Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
Физически Факултет
Катедра Теоретична Физика

Интегрируеми системи свързани с афинните алгебри на Кац-Муди от типа A

АВТОРЕФЕРАТ

на
ДИСЕРТАЦИЯ
за присъждане на образователна и научна степен
"ДОКТОР"
на

Станислав Красимиров Върбев

Професионално направление
4.1. Физически науки

Научна специалност
01.03.01. Теоретична и математическа физика

Научен ръководител
доц. д-р Димитър Магдалинов Младенов

Втори научен ръководител
проф. дфн Владимир Стефанов Герджиков

София, 2016

Дисертационният труд е с обем $140 + 2$ страници и се състои от предговор, увод, пролог, седем глави, епилог и заключение, както и от списък на цитираната литература състояща се от 136 заглавия.

Докторантът е бил зачислен в редовна докторантура към катедра Теоретична физика на Физическия факултет към Софийския университет "Св. Климент Охридски”.

Дисертационният труд е обсъден на заседание на разширен катедрен съвет в катедра Теоретична физика на Физическия факултет към Софийския университет "Св. Климент Охридски”, проведено на 09.12.2015г. и е предложен за обсъждане от факултетния съвет за защита пред научно жури в състав:

акад. проф. дмн Петър Попиванов, Институт по математика и информатика - Българска академия на науките ,

проф. дфн Бойка Анева, Институт по ядрени изследвания и ядрена енергетика - Българска академия на науките ,

доц. дфн Пламен Божилов, Институт по ядрени изследвания и ядрена енергетика - Българска академия на науките ,

проф. дфн Стойчо Язаджиев, Физически факултет на Софийски университет "Св. Климент Охридски" ,

доц. д-р Димитър Младенов, Физически факултет на Софийски университет "Св. Климент Охридски" .

Резерви:

чл. кор. проф. дмн Емил Хорозов, Факултет по математика и информатика на Софийски университет "Св. Климент Охридски" ,

проф. дмн Анжела Славова, Институт по математика и информатика - Българска академия на науките .

Съдържание

1 Интегрируеми системи **8**
1.1 Системи с краен брой степени на свобода 8
1.2 Системи с безкраен брой степени на свобода 10

2 Обратна задача за разсейване, Хамилтонов формализъм и солитони **12**
2.1 Метод на обратната задача за разсейване 12
2.1.1 Формулировка на Лакс 12
2.1.2 Права задача за разсейване 13
2.1.3 Обратна задача за разсейване и еволюция на данните за разсейване 15
2.2 Безотражателни потенциали и солитони 15
2.2.1 Едносолитонно решение 15
2.2.2 Двусолитонно решение 16
2.2.3 N-солитонно решение 16
2.3 Хамилтонов формализъм 16
2.3.1 Хамилтонови системи 17
2.3.2 Би-Хамилтонови системи 17
2.4 Представяне с нулева кривина 18
2.4.1 Задача на Риман-Хилберт 18
2.4.2 Метод на обличането 18
2.4.3 От представяне на Лакс до представяне с нулева кривина . . . 20
2.5 Йерархия от уравнения 20

3 Групи на Ли **21**
3.1 Групи на Ли - история и дефиниции 21
3.2 Представяния 22
3.3 Симетрии и диференциални уравнения 22
3.3.1 Векторни полета и еднопараметрични групи от трансформации 22
3.3.2 Симетрии на диференциални уравнения 22
3.3.3 Уравнения на Пенлеве 23
3.3.4 Група на редукция на Михайлов 23

4 Алгебри на Ли и алгебри на Кац-Муди **24**
4.1 Алгебри на Ли 24
4.1.1 Представяне 26
4.1.2 Класификация на крайномерните полупрости алгебри на Ли . 27
4.2 Алгебри на Кац-Муди 28
4.2.1 Афинни алгебри 28

4.2.2 Централни разширения и алгебри на тока 29

5 Системи от уравнения свързани с афинната алгебра на Кац-Муди $A_r^{(1)}$ 31
5.1 Градуировка 31
5.2 Представяне на Лакс 32
5.3 Извод на уравненията 33
5.4 Допълнителни инволюции 37
5.5 По-ниски членове от йерархията 39
5.5.1 Вторият нетривиален член от йерархията 39
5.5.2 Първият нетривиален член от йерархията 40
5.6 Тривиален член от йерархията 40

6 МКДВ йерархия от системи уравнения свързани с алгебрата $A_r^{(1)}$ 41
6.1 Рекурсионни съотношения 41
6.2 Спектрални свойства на Лаксовите оператори 42
6.3 Решаване на уравненията с помощта на МОЗР 46
6.3.1 Еволюция на матрицата на разсейване 46
6.3.2 Метод на обличането 47

7 Системи от уравнения свързани с алгебрите $B_2^{(1)}$, $A_4^{(2)}$ и $A_5^{(2)}$ 49
7.1 Уравнения свързани с алгебрата $B_2^{(1)}$ 49
7.2 Рекурсионни оператори за $B_2^{(1)}$ 50
7.3 Уравнения свързани с алгебрата $A_4^{(2)}$ 51
7.4 Рекурсионни оператори за $A_4^{(2)}$ 52
7.5 Уравнения свързани с алгебрата $A_5^{(2)}$ 52
7.6 Спектрални свойства 54
7.6.1 Обща теория 54
7.6.2 $B_2^{(1)}$ 56
7.6.3 $A_4^{(2)}$ 56
7.6.4 $A_5^{(2)}$ 57

Актуалност на темата и дисертационният труд

Цел и задачи на работа

Целта на настоящата дисертация е намирането на нови системи от интегрируеми уравнения свързани с афинните алгебри на Кац-Муди $A_r^{(1)}$, $A_r^{(2)}$ и $B_r^{(1)}$.

Приложимост и полезност

Намерените нови интегрируеми системи от уравнения са обобщения на добре известните уравнения на КДВ и МКДВ, които вече са намерили широко приложение. Тези уравнения описват континуалната граница в задачата на Ферми-Паста-Улам. Също така тези уравнения се явяват дълговълново приближение за разпространение на едномерни вълни в хидродинамиката - вълни в плитки басейни, физика на плазмата - йонни акустични вълни в плазма и физиката на твърдото тяло - акустични вълни в кристална решетка.

Актуалност на проблема

Основната идея на метода на обратната задача за разсейване (МОЗР) е формулиран за пръв път от Гарднър, Грийн, Крускал и Миура [1] за уравнението на Кортевег-де Врийс (КДВ). Методът също така позволява и формулировка в алгебрична форма на Лакс [2]. Няколко години по-късно в работите на Захаров и Шабат [3] и Захаров и Фадеев [4] са демонстрирани следните факти:

- освен уравнението на КДВ, нелинейното уравнение на Шрьодингер може също да бъде решено с помощта на МОЗР;
- уравнените на КДВ е напълно интегрируема безкрайномерна Хамилтонова система.

Захаров и Шабат разработват метода на обличането [5], който в днешно време е един от най-ефективните методи за пресмятане на солитонни решения на уравнения от този вид. Днес този метод свързва редица области на модерната математика, математична и приложна физика, примерно [6, 7, 8, 9].

Друга важна идея, която е предложена от Абловиц, Кауп, Нюел и Сигур [10] е, че МОЗР може да се разглежда като обощена трансформация на Фурие. Този факт, формулиран в [10, 11] е бил строго доказан в [12] и обобщен за голям клас от оператори на Лакс [13, 14, 15].

Следващата голяма крачка на солитонната теория е била извършена от Михайлов [16] и Дринфелд и Соколов [17] в началото на осемдесетте години на миналия век. Статията на Михайлов не само открива важен клас от двумерни Лоренц инвариантни теории на полето: двумерните полеви теории на Тода, но също въвежда и групата на редукциите като важно средство за откриване на нови интегрируеми системи. Статията на Дринфелд и Соколов [17] задава връзката между представянето на Лакс и алгебрите на Кац- Муди.

Не е възможно да обясним в рамките на няколко параграфа дълбоките идеи и техните следствия залегнали в тези статии. Въпреки това, заедно с изясняването на редица проблеми, те задават и нови въпроси, някои от които търсят своя отговор и до ден днешен.

Отговор на тези въпроси може да се намери в тази дисертация за някои класове от солитонни уравнения с дълбоки редукции. Фокусът ще бъде върху уравнения от типа на МКДВ (модифицирано КДВ).

Първият от тези въпроси е как да се конструира експлицитна реализация (или най-простото матрично представяне) на алгебрите на Кац-Муди свързани с Лаксовата двойка. Ние получихме уравнения свързани както с неусуканите алгебри на Кац-Муди с височина 1, така и с усуканите алгебри с височина 2. Вторият от тези въпроси е как да се намерят решения на съответните уравнения.

