

   (3.3) Ако A_1 е $\Box A_2$, то резултатът за σ е $\sigma[\chi_j//(\Box^{-1} A' \veebar A_1)]$.

   (3.4) Ако A_1 е $\Diamond A_2$ и A' е или $\neg c'$, или $(\bot \vee \neg c')$, нека c'' е нов номинал, тогава резултатът за σ' е $\sigma[\chi_j//(c' \to \Diamond c''), (\neg c'' \veebar A_1)]$.

   (3.5) Ако не сме в някой от по-горните четири случая, резултатът за σ е *failure*.

Веднага получаваме, че по-горната дефиниция задава единствена ефективна функция над системите от уравнения и съждителните променливи. Означаваме тази фукция със *step*.

Не е трудно да се покаже, че прилагането на *step* може да се композира само крайно много пъти за начална σ и дадена p, преди да се достигне или до σ', такава че $p \not\nearrow \sigma'$, или до *failure*. Вж. доказателството в [27] или в дисертацията.

Дисертацията съдържа някои примерни изпълнения на детерминистичната SQEMA. Един от тях е за формула, която успява поради наличието на правилото за извличане на квадратчета, което не присъства в оригиналната SQEMA. Така детерминистичната SQEMA е в състояние да се справи с тази формула, докато оригиналната SQEMA би срещнала затруднение.

3.3 Салквистови формули

Салквистовите формули са по-прости от индуктивните и тук ги разглеждаме предварително, за да се занимаем първо с по-прост проблем.

Дефиницията за салквистова формула може да се види в [8], Дефиниция 3.51 на страница 165, както и в [27] за хибриден темпорален език с универсалната модалност. В дисертацията тази дефиниция е разширена до всички езици от тип *1* и *2*.

В [27] и в дисертацията има нова инварианта при салквистови входни формули за детерминистичната SQEMA. Там може да се види и доказателство, че детерминистичната SQEMA успява при всички вхдни салквистови формули.

3.4 Индуктивни формули

Дефиниция за индуктивни формули е дадена в [17], а освен това дефиниция за индуктивни формули в хибриден темпорален език с универсалната модалност има в [27].

В [27] и в дисертацията е дадена нова инварианта при индуктивни входни формули за детерминистичната SQEMA. Там може да се види и доказателство, че детерминистичната SQEMA успява при всички входни индуктивни формули.

3.5 Пред-контактни логики

Езикът на пред-контактните логики (PCL) е език от първи ред с равенство (=) и без квантори. Той се използва като съждителен език за безточкови теории на пространството, както е описано в [5].

Дефиниция 13 *Булевите термове* на PCL са: $\tau ::= p \mid 0 \mid 1 \mid -\tau \mid (\tau \cup \tau) \mid (\tau \cap \tau)$, където 0 и 1 са *булеви константи*, а $p \in PROP$ е *булева променлива* (но забележете, че използваме същото множество символи, които служат за съждителни променливи в модалните езици).

Атомарните формули са: $\alpha ::= \bot \mid \top \mid (\tau = \tau) \mid (\tau \leq \tau) \mid C(\tau, \tau)$ където част-от $(\leq)$ и контакт (C) са бинарни предикатни символи.

Пред-контактните формули са: $\psi ::= \alpha \mid \neg\psi \mid (\psi \vee \psi) \mid (\psi \wedge \psi)$. Можем да използваме $\to$ и $\leftrightarrow$ като дефинирани символи с тяхното обичайно значение.

Използваме структурите на Крипке и моделите на Крипке за основния модален език $\mathrm{ML}(\Box)$, които са също така структури на Крипке и модели на Крипке за езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$. За да се види дефиницията на семантиката на този език в модели на Крипке, вж. [5], [27] или дисертацията.

Казваме, че ψ е *валидна* в дадена структура на Крипке F, $\mathrm{F} \models \psi$, т.с.т.к. ψ е вярна във всички модели на Крипке над F.

В [5] е показано, че всички PCL формули могат да бъдат преставени като формули от езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$. По-точно, съществува транслация $\mathtt{t} : \mathrm{PCL} \to \mathrm{ML}(\Box, [U])$, за която е вярно, че за всяка PCL формула ψ и всеки модел на Крипке M, $\mathrm{M} \models \psi$ т.с.т.к. $\mathrm{M} \Vdash \mathtt{t}(\psi)$.

Да разгледаме салквистовите PCL формули, както са дефинирани в [4]. Дефиницията може да се види там, в [27] или в дисертацията.

За да транслираме салквистовите PCL формули, както са описани в [4], до салквистови формули в езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$, модифицираме транслацията $\mathtt{t}$, получавайки модифицираната транслация $\mathtt{t}'$ по следния начин:

$\mathtt{t}'(\neg C(-\tau_1, -\tau_2)) = [U](\mathtt{t}'(\tau_1) \vee \Box\mathtt{t}'(\tau_2))$

$\mathtt{t}'(\neg(\tau_1 = 0)) = \mathtt{t}'(\tau_1 \neq 0) = \langle U \rangle \mathtt{t}'(\tau_1)$

$\mathtt{t}'(-\tau_1 = 0) = \mathtt{t}'(\tau_1 = 1) = [U]\mathtt{t}'(\tau_1)$

Показваме как да изведем един от резултатите от [4], че салквистовите PCL формули имат съответни от първи ред, като следствие от това, че детерминистичната SQEMA успява над всички салквистови формули от езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$.

Теорема 14 *Модифицираната транслация превръща салквистови PCL формули в салквистови импликации от езика* $\mathrm{ML}(\Box, [U])$. $\Box$

Използваме алгоритъма детерминистична SQEMA за езика на пред-контактните логики като първо превеждаме входната пред-контактна формула до формула от езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$, използвайки $\mathtt{t}'$, и после пускайки детерминистичната SQEMA върху резултата. Веднага следва, че детерминистичната SQEMA успява за модифицираната транслация на всяка салквистова PCL формула.

В [5] е доказано, че: Всяка пред-контактна формула е пълна по отношение на класа на крайни структури на Крипке, дефиниран от нея. Оттук всяка пред-контактна формула е пълна.

Теорема 15 *Всяка PCL формула ψ, върху чиято модифицирана транслация детерминистичната SQEMA успее и даде формула от езика* FOL ψ'*, е пълна по отношение на класа на структури на Крипке, дефинирани от* ψ'. $\Box$

3.6 Реализация на езика за програмиране Java

Вариант на алгоритъма детерминистична SQEMA беше резализиран на езика за програмиране Java в 2006 г. като част от дипломната работа на автора [25] и оттогава работи на уеб-сайта `http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/sqema`. За тази дисертация, бяха направени следните промени по реализацията:

- Поддръжката за универсална модалност беще завършена и се свърши малко теоритична работа, за да се покаже, че ако реализацията успее, то резултатът е локално съответна формула от първи ред на входната формула, както и че входната формула е била d-устойчива в контекста на език с универсалната модалност.

- Потребителският интерфейс на реализацията беше напълно променен от HTML с бекенд Java сървлет на Tomcat сървър, до статични файлове на езиците HTML/CSS/Javascript, които се хостват на обикновена инсталация на Apache или кой да е друг уеб сървър. Това беше постигнато по следния начин. Реализацията все още е написана на езика Java, но се използва компилаторът на Google GWT, за да се преведе до езика Javascript, с цел да се изпълнява директно в браузъра на потребителя. От това имаше няколко ползи:

Първо, премахна се нуждата от сървър, който поддържа сървлети. Това помогна доста, когато по-късно се оказа, че Tomcat сървъра, където се помещаваше реализацията, се налага да бъде спрян, и когато реализацията се премести на обикновена инсталация на Apache.

Второ, това облекчи машините на ФМИ от голям товар, поради това, че алгоритъмът като първа стъпка получава формула, която може да е експоненциално по-голяма от входната, още на първата си стъпка, заради използването на конюнктивна нормална форма. Разбира се, това беше причинило доста проблеми през годините.

Най-накрая, това помогна на автора да направи допълнителни сайтове за реализацията:

http://debian.fmi.uni-sofia.bg/~dimitertg/sqema,

http://dimiter.slavi.biz/sqema,

http://geocities.ws/sqema, and

http://sqema.comlu.com,

които се поддържат заедно с главния уеб-сайт. Понякога те се използват като тестови среди за нови версии, преди да се сложат тези нови версии на главния сайт.

- Бяха реализирани допълнителни опростявания на резултата от първи ред, подобрявайки четимостта на резултатите.

- Беше добавена поддръжка за входни формули от езика на пред-контактните логики, използвайки модифицирана транслация на PCL формулите до формули от модалния език $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ и по този начин гарантирайки, че реализацията ще успее за всички салквистови PCL формули, вж. 3.5.

- Беше добавена поддръжка за входни формули с полиадични модалности. Теоритичната обосновка на тази част от реализацията идва директно от [18]. Не са правени доказателства, за да се покаже, че реализацията успява за всички полиадични салквистови и полиадични индуктивни формули. Авторът счита, че това не влиза в рамките на тази дисертация. В бъдеще, авторът би искал да се занимае с тази задача.

- Разпознаващ модул за салквистови и индуктивни формули беше добавен към потребителския интерфейс. Така потребителят може лесно да провери дали входната формула е салквистова или индуктивна. Разпознаващият модул все още не поддържа полиадични формули и не засяга работата на агоритъма.

- Беше реализирана тестова система на езика Java, както и някои генератори на модални формули, които бяха използвани да се натрупа тестова база от няколко милиона формули. Тестовете бяха използвани за следното:

Първо, бяха използвани за предотвратяване на регресии. След всяка голяма промяна беше пускан тест, който да провери дали резултатите спрямо предната версия не са променени.

Второ, тестовете бяха използвани да се тества хипотезата, че реализацията винаги успява на всички салквистови и всички индуктивни формули, използвайки разпознаващия модул, споменат по-горе, и проверявайки дали реализацията наистина успява на всички такива формули от тестовата база.

