РЕЦЕНЗИЯ

за дисертационен труд, представен за присъждане на образователната и научна степен **„доктор”**

в област на висше образование

4. „Природни науки, математика и информатика”

Професионално направление: **4.5 „Математика”**

Научна специалност: **01.01.13 „Математическо моделиране и приложение на математиката в икономиката”**

Тема: ***„Застрахователни модели на риск и вероятност за фалит”***

Автор**: Красимира Янкова Костадинова**

Рецензент: ***доц. д-р Велика Илиева Драгиева***

Обща информация за докторанта. Красимира Янкова Костадинова завършва висше образование, ОКС „бакалавър” с професионална квалификация „математик”, „учител по математика”, във Факултета по Математика и Информатика на Шуменския Университет „Епископ Константин Преславски”, през 2005 год. През 2007 год. завършва магистратура по Информатика (Икономическа информатика) в същия факултет. От октомври, 2008 год. досега работи като редовен асистент в Шуменския Университет. Водила е и води упражнения по Стохастични изчисления, Иконометрия, Теория на вероятностите, Числени методи, Математическа икономика, Математически анализ, Елементи от теория на множествата, Информатика. Представен е списък с общо 30 заглавия, самостоятелни и в съавторство (3 – в реферирани списания, 9 – в сборници с материали от конференции и 18 доклада на конференции и семинари) от областта на научните интереси на докторантката – Случайни процеси, Застрахователна теория на риска, Статистика. Има и едно цитиране. От представените материали не става ясно кога е започнала докторантурата и какъв вид е тя.

Описание и анализ на дисертацията. Дисертацията е с общ обем 106 страници и се състои от: 6 глави; списък с основните приноси; литература; списък с публикации и доклади на докторантката, резултатите от които са включени в дисертацията; декларация за оригиналност. Литературата съдържа 43 заглавия и за всяко от тези заглавия е посочено точно към кои параграфи се отнася.

В дисертацията се изследват няколко застрахователни модела на риск, при които броящият процес е различен от класическия Поасонов процес. Моделите на риск са обект на изследване от сравнително скоро време и тяхната актуалност е неоспорима. Първоначално разглежданият, класически модел на риск предполага, че приходите на застрахователната компания за интервал от време *(0,t)* са пропорционални на *t* с коефициент, изразяващ интензивността на премията за единица време. Разходите се определят като сумата от постъпилите през този интервал искове, чийто брой се описва чрез Поасонов броящ процес, а големините им са еднакво разпределени случайни величини. Разликата между приходите и разходите в момента време *t* формира процеса на риск, *X(t),* който играе основна роля при изследване моделите на риск. Чрез него се определя една от най-важните за функционирането на всяка застрахователна компания характеристики – вероятността за фалит. Ако към *X(t)* прибавим началния капитал на компанията, получаваме състоянието й в момента време *t.* Основният недостатък на този модел идва от факта, че средното и дисперсията на Поасоновия процес са равни, което не съответства на статистическите финансови данни. При тези данни разсейването е доста по-голямо. Това несъответствие прави класическия модел донякъде нереалистичен и налага разглеждането на други модели, съответстващи в по-голяма степен на статистическите данни. На такива модели е посветена настоящата дисертация.

Глава 1 има въвеждащ характер. Тя дава някои от основните определения, използвани по-нататък в дисертацията, както и литературен обзор на направеното досега. Това позволява да се види мястото на получените тук резултати сред резултатите на други автори. Описан е класическият модел на риск, дадени са различни определения на Поасонов процес, както и на сложен Поасонов процес. Включените в литературния обзор (§1.1) заглавия и свързаните с тях понятия са разнообразни и основни за дисертацията. Считам обаче, че лаконичният начин по който са представени е неподходящ и объркващ. Освен дефинициите на Поасонов процес и процес на Пойа-Аепли би трябвало да се дадат дефинициите, както и основни свойсва на поне още някои от разглежданите понятия. Дори да са оформени като отделни параграфи.

Глава 2 е посветена на два сложни Поасонови процеса - Поасонов процес от ред *k* и Поасонов отрицателно биномен процес. Поасоновият процес от ред *k* е дефиниран от Philipou (1983) като Поасонова сума от равномерно разпределени върху *k* точки случайни величини, докато отрицателно биномният процес се дефинира за пръв път в тази дисертация (в статиите, свързани с нея) като Поасонова сума от отрицателно биномно разпределени случайни величини. Отношението на дисперсията към средното и за двата процеса е по-голямо от 1, което ги прави подходящи за моделиране във финансовата сфера. И за двата процеса са изведени рекурентни (съответно Твърдение 2.1, § 2.1.1 и Твърдение 2.3, §2.2.1) и точни (Твърдение 2.2, § 2.1.1 и Твърдение 2.4, §2.2.1) формули за изчисляване вероятностната им функция, . Рекурентните формули за Поасоновия процес от ред *k* са обобщение на формулите на Панжер, публикувани през 1981 год.. И двата процеса са разгледани и като сложни процеси на раждане, съответно в § 2.1.2 и § 2.2.2. Забележките ми са свързани с яснотата на изложение, най-вече в тези два параграфа. Би трябвало да е дадена поне дефиниция на сложен процес на раждане, както и да се формулира точно какво се доказва в тези параграфи. Не е добре изяснено естеството на цитираните от Minkova (2010b) постулати (2.11).