Тук сме използвали техниката въведена от Дринфелд и Соколов [17], за да се определи:

- градуираните алгебри, които са нужни за представянето на Лакс и съответните автоморфизми от типа на Кокстер които задават съответните градуировъчни подпространства;

- рекурсионните оператори и Хамилтоновата формулировка на интегрируемите системи.

Както беше споменато по-горе, общата теория на нелинейните еволюционни уравнения допускащи представяне на Лакс е добре разработена [6, 7, 8, 10, 13, 14, 17].

В дисертацията е събрана предварителна информация съдържаща необходимия набор от знания, които са необходими за изводът на нелинейните еволюционни уравнения. В частност е зададен удобен базис за $A_r^{(1)}$ алгебрите на Кац-Муди, който е съвместим с $\mathbb{Z}_{r+1}$ градуировката. Въведени са рекурсионните съотношения, които следват от представянето на Лакс, като се предполага, че оператора M е полином по спектралния параметър λ. Следвайки идеите на Абловиц, Кауп, Нюел и Сигур [10] е показано, че тези рекурсионни съотношения могат да бъдат решени с помощта на рекурсионни оператори, примерно [9, 14, 18, 19], които се получават във факторизирана форма [15, 19, 20]. Изведен е клас от МКДВ уравнения свързани с афинните алгебри на Ли $A_r^{(1)}$. Те принадлежат към йерархия съдържаща двумерните полеви теории на Тода, открити от Михайлов [16]. Техните Лаксовите оператори L удовлетворяват $\mathbb{Z}_{r+1}$ редукции, които са важни за техните изключителни свойства. Тези МКДВ уравнения са безкрайномерни напълно интегрируеми Хамилтонови системи. Такива системи са от голям интерес за учени занимаващи се в различни клонове от математиката, като диференциална геометрия, симплектични многообразия и т.н.

Обърнато е внимание на първите няколко нетривиални примера на такива уравнения, свързани с алгебрите $A_4^{(1)}$ и $A_5^{(1)}$. Представени са и техните Хамилтониани.

Демонстрирани са няколко примера, които са получени от общите уравнения от типа на МКДВ с налагането на допълнителна $\mathbb{Z}_2$ редукция. Те задават различна Хамилтонова форма на уравненията от типа на МКДВ [21]. Разгледани са спектралните свойства на съответните Лаксови оператори и формулировката на съответната задача на Риман-Хилберт. Това може да се използва, за да се изведат солитонните решения за съответните уравнения по метода на обличането на Захаров-Шабат.

Изведени са още и системи от уравнения, които са свързани с афинните алгебри на Кац-Муди $B_2^{(1)}$, $A_4^{(2)}$ и $A_5^{(2)}$ съответно. Те допускат представяне на Лакс и допускат решение, което се намира с помощта на МОЗР.

Фундаменталните аналитични решения за този клас от Лаксови оператори са конструирани в [22] и ефектите на $\mathbb{Z}_h$ редукции, където h е числото на Кокстър са разгледани в [15, 18]. Естествено надграждане на тези резултати включва намирането на техните солитонни решения използвайки метода на обличането [3, 5, 16, 23, 24] и анализ на техните свойства.

Първите четири глави не съдържат нов материал [9, 25, 26]. Те са необходими за разбирането на материала в следващите три глави. Пета и шеста глави се базират на [27, 28], докато седма на [29, 30]. Докторантът също така участва и в работите, които обаче не влизат в тази дисертация [31, 32, 33].

Глава 1

Интегрируеми системи

Интегрируемите системи се описват с нелинейни диференциални уравнения, които могат поне принципно да бъдат решени аналитично. Това означава, че решението може да се намери само с краен брой алгебрични операции и интегрирания. Класът от интегрируеми системи е с мярка нула спрямо класът от всички динамични системи. Повечето от тях допускат хаотично поведение и не притежават решения в термини на добре известните ни функции. Интегрируемите системи въпреки това са много интересни от математична гледна точка. Те се появяват в почти всяка област на математиката и физиката.

В тази глава се въвежда интегрируемостта на системи с краен брой степени на свобода, които се описват от обикновени диференциални уравнения. Тези системи имат достатъчно много първи интеграли, което е и причината за тяхната интегрируемост. След това понятието интегрируемост се въвежда за случая на системи с безкраен брой степени на свобода, които се описват с частни диференциални уравнения. Общоприета дефиниция не съществува. Фазовото пространство за тези системи е безкрайномерно, което означава, че системата трябва да притежава безброй много първи интеграли, за да бъде интегрируема. Това е необходимо, но не и достатъчно условие.

1.1 Системи с краен брой степени на свобода

Разглеждаме системи с краен брой степени на свобода [25]. Нека са дадени две функции на n координати и n импулси $f, g : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, където M е $2n$-мерно. Скобката на Поасон за функциите f, g се дефинира като

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}. \tag{1.1}$$

Нека H е Хамилтонианът на системата, тогава еволюцията се задава от уравненията на Хамилтон.

$$\dot{p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad \dot{q_j} = \frac{\partial H}{\partial p_j}. \tag{1.2}$$

Функция се нарича константа на движение или първи интеграл, ако $\dot{f}(p_j, q_j, t) = 0$ и уравненията за движение са в сила.

Интегрируема система представлява съвкупността от $2n$-мерно фазово пространство M заедно с n глобално дефинирани независими функции (в смисъл, че градиентите ∇f_j са линейни независими вектори върху тангенциалното пространство във всяка точка върху M) $f_1, f_2, \dots, f_n : M \to \mathbb{R}$ такива, че

$$\{f_j, f_k\} = 0, \qquad j, k = 1, 2, \dots, n. \tag{1.3}$$

Нулирането на скобката на Поасон (1.3) означава, че първите интеграли са в инволюция. Всеки първи интеграл редуцира реда на системата с единица. С помощта на тази дефиниция се вижда, че за системи удовлетворяващи уравненията на Хамилтон (1.2) е достатъчно да знаем само n (вместо $2n-1$) първи интеграла, понеже всеки от тях редуцира реда на системата с две.

Основно място в тази глава заема теоремата, изведена за пръв път от Арнолд [34].

Теорема 1. *[34] Нека*

$$(M, f_1, f_2, \dots, f_n)$$

да бъде интегрируема система с Хамилтониан $H = f_n$ и нека

$$M_f := \{(p_j, q_j) \in M; \qquad f_k(p_j, q_j) = c_k\}, \qquad c_k \text{ са константи}, \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

да бъде n-мерна повърхнина от първи интеграли f_k.

- *Ако M_f е компактно и свързано тогава то е дифеоморфно на тор*

  $$T^n := S^1 \times S^1 \cdots \times S^1$$

  и (в околност на този тор) могат да бъдат въведени променливи действие-ъгъл

  $$I_1, I_2, \dots, I_n, \qquad \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \qquad 0 \le \phi_k \le 2\pi,$$

  такива, че ъглите ϕ_k са координати върху M_f и действията

  $$I_k = I_k(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

  са първи интеграли.

- *Уравненията на Хамилтон (1.2) са*

  $$\dot{I}_k = 0, \qquad \dot{\phi}_k = \omega_k(I_1, I_2, \dots, I_n), \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

  и интегрируемата система се разрешава чрез квадратури.

Поасонова структура върху гладко многообразие M е билинейно изображение

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

със следните свойства:

- антисиметричност

  $$\{f, g\} = -\{g, f\},$$

- тъждество на Якоби

  $$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

- Правило на Лайбниц спрямо единия аргумент. Поради антисиметричността, правилото на Лайбниц се удовлетворява и от другия аргумент. За определеност нека да изберем вторият

$$\{f, \{g, h\}\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}.$$

В матричен запис това придобива следния вид

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{d} \omega^{\alpha\beta}(x^1, x^2 \dots, x^d) \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta}. \tag{1.4}$$

Друга основна теорема е Теоремата на Дарбу.

Теорема 2. *[34] Ако ω е симплектична структура зададена върху фазовото пространство (симплектично многообразие), тогава съществува локална координатна система*

$$x^1 = q_1, \qquad x^n = q_n, \qquad x^{n+1} = p_1, \qquad x^{2n} = p_n,$$

в която симплектичната структура има канонична форма

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix},$$

където $\mathbb{1}$ е n-мерна единична матрица и скобката на Поасон се редуцира до стандартна форма (1.1).