Накрая, но не и на последно място, тестовете помогнаха значително, докато авторът търсеше нови инварианти за салквистови и индуктивни формули.

4 $\mathrm{ML}(\Box)$ и $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$

Използваме основния модален език $\mathrm{ML}(\Box)$ и език на предикатното смятане с равенство и единствен бинарен предикатен символ r FOL. Използваме стандартните дефиниции за *структура на Крипке* и *модел на Крипке*. Използваме добре известните понятия *P-морфен образ*, *породена подструктура* и *disjoint union* ($\biguplus$).

Използваме техните свойства, както са доказани в [8].

Интересуваме се от класа на всички KD45 структури на Крипке, а този клас се аксиоматизира с известната нормална модална логика KD45. *Аксиомите на* KD45 са следните формули:
(D) $(\Box p \to \Diamond p)$ (неограниченост отдясно)
(4) $(\Box p \to \Box\Box p)$ (транзитивност)
(5) $(\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ (евклидовост)

Казваме, че една структура на Крипке F е KD45-структура т.с.т.к. в F са валидни аксиомите (4), (5) и (D).

Глобално съответни формули от първи ред на KD45 аксиомите са:
(D') $\forall x \exists z_1 (x\ r\ z_1)$
$(4')$ $\forall x \forall z_1 ((x\ r\ z_1) \to \forall z_2 ((z_1\ r\ z_2) \to (x\ r\ z_2)))$
$(5')$ $\forall x \forall y_1 ((x\ r\ y_1) \to \forall z_1 ((x\ r\ z_1) \to (z_1\ r\ y_1)))$

Казваме, че една структура на Крипке $\mathrm{F} = \langle W, R \rangle$ е *маргаритка* т.с.т.к. $W = P(\mathrm{F}) \cup S(\mathrm{F})$, където $P(\mathrm{F}) \cap S(\mathrm{F}) = \emptyset$, $S(\mathrm{F}) \neq \emptyset$, $P(\mathrm{F})$ е множеството на *венчелистчетата*, $S(\mathrm{F})$ е множеството на *тичинките* и са изпълнени следните условия:
(Daisy 1). $\forall x \in P(\mathrm{F}) \neg \exists y \in W (\langle y, x \rangle \in R)$
(Daisy 2). $\forall x \in P(\mathrm{F}) \forall y \in S(\mathrm{F}) (\langle x, y \rangle \in R)$
(Daisy 3). $\forall x \in S(\mathrm{F}) \forall y \in S(\mathrm{F}) (\langle x, y \rangle \in R)$

Лесно се вижда, че всяка маргаритка F е KD45-структура ($\mathrm{F} \vDash (D') \wedge (4') \wedge (5')$).

Твърдение 16 Нека F е KD45-структура. Тогава съществува непразно индексно множество I и множество от маргаритки $D = \{\mathrm{F}_i \mid i \in I\}$, такива че $\mathrm{F} = \biguplus D$. $\Box$

4.1 Определимост от първи ред

Първо, малко дефиниции. Класа на всички KD45-структури бележим с $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Класа на всички S5-структури бележим с $\mathcal{C}_{\mathrm{S5}}$. Лесно се вижда, че $\mathcal{C}_{\mathrm{S5}} \subsetneq \mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Означаваме с C_0 класа на всички крайни маргаритки без венчелистчета, а с C_1 – класа на всички крайни маргаритки с единствено венчелистче. С D_i бележим крайната маргаритка (с точност до изоморфизъм), която има точно i тичинки и няма венчелистчета, а с D'_i – крайната маргаритка (с точност до изоморфизъм) с точно i тичинки и единствено венчелистче.

Лема 17 Нека A е модална формула. Тогава $\mathcal{C}_{\mathrm{S5}} \Vdash A$ т.с.т.к. $C_0 \Vdash A$. Освен това $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}} \Vdash A$ т.с.т.к. $C_1 \Vdash A$. $\Box$

Лема 18 Нека A е модална формула. Точно едно от следните три условия е вярно: или $\mathcal{C}_{\mathrm{S5}} \Vdash A$, или $D_1 \nVdash A$, или съществува число $n > 1$, такова че за всички i: $D_i \Vdash A \Leftrightarrow i < n$. Точно едно от следните три условия е вярно: или $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}} \Vdash A$, или $D'_1 \nVdash A$, или съществува число $n' > 1$, таква че за всяко i: $D'_i \Vdash A \Leftrightarrow i < n'$. Ако такива n и n' съществуват, то $n' \leq n$. $\Box$

За всяко $n \geq 1$, означаваме $\psi_n(x) =_{def} \forall y_1 \ldots \forall y_n (\bigwedge \{(x\ r\ y_k) \mid 1 \leq k \leq n\} \to \bigvee \{(y_k = y_l) \mid 1 \leq k < l \leq n\})$. Очевидно за всяка KD45-структура F, $\mathrm{F} \vDash \psi_n(x)$ т.с.т.к. всяка маргаритка от F има по-малко от n тичинки.

Теорема 19 *Нека A е модална формула. Тогава съществува формула от първи ред ψ, такава че A и ψ са глобално съответни в класа структури на Крипке $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Също така ψ може да бъде намерена ефективно.* $\square$

4.2 Модална определимост

Нека $\mathrm{F} \in \mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Съществува множество от маргаритки D, такова че $\mathrm{F} = \biguplus D$.

Нека $Q =_{def} \{Card(S(x)) \mid x \in D\}$ и нека $s(\mathrm{F}) =_{def} sup(Q)$.

Нека $Q_0 =_{def} \{Card(S(x)) \mid x \in D \;\&\; P(x) = \emptyset\}$ и нека $s_0(\mathrm{F}) =_{def} sup(Q_0)$.

Нека $Q_1 =_{def} \{Card(S(x)) \mid x \in D \;\&\; P(x) \neq \emptyset\}$ и нека $s_1(\mathrm{F}) =_{def} sup(Q_1)$.

Означаваме с C^b класа от онези структури на Крипке $\mathrm{F} \in \mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$, за които $1 \leq s(\mathrm{F}) < \omega$.

Дефиниция 20 (Рестрикция на маргаритка) Нека F и F' да бъдат маргаритки и нека $k > 0$. Казваме, че F' е *рестрикция на* F *до най-много* k *венчелистчета и най-много* k *тичинки* т.с.т.к. F' или има k венчелистчета, ако F има поне k венчелистчета, или има същия брой венчелистчета като F, иначе, а също така F' или има k тичинки, ако F има поне k тичинки, или има същия брой тичинки като F, иначе. Очевидно с точност до изоморфизъм за дадена маргаритка F и $k > 0$, съществува единствена маргаритка, която е рестрикцията на F до най-много k венчелистчета и най-много k тичинки. Бележим тази маргаритка с $\mathrm{F} \restriction_1 k$ и казваме, че тя е *рекстрикцията на* F *до* k

Дефиниция 21 (Рестрикция) Нека F е KD45-структура и нека $k > 0$. Нека D да е множеството от маргаритки (с точност до изоморфизъм), такова че $\mathrm{F} = \biguplus D$. Казваме, че следната структура на Крипке е *рестрикцията на* F *до* k: $\mathrm{F} \restriction_1 k =_{def} \biguplus\{\mathrm{F}' \restriction_1 k \mid \mathrm{F}' \in D\}$.

Лема 22 Нека $\mathrm{F} \in \mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ и нека $n > 0$. Съществува структура на Крипке F' в C^b, такава че: 1. за всяка затворена формула от FOL ψ с кванторен ранг n, $\mathrm{F} \vDash \psi$ т.с.т.к. $\mathrm{F}' \vDash \psi$. 2. $s_0(\mathrm{F}') \leq s_0(\mathrm{F})$ и $s_1(\mathrm{F}') \leq s_1(\mathrm{F})$. 3. F' е P-морфен образ на F. $\square$

Лема 23 Нека $\mathrm{F}_0 \in C^b, \mathrm{F}_1 \in C^b, \mathrm{F}' \in C^b$. Ако $s_0(\mathrm{F}_0) \geq s_0(\mathrm{F}')$ и $s_1(\mathrm{F}_1) \geq s_1(\mathrm{F}')$, то за всяка затворена формула $\psi \in$ FOL, ако ψ е модално определима в ML($\Box$) над $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$, $\mathrm{F}_0 \vDash \psi$, $\mathrm{F}_1 \vDash \psi$, то $\mathrm{F}' \vDash \psi$. $\square$

За всяко $n > 0$, означаваме $A_n =_{def} \bigwedge\{\Diamond p_k \mid 1 \leq k \leq n\} \rightarrow \bigvee\{\Diamond(p_i \wedge p_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Лесно може да се провери, че за всяка KD45-структура F и всяко състояние w от F, $\mathrm{F}, w \Vdash A_n$ т.с.т.к. w има по-малко от n R-наследника. Така за всяко $n > 0$, $\psi_n(x)$ и A_n са локално съответни по отношение на $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Значи $\forall x \psi_n(x)$ и A_n са глобално съответни по отношение на $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$.

Приемаме, че q е съждителна променлива, която не участва в никое A_n.

Лема 24 За всяко $1 \leq i \leq j$, $\forall x(((x\ r\ x) \wedge \psi_j) \vee (\neg(x\ r\ x) \wedge \psi_i))$ е глобално съответна на $((q \rightarrow \Diamond q) \wedge A_j) \vee A_i$ по отношение на $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. $\square$

Означаваме $A_0 =_{def} \perp$ и $A_\omega =_{def} \top$.

Лема 25 Нека ψ е затворена формула от FOL. Тогава ψ е модално определима в $\mathrm{ML}(\Box)$ над $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ т.с.т.к. съществуват ординални числа σ_0, σ_1, такива че $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_0 \leq \omega$ и за всяка структура на Крипке $\mathrm{F} \in C^b$: $\mathrm{F} \vDash \psi$ т.с.т.к. $s_0(\mathrm{F}) \leq \sigma_0$ и $s_1(\mathrm{F}) \leq \sigma_1$.