В **Трета глава** се разглеждат модели на риск, в които броящият процес е един от изучените в Глава 2 сложни Поасонови процеси. Те са наречени съответно Поасонов модел на риск от ред *k* и Поасонов отрицателно биномен модел на риск. Разгледани са съответно в параграфи 3.1 и 3.2, които имат идентична структура. И за двата процеса е анализирана функцията $G(u,y)$, представляваща вероятността за фалит при начален капитал u и дефицит при фалита, не по-голям от y. Използвайки постулатите за двата броящи процеса, представени в § 2.1.2 и § 2.2.2, е изведено частно диференциално уравнение за $G(u,y)$ във всеки от двата модела (съответно формули (3.7) и (3.14)). С негова помощ са получени изрази за $G(0,y)$ (съответно в Теореми 3.1 и 3.4), диференциално уравнение за вероятността за фалит при зададен начален капитал (Теореми 3.2 и 3.5), както и точна формула за тази вероятност при нулев начален капитал (Теореми 3.3 и 3.6). Относно тези твърдения имам следната забележка. Тук най-съществената част е извеждането на диференциалното уравнение за $G(u,y)$, което заема почти две страници и би било много попрегледно, ако е оформено като теорема. Теореми 3.2, 3.3, 3.5 и 3.6, колкото и значими резултати да представят, са си следствие от предишните твърдения.

Накрая и на двата параграфа 3.1 и 3.2 са получени изрази за функцията *G(0,y)* в случая на експоненциално разпределени искове, съответно за двата разглеждани модела на риск.

Глава четвърта обобщава въведения в Глава трета Поасонов отрицателно биномен процес, като се разглежда Поасонова сума от двумерни отрицателно биномни случайни величини. Това ново, доста по-сложно разширение на Поасоновия процес е наречено двумерен Поасонов отрицателно биномен процес. В §4.1, Теорема 4.1 е изведена точна формула за вероятностната функция на този процес. По-нататък се разглежда двумерно разширение на Поасоновия отрицателно биномен модел на риск. При него се приема, че в застрахователната компания постъпват два вида искове (за два вида бизнес), които формират два различни, независими процеса на риск. Всеки със своя интензивност на премиите и със свой начален капитал, (съответно означен с u_1 и u_2). Въвеждат се и два вида времена до фалит: до първия момент, в който състоянията и на двата процеса станат отрицателни, или когато сумата от двете състояния стане отрицателна, с вероятности за фалит съответно $\Psi_{\max}(u_1,u_2)$ и $\Psi_{sum}(u_1,u_2)$. Използвайки резултати от предходната глава е получен интервал за стойностите на $\Psi_{\max}(0,0)$. Изведени са точни формули за Лапласовите трансформации на вероятностите за фалит и от двата вида. Тези формули са следствие от резултатите на Omey and Minkova (2013), [34], които би трябвало да бъдат представени по-подробно, за да е ясно защо могат да се приложат в този случай. В последния параграф на тази Глава е изведена точна формула за $\Psi_{\max}(u_1,u_2)$, когато исковете във всеки от двата процеса са експоненциално разпределени, съответно с параметри μ_1 и μ_2. В случая $\mu_1=\mu_2$ е изведена формула и за $\Psi_{sum}(u_1,u_2)$.

В **Глава 5** е разгледан модел на риск, при който отново имаме два вида бизнес, но за разлика от модела в предходната глава процесът на риск е един, $X(t)=ct-S_1(t)-S_2(t)$. Тук $S_1(t)$ и $S_2(t)$ са сумите от постъпилите до момента t искове съответно за всеки от двата вида бизнес. И двата броящи процеса са

Пойа–Аепли разпределени с различни параметри. Разгледан е и модел на риск на Пойа–Аепли със стохастични приходи. Той има вида $X(t) = u + S_1(t) - S_2(t)$, където u е началният капитал, а $S_1(t)$ и $S_2(t)$ са същите като в предходния модел, само че $S_1(t)$ представлява сумата от постъпилите до момента t стохастични приходи. Основните резултати, получени в тази глава се базират на апарата на теорията на мартингалите. Използвани са определения, означения и не елементарни твърдения от тази теория и те би трябвало да бъдат обяснени, поне с няколко думи, ако не и с цял параграф. Изречението „От мартингалната теория се получава" (стр. 59, стр. 66) не е достатъчно и донякъде омаловажава стойността на получените резултати.