1.2 Системи с безкраен брой степени на свобода

Системите с безкраен брой степени на свобода са естествено обобщение на системите с краен брой степени на свобода. Повечето дефиниции и формулировки са аналогични, но отчитайки следните промени [25]

$$x^\alpha(t) \to u(x, t),$$

където $\alpha = 1, 2, \dots, d$ и $x \in \mathbb{R}$. Трябва да се прави разлика между d-мерната координатна функция $x^\alpha(t)$ и непрекъснатата променлива x.

Също така се променят

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \to \int_{\mathbb{R}} dx,$$

$$f(x^1, x^2 \dots, x^d) \to F[u],$$

където $f(x^1, x^2 \dots, x^d)$ е произволна функция и $F[u]$ е функционал. Частната производна се превръща във функционална производна

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \to \frac{\delta}{\delta u}.$$

Тази процедура на замествания представлява преход от класическа механика към теория на полето, от обикновенни към частни диференциални уравнения. Тук и по-надолу с u_z се обозначава $\frac{\partial u}{\partial z}$. Функционала се дава с

$$F[u] = \int_{\mathbb{R}} f(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots)dx.$$

Функционалната производна е

$$\frac{\delta F}{\delta u(x)} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial u_{xx}} + \dots + (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial u_{x^k}} + \dots$$

и изпълнява

$$\frac{\delta u(x)}{\delta u(y)} = \delta(x-y).$$

Аналогично се въвежда и структура на Поасон $\omega(x, y, u)$ с каноничен вид

$$\omega(u, x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y).$$

С нейна помощ се обобщава (1.4)

$$\{F, G\} = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(u, x, y)\frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{\delta G}{\delta u(y)}dxdy. \tag{1.5}$$

От (1.5) с канонична Поасонова структура $\omega(u, x, y)$ следва

$$\{F, G\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta G}{\delta u(x)}dx.$$

Обобщените уравнения на Хамилтон са

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{u, H[u]\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta u(x)}{\delta u(y)}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta H}{\delta u(y)}dy = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H[u]}{\delta u(x)}.$$

Глава 2

Обратна задача за разсейване, Хамилтонов формализъм и солитони

В предишната глава изяснихме някои необходими понятия относно интегируемите системи като цяло. В тази глава се разглеждат специфичен подклас от динамичните системи, така наречените нелинейни еволюционни уравнения (НЛЕУ). НЛЕУ са нелинейни частни диференциални уравнения, в които производната по еволюционния параметър е само от първи ред

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, u_x, u_{xx}, \dots).$$

Решения на интегрируеми системи от частни диференциални уравнения се намират с помощта на методът на обратната задача за разсейване - което означава да се възстанови потенциалът от данните на разсейване. Това е типичен проблем от теорията на разсейването. Решенията които се намират с помощта на този метод се наричат солитони. Те представляват вълни които са локализирани във времето и пространството, които по време на разпространението си запазват повечето си свойства. С този метод е намерено решение за уравнението на КДВ. Разгледана е Хамилтоновата формулировка за системи с безкраен брой степени на свобода. Показано е как тези системи могат да бъдат записани като уравнение за нулева кривина. Накрая на тази глава ще покажем как се намира цялата йерархия от интегрируеми уравнения.

2.1 Метод на обратната задача за разсейване

В теорията на разсейването, правата задача за разсейване се състои в определянето на данните за разсейване (коефициентите на отражение, преминаване и енергетичните нива) знаейки разсейващия потенциал. Обратната задача за разсейване е да се определи разсейващия потенциал, ако данните на разсейване са известни.

2.1.1 Формулировка на Лакс

Обратната задача за разсейване е изоспектрална задача. Следващата теорема е доказана от Питър Лакс.

Теорема 3. *Нека са дадени два диференциални оператора L и M, такива че*

$$\dot{L} = [L, M],$$

тогава спектъра на L не зависи от t.

Примерно, уравнението на Кортевег-деВрийс

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 6v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

може да бъде записано във вида

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x,t), \qquad M = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3v\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial x}v.$$

2.1.2 Права задача за разсейване

Нека разгледаме едномерния оператор на Щурм-Лиувил, за който $-\infty < x < \infty$

$$L := -\frac{\partial}{\partial x^2} + U(x,t).$$

Потенциалът $U(x,t)$ е достатъчно гладък и се нулира при $x \to \pm\infty$. За момент нека мислим за t като параметър. Задачата за собствените стойности за този оператор е

$$L\Psi = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi = \lambda\Psi,$$

където Ψ е ограничена функция върху реалната права. В общия случай спектърът е:

- дискретен - собствените функции са квадратично интегрируеми

  и

- двойно изроден непрекъснат - собствените функции не са нормируеми.

Нека $\lambda = k^2$, тогава задачата се свежда до

$$L\Psi = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi = k^2\Psi. \tag{2.1}$$

Непрекъснатият спектър е за реално k. Дискретният спектър е за

$$k = i\kappa_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad \kappa_i > 0.$$

За $k \neq 0$, множеството от решения на (2.1) образува двумерно линейно пространство. Базисът може да се избере да бъде ψ_1 и ψ_2, със следната асимптотика при $x \to \infty$

$$\psi_1(x,k) = e^{-ikx} + o(1),$$
$$\psi_2(x,k) = e^{ikx} + o(1),$$

където $o(1)$ означава по-малко от порядъка на водещия член. Съществува и друг базис ϕ_1 и ϕ_2 който има следната асимптотична форма при $x \to -\infty$

$$\phi_1(x,k) = e^{-ikx} + o(1),$$
$$\phi_2(x,k) = e^{ikx} + o(1).$$

Потениалът е реален по построение

$$\begin{aligned} \phi_1(x,k) &= \phi_2^*(x,k), \\ \psi_1(x,k) &= \psi_2^*(x,k) \end{aligned} \tag{2.2}$$

или

$$\begin{aligned} \phi_1(x,k) &= \phi_2(x,-k), \\ \psi_1(x,k) &= \psi_2(x,-k). \end{aligned}$$

Другият базис представлява линейна комбинация на елементите на първия базис

$$\phi_i(x,k) = \sum_{l=1}^{2} T_{il}(k)\psi_l(x,k), \qquad i = 1,2.$$

Матрицата $T(k)$ е матрица на преход (матрица на разсейване). Използвайки (2.2) за матрицата на разсейване се получава

$$T = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \\ b^*(k) & a^*(k) \end{pmatrix}$$

и (ако изберем $\phi(x,k) = \phi_1(x,k)$ и $\psi(x,k) = \psi_1(x,k)$)

$$\phi(x,k) = a(k)\psi(x,k) + b(k)\psi^*(x,k)$$

и

$$\phi^*(x,k) = a^*(k)\psi^*(x,k) + b^*(k)\psi(x,k).$$

Съществува следната връзка за коефициентите a и b

$$|a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Следните свойства на данните на разсейване са добре известни [6]:

- $a(k)$ е холоморфна в горната полуравнина ($\mathrm{Im}(k) > 0$).
- Нулите на $a(k)$ в горната полуравнина са чисто имагинерни и техният брой е крайно число. Нека за определеност

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_3 > \cdots > \kappa_N > 0.$$

- За $k \to \pm\infty$ и $\mathrm{Im}(k) \geq 0$ следва $a(k) \to 1$.
- Нека $b_j = b(i\kappa_j)$ тогава

$$b_j = (-1)^j |b_j|$$

  и $b_j \in \mathbb{R}$.
- Асимптотичната форма за ϕ е

$$\phi(x, i\kappa_j) = \begin{cases} e^{\kappa_j x}, & \text{за } x \to -\infty, \\ b(i\kappa_j)e^{-\kappa_j x}, & \text{за } x \to \infty. \end{cases}$$

2.1.3 Обратна задача за разсейване и еволюция на данните за разсейване

Данните за разсейване, от които започваме, за да решим обратната задача за разсейване са:

- коефициентът на отражение $r(k)$

  и

- енергетичните нива $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N$.

Първо, дефинираме

$$F(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j e^{-\kappa_j x}}{ia'(i\kappa_j)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ikx} dk.$$

Второ, решаваме уравнението на Гелфанд-Левитан-Марченко [35, 36] за $K(x, y)$

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_{x}^{\infty} K(x, z) F(z + y) dz = 0.$$

Накрая потенциала се дава с

$$U(x) = -2 \frac{\partial K(x, x)}{\partial x}.$$

За уравнението на КДВ се получава за данните на разсейване следната еволюция

$$\begin{aligned} a(k, t) &= a(k, 0), \\ b(k, t) &= b(k, 0) e^{8ik^3 t}, \\ r(k, t) &= r(k, 0) e^{8ik^3 t}, \\ \kappa_j(t) &= \kappa_j(0), \\ b_j(t) &= b_j(0) e^{8\kappa_j^3 t}, \\ a_j(t) &= 0, \\ \beta_j(t) &= \frac{b_j(t)}{ia'_j(i\kappa_j)} = \beta_j(0) e^{8\kappa_j^3 t}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2 Безотражателни потенциали и солитони

Формули (2.3) водят до това, че ако коефициента на отражение е 0 в момента $t = 0$, той е 0 и за всеки следващ момент от време t. За уравнението на КДВ се получават следните решения.