Теорема 26 *Задачата за модална определимост на затворена формула от езика* FOL *в* $\mathrm{ML}(\Box)$ *над класа* $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ *е в PSPACE.* $\Box$

Дефиниция 27 (Релативизиран редукт) Нека F, F_0 са структури за някой език от първи ред L. Казваме, че F_0 е *релативизиран редукт на* F, ако съществуват формула $\psi(\bar{x}, x) \in L$ и списък $\bar{s}$ от светове в F, такива че F_0 е рестрикцията на F до множеството на всички светове s в F, такива че $\mathrm{F} \vDash \psi(\bar{x}, x)[\bar{s}, s]$. В този случай, F_0 се нарича *релативизирания редукт на* F *по отношение на* $\psi(\bar{x}, x)$ *и* $\bar{s}$.

Дефиниция 28 (Стабилен клас от структури на Крипке) Нека $\mathcal{C}$ е клас от структури на Крипке. Казваме, че $\mathcal{C}$ е *стабилен* т.с.т.к. съществува FOL формула $\gamma_1(\bar{x}, x)$ и затворена FOL формула γ_2, такива че:

(a) за всички F в $\mathcal{C}$, за всички списъци $\bar{s}$ от светове в F и за всички структури на Крипке F', ако F' е релативизираният редукт на F по отношение на $\gamma_1(\bar{x}, x)$ и $\bar{s}$, то F' е в $\mathcal{C}$,

(b) за всички F_0 в $\mathcal{C}$, съществуват структури на Крипке F, F' в $\mathcal{C}$ и съществува списък $\bar{s}$ от светове в F, такива че F_0 е релативизираният редукт на F по отношение на $\gamma_1(\bar{x}, x)$ и $\bar{s}$, $\mathrm{F} \vDash \gamma_2$, $\mathrm{F}' \nvDash \gamma_2$, и за всички $\mathrm{ML}(\Box)$ формули A: ако $\mathrm{F} \Vdash A$, то $\mathrm{F}' \Vdash A$.

Теорема 29 *Ако* $\mathcal{C}$ *е стабилен клас от структури на Крипке, то задачата за валидност на затворени* FOL *формули в* $\mathcal{C}$ *е сводима до задачата за модална определимост на затворени* FOL *формули в* $\mathrm{ML}(\Box)$ *по отношение на* $\mathcal{C}$*.* $\Box$

Използвайки следните формули:

$\gamma_1(x_1, x_2, x) =_{def}$
$(\exists z((z\ r\ z) \wedge (z \neq x_1) \wedge (z \neq x_2))$
$\wedge \forall z((z\ r\ x_1) \vee (x_1\ r\ z) \vee (z\ r\ x_2) \vee (x_2\ r\ z) \to (z = x_1) \vee (z = x_2)))$
$\to ((x \neq x_1) \wedge (x \neq x_2))$.

$\gamma_2 =_{def} \exists x \neg(x\ r\ x)$:

Твърдение 30 $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ е стабилен клас. $\Box$

Използвайки теорема на Stockmeyer от [51], твърдение 30 и теорема 29:

Следствие 31 Задачата за модална определимост на FOL формули в $\mathrm{ML}(\Box)$ над $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ е PSPACE-hard. $\Box$

5 $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ и $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$

При езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$, аксиомите на KD45 и структурите на Крипке, в които е валидна логиката KD45 са същите като в езика $\mathrm{ML}(\Box)$. В контекста на езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$, операцията disjoint union губи своето значение и известни свойства. Обаче, ако използваме символа $\uplus$ да означава disjoint union като в контекста на езика $\mathrm{ML}(\Box)$, можем да видим, че твърдение 16 е вярно и в езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$.

5.1 Модална определимост

Дефиниция 32 (Рестрикция до най-много k маргаритки от същия вид) Нека F и F′ са KD45-структури и нека $k > 0$. Нека D да бъде множеството от маргаритки, с точност до изоморфизъм, такова че $\mathrm{F} = \biguplus D$, и нека D' е множеството от маргаритки, с точност до изоморфизъм, такова че $\mathrm{F}' = \biguplus D'$. Казваме, че F′ е *рекстрикцията на* F *до май-много k маргаритки от същия вид* т.с.т.к. за всяка маргаритка $x \in D$, ако D има поне k изоморфни копия на x, то D' съдържа точно k изоморфни копия на x, а иначе D' съдържа същия брой изоморфни копия на x като D. Очевидно, с точност до изоморфизъм, съществува единствена KD45-структура, която е рекстрикцията на F до най-много k маргаритки от същия вид. Означаваме тази структура на Крипке с $\mathrm{F} \restriction_2 k$.

Нека C_b е класът на всички крайни KD45-структури.

Твърдение 33 Нека F е KD45-структура и нека $k \geq 0$. Тогава съществува структура на Крипке $\mathrm{F}' \in C_b$, такава че: 1. за всички затворени FOL формули ψ с кванторен ранг k: $\mathrm{F} \vDash \psi$ т.с.т.к. $\mathrm{F}' \vDash \psi$. 2. F′ е P-морфен образ на F. □

Нека $\mathrm{F} \in C_b$, m е максималния брой на венчелистчета в маргаритка от F, а n е максималния брой на тичинки в маргаритка на F. *Шарката* на F наричаме матрицата: $\begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} & x_{03} & \dots & x_{0n} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$, където за всички i, j, такива че $0 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$, x_{ij} е броят на маргаритките в F с точно i венчелистчета и j тичинки.

Нека $\mathrm{F} \in C_b$, m е максималния брой на венчелистчета в маргаритка от F, n е максималния брой на тичинки в маргаритка на F и $\mathcal{P}$ е шарката на F. Нека i, j да са такива, че $0 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$. Означаваме с x елемента x_{ij} на матрицата P. *Янков-Файн формула за $\langle i, j, x\rangle$, $A(d,p,t)_{\langle i,j,x\rangle}$* наричаме следната формула:

$$\bigwedge_{\substack{1\leq q\leq i\\1\leq r\leq x}} \langle U\rangle p_q^r \wedge \bigwedge_{\substack{1\leq q\leq j\\1\leq r\leq x}} \langle U\rangle t_q^r \wedge \bigwedge_{1\leq r\leq x} \langle U\rangle d_r \wedge \bigwedge_{1\leq q<r\leq x} [U]\neg(d_q \wedge d_r)\wedge$$

$$\bigwedge_{\substack{1\leq k<q\leq i\\1\leq r\leq x}} [U]\neg(p_k^r \wedge p_q^r) \wedge \bigwedge_{\substack{1\leq k<q\leq j\\1\leq r\leq x}} [U]\neg(t_k^r \wedge t_q^r) \wedge \bigwedge_{\substack{1\leq k\leq i\\1\leq q\leq j\\1\leq r\leq x}} [U]\neg(p_k^r \wedge t_q^r)\wedge$$

$$\bigwedge_{1\leq r\leq x} [U](d_r \leftrightarrow p_1^r \vee \dots \vee p_i^r \vee t_1^r \vee \dots \vee t_j^r)\wedge$$

$$\bigwedge_{\substack{1\leq q\leq i\\1\leq r\leq x}} [U](p_q^r \to \Box\neg p_q^r) \wedge \bigwedge_{\substack{1\leq k\leq i\\1\leq q\leq j\\1\leq r\leq x}} [U](p_k^r \to \Diamond t_q^r) \wedge \bigwedge_{\substack{1\leq k\leq j\\1\leq q\leq j\\1\leq r\leq x}} [U](t_k^r \to \Diamond t_q^r)\wedge$$

$$\bigwedge_{1\leq r\leq x} [U](d_r \leftrightarrow \Box(\bigvee_{1\leq q\leq j} t_q^r))$$

където $p_1^1, \ldots, p_i^1, \ldots, p_1^x, \ldots, p_i^x, t_1^1, \ldots, t_j^1, \ldots, t_1^x, \ldots, t_j^x, d_1, \ldots, d_x$ са различни параметризирани съждителни променливи.

Твърдение 34 Нека $i \geq 0$, $j \geq 1$, $x \geq 0$. Нека $A =_{def} A(d,p,t)_{\langle i,j,x \rangle}$ е Янков-Файн формулата за $\langle i,j,x \rangle$. Тогава за всички структури на Крипке $\mathrm{F} \in \mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$: A е изпълнима в F т.с.т.к. F съдържа $\geq x$ маргаритки с $\geq i$ венчелистчета и $\geq j$ тичинки. $\square$

Нека $i \geq 0$, $j > 0$ и $x \geq 0$. Означаваме $Q' =_{def} \{\langle i_0, x_0 \rangle \mid 0 \leq i_0 \leq i \; \& \; 0 \leq x_0 \leq i\}$ и нека $Q =_{def} \{y \mid y \in \mathbb{P}(Q') \; \& \; \Sigma_{\langle i_0, x_0 \rangle \in y} i_0.x_0 \geq i\}$. *Разширената Янков-Файн формула* за $\langle i,j,x \rangle$, $\underline{A}(d,p,t)_{\langle i,j,x \rangle}$ е:

$$\bigwedge_{k=1}^{x} \bigvee_{y \in Q} \bigwedge_{\substack{\langle i_0, x_0 \rangle \in y \\ param = \langle k,y,i_0,x_0,i,j,x \rangle}} A(d_{param}, p_{param}, t_{param})_{\langle i_0, j, x_0 \rangle}$$

където за всички крайни множества от числа y и за всички числа k, i_0, x_0, i, j, x, всички възможни параметри $param = \langle k,y,i_0,x_0,i,j,x \rangle, d_{param}, p_{param}, t_{param}$ са различни помежду си.