В **глава шеста** се разглежда семейство разпределения, което е въведено за пръв път в статията на Kostadinova and Minkova (2016a), включена към дисертацията. Разпределенията от това семейство се определят като сложни GPS (general power series) разпределения, в които усложняващото разпределение е двумерно геометрично. Изведени са точна формула за вероятностната функция на тези разпределения (Теорема 6.1), както и за пораждащите функции на условните разпределения (Теорема 6.2). Член на това семейство се явява разпределението на Пойа-Аепли от II тип, дефинирано от Minkova and Balakrishnan (2016a). Тук са разгледани нови разпределения, членове на това семейство, които са наречени съответно двумерно биномно, двумерно отрицателно биномно и двумерно логаритмично разпределения с инфлационен параметър от втори тип. За всяко от тези разпределения са изведени рекурентни формули за изчисляване вероятностната му функция. Получени са и формули за двумерния индекс на Фишер, който е сравнен с този на Пойа-Аепли разпределението. Тези нови разпределения са основа за евентуални бъдещи изследвания на модели на риск, при които броящият процес е някое от тези разпределения.

Забележки. Основните ми забележки, част от които вече бяха направени са свързани с известна неяснота на изложението, най – вече при цитиране и използване на формули, свойства, дефиниции (по-скоро липса на такива) от чужди (външни) източници. За разлика от тях направените в дисертацията доказателства, с малки изключения са ясни, подробно описани и могат да се проследят. Имам забележка относно съдържанието на §5.1.3. Полученото неравенство за по-големия корен на уравнение (5.6) е вярно, но доказателството на твърдението, че и двата му корена са положителни не е вярно. Трансформациите на стр. 58 и стр. 65, не са Лапласови, а Лаплас-Стилтесови. Условията на някои теореми са формулирани непълно (Теореми 2.2, 4.1, 6.1 и др.). Въпреки че е ясно за какво се отнасят, не трябва точната дефиниция (означение) да се дава в доказателството. Не е правилно различни функции да се означават с една и съща буква (стр. 45, 46 и др.). Например, би било по-добре двете функции на стр. 74, означени съответно с $\psi_1(s_1)$ и $\psi_1(s_2)$ да са $\psi_X(s_1)$ и $\psi_Y(s_2)$.

В литературата няма нито едно заглавие на български език. Това предполага, че преводът на всички понятия е авторски. Не се наемам да определям дали той е най-подходящият. Не разбрах обаче, защо понятията over-dispersed, equi-dispersed и under-dispersed, и само те, са оставени на английски, както в изречението по-долу.

В автореферата има някои некоректно формулирани изрази, като например „...се доказва, че двумерното Поасоново разпределение се нарича over-dispersed...” (стр.2), които предполагам са резултат от процедурата “copy – paste”.

Авторефератът отразява пълно и точно съдържанието на дисертацията.

Считам, че заявените от докторантката приноси са действително такива. Имам забележка относно Принос 3, където пише, че е „изведена функцията ...”. В същност е изведено диференциално уравнение за тази функция, както и за вероятността за фалит.

Публикациите, свързани с дисертацията са 6 на брой. Три от тях са статии в реферирани списания: Pliska Studia Mathematica Bulgarica, Biomath и Serdica Mathematical Journal. И трите са в съавторство с научния ръководител на докторантката. Останалите три са в сборници с доклади от конференции. Две са самостоятелни и една е в съавторство с научния ръководител. Резултатите включени в дисертацията са докладвани на 2 семинара, 1 национална, 1 международна и 8 конференции с международно участие. Имената на самите доклади са дадени само в професионалната автобиография на докторантката.

Статията в Pliska Studia Mathematica Bulgarica има 1 цитиране, което също е отбелязано само в автобиографията.

Заключение. Въз основа изложеното дотук считам, че представените в рецензирания дисертационен труд резултати не само удовлетворят, но и надхвърлят, по обем и качество, изискванията на ЗРАСРБ и правилниците за прилагането му, условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности на СУ „Св. Климент Охридски” и на Факултета по Математика и Информатика. Направените забележки, които са най-рече стилови, до голяма степен се дължат точно на това, че са представени много резултати, чието извеждане използва разнообразен и неелементарен математически апарат. Убедено **препоръчвам на уважаемото научно жури да присъди** на автора му, **Красимира Янкова Костадинова** образователната и научна степен „доктор” в професионално направление 4.5 „Математика”, по научна специалност 01.01.13 „Математическо моделиране и приложение на математиката в икономиката”.

София, 29 .08. 2016 г. Рецензент:

/доц. д-р Велика Драгиева/