2.2.1 Едносолитонно решение

Едносолитонното решение е

$$u = -2 \frac{\partial K(x, x)}{\partial x} = -\frac{8\kappa^2}{\frac{2\kappa}{\beta}\left(e^{\kappa x} + \frac{\beta}{2\kappa} e^{-\kappa x}\right)^2} = -\frac{2\kappa^2}{\cosh\left[\kappa\left(x - 4\kappa^2 t - \phi_0\right)\right]},$$

където

$$\phi_0 = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\beta_0}{2\kappa}.$$

2.2.2 Двусолитонно решение

Двусолитонното решение е

$$u(x,t) = \frac{2\beta_1 e^{-2\kappa_1 x} + 2\beta_2 e^{-2\kappa_2 x} + \frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2\beta_1\beta_2 e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)x}}{\kappa_1\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)}}{1 + \frac{\beta_1 e^{-2\kappa_1 x}}{2\kappa_1 x} + \frac{\beta_2 e^{-2\kappa_2 x}}{2\kappa_2 x} + \frac{\beta_1\beta_2(\kappa_1-\kappa_2)^2 e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)x}}{4\kappa_1\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)^2}}.$$

2.2.3 N-солитонно решение

Дефинираме матрицата

$$A_{jk}(x) = \delta_{jk} + \frac{\beta_j e^{-(\kappa_j+\kappa_k)x}}{\kappa_j + \kappa_k}.$$

Тогава решението се дава като

$$u(x,t) = -2\tfrac{\partial}{\partial x}\ln(\det A).$$

2.3 Хамилтонов формализъм

За определеност нека да вземем k да бъде в горната полуравнина $\mathrm{Im}\,(k) > 0$

$$a(k) = \lim_{x\to\infty}\phi(x,t,k)e^{ikx} = \lim_{x\to\infty} e^{\int_{-\infty}^{x} S(y,t,k)}dy = e^{\int_{-\infty}^{\infty} S(y,t,k)}dy.$$

Понеже функцията е аналитична върху реалната права, ние може да я продължим аналитично и в комплексната равнина за $\mathrm{Im}\,(k) < 0$. Уравнението за собствените стойности за оператора на Щурм-Лиувил (L оператора за уравнението на КДВ) приема вида

$$L\phi = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + U(x,t)\phi = k^2\phi. \tag{2.4}$$

За производните на $\phi(x,t,k)$ се получава

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = (S - ik)\phi,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial S}{\partial x}\phi + (S-ik)^2\phi$$

и заместайки в уравнението за собствените стойности (2.4) се получава уравнение на Рикати

$$\frac{\partial S}{\partial x} - 2ikS + S^2 = U. \tag{2.5}$$

Нека да търсим S във вид на асимптотичен ред

$$S = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{S_l(x,t)}{(2ik)^l}.$$

Заместайки в (2.5) получаваме следните рекурсионни съотношения

$$S_1(x,t) = -U(x,t), \qquad S_{l+1} = \frac{\partial S_l}{\partial x} + \sum_{k=1}^{l-1} S_k S_{l-k}.$$

Това дава (отсега нататък $U(x,t) = u(x,t)$)

$$S_2(x,t) = -\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$S_3(x,t) = u^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$S_4(x,t) = 2\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$
$$S_5(x,t) = -2u^3 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

и т. н. Тогава

$$I_{l-1} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} S_{2l+1}(x,t)dx$$

са първи интеграли и енергията за уравнението на КДВ е ($H = -I_1$)

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u^3\right]dx.$$

2.3.1 Хамилтонови системи

Уравненията на Хамилтон са

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H_1[u]}{\delta u(x)}\right).$$

2.3.2 Би-Хамилтонови системи

Нека са дадени уравненията, които се получават от две Хамилтонови структури $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ по следния начин

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D}\frac{\delta H_1[u]}{\delta u(x)} = \mathcal{E}\frac{\delta H_0[u]}{\delta u(x)}. \tag{2.6}$$

В сила е следната Теорема.

Теорема 4. *Нека (2.6) да е би-Хамилтонова система, такава че Поасоновата структура $\mathcal{D}$ е неизродена. Това означава, че не съществува диференциален оператор $\hat{\mathcal{D}}$, такъв че $\hat{\mathcal{D}} \circ \mathcal{D} \equiv 0$. Нека*

$$\Lambda = \mathcal{E} \circ \mathcal{D}^{-1}$$

да бъде съответния рекурсионен оператор. Предполагаме, че

$$\Lambda^n\left[\mathcal{D}\frac{\delta H_0}{\delta u(x)}\right]$$

лежи в образа на $\mathcal{D}$, за всяко $n = 1, 2, \dots,$ тогава съществуват запазващи се функционали

$$H_1[u], H_2[u], \dots,$$

които са в инволюция

$$\{H_m, H_n\}.$$

Запазващи се функционали се конструират рекурсивно

$$\mathcal{D}\frac{\delta H_n}{\delta u(x)} = \Lambda^n\left[\mathcal{D}\frac{\delta H_0}{\delta u(x)}\right], \qquad n = 1, 2 \text{ и т. н.}$$

2.4 Представяне с нулева кривина

Разглеждаме система от линейни частни диференциални уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = U(\lambda)v, \qquad \frac{\partial v}{\partial \tau} = V(\lambda)v,$$

където v е вектор стълб, чийто компоненти зависят от (ρ, τ, λ). Представянето с нулева кривина е следният запис за уравнението

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial V}{\partial \rho} + [U, V] = 0. \tag{2.7}$$

Съществува свобода в избора на матрици $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$, известна като калибровъчна инвариантност. Нека $g = g(\tau, \rho)$ да бъде произволна обратима матрица. Трансформациите

$$\tilde{U} = gUg^{-1} + \frac{\partial g}{\partial \rho}g^{-1}, \qquad \tilde{V} = gVg^{-1} + \frac{\partial g}{\partial \tau}g^{-1}$$

изобразяват решенията на уравнението за нулева кривина в нови решения - ако матриците (U, V) удовлетворяват (2.7), тогава и матриците $(\tilde{U}, \tilde{V})$ също го удовлетворяват.

2.4.1 Задача на Риман-Хилберт

Задачата се състои в намирането на две матрично-значни функции $G_+(\lambda)$ и $G_-(\lambda)$, които са холоморфни, съответно в и извън контура Γ такива, че върху него е изпълнено

$$G(\lambda) = G_+(\lambda)G_-(\lambda),$$

където $G = G(\lambda)$ е известна матрично-значна функция върху този контур.

2.4.2 Метод на обличането

Нека да предположим, че в представяне на нулева кривина (2.7), матриците (U, V) имат рационална зависимост от спектралния параметър λ. Комплексните аналитични данни за всяка от тези матрици се състоят от полюси със съответна кратност. Дефинираме делителите да бъдат множествата

$$S_U = \{\alpha_i, n_i, n_\infty\}, \qquad i = 1, \dots, n$$

и

$$S_V = \{\beta_j, m_j, m_\infty\}, \qquad j = 1, \dots, m,$$

така че

$$U(\rho, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{n_i} \frac{U_{ir}(\rho, \tau)}{(\lambda - \alpha_i)^r} + \sum_{k=0}^{n_\infty} \lambda^k U_k(\rho, \tau)$$

и

$$V(\rho, \tau, \lambda) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m_i} \frac{V_{jr}(\rho, \tau)}{(\lambda - \beta_j)^r} + \sum_{k=0}^{m_\infty} \lambda^k V_k(\rho, \tau).$$

Условието за нулева кривина (2.7) представлява система от нелинейни частни диференциални уравнения за коефициентите

$$U_{ir}(\rho,\tau), \qquad U_k(\rho,\tau), \qquad V_{jr}(\rho,\tau), \qquad U_k(\rho,\tau)$$

на $U(\rho,\tau,\lambda)$ и $V(\rho,\tau,\lambda)$.

Процедурата се състои от няколко стъпки.

- Да намерим матрично решение на линейната система от уравнения
$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho} = U_0(\lambda)\Psi_0$$
и
$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial \tau} = V_0(\lambda)\Psi_0.$$
Това е преопределена система, която е съвместима ако U_0 и V_0 удовлетворяват (2.7).