Нека $\mathrm{G} \in C_b$, нека m е максималния брой на венчелистчета в маргаритка от G и нека n е максималния брой на тичинки в маргаритка на G. Нека $\mathcal{P}$ е шарката на G и нека за всички $\langle i,j,x \rangle$, такива че x е елементът x_{ij} от P, $A_{ij} =_{def} \underline{A}(d,p,t)_{\langle i,j,x \rangle}$ е разширената Янков-Файн формула за $\langle i,j,x \rangle$, където множествата от съждителните променливи на всяко A_{ij} не се пресичат помежду си. Нека $A' =_{def} \bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} A_{ij}$, нека Q_1 е множеството на всички означени с d съждителни променливи в A' и нека Q_2 е множеството от всички дизюнкти на всички A_{ij}.

$$A =_{def} A' \wedge$$

$$\bigwedge_{\substack{d_1, d_2 \in Q_1 \\ A_1, A_2 \in Q_2 \\ d_1 \not\nearrow d_2, d_1 \nearrow A_1, d_2 \nearrow A_2}} ((A_1 \wedge A_2) \to [U]\neg(d_1 \wedge d_2)) \wedge [U](\bigvee_{\substack{d \in Q_1, A \in Q_2 \\ d \nearrow A}} (A \wedge d))$$

Казваме, че A е *Янков-Файн формулата на* G.

Твърдение 35 Нека $\mathrm{F} \in \mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$, $\mathrm{G} \in C_b$. Нека A е Янков-Файн формулата на G. Тогава $\mathrm{F} \Vdash \neg A$ т.с.т.к. G не е P-морфен образ на F. $\square$

Нека $k > 0$. Означаваме с C_b^k класа на всички крайни KD45-структури F, такива че всяка маргаритка в F има най-много k венчелистчета и най-много k тичинки и F съдържа най-много k изоморфни копия на всяка маргаритка.

За опростяване на означенията, когато говорим за шарки на структури на Крипке от C_b^k, разглеждаме само матрици с размерност $(k+1) \times k$.

Твърдение 36 Нека ψ е затворена формула с кванторен ранг k, която е модално определима с формулата A от езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ в $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Ако съществува някоя $\mathrm{F} \in C_b^k$ с шарка

$$\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} x_{01} & \dots & x_{0(j-1)} & k & x_{0(j+1)} & & x_{0k} \\ x_{11} & \dots & & & & & x_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k1} & \dots & & & & & x_{kk} \end{bmatrix}$$, където $1 \leq j \leq k$ и $\mathrm{F} \models \psi$, то съществува структура на Крипке $\mathrm{F}' \in C_b^k$ с шарка

$$\mathcal{P}_2 = \begin{bmatrix} k & \dots & k & k & x_{0(j+1)} & & x_{0k} \\ x_{11} & \dots & & & & & x_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k1} & \dots & & & & & x_{kk} \end{bmatrix}$$, такава че $\mathrm{F}' \models \psi$. $\square$

Твърдение 37 Нека ψ е затворена формула с кванторен ранг k, която е модално определима с формула A от езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ в $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Ако съществува някоя $\mathrm{F} \in C_b^k$ с шарка

$$\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} x_{01} & \dots & \dots & x_{0j} & x_{0(j+1)} & \dots x_{0k} \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \dots \vdots \\ \vdots & \dots & & x_{(i-1)j} & x_{(i-1)(j+1)} & \dots \vdots \\ \vdots & \dots & x_{i(j-1)} & k & x_{i(j+1)} & \dots \vdots \\ \vdots & \dots & & x_{(i+1)j} & x_{(i+1)(j+1)} & \dots \vdots \\ \vdots & \dots & & & \vdots & \dots \vdots \\ x_{k1} & \dots & \dots & x_{kj} & x_{k(j+1)} & \dots x_{kk} \end{bmatrix}$$, където $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$ и $\mathrm{F} \models \psi$, то съществува структура на Крипке $\mathrm{F}' \in C_b^k$ с шарка

$$\mathcal{P}_2 = \begin{bmatrix} k & \dots & \dots & k & x_{0(j+1)} & \dots x_{0k} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots & & \dots \vdots \\ \vdots & \dots & & k & x_{(i-1)(j+1)} & \dots \vdots \\ \vdots & \dots & k & k & x_{i(j+1)} & \dots \vdots \\ \vdots & \dots & & k & x_{(i+1)(j+1)} & \dots \vdots \\ \vdots & \dots & & \vdots & \vdots & \dots \vdots \\ k & \dots & k & k & x_{k(j+1)} & \dots x_{kk} \end{bmatrix}$$, такава че $\mathrm{F}' \models \psi$. $\square$

Твърдение 38 Нека ψ е затворена формула с кванторен ранг k. Тогава $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}} \models \psi$ т.с.т.к. $C_b^k \models \psi$. $\square$

Използваме теоремата на Stockmeyer от [51] and твърдение 38, за да покажем, че:

Следствие 39 Нека $\psi \in \mathrm{FOL}$ е затворена формула. Задачата за разрешаване на $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}} \models \psi$ е PSPACE-complete. $\square$

Нека ψ е затворена формула и нека $k > 0$. Означаваме с $C_b^k(\psi)$ класа на всички структури на Крипке $\mathrm{F} \in C_b^k$, такива че $\mathrm{F} \models \psi$.

Теорема 40 *Нека ψ е затворена формула с кванторен ранг k, такава че $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}} \not\models \psi$ и $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}} \not\models \neg\psi$. Тогава ψ е модално определима над $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ с формула от езика* $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ *т.с.т.к. $C_b^k(\psi)$ удовлетворява следните условия:* (1) $\emptyset \neq C_b^k(\psi) \neq C_b^k$ *и $C_b^k(\psi)$ е затворен относно P-морфизми;* (2) *$C_b^k(\psi)$ е затворен относно трансформациите на шарката, описани в твърдение 36 и в твърдение 37.* $\Box$

Използвайки твърдение 38, показваме, че:

Твърдение 41 Нека ψ е затворена формула с кванторен ранг k. Нека τ_k е затворена формула от езика FOL, която казва следното: „съществуват поне $(k+2)^4$ маргаритки, всяка от тях с поне $k+1$ венчелистчета и поне $k+1$ тичинки". Тогава $\psi \vee \tau_k$ е модално определима в $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ над $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ т.с.т.к. $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}} \models \psi$. $\Box$

От следствие 39, твърдение 41 и теорема 40, получаваме:

Теорема 42 *Задачата за модална определимост на затворени формули от* FOL *в* $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ *над* $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ *е PSPACE-complete.* $\Box$

5.2 Определимост от първи ред

Дефиниция 43 ((n,d)-сорт и ненулев (n,d)-сорт) Нека $d > 0$ и $n > 0$. Казваме, че дадена редица от числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2^n}$ е *(n,d)-сорт* т.с.т.к. за всяко i, такова че $1 \leq i \leq 2^n$, $0 \leq \sigma_i \leq d$. Ясно е, че броят на всички (n,d)-сортове е $(d+1)^{2^n}$. Възможно е да искаме поне едно от числата σ_i да е позитивно. Така дефинираме *ненулев (n,d)-сорт*, а броят на всички ненулеви (n,d)-сортове е $< (d+1)^{2^n}$.

Нека съждителните променливи от *PROP* да са номерирани по следния начин: $p_1, p_2, \ldots$. Нека $\{P_1, P_2, \ldots\}$ да е изброимо безкрайно множество от унарни предикатни символи.

Дефиниция 44 ($L(=, R, P_1, \ldots, P_n)$) Нека $n > 0$. Разширяваме езика FOL до $L(=, R, P_1, \ldots, P_n)$, добавяйки новите унарни предикатни символи $P_1, \ldots, P_n$. Ясно е, че всеки модел на Крипке $\mathrm{M} = \langle \mathrm{F}, V \rangle$ е също така структура за езика $L(=, R, P_1, \ldots, P_n)$. В този случай, за всяко i, такова че $1 \leq i \leq n$, приемаме, че интерпретацията $V(P_i)$ и оценката $V(p_i)$ са едно и също нещо.

За всяко $n > 0$, нека $\epsilon^1, \ldots, \epsilon^{2^n}$ е фиксирана линейна наредба на всички редици от нули и единици с дължина n, например лексикографската наредба. Нека i-ят element на редицата ϵ^j за $1 \leq j \leq 2^n$ и $1 \leq i \leq n$ се означава с ϵ_i^j.

Дефиниция 45 ((n,d)-сорт на множество) Нека $\mathrm{M} = \langle W, R, V \rangle$ е модел на Крипке, нека X е подмножество на W, нека $d > 0$, $n > 0$. Нека $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2^n}$ е (n,d)-сорт. За всяко j, такова че $1 \leq j \leq 2^n$, дефинираме множеството $X_{\epsilon^j} =_{def} X \cap V(P_1)^{\epsilon_1^j} \cap \cdots \cap V(P_n)^{\epsilon_n^j}$, където за всяко i, такова че $1 \leq i \leq n$, $V(P_i)^0 = V(P_i)$ и $V(P_i)^1 = W \setminus V(P_i)$. Казваме, че X е *от даден (n,d)-сорт* $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2^n}$ т.с.т.к. за всяко j, такова че $1 \leq j \leq 2^n$, множеството X_{ϵ^j} има σ_j елемента ако $\sigma_j < d$, а има поне d елемента ако $\sigma_j = d$.

Казваме, че даден модел на Крипке KD45-модел т.с.т.к. неговата структура на Крипке е KD45-структура.

Дефиниция 46 ((n,d)-сорт на маргаритка) Нека M е KD45-модел и нека D е маргаритка от M. Нека D_{pet} е множеството на венчелистчетата на D и нека D_{sta} е множеството на тичинките на D. Нека $d > 0$, $n > 0$. Нека Σ_{pet} е (n,d)-сорт. Нека Σ_{sta} е ненулев (n,d)-сорт. Казваме, че всяка такава наредена двойка $\langle \Sigma_{\mathrm{pet}}, \Sigma_{\mathrm{sta}} \rangle$ е *(n,d)-сорт на маргаритка*. Казваме, че D *е от сорта* $\langle \Sigma_{\mathrm{pet}}, \Sigma_{\mathrm{sta}} \rangle$ т.с.т.к. D_{pet} е от сорта Σ_{pet} и D_{sta} е от сорта Σ_{sta}. Ясно е, че при дадени KD45-модел M, d и n, броят на всички сортове на маргаритки е $\leq ((d+1)^{2^n})^2$.

Дефиниция 47 ((n,d)-подобни KD45-модели) Нека M_1 и M_2 са два KD45-модела. Нека $d > 0$, $n > 0$. Казваме, че M_1 и M_2 са *(n,d)-подобни* т.с.т.к. за всеки (n,d) сорт на маргаритка $\langle \Sigma_{\mathrm{pet}}, \Sigma_{\mathrm{sta}} \rangle$, или M_1 и M_2 съдържат еднакъв брой маргаритки от сорта $\langle \Sigma_{\mathrm{pet}}, \Sigma_{\mathrm{sta}} \rangle$ когато този брой е $< d$, или всеки един от двата модела съдържа поне d маргаритки от сорт $\langle \Sigma_{\mathrm{pet}}, \Sigma_{\mathrm{sta}} \rangle$.

Твърдение 48 Нека $d > 0$, $n > 0$. Нека M_1 и M_2 да са два (n,d)-подобни KD45-модела. Тогава в тях са верни едни и същи затворени формули от езика $L(=, R, P_1, \ldots, P_n)$ с кванторен ранг $\leq d$. $\square$

Нека $A \in \mathrm{ML}(\Box, [U])$. Нека $n > 0$ е такова, че всички съждителни променливи, които се срещат в A, да са измежду $p_1, \ldots, p_n$. Добре-известен факт е, че *стандартната транслация* $\mathrm{ST}(A, x)$ на формулата A, която дава формула $\psi(x) \in L(=, R, P_1, \ldots, P_n)$, има свойството, че за всеки модел на Крипке M, $\mathrm{M} \Vdash A$ т.с.т.к. $\mathrm{M} \models \psi(x)$. Освен това, ако $d > 0$ и модалната дълбочина на A е $< d$, тогава кванторният ранг на $\forall x \psi$ е $\leq d$.

Затова, според твърдение 48 и според по-горното, получаваме следната лема:

Лема 49 Нека $d > 0$, $n > 0$. Нека M_1 и M_2 да са два (n,d)-подобни KD45-модела. Тогава за всяка модална формула $A \in \mathrm{ML}(\Box, [U])$ с модална дълбочина $< d$ и съждителни променливи измежду $p_1, \ldots, p_n$: $\mathrm{M}_1 \Vdash A$ т.с.т.к. $\mathrm{M}_2 \Vdash A$. $\square$

Дефиниция 50 (Рестрикция на модел на Крипке) Нека $\mathrm{M} = \langle W, R, V \rangle$ е модел на Крипке, нека $\mathrm{F}' = \langle W', R' \rangle$ е структура на Крипке, такава че $W' \subseteq W$, $R' = R \cap (W' \times W')$. Тогава казваме, че моделът $M' = \langle W', R', V' \rangle$ е *рестрикцията на* M *до* F', означено с $\mathrm{M} \upharpoonright \mathrm{F}'$, т.с.т.к. за всяка съждителна променлива p, $V'(p) = V(p) \cap W'$.

Твърдение 51 Нека $d > 0$, $n > 0$. Нека $k > d.((d+1)^{2^n})^2$. Нека $\mathrm{F} \in \mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Нека $\mathrm{F}_1 =_{def} \mathrm{F} \upharpoonright_1 k$ (вж. дефиниция 21). Нека $\mathrm{F}_2 =_{def} \mathrm{F}_1 \upharpoonright_2 k$ (вж. дефиниция 32). Тогава, за всяка модална формула $A \in \mathrm{ML}(\Box, [U])$ със съждителни променливи измежду $p_1, \ldots, p_n$ и модална дълбочина m, такава че $(m+1) < d$, следните условия са еквивалентни:
(1) $\mathrm{F} \Vdash A$
(2) $\mathrm{F}_1 \Vdash A$
(3) $\mathrm{F}_2 \Vdash A$. $\square$

Теорема 52 *Всяка модална формула A от езика* $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ *е определима от първи ред в езика* FOL *над класа* $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. $\square$

6 ML($\Box$) и $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$

Използваме основния модален език ML($\Box$) и стандартният език на предикатното смятане с индивидни променливи VAR, равенство и единствен бинарен предикатен символ r, FOL. Използваме стандартните дефиниции за *структура на Крипке* и *модел на Крипке*.

Аксиомата на K5 е следната модална формула:
(5) $(\Diamond p \to \Box\Diamond p)$ (аксиома за евклидовост)

Глобално съответна от първи ред на тази аксиома е следната формула:
(5′) $\forall x \forall y_1((x\ r\ y_1) \to \forall z_1((x\ r\ z_1) \to (z_1\ r\ y_1)))$

Казваме, че структурата на Крипке F е K5-*структура (евклидова структура)* т.с.т.к. аксиомата (5) е валидна в F. Означаваме класа на всички евклидови структури с $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$.

Да разгледаме задачите за модална определимост на затворени FOL формули в ML($\Box$) над $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$ и за определимост от първи ред на модални формули от езика ML($\Box$) в FOL над $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$.

6.1 Всички ML($\Box$) формули са FOL-определими над $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$

Дефиниция 53 (Прости K5-структури) Казваме, че K5-структурата $\mathrm{F} = \langle W, R\rangle$ е *проста* K5-*структура* т.с.т.к. съществуват множества $P(\mathrm{F})$ (множеството на венчелистчетата) и $S(\mathrm{F})$ (множеството на тичинките), такива че $W = P(\mathrm{F}) \cup S(\mathrm{F})$, $P(\mathrm{F}) \cap S(\mathrm{F}) = \emptyset$ и следните условия са верни:
(SK5F 1). $\forall x \in P(\mathrm{F}) \neg\exists y \in W(\langle y, x\rangle \in R)$
(SK5F 2). $S(\mathrm{F}) \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in P(\mathrm{F}) \exists y \in S(\mathrm{F})(\langle x, y\rangle \in R)$
(SK5F 3). $\forall x \in S(\mathrm{F}) \forall y \in S(\mathrm{F})(\langle x, y\rangle \in R)$

Лесно се проверява, че всяка K5-структура е disjoint union от прости K5-структури.

Означаваме класа на всички породени подструктури на K5-структури с C_{gen}. Очевидно, всяка $\mathrm{F} \in C_{gen}$ има нула или едно нерефлексивно състояние, празно или непразно подмножество на носителя, където всички състояния са рефлексивни и са в релация помежду си, и където нерефлексивното състояние, ако то съществува, е в релация с някои от рефлексивните състояния, ако има такива.

Означаваме класа на всички крайни породени подструктури в K5 с C_f. Очевидно $C_f \subseteq C_{gen}$. Означаваме с $\mathrm{F}_{e,s,m}$ всяка структура от C_f, където $e \in \{0, 1\}$ е броят на нерефлексивните състояния, s е броят на наследниците на нерефлексивното състояние (ако то съществува), а m е броят на всички рефлексивни състояния. Ясно е, че $m \geq s \geq 0$ и $m + e > 0$.

Казваме, че даден модел на Крипке M е K5-*модел* т.с.т.к. неговата структура на Крипке е K5-структура, и пишем $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$. Казваме, че дадне модел на Крипке M е *gen-модел* т.с.т.к. неговата структура на Крипке е gen-структура, пишем $\mathrm{M} \in C_{gen}$. Казваме, че даден модел на Крипке M е *f-model* т.с.т.к. неговата структура на Крипке е f-структура, пишем $\mathrm{M} \in C_f$.

Сега трябва да си припомним дефинициите 43, 44 и 45.

Дефиниция 54 ((n,d)-сорт на gen-модел) Нека Σ_{pet}, Σ_{sta_1} и Σ_{sta_2} са (n,d)-сортове. Казваме, че всяка такава наредена тройка $\langle \Sigma_{\text{pet}}, \Sigma_{\text{sta}_1}, \Sigma_{\text{sta}_2} \rangle$ е *(n,d)-сорт на C_{gen}-модел* т.с.т.к. има поне едно число в поне един от трите (n,d)-сорта, което е > 0, и в Σ_{pet} има най-много едно число, което е 1, а останалите са 0.

Нека $\mathrm{M} \in C_{gen}$. Тогава неговата структура на Крипке D е някое $\mathrm{F}_{e,s,m}$. Нека D_{pet} е множеството от венчелистчетата на D. Нека D_{sta_1} е множеството от тичинките на D, които са R-наследници на венчелистчето, ако такова съществува. Нека D_{sta_2} е множеството на тичинките на D, които не са R-наследници на венчелистче. Нека $d > 0$, $n > 0$. Казваме, че M е от (n,d)-сорта $\langle \Sigma_{\text{pet}}, \Sigma_{\text{sta}_1}, \Sigma_{\text{sta}_2} \rangle$ т.с.т.к. D_{pet} е от сорта Σ_{pet}, D_{sta_1} е от сорта Σ_{sta_1} и D_{sta_2} е от сорта Σ_{sta_2}.

Дефиниция 55 ((n,d)-подобни gen-модели) Нека $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \in C_{gen}$. Нека $d > 0$, $n > 0$. Казваме, че M_1 и M_2 са *(n,d)-подобни* т.с.т.к. те са от един и същ (n,d)-сорт.