- Нека $G(\rho,\tau,\lambda)$ да бъде фамилия от гладки функции параметризирана с (ρ,τ) върху Γ
$$G(\rho,\tau,\lambda) = \Psi_0(\rho,\tau,\lambda)G(\lambda)\Psi_0^{-1}(\rho,\tau,\lambda).$$
Тази фамилия допуска факторизация
$$G(\rho,\tau,\lambda) = G_+(\rho,\tau,\lambda)G_-(\rho,\tau,\lambda),$$
където $G_+(\rho,\tau,\lambda)$ и $G_-(\rho,\tau,\lambda)$ са решения на задачата на Риман-Хилберт и са холоморфни в и извън контура Γ, съответно.

- Нека да дефинираме
$$U(\rho,\tau,\lambda) := \left(\frac{\partial G_-}{\partial \rho} + G_-U_0\right)(G_-)^{-1} = -(G_+)^{-1}\left(\frac{\partial G_+}{\partial \rho} - U_0G_+\right),$$
което е холоморфно в $\hat{\mathbb{C}}/S_U$. Намираме
$$\frac{\partial G_-}{\partial \rho} = UG_- - G_-U_0$$
или
$$\frac{\partial G_+}{\partial \rho} = U_0G_+ - G_+U.$$
Аналогично нека да дефинираме
$$V(\rho,\tau,\lambda) := \left(\frac{\partial G_-}{\partial \tau} + G_-V_0\right)(G_-)^{-1} = -(G_+)^{-1}\left(\frac{\partial G_+}{\partial \tau} - V_0G_+\right),$$
което е холоморфно в $\hat{\mathbb{C}}/S_V$. Намираме
$$\frac{\partial G_-}{\partial \tau} = VG_- - G_-V_0$$
или
$$\frac{\partial G_+}{\partial \tau} = V_0G_+ - G_+V.$$

- Получаваме преопределената система
$$\frac{\partial \Psi_\pm}{\partial \rho} = U(\lambda)\Psi_\pm$$
и
$$\frac{\partial \Psi_\pm}{\partial \tau} = V(\lambda)\Psi_\pm.$$

2.4.3 От представяне на Лакс до представяне с нулева кривина

Уравнението на Лакс

$$\dot{L} = [L, M]$$

е условие за съвместимост на преопределена система. Започвайки от това уравнение може да достигнем до следното матрично уравнение

$$\frac{\partial U_L}{\partial t} - \frac{\partial V_M}{\partial x} + [U_L, V_M] = 0,$$

където U_L и V_L са подходящо конструирани матрици.

2.5 Йерархия от уравнения

Би-Хамилтоновите системи притежават безкраен брой първи интеграли I_k. От тях може да се получи цялата йерархия

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = (-1)^k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta I_k[u]}{\delta u(x)}\right).$$

За всяко k се получава различно уравнение.

Глава 3

Групи на Ли

Тази глава е посветена на групите на Ли.

Теорема 5. *Съществуват алгебрични уравнения от степен по висока от четвърта, които са неразрешими в радикали.*

3.1 Групи на Ли - история и дефиниции

Група на Ли с размерност m е група, чийто елементи зависят гладко от m параметъра, такива че изображенията

$$(g_1, g_2) \to g_1 g_2, \qquad g \to g^{-1}$$

са гладки функции на тези параметри. Тя е многообразие.

Изоморфизъм и хомоморфизъм

Нека G' и G'' са две групи. Изображение ϕ от G' върху G'' е правило, което асоциира на всеки елемент a' от G' някой елемент a'' от G''

$$a'' = \phi(a').$$

Елемента a'' се нарича образ на a'. Ако всяко $a' \in G'$ има образ $a'' \in G''$, ние казваме, че ϕ изобразява G' в G''. Ако всяко $a'' \in G''$ е образ на някое $a' \in G'$, ние казваме, че ϕ изобразява G' върху G''. В общия случай, изображение от G' в или върху G'' не осигурява наличието на изображение от G'' до G'. Въпреки това, ако такова изображение е едно към едно, тогава обратно съществува и е единствено

$$a' = \phi^{-1}(a'').$$

Нека a и b са кои да е два елемента на G. Ако ϕ е изображение като дефинираното по-горе и ако

$$\phi(b)\phi(a) = \phi(ba),$$

тогава ϕ се казва, че е хомоморфно изображение. С други думи, хомоморфното изображение запазва груповото умножение.

Ако ϕ е едно към едно и

$$\phi(b)\phi(a) = \phi(ba),$$

тогава се казва, че то е изоморно изображение.

3.2 Представяния

Ако съществува хомоморфно изображение на групата G върху групата от несингулярни $n \times n$ матрици $M(a)$, тогава тази група от матрици образува n-мерно представяне M на G. Тук a са елементи на групата.

Представяне $M'(a)$ се нарича приводимо, ако то е еквивалентно на представяне, което може да бъде записано в следната форма

$$M(a) = \begin{pmatrix} M(a)_{11} & M(a)_{12} & M(a)_{13} & \dots & M(a)_{1n} \\ 0 & M(a)_{22} & M(a)_{23} & \dots & M(a)_{2n} \\ 0 & 0 & M(a)_{13} & \dots & M(a)_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M(a)_{nn} \end{pmatrix}.$$

И

$$M' = SMS^{-1},$$

където S е подходяща матрица.

Представяне, което не е приводимо се казва, че е неприводимо.

3.3 Симетрии и диференциални уравнения

С помощта на теория на групите може да се конструират и да се решават диференциални уравнения.

3.3.1 Векторни полета и еднопараметрични групи от трансформации

Интегрална крива γ на векторно поле V се дефинира като

$$\dot{\gamma}(\epsilon) = V_{\gamma(\epsilon)}$$

или

$$\frac{dx^a}{d\epsilon} = V^a(x).$$

3.3.2 Симетрии на диференциални уравнения

Нека $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ да бъде пространството от независими и зависими променливи в дадено частно диференциално уравнение. Еднопараметрична група от трансформации на това пространство

$$\tilde{u} = \tilde{u}(x^a, u, \epsilon), \qquad \tilde{x}^b = \tilde{x}^b(x^a, u, \epsilon)$$

се нарича група на симетрия на Ли на частно диференциално уравнение

$$F\left[u, \frac{\partial u}{\partial x^a}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^a \partial x^b}, \dots\right] = 0,$$

ако нейното действие трансформира решенията в други решения

$$F\left[\tilde{u}, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^a}, \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^a\partial\tilde{x}^b}, \dots\right] = 0.$$

3.3.3 Уравнения на Пенлеве

Обикновено диференциално уравнение

$$\frac{d^N w}{dz^N} = F\left(\frac{d^{N-1}w}{dz^{N-1}}, \dots, \frac{dw}{dz}, w, z\right),$$

където F е рационална в w и нейните производни имат свойство на Пенлеве (неговите подвижни сингулярности са в най-лошия случаи полюси).

Тест на Пенлеве

При зададено частно диференциално уравнение, общия тест на Пенлеве се свежда до следния алгоритъм:

- намери всички негови симетрии на Ли;
- конструирай обикновени диференциални уравнения характеризиращи решенията, които за действието на групата са инварианти;
- провери за свойство на Пенлеве.

3.3.4 Група на редукция на Михайлов

Нека да вземем операторите на Лакс да бъдат от вида

$$L \equiv i\frac{\partial}{\partial x} + U(x,t,\lambda), \tag{3.1}$$

$$M \equiv i\frac{\partial}{\partial t} + V(x,t,\lambda), \tag{3.2}$$

където $U(x,t,\lambda)$ и $V(x,t,\lambda)$ са някакви полиноми от спектралния параметър λ. Ние казваме, че налагаме допълнителни редукции (група на редукция) върху Лаксовите оператори (3.1) и (3.2), ако наложим някакво ограничение върху матриците U и V, които са съвместими с

$$[L, M] = 0.$$

Глава 4

Алгебри на Ли и алгебри на Кац-Муди

Тази глава е посветена на алгебрите на Ли и алгебрите на Кац-Муди.

4.1 Алгебри на Ли

Алгебра (асоциативна алгебра) наричаме векторно пространство A над полето $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ заедно с билинейното изображение

$$\circ : A \times A \to A$$

наречено умножение, което е асоциативно

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \qquad \forall a, b, c \in A.$$

Ако, също така, съществува елемент $e \in A$, такъв че

$$e \circ a = a \circ e = a, \qquad \forall a \in A,$$

e се нарича единичен елемент и A се нарича асоциативна алгебра с единица.