Твърдение 56 Нека $d > 0$, $n > 0$. Нека $\mathrm{M}_1 \in C_{gen}$ и $\mathrm{M}_2 \in C_{gen}$ да са два (n,d)-подобни модела. Тогава в тях са верни едни и същи затворени формули от езика $L(=, R, P_1, \dots, P_n)$ с кванторна дълбочина $\leq d$. □

Нека $n > 0$. Нека $A \in \mathrm{ML}(\Box)$ и нека всички съждителни променливи, които се срещат в A да са сред $p_1, \dots, p_n$. Добре известен факт е, че *стандартната транслация* $\mathrm{ST}(A, x)$ на формулата A, която дава формула $\psi(x) \in L(=, R, P_1, \dots, P_n)$, има свойството, че за всеки модел на Крипке M и състояние w в M, $\mathrm{M}, w \Vdash A$ т.с.т.к. $\mathrm{M} \vDash \psi(x)[w]$. Също така, ако $d > 0$ и ако модалната дълбочина на A е $< d$, то кванторният ранг на $\exists x \psi$ е $\leq d$.

Използвайки твърдение 56 и според по-горното, получаваме следната лема:

Лема 57 Нека $d > 0$, $n > 0$. Нека M_1 и M_2 да са два (n,d)-подобни gen-модела. Тогава за всяка модална формула $A \in \mathrm{ML}(\Box)$ с модална дълбочина $< d$ и съждителни променливи измежду $p_1, \dots, p_n$: A е изпълнима в модела M_1 т.с.т.к. A е изпълнима в модела M_2. □

За $k > 0$, $C_f^k =_{def} \{\mathrm{F} \in C_f \mid Card(\mathrm{F}_{sta_1}) \leq k \ \&\ Card(\mathrm{F}_{sta_2}) \leq k\}$

Дефиниция 58 (Рестрикция на gen-структура) Нека $\mathrm{F} \in C_{gen}$ и нека $k > 0$. Казваме, че структурата на Крипке $\mathrm{F}' \in C_f^k$ е *рестрикция на* F *до* k т.с.т.к.:

1. $\mathrm{F}_{pet} = \mathrm{F}'_{pet}$,
2. Или $Card(\mathrm{F}_{sta_1}) < k$ и $Card(\mathrm{F}_{sta_1}) = Card(\mathrm{F}'_{sta_1})$, или $Card(\mathrm{F}_{sta_1}) \geq k$ и $Card(\mathrm{F}'_{sta_1}) = k$,
3. Или $Card(\mathrm{F}_{sta_2}) < k$ и $Card(\mathrm{F}_{sta_2}) = Card(\mathrm{F}'_{sta_2})$, или $Card(\mathrm{F}_{sta_2}) \geq k$ и $Card(\mathrm{F}'_{sta_2}) = k$.

Ясно е, че с точност до изоморфизъм, за всяка $\mathrm{F} \in C_{gen}$, съществува единствена структура на Крипке $\mathrm{F}' \in C_f^k$, която е рестрикцията на F до k. Означаваме $\mathrm{F}' =_{def} \mathrm{F} \restriction_3 k$. С точност до изоморфизъм, можем да считаме, че F' е подструктура на F.

Твърдение 59 Нека $A \in \mathrm{ML}(\Box)$. Нека $n > 0$ е такова, че съждителните променливи на A са измежду $p_1, \dots, p_n$. Нека модалната дълбочина на A да бъде d_A. Нека $d > 0$ да е такова число, че $(d_A + 1) < d$. Нека k да е такова, че $k > (d+1).2^n$. Нека $\mathrm{F} \in C_{gen}$ и $\mathrm{F}' = \mathrm{F} \restriction_3 k$. Тогава A е изпълнима в F т.с.т.к. A е изпълнима в F'. □

Нека $A \in \mathrm{ML}(\Box)$ и нека $k > 0$. Означаваме $C_f^k(A) =_{def} \{\mathrm{F} \in C_f^k \mid \mathrm{F} \Vdash A\}$.

Твърдение 60 Всяка формула $A \in \mathrm{ML}(\Box)$ е определима от първи ред над $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$.$\Box$

6.2 Неразрешимост на валидността на FOL формули в $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$

Тук използваме дефинициите от [50] за *теория от първи ред*, или просто *теория*. Както е означено в [50], ако T е теория, то с $L(\mathrm{T})$ означаваме *езика на* T.

Използваме вариант на интерпретацията от [50], за да покажем, че изпълнимостта на FOL формули в класа на всички рефлексивни и симетрични структури на Крипке се свежда до изпълнимост на FOL формули в класа на всички K5-структури. Това показва, че задачата за валидността на затворени FOL формули в $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$ е неразрешима.

Ясно е, че преименувайки свързаните променливи на дадне формула от първи ред $U(x)$, по начин, който запазва значението на формулата, можем да получим вариант на $U(x)$, където дадена индивидна променлива x' не участва и x няма свързани участия. Затова означаваме с $U(x')$ формулата, получена чрез заместване на x с x' в така получената от $U(x)$ формула.

Сега нека си припомним дефиницията за релативизиран редукт на структура за език от първи ред, дефиниция 27.

Дефиниция 61 (Релативизация на формула) Нека L е език от първи ред и нека $\psi, U(x) \in L$. Индуктивно дефинираме $\tau(\psi, U)$, *релативизацията на* ψ *по отношение на* $U(x)$, по следния начин:

$\tau(\alpha, U) = \alpha$ за атомарни формули α.
$\tau(\neg\psi, U) = \neg\tau(\psi, U)$.
$\tau(\psi_1 \vee \psi_2, U) = (\tau(\psi_1, U) \vee \tau(\psi_2, U))$.
$\tau(\psi_1 \wedge \psi_2, U) = (\tau(\psi_1, U) \wedge \tau(\psi_2, U))$.
$\tau(\exists x\psi, U) = \exists x(U(x) \wedge \tau(\psi, U))$.
$\tau(\forall x\psi, U) = \forall x(U(x) \to \tau(\psi, U))$.

Лема 62 (Теорема за релативизацията) Нека F, F' са структури за език от първи ред L, нека $U(x) \in L$. Ако F' е релативизирания редукт на F спрямо $U(x)$, тогава за всички формули от първи ред $\psi(\bar{y}) \in L$ и за всички списъци $\bar{t}$ от светове в F', $\mathrm{F} \vDash \tau(\psi(\bar{y}), U(x))[\bar{t}]$ т.с.т.к. $\mathrm{F}' \vDash \psi(\bar{y})[\bar{t}]$.

От лема 62, получаваме:

Твърдение 63 Нека T_1 и T_2 са теории с равенство, такива че $L(\mathrm{T}_1) \subseteq L(\mathrm{T}_2)$. Нека $U(x) \in L(\mathrm{T}_2)$ е формула от първи ред. Нека следните две условия са изпълнени:

(i). Ако за някоя структура F_1 за езика $L(\mathrm{T}_1)$, $\mathrm{F}_1 \vDash \mathrm{T}_1$, то съществува структура F_2 за $L(\mathrm{T}_2)$, такава че $\mathrm{F}_2 \vDash \mathrm{T}_2$ и F_1 е обедняването до $L(\mathrm{T}_1)$ на релативизирания редукт на F_2 по отношение на $U(x)$.

(ii). Ако за някоя структура F_2 за езика $L(\mathrm{T}_2)$, $\mathrm{F}_2 \vDash \mathrm{T}_2$ и $\mathrm{F}_2 \vDash \exists x U(x)$, то F_2 има релативизиран редукт по отношение на $U(x)$ и обедняването на този редукт до $L(\mathrm{T}_1)$, F_1, е такава структура, че $\mathrm{F}_1 \vDash \mathrm{T}_1$.

Тогава за всяка формула $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in L(\mathrm{T}_1)$, следните две условия са еквивалентни:

(1) Съществува структура F_1 за $L(\mathrm{T}_1)$, такава че $\mathrm{F}_1 \models \mathrm{T}_1$ и $\mathrm{F}_1 \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$.

(2) Съществува структура F_2 за $L(\mathrm{T}_2)$, такава че $\mathrm{F}_2 \models \mathrm{T}_2$ и $\mathrm{F}_2 \models \exists x U(x) \wedge \exists x_1 \ldots \exists x_n (U(x_1) \wedge \cdots \wedge U(x_n) \wedge \tau(\psi))$, където $\tau(\psi)$ е релативизацията на $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ по отношение на $U(x)$. □

Отсега нататкък, нека T_1 е теорията на симетричните и рефлексивните релации, която е теория от първи ред с равенство, с бинарен предикатен символ r_1 и със следната нелогическа аксиома:

$\forall x(x\ r_1\ x) \wedge \forall x \forall y((x\ r_1\ y) \rightarrow (y\ r_1\ x))$.

Според [47], задачата за валидност на формули в T_1 е неразрешима.

Да използваме следната теория като теория за всички евклидови структури на Крипке: T_{K5}, която е теория от първи ред с равенство, с бинарен предикатен символ r_2 и следната нелогическа аксиома:

$(5'')\ \forall x \forall y_1((x\ r_2\ y_1) \rightarrow \forall z_1((x\ r_2\ z_1) \rightarrow (z_1\ r_2\ y_1)))$

Нека $U(x)$ да бъде формулата $\neg(x\ r_2\ x) \wedge \exists z(x\ r_2\ z)$.

Да разширим езика $L(\mathrm{T}_{\mathrm{K5}})$ с определимия предикатен символ r_1, получавайки теория T_2, разширение на T_{K5}, със следната нелогическа аксиома:

$(\mathit{Interpr}')\ \forall x \forall y((x\ r_1\ y) \leftrightarrow U(x) \wedge U(y) \wedge \exists z((x\ r_2\ z) \wedge (y\ r_2\ z)))$

Използвайки похватите от [50], се вижда, че задачата за валидност на формули в T_2 е сводима до задачата за валидност на формули в T_{K5}.

Използвайки твърдение 63:

Твърдение 64 Задачата за изпълнимост на формули в T_1 е сводима до задачата за изпълнимост на формули в T_2. □

От твърдение 64:

Следствие 65 Задачата за валидност на формули в T_1 е сводима до задачата за валидност на формули в T_{K5}. □

6.3 Неразрешимост на модалната определимост над $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$

Да си спомним дефиницията за стабилен клас от структури на Крипке (дефиниция 28) и теоремата, която казва, че ако $\mathcal{C}$ е стабилен клас от структури на Крипке, тогава задачата за валидност на формули от първи ред в $\mathcal{C}$ се свежда до задачата за модална определимост над $\mathcal{C}$ в ML(□) на FOL формули (Theorem 29).

Използвайки формулите:

$\gamma_1(x_1, x_2, x) =_{def} x \neq x_1 \wedge x \neq x_2$.

$\gamma_2 =_{def} \exists x \exists y(x \neq y \wedge \forall z(\neg((z\ r\ x) \vee (z\ r\ y) \vee (x\ r\ z) \vee (y\ r\ z))))$:

Твърдение 66 $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$ е стабилен клас от структури на Крипке. □

Така показахме, че задачата за модална определимост на затворени формули от езика FOL над класа на всички K5-структури е неразрешима.

7 Заключение

В секция 3 видяхме детерминистична версия на алгоритъма SQEMA, която използва конюнктивна нормална форма и елиминация на подформули. Видяхме, че този алгоритъм винаги завършва работа. Видяхме нови инварианти за салквистови и индуктивни формули. Имаше доказателства, че алгоритъмът винаги успява за салквистови и индуктивни формули.

В секция 3 видяхме нова транслация на PCL формули до формули от езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$. Видяхме доказателство, че салквистовите PCL формули се превеждат чрез модифицираната транслация до салквистови формули от езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$. Видяхме как да приложим алгоритъма детерминистична SQEMA, за да намерим съответни от първи ред на PCL формули, използвайки новата транслация. Резултатите са реализирани на езика за програмиране Java в уебсайта на SQEMA, `http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/sqema`.

В секция 4 видяхме, че всяка модална формула от езика $\mathrm{ML}(\Box)$ има дефиниция от първи ред в $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Също така задачата за модална определимост в $\mathrm{ML}(\Box)$ на затворени формули от първи ред над $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ е PSPACE-complete.

В секция 5 видяхме, че всяка модална формула от езика $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ има дефиниция от първи ред над $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$. Също така задачата за модална определимост в $\mathrm{ML}(\Box, [U])$ на затворени формули от първи ред над $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ е PSPACE-complete.

В секция 6 видяхме, че всяка модална формула от езика $\mathrm{ML}(\Box)$ има дефиниция от първи ред над класа на всички евклидови структури на Крипке, $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$. Също така видяхме, че задачата за валидността на формули от първи ред в $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$ е неразрешима. Задачата за модалната определимост на формули от първи ред над $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$ също е неразрешима.

7.1 Бъдеща работа

Би било полезно да се модифицира детерминистичната SQEMA с допълнителни правила за специалните случаи на S5 и KD45 модалности.

Авторът смята, че в сегашната си форма, алгоритъмът детерминистична SQEMA най-вероятно успява при всички входни модални формули с модална дълбочина 1, за които е известно, че имат съответни формули от първи ред, според van Benthem в [56] и [57] – и това е заради използването на конюнктивна нормална форма за елиминиране на подвормули. Също така може би може да се покаже, че ако се приложи процедурата за конюнктивна нормална форма в началото на алгоритъма три пъти (чрез използване на отрицание), то всяка формула, съдържаща само универсалната модалност, ще бъде превърната във формула с модална дълбочина 1, подобно на Глава Трета от [39], и така това ще доведе до успех на детерминистичната SQEMA при всички такива формули. Съществуват експериментални данни, които показват, че и двете предположения може би са верни, но е необходимо по-формално доказателство.

Би било интересно да се види дали задачите за модалната определимост и за определимостта от първи ред са разрешими в някои класове от структури на Крипке, например $\mathcal{C}_{\mathrm{S5}}$, $\mathcal{C}_{\mathrm{KD45}}$ или $\mathcal{C}_{\mathrm{K5}}$, когато модалният език е основният модален език с добавен оператор за разлика.

Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че научните приноси, изброени по-долу, с номера 1, 2 и 3 са оригинални научни разработки на автора, а научните приноси, отбелязани по-долу с номер 4, са разработени в съавторство с Тинко Тинчев и Philippe Balbiani. Използването на предходни резултати е отразено с подходящи препратки.

Научни приноси

Авторът счита, че основните научни приноси на дисертацията са, както следва:

1. **Резултати за алгоритъма "Детерминистична SQEMA", салквистови и индуктивни формули.**

- Дефиниция на нова детерминистична версия на алгоритъма SQMEA с добавени правила за опростяване за универсалната модалност.

- Доказателство, че детерминистичната SQEMA винаги завършва.

- Нова инварианта за изпълнението на детерминистичната SQEMA при входни салквистови формули.

- Доказателство, че детерминистичната SQEMA успява при всяка входна салквистова формула.

- Нова инварианта за изпълнението на детерминистичната SQEMA при входни индуктивни формули.

- Доказателство, че детерминистичната SQEMA успява при всяка входна индуктивна формула.

2. **Резултати за прилагане на детерминистичната SQEMA върху формули от езика на пред-контактните логики (PCL), както и резултати за салквистовите PCL формули**

- Дефиниция на модифицирана транслация на PCL формули до формули от $\mathrm{ML}(\Box, [U])$.

- Доказателство, че по-горната транслация превръща салквистови PCL формули в салквистови формули от $\mathrm{ML}(\Box, [U])$.

- Модификация на съществуващата реализация на детерминистичната SQEMA на сайта `http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/sqema`, така че да работи с формули от PCL езика и да успява на всички салквистови PCL формули, използвайки модифицираната транслация.

3. **Резултати за изчислимост и сложност на задачи за съответствието в класа на всички** KD45 **структури на Крипке**

- Доказателство, че всички модални формули от основния модален език са определими с формули от първи ред в класа на всички KD45 структури на Крипке.

- Доказателство, че задачата за модална определимост с формула от основния модален език на формули от първи ред в класа на всички KD45 структури на Крипке е PSPACE-complete.

- Доказателство, че всички модални формули от основния модален език с добавена универсална модалност са определими с формули от първи ред в класа на всички KD45 структури на Крипке.

- Доказателство, че задачата за модална определимост с формула от основния модален език с добавена универсална модалност на формули от първи ред в класа на всички KD45 структури на Крипке е PSPACE-complete.

4. **Резултати за изчислимост и сложност на задачи за определимост в класа на всички евклидови структури на Крипке** - тази група резултати е разгледана в съавторство с Тинко Тинчев и Philippe Balbiani.

- Доказателство, че всички модални формули от основния модален език имат дефиниция от първи ред в класа на всички евклидови структури на Крипке.

- Доказателство, че задачата дали дадена формула от първи ред е общовалидна в класа на всички евклидови структури на крипке е неразрешима.

- Доказателство, че задачата дали дадена формула от първи ред е модално определима в класа на всички евклидови структури на Крипке е неразрешима.

Публикации - реферирани статии

Някои резултати от дисертацията са публикувани в следните реферирани статии:

[26]: Georgiev, D.: *SQEMA with Universal Modality.* proc. of the 10^{th} Panhellenic Logic Symposium, 2015, pp. 76–81.

[27]: Georgiev, D.: *Deterministic SQEMA and application for pre-contact logic*, Annual of Sofia University "St. Kliment Ohridski" Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia 2016, Volume **103**, 2016, pp. 149–176.

[28]: Georgiev, D.: *Computability of definability in the class of all KD45 frames*, 11th International Conference on Advances in Modal Logic, Short presentations, 2016, pp. 59–63.

Разширена и допълнена версия на по-горното е в процес на рефериране:

[29]: Georgiev, D.: *Definability in the class of all KD45-frames - computability and complexity*, submitted in November 2016, under review, Journal of Applied Non-Classical Logics

Авторът, в съавторство с Тинко Тинчев и Philippe Balbiani, участва в следната статия, която все още в процес на разработка:

Balbiani, P., Georgiev, D., Tinchev, T.: *Definability in the Class of All Euclidean Kripke Frames.*

Забелязани цитирания

Няма известни цитирания на реферираните статии.

Забелязани са, обаче, цитирания на уеб-страницата на детерминистичната SQEMA, `http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/sqema`, в следните публикации:

Dunin-Keplicz, B., Verbrugge, R.: *Teamwork in Multi-Agent Systems. A Formal Approach*, 2011, John Wiley, 2010 section 3.9.

Gabbay, D. M., Schmidt, R. A., Szalas, A.: *Second-order Quantifier Elimination: Foundations, Computational Aspects and Applications*, College Publications, 2008 - Computers.

Lokhorst, G.J., *Mens Rea, Logic and the Brain*, in: *Law and Neuroscience*, Freeman, M., F.B.A, editor, Oxford University Press, 2010, pp. 29–39, citation on page 33.

Доклади на конференции и семинари

Части от дисертацията са представени на следните доклади:

А) „Алгоритъмът SQEMA за модален език с универсалната модалност", Пролетната научна сесия на ФМИ, СУ, март 2015 г.

Б) „SQEMA with Universal Modality", 10th Panhellenic Logic Symposium, Samos, Greece, 10 юни 2015 г.

В) Семинар в IRIT, Toulouse, октомври 2015 г.

Г) „Детерминистична SQEMA и приложение за езика на предконтактните логики", Пролетната научна сесия на ФМИ, СУ, март 2016 г.

Д) Кратка презентация „Computability of definability in the class of all KD45 frames", Advances in Modal Logic, Budapest, Hungary, 2016 г.

Е) „Modal and first-order definability in the class of all KD45 Kripke frames", Conference on Mathematical Logic, dedicated to the 80th anniversary of prof. Dimiter Skordev, октомври, Гьолечица, България, 2016 г.

Литература

[1] Balbiani, P., Tinchev, T.: *Decidability and complexity of definability over the class of all partitions*, in: *Proc. of the 5th Panhellenic Logic Symposium* (2005), pp. 26–33.

[2] Balbiani, P., Tinchev, T.: *Definability over the class of all partitions*, Journal of Logic and Computation **16** (2006), pp. 541–557.