Подалгебра на асоциативна алгебра с единица A се нарича линейното подпространство $B \subset A$, което е затворено спрямо умножението

$$b \circ b' \in B, \qquad \forall b, b' \in B$$

и съдържа единичен елемент ($e \in B$).

Алгебра се нарича абелева или комутативна, ако

$$a \circ b = b \circ a, \qquad \forall a, b \in A.$$

Алгебра на Ли се нарича всяко векторно пространство $\mathfrak{g}$ снабдено с антисиметрична билинейна операция наречена скобка на Ли

$$[,]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

която удовлетворява тъждеството на Якоби

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0, \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Подмножеството $\mathfrak{h}$ от елементи на алгебра на Ли $\mathfrak{g}$ изгражда подалгебра, ако $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ за всяко $X, Y \in \mathfrak{h}$. В други обозначения

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}.$$

Алгебра на Ли (или подалгебра на Ли) $\mathfrak{h}$ се нарича абелева, ако $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

Нека $\mathfrak{g}$ е алгебра на Ли и нека I да е линейно подпространство в линейното пространство $\mathfrak{g}$. Тогава I се нарича идеал на $\mathfrak{g}$, ако

$$[x, y] \in \mathfrak{g}, \qquad \forall x \in I, \qquad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

Идеала понякога се нарича инвариантна подалгебра.

Лема 1. *Нека I_1 и I_2 са две инвариантни подалгебри. Тогава $[I_1, I_2]$ е инвариантна подалгебра съдържаща се в I_1 и I_2.*

Може да се построи следната поредица от инвариантни подалгебри за дадена алгебра

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g}^{(0)} \subseteq \mathfrak{g}^{(1)} \subseteq \mathfrak{g}^{(2)} \subseteq \dots \mathfrak{g}^{(n-1)} \subseteq \mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \dots, \\ &[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^i] \equiv \mathfrak{g}^{(i+1)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ако (4.1) завършва с 0, алгебрата се казва, че е разрешима.

Ако $\mathfrak{g}^n = 0$ за n достатъчно голямо цяло положитително число, алгебрата се казва, че е нилпотентна.

Теорема 6.

$$\mathfrak{g}^{(n)} = \mathfrak{g}^n.$$

Център на алгебра на Ли, обозначава се с $Z(\mathfrak{g})$, се нарича идеала

$$Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} | [x, y] = 0, \; \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Проста алгебра на Ли се нарича всяка неабелева алгебра на Ли, чиито идеали са тривиалния и самата алгебра.

Алгебра на Ли се нарича полупроста, ако може да се представи като пряка сума от прости алгебри на Ли.

Алгебра на Ли $\mathfrak{g} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{K}$ е пряка сума от две алгебри на Ли (или подалгебри на Ли) $\mathcal{M}$ и $\mathcal{K}$, ако всеки елемент в $\mathfrak{g}$ е линейна комбинация от елементи в $\mathcal{M}$ и $\mathfrak{g}$, и ако всички елементи на $\mathcal{M}$ комутират с всички елементи на $\mathfrak{g}$, т.е. $[\mathcal{M}, \mathcal{K}] = 0$. Понякога термина пряка сума предполага, че $\mathcal{M} \cap \mathcal{K} = 0$ без допълнителни предположения относно комутационните съотношения на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{K}$.

Алгебра на Ли $\mathfrak{g} = \mathcal{M} \wedge \mathcal{K}$ е полупряка сума на две подалгебри $\mathcal{M}$ и $\mathcal{K}$, ако всеки елемент в $\mathfrak{g}$ е линейна комбинация от елементи в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{K}$, и ако една от подалгебрите $\mathcal{K}$ е инвариантна подалгебра

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] = \mathcal{K}, \qquad [\mathcal{M}, \mathcal{M}] = \mathcal{M}, \qquad [\mathcal{M}, \mathcal{K}] = \mathcal{K}.$$

Нека $\mathcal{K}$ да бъде инвариантна подалгебра на $\mathfrak{g}$. Алгебрата M се нарича фактор-алгебра $\mathfrak{g}/\mathcal{K}$. Всяка алгебра изоморфна на тази алгебра също се нарича фактор-алгебра $\mathfrak{g}/\mathcal{K}$.

Най-голямата възможна инвариантна разрешима подалгебра на $\mathfrak{g}$ се нарича радикал на $\mathfrak{g}$.

Теорема 7. *Нека $\mathcal{G}$ да бъде радикал на $\mathfrak{g}$. Тогава $\mathfrak{g}/\mathcal{G}$ е полупроста подалгебра. Всяка алгебра може да бъде представена като полупряка сума*

$$\mathfrak{g} = \mathcal{G} \wedge \mathfrak{g}/\mathcal{G}.$$

4.1.1 Представяне

Матриците Γ изграждат представяне на алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$, ако:

1. съществува матрица $\Gamma(X)$ за всяко $X \in \mathfrak{g}$;

2. $$[\Gamma(X), \Gamma(Y)] = \Gamma([X, Y]),$$

   за всяко $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Присъединено представяне.

Нека σ_a, където $a = 1, 2, \ldots, n$ да бъде базис и

$$X = X^a \sigma_a$$

да бъде елемент на $\mathfrak{g}$. Присъединено представяне $\mathbf{R}(X)$ се дефинира като

$$[X, \sigma_a] = \sigma_b \mathbf{R}(X)^b_a.$$

Присъединен оператор $\hat{R}(X) \equiv ad_X$ се дефинира като

$$\hat{R}(X)Y \equiv ad_X = [X, Y].$$

Жорданова канонична форма.

Всяка квадратна матрица B може да се приведе в следната форма, с помощта на унитарна трансформация

$$B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_k),$$

където

$$B_j = \begin{pmatrix} \beta_j & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_j & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_j & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_j \end{pmatrix}$$

и β_j е собствена стойност на B.

4.1.2 Класификация на крайномерните полупрости алгебри на Ли

Полупрости елементи на $\mathfrak{g}$ са всички тези $X \in \mathfrak{g}$ със свойството, че оператора ad_X е диагонализируем.

Нека да изберем максимално множество от линейно независими елементи H^i сред полупростите елементи на $X \in \mathfrak{g}$, такова че

$$[H^i, H^j] = 0, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots, r. \tag{4.2}$$

Линейната обвивка

$$\mathfrak{g}_0 \equiv \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{H^i, i = 1, 2, \ldots, r\}$$

се нарича Картанова подалгебра на $\mathfrak{g}$.

Като следствие от (4.2) се получава, че $\mathfrak{g}$ може да бъде образувана от всяко $Y \in \mathfrak{g}$, такова че

$$[H, Y] \equiv \mathrm{ad}_H(Y) = \alpha_Y(H)Y, \tag{4.3}$$

където $\alpha_Y \in \mathbb{C}$ и $H \in \mathfrak{g}_0$.

Алгебрата може да се декомпозира по следния начин

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{4.4}$$

където

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} | [H, X] = \alpha(H)X\}.$$

Декомпозицията (4.4) се нарича декомпозиция спрямо корневото пространство.

Корен се нарича r-мерния вектор (α^i).

Множеството от всички вектори на $\mathfrak{g}$ се нарича корнева система на $\mathfrak{g}$ и се означава с

$$\phi \equiv \phi(\mathfrak{g}).$$

1. Корневата система е неизродена,
2. $$\mathfrak{g} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{E^\alpha\},$$
3. $$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\phi\},$$
4. единствените корени кратни на $\alpha \in \phi$ са $\pm\alpha$.

Базисът

$$B_{CW} = \{H^i | i = 1, 2, \ldots, r\} \cup \{E^\alpha | \alpha \in \phi\},$$

такъв че (4.2) и (4.3) са изпълнени, се нарича базис на Картан-Вайл на $\mathfrak{g}$.

Форма на Килинг (Форма на Картан-Килинг) [37, 38] се дефинира като

$$\kappa(X, Y) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)$$

или за даден базис $\{T^a,\ a = 1, 2, \ldots, d\}$ на $\mathfrak{g}$

$$\kappa^{ab} = \frac{1}{N_{ab}}\kappa(T^a, T^b) = \frac{1}{N_{ab}}\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_{T^a}, \mathrm{ad}_{T^b}) = \frac{1}{N_{ab}}\sum_{c,e=1}^{d} C^{bc}_e C^{ae}_c,$$

където N_{ab} са нормировъчни константи и C_e^{bc}, C_c^{ae} са структурните константи на базиса на Картан-Вайл [39].