[3] Balbiani, P., Tinchev, T.: *Undecidable problems for modal definability*, Journal of Logic and Computation, doi 10.1093/logcom/exv094 (2016).

[4] Balbiani, P., Kikot, S.: *Sahlqvist Theorems for Precontact Logics*, AiML 01/2014; 9.

[5] Balbiani, P., Tinchev, T., Vakarelov, D.: *Modal Logics for Region-based Theories of Space*, Fundamenta Informaticae **81**, 2007, IOS Press, pp. 29–82.

[6] Balbiani, P., Georgiev, D., Tinchev, T.: *Definability in the Class of All Euclidean Kripke Frames*, to be submitted to the Journal of Logic and Computation.

[7] Bezhanishvili, N.: *Pseudomonadic Algebras as Algebraic Models of Doxastic Modal Logic*, Mathematical Logic Quarterly **48** (2002) 4, WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH 2002, pp. 624–636

[8] Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y.: *Modal Logic (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science)*, Cambridge University Press, 2002.

[9] Chagrov, A., Chagrova, L.: *Algorithmic problems concerning first-order definability of modal formulas on the class of all finite frames.* Studia Logica **55** (1995) pp.421–448.

[10] Chagrov, A., Chagrova, L.: *The truth about algorithmic problems in correspondence theory.* In: Advances in Modal Logic. Vol. 6. College Publications (2006) pp. 121–138.

[11] Chagrov, A., Chagrova, L.: *Demise of the algorithmic agenda in the correspondence theory?* Logical Investigations **13** (2007) pp.224–248 (in Russian).

[12] Chagrova, L. A.: *On the Problem of Definability of Propositional Formulas of Intuitionistic Logic by Formulas of Classical First-Order Logic.*, University of Kalinin (1989) Doctoral Thesis (in Russian).

[13] Chagrova, L.: *An undecidable problem in correspondance theory.* The Journal of Symbolic Logic **56** (1991) 1261–1272.
[14] Chang, C. C., Keisler, H. J.: Model Theory. (1973). Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland publishing company NY, Amsterdam, London, 1973.
[15] Conradie, W.: *Completeness and Correspondence in Hybrid Logic via an Extension of SQEMA.* Electronic Notes in Theoretical Computer Science 231, 2009, pp. 175–190, doi:10.1016/j.entcs.2009.02.035, ELSEVIER.
[16] Conradie, W., Goranko, V., Vakarelov, D.: *Elementary Canonical Formulae: A Survey on Syntactic, Algorithmic, and Model–theoretic Aspects.* AiML, vol. **5**, pp. 17–51, Kings College, London, 2005
[17] Conradie, W., Goranko, V., Vakarelov, D.: *Algorithmic correspondence and completeness in modal logic. I. The core algorithm SQEMA.* Logical Methods in Computer Science, **2** (1:5) 2006, 1–26. (`http://arxiv.org/pdf/cs/0602024.pdf`)
[18] Conradie, W., Goranko, V., Vakarelov, D.: *Algorithmic correspondence and completeness in modal logic II. Polyadic and hybrid extensions of the algorithm SQEMA.* J Logic Computation (2006) 16 (5): 579–612.
[19] Conradie, W., Goranko, V., Vakarelov, D.: *Algorithmic Correspondence and Completeness in Modal Logic. III. Extensions of the Algorithm SQEMA with Substitutions.* Fundamenta Informaticae (2009) 92 (4): pp. 307–343.
[20] Conradie, W., Goranko, V., Vakarelov, D.: *Algorithmic correspondence and completeness in modal logic. V. Recursive extensions of SQEMA.* Journal of Applied Logic (2010) 8 (4): pp. 319–333.
[21] Conradie, W., Goranko, V.: *Algorithmic correspondence and completeness in modal logic IV. Semantic extensions of SQEMA.* Journal of Applied Non-Classical Logics (2012) 18 (2-3): pp. 175–211.
[22] Ebbinghaus, H.-D., Flum, J.: *Finite Model Theory.* Perspectives in mathematical logic, Springer, Berlin, New York, 1995.
[23] Gabbay, D., Ohlbach, H. J.: *Quantifier Elimination in Second-Order Predicate Logic.* South African Computer Journal, **7**, (1992), 35–43.
[24] Gargov, G., Goranko, V.: *Modal Logic with Names.* Journal of Philosophical Logic **22**; pp. 607-636, 1993.
[25] Georgiev, D.: *An implementation of the algorithm SQEMA for computing first-order correspondences of modal formulas.* Master Thesis. Sofia University, FMI, 2006.
[26] Georgiev, D.: *SQEMA with Universal Modality.* proc. of the 10^{th} Panhellenic Logic Symposium, 2015, pp. 76–81.
[27] Georgiev, D.: *Deterministic SQEMA and application for pre-contact logic*, Annual of Sofia University "St. Kliment Ohridski" Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia 2016, Volume **103**, 2016, pp. 149–176.
[28] Georgiev, D.: *Computability of definability in the class of all KD45 frames*, 11th International Conference on Advances in Modal Logic, Short presentations, 2016, pp. 59–63.
[29] Georgiev, D.: *Definability in the class of all KD45-frames - computability and complexity*, submitted in November 2016, under review, Journal of Applied Non-Classical Logics
[30] Goranko, V., Vakarelov D.: *Sahlqvist formulae in Hybrid Polyadic Modal Languages*, Journal of Logic and Computation, 2001, 11 (5), pp. 737–754.
[31] Goranko, V., Vakarelov D.: *Sahlqvist formulas Unleashed in Polyadic Modal Languages*, 2002, In: F. Wolter, H. Wansing, M. de Rijke, and M. Zakharyaschev, eds. Advances in Modal Logic, vol. **3**, World Scientific, pp. 221–240
[32] Goranko, V., Vakarelov, D.: *Elementary Canonical Formulae: Extending Sahlqvist's Theorem.* Annals of Pure and Applied Logics, 2006, **141**, 1-2, pp. 180–217.
[33] Goré, R.: Tableau Methods for Modal and Temporal Logics. In: Handbook for Tableau Methods (M. DIAgostino, R. Gabbay, R. Hähnle, J. Posegga, eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999, pp. 297–396.
[34] Halpern, J., Moses, Y.: *A guide to the modal logics of knowledge and belief*, Proceedings IJCAI-85, Los Angeles (CA) 1985, pp. 480–490.
[35] Halpern, J., Moses, Y.: *A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief*, Artificial Intelligence 54 (1992), pp. 319–379.
[36] Halpern, J., Rêgo. L: *Characterizing the NP-PSPACE Gap in the Satisfiability Problem for Modal*

Logic, In: J. Logic Computation (2007) 17 (4): pp. 795–806. DOI: doi.org/10.1093/logcom/exm029
[37] Hintikka, J.: Knowledge and Belief. Cornel University Press, Ithaca (NY) 1962.
[38] Hodges, W.: Model Theory. Cambridge University Press (1993).
[39] Hughes, G. E., Cresswell, M. J.: *An Introduction to Modal Logic*, 1968, Methuen, London.
[40] Meyer, J.: *Epistemic logic*, In: The Blackwell Guide to Philosophical Logic, Blackwell Publishers, Malden 2001, pp. 183–203.
[41] Meyer, J. van der Hoek, W.: Epistemic Logic for AI and Computer Science. Cambridge University Press, Cambridge 1995.
[42] Nagle, M.: *The decidability of normal K5-logics*, J. Symbolic Logic **46** (1981), pp. 319–328.
[43] Nagle, M. Thomason, S.: *The extensions of the modal logic K5.* J. Symbolic Logic **50** (1985), pp. 102–109.
[44] Papadimitriou, C. M.: Computational Complexity. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.
[45] Passy, S., Tinchev, T.: *PDL with Data Constants.* Information Processing Letters, **20**, pp. 35–41, 1985.
[46] Passy, S., Tinchev, T.: *An Essay in Combinatory Dynamic Logic.* Information and Computation, 1991, **93**, pp. 263–332.
[47] Rogers, H. Jr.: *Certain logical reduction and decision problems.* Annals of Mathematics **64** (1956) pp. 264–284.
[48] Sahlqvist, H.: *Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic**, in: S. Kanger, editor, *Proc. of the Third Scandinavian Logic Symposium*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **82**, Elsevier, 1975 pp. 110–143.
[49] Segerberg, K.: *An Essay in Classical Modal Logic*, Philosophical Studies, Uppsala 1971.
[50] Shoenfield, J. R.: Mathematical Logic. Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co. 1967.
[51] Stockmeyer, L. J.: *The polynomial-time hierarchy*, Theoretical Computer Science **3** (1976), pp. 1–22.
[52] Szalas, A.: *On the correspondence between Modal and Classical Logic: an Automated Approach.* J. Logic and Comp. Vol 3 No 6 (1993), 605–620.
[53] ten Cate, B.: *Model theory for extended modal languages*, PHD Thesis, Institute for Logic, Language and Computation, 2005, chapter 5, pp. 69–89.
[54] Vakarelov D.: *Modal Definability in Languages with a Finite Number of Propositional Variables and a New Extension of the Sahlqvist's Class.* In: Advances in Modal Logic, vol. **4**, King's College Publications, 2003, pp. 499–518.
[55] Vakarelov D.: *A recursive generalization of Ackermann Lemma with applications to modal μ-definability.* Procs of the 6th Panhellenic Logic Symposium, Volos, Greece, 5-8 July 2007 pp. 133–137.
[56] van Benthem, J.: *Some Kinds of Modal Completeness*, in: Studia Logica: An International Journal for Sumbolic Logic, Vol. **39**, No. 2/3 (1980), pp. 125–141.
[57] van Benthem, J.: *Correspondence theory*, in: D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic: Volume II: Extensions of Classical Logic*, Reidel, Dordrecht, 1984 pp. 167–247.
[58] van der Hoek, W.: *Systems of knowledge and belief*, J. Logic and Computation **3** (1993), pp 173–195.