За всеки корен α, дефинираме негов дуален корен като

$$\alpha^V := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

Декомпозиция на Гаус

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_-.$$

Прост корен ϕ_+ на $\mathfrak{g}$ наричаме положителен корен, който не може да се получи като линейна комбинация от други положителни корени с положителни коефициенти.

4.2 Алгебри на Кац-Муди

Матрица A се нарича обобщена матрица на Картан (ОМК) ако удовлетворява

$$A_{ii} = 2, \qquad \forall i,$$

$$A_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}, \qquad \forall i \neq j,$$
$$A_{ij} = 0 \Longrightarrow A_{ji} = 0, \qquad \forall i, j,$$

A_{ij} е недекомпозируемо.

Алгебра на Кац-Муди е комплексна алгебра на Ли генерирана от $3(l+1)$ генератора $h_0, \ldots, h_l$, $e_0, \ldots, e_l$, $f_0, \ldots, f_l$ удовлетворяващи [40]

$$\begin{aligned}
[h_i, h_j] &= 0, \\
[e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, \\
[h_i, e_j] &= A_{ij} e_j, \\
[h_i, f_j] &= -A_{ij} f_j, \\
[e_k, d_{ij}^-] &= 0, \\
[f_k, d_{ij}^+] &= 0,
\end{aligned}$$

където A_{ij} е ОМК и

$$\begin{aligned}
d_{ij}^+ &= (\mathrm{ad}_{\,e_i})^{1-A_{ij}} e_j, \\
d_{ij}^- &= (\mathrm{ad}_{\,f_i})^{1-A_{ij}} f_j.
\end{aligned}$$

Първите четири съотношения се наричат съотношения на Шевалие-Сер, докато последните две са съотношения на Сер.

4.2.1 Афинни алгебри

Алгебра на Кац-Муди, чиято ОМК има следните свойства

$$\det A_i > 0, \qquad \forall i = 0, 1, \ldots, r,$$

където A_i са главните собствени минори на A и $\det A = 0$, се нарича афинна алгебра на Ли.

Коранг на матрицата A се нарича размерността на нейното ядро.

Твърдение 1. *Афинните алгебри на Ли притежават ненулев център.*

4.2.2 Централни разширения и алгебри на тока

Може да бъде конструирана централно разширена алгебра на Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ добавяйки l генератора K^j, $j = 1, 2, \ldots, l$ към базиса $\{T^a\}$ на $\mathfrak{g}$ изисквайки

$$[K^i, K^j] = 0,$$

$$[T^a, K^j] = 0,$$

$\forall i, j = 1, 2, \ldots, l$, $\forall a = 1, 2, \ldots, d$ докато запазваме първоначалните стойности C_c^{ab} на тези структурни константи, включващи само генераторите T^a.

Разглеждаме векторно пространство $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Алгебрата $\mathfrak{g}$ може да се разшири с $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Тя се нарича алгебра на тока над $\mathfrak{g}$ и се обозначава с $\mathfrak{g}_{loop}$

$$\mathfrak{g}_{loop} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}].$$

Базис в това векторно пространство се дава с

$$B = \{\bar{T}_n^a | a = 1, 2, \ldots, d; \;\; n \in \mathbb{Z}\},$$

където

$$\bar{T}_n^a = T^a \otimes z^n = T^a \otimes e^{i2\pi tn}.$$

Това пространство онаследява естествена операция скобка от $\mathfrak{g}$

$$[\bar{T}_m^a, \bar{T}_n^b] = \sum_{c=1}^{d} C_c^{ab} \bar{T}_{m+n}^c, \qquad \forall T^a \in \mathfrak{g}, \qquad \forall z^m, z^n \in \mathbb{C}[z, z^{-1}],$$

където C_c^{ab} са структурните константи на $\mathfrak{g}$, които в базиса B, приемат стойност - $C_c^{ab} \delta_{m+n,l}$. С тази скобка, $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ се превръща в алгебра на Ли.

Твърдение 2. *Съществува нетривиално разширение $\hat{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{g}_{loop}$*

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_{loop} \oplus \mathbb{C}K = (\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]) \oplus \mathbb{C}K,$$

чиято скобка се дава с

$$[a + \lambda K, b + \mu K] = [a, b] + \psi(a, b)K, \qquad \forall a, b \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]\mathfrak{g}, \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Нека A да бъде положително дефинитна недекомпозируема матрица на Картан и нека $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ да бъде съответната проста безкрайномерна алгебра на Ли с генератори: $H_i, E_\pm^i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, r$. Съществува единствен ненулев елемент E_+^0 (E_-^0) в $\mathfrak{g}$, такъв че $[E_+^0, E_-^i]$ ($[E_-^0, E_+^i]$) се нулират за $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогава $[E_+^0, E_-^0] = H_0$, където H_0 е линейна комбинация от H_i и нормирането на E_+^0 и E_-^0 става с

$$[H_0, E_+^0] = 2E_+^0$$

и

$$[H_0, E_-^0] = -2E_-^0.$$

Тогава

$$[H_0, E_+^i] = \alpha_{0i} E_+^i,$$

$$[H_i, E_+^0] = \alpha_{0i} E_+^0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

където α-те са определени неположителни цели числа и

$$A_{ext} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0r} \\ \alpha_{10} & & & \\ \vdots & & A^1 & \\ \alpha_{r0} & & & \end{pmatrix}.$$

Това е положителна полудефинитна $(r+1) \times (r+1)$ ОМК, наречена разширена матрица на Картан.

Теорема 8. *Нека $\mathfrak{g}$ да бъде проста, комплексна, крайномерна алгебра на Ли и нека A_{ext} да бъде нейната разширена матрица на Картан. Тогава $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$ е афинна алгебра на Кац-Муди асоциирана към A.*

Глава 5

Системи от уравнения свързани с афинната алгебра на Кац-Муди $A_r^{(1)}$

В тази глава е изведена нова група системи от уравнения свързани с алгебрите на Кац-Муди $A_r^{(1)}$, използвайки автоморфизъм на Кокстър. Те представляват третия нетривиален член в йерархията от солитонни уравнения, свързан с тези алгебри. Изведени са някои конкретни примери и са наложени допълнителни редукции.

Главата се базира на [27, 28].

5.1 Градуировка

Нека C_1 и $\tilde{C}_1$ са две представяния за автоморфизма на Кокстър за алгебрите $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}(r+1)$. Подробности могат да се намерят в [41, 42, 43]. Всяко от тези представяния удовлетворява $C_1^{r+1} = \mathbb{1}$, $\tilde{C}_1^{r+1} = \mathbb{1}$ и всеки един от автоморфизмите задава градуировка в $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathop{\oplus}_{k=0}^{r} \mathfrak{g}^{(k)}, \qquad \tilde{\mathfrak{g}} = \mathop{\oplus}_{s=0}^{r} \tilde{\mathfrak{g}}_s .$$

Линейните подпространства са такива, че

$$C_1 X C_1^{-1} = \omega^{-k} X, \qquad \tilde{C}_1 Y \tilde{C}_1^{-1} = \omega^{-s} Y,$$

където $X \in \mathfrak{g}^{(k)}, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}_s$ и $\omega = e^{2\pi i/(r+1)}$.

Всяка от градуировките удовелтворява

$$[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(m)}] \in \mathfrak{g}^{(k+m)}, \qquad [\tilde{\mathfrak{g}}_s, \tilde{\mathfrak{g}}_p] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{s+p},$$

където $(k+m)$ и $(s+p)$ трябва да се разбира по модул $(r+1)$.

Автоморфизмите C_1, $\tilde{C}_1$ ще имат следния вид

$$C_1 = \sum_{p=1}^{r+1} E_{p,p+1} = J_1^{(0)}, \qquad \tilde{C}_1 = \sum_{p=1}^{r+1} \omega^{p-1} E_{p,p} = J_0^{(1)},$$

където $(r+1) \times (r+1)$ матриците E_{km} се дефинират като $(E_{km})_{sp} = \delta_{ks}\delta_{mp}$.

Удобен базис в афинната алгебра на Ли $A_r^{(1)}$, който е съвместим с градуировките [41, 42, 43] и [44, 45] се дава с

$$J_s^{(k)} = \sum_{j=1}^{r+1} \omega^{kj} E_{j,j+s}.$$

Базисните елементи удовлетворяват следните комутационни съотношения

$$\left[J_s^{(k)}, J_l^{(m)}\right] = \left(\omega^{ms} - \omega^{kl}\right) J_{s+l}^{(k+m)}.$$

Лесно се проверява, че

$$C_1^{-1} J_s^{(k)} C_1 = \omega^{-k} J_s^{(k)}, \qquad \tilde{C}_1^{-1} J_s^{(k)} \tilde{C}_1 = \omega^{-s} J_s^{(k)}$$

и

$$J_s^{(k)} J_p^{(m)} = \omega^{sm} J_{s+p}^{(k+m)}, \qquad (J_s^{(k)})^{-1} = (J_s^{(k)})^{\dagger}.$$

Използвайки това е построен базис във всяко едно от линейните подпространства, както следва

$$\mathfrak{g}^{(k)} \equiv \operatorname{span}\{J_s^{(k)}, \quad s = 1, \ldots, r+1\}, \qquad \tilde{\mathfrak{g}}_s \equiv \operatorname{span}\{J_s^{(k)}, \quad k = 1, \ldots, r+1\}.$$

При едната реализация на автоморфизма на Кокстър избираме C_1 да е елемент от групата на Вайл $C_1 = S_{\alpha_1} \ldots S_{\alpha_r}$, където α_k са простите корени на $\mathfrak{sl}(r+1)$ и S_α е отражение на Вайл спрямо корена α. В другата реализация $\tilde{C}_1$ е елемент от подгрупата на Картан на $\mathfrak{sl}(r+1)$. Тогава $\mathfrak{g}^{(0)} \equiv \mathfrak{h}$ е подалгебрата на Картан на $\mathfrak{sl}(r+1)$. Двете реализации са еквивалентни, т.е. съществува трансформация на подобие, която превръща C_1 в $\tilde{C}_1$. В първата реализация всяко от линейните подпространства $\mathfrak{g}^{(k)}$ (с изключение на $\mathfrak{g}^{(0)}$) има едномерно сечение с Картановата подалгебра, т.е.

$$\mathfrak{g}^{(k)} \cap \mathfrak{h} \equiv \alpha_k J_0^{(k)},$$

където α_k е произволна константа.

5.2 Представяне на Лакс

Нека Лаксовата двойка бъде избрана като два полинома по спектралния параметър λ

$$L = i\partial_x + Q(x,t) - \lambda J, \tag{5.1}$$

$$M = i\partial_t + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k V^{(k)}(x,t) - \lambda^m K, \tag{5.2}$$

където

$$Q(x,t) \in \mathfrak{g}^{(0)}, \quad V^{(k)}(x,t) \in \mathfrak{g}^{(k)}, \quad K \in \mathfrak{g}^{(m)}, \quad J \in \mathfrak{g}^{(1)}.$$

Тук J и K са подходящо избрани константни матрици. За да изведем уравнения от типа на МКДВ ние трябва да изберем $V(x,t,\lambda)$ да бъде кубичен полином по λ.

Двата Лаксови оператора трябва да комутират, т.е.

$$\left[L,\, M\right] = 0 \tag{5.3}$$

тъждествено по λ, което ще доведе до система от рекурсионни уравнения. Решавайки тази система се получават изрази за $V^{(k)}(x,t)$ изразени чрез $Q(x,t)$. Накрая следват уравненията като ограничения за потенциала $Q(x,t)$.

5.3 Извод на уравненията

От двойката на Лакс (5.1) и (5.2) при $m = 3$

$$L\psi \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,t) - \lambda J \right)\psi = 0,$$

$$M\psi \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial t} + V_0(x,t) + \lambda V_1(x,t) + \lambda^2 V_2(x,t) - \lambda^3 K \right)\psi = -\lambda^3 \psi K.$$

Условието за нулева кривина $[L\,, M] = 0$ довежда до полином от четвърта степен по λ, който трябва да бъде тъждествено равен на нула. В резултат се получава следната система

$$\lambda^4 : [J, K] = 0\,, \tag{5.4}$$

$$\lambda^3 : [J, V_2] = [K, Q]\,, \tag{5.5}$$

$$\lambda^2 : [J, V_1] = [Q, V_2] + i\frac{\partial V_2}{\partial x}\,, \tag{5.6}$$

$$\lambda^1 : [J, V_0] = [Q, V_1] + i\frac{\partial V_1}{\partial x}\,, \tag{5.7}$$

$$\lambda^0 : i\frac{\partial Q}{\partial t} = [Q, V_0] + i\frac{\partial V_0}{\partial x}\,. \tag{5.8}$$

Тук Q и J имат вида

$$Q(x,t) = \sum_{j=1}^{r} q_j(x,t) J_j^{(0)}\,, \qquad J = aJ_0^{(1)},$$

където a е константа.

От (5.4) следва

$$K = bJ_0^{(3)},$$

където b е друга константа.

За $V_2(x,t)$ използваме

$$V_2(x,t) = \sum_{k=1}^{r+1} v_k^{(2)}(x,t) J_k^{(2)}.$$

От уравнение (5.5) следва

$$v_k^{(2)} = \frac{b}{a}(\omega^{2k} + \omega^k + 1) q_k,$$

където k се изменя от 1 до r. За да се намери $v_{r+1}^{(2)}$ трябва да се отчете диагоналната част на (5.6). Това води до

$$i\frac{\partial v_{r+1}^{(2)}}{\partial x} = 0$$

с решение

$$v_{r+1}^{(2)} = C(t),$$

произволна функция на времето.

За $V_1(x,t)$ използваме

$$V_1(x,t) = \sum_{l=1}^{r+1} v_l^{(1)}(x,t) J_l^{(1)}.$$

От частта, която не комутира тъждествено с J в (5.6) се получава

$$v_l^{(1)} = \frac{b}{a^2} \sum_{\substack{j+k=l \\ j,k=1}}^{r} \frac{\omega^{2l} + \omega^{2j+k} - \omega^k - 1}{1 - \omega^l} q_j q_k + i \frac{b}{a^2} \left(\frac{\omega^{2l} + \omega^l + 1}{1 - \omega^l} \right) \frac{\partial q_l}{\partial x} - \frac{C}{a}(\omega^l + 1) q_l,$$

където l се изменя от 1 до r. За да се получи $v_{r+1}^{(1)}$, трябва да се отчете диагоналната част на (5.7). Това довежда до

$$\frac{\partial v_{r+1}^{(1)}}{\partial x} = -\frac{b}{a^2} \sum_{\substack{j+k=r+1 \\ j,k=1}}^{r} \left(\cos\left(\frac{2\pi j}{r+1} \right) + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x}(q_j q_l)$$

с решение

$$v_{r+1}^{(1)} = -\frac{b}{a^2} \sum_{\substack{j+k=r+1 \\ j,k=1}}^{r} \left(\cos\left(\frac{2\pi j}{r+1} \right) + \frac{1}{2} \right) q_j q_l + D(t),$$

производна функция на времето.

От ортогоналната част (5.7) и използвайки за $V_0(x,t)$

$$V_0(x,t) = \sum_{m=1}^{r} v_l^{(0)}(x,t) J_l^{(0)}.$$

Решавайки за коефициентите се получава

$$v_l^{(0)} = \frac{b}{a^3} \sum_{\substack{j+k=l \\ j,k=1}}^{r} \sum_{\substack{m+n=k \\ m,n=1}}^{r} \left(1 + \frac{\sin\left(\pi \frac{(l-2m)}{r+1}\right) - \sin\left(\pi \frac{(l-2j)}{r+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi l}{r+1}\right)} \right) q_m q_n q_j +$$

$$+ \frac{3b}{2a^3} \sum_{\substack{j+k=l \\ j,k=1}}^{r} \cot\left(\frac{\pi k}{r+1} \right) q_j \frac{\partial q_k}{\partial x} + \frac{3b}{4a^3} \cot\left(\frac{\pi l}{r+1} \right) \sum_{\substack{j+k=l \\ j,k=1}}^{r} \frac{\partial}{\partial x}(q_j q_k) +$$

$$+ \frac{C}{a^2} \left(\sum_{\substack{j+k=l \\ j,k=1}}^{r} q_j q_k + \cot\left(\frac{\pi l}{r+1} \right) \frac{\partial q_l}{\partial x} \right) + \frac{b}{a^3} \sum_{k=1}^{r} \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{r+1} \right) + \frac{1}{2} \right] q_k q_{r+1-k} q_l +$$

$$+ \frac{b}{a^3} \left(\cot^2\left(\frac{\pi l}{r+1} \right) - \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\pi l}{r+1}\right)} \right) \frac{\partial^2 q_l}{\partial x^2} - \frac{D}{a} q_l.$$

От (5.8) следва системата от уравнения от типа на МКДВ

$$
\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial q_l}{\partial t} &= \sum_{\substack{j+k=l\\ j,k=1}}^{r}\sum_{\substack{m+n=k\\ m,n=1}}^{r}\left(1+\frac{2\sin\left(\pi\frac{(j-m)}{r+1}\right)\cos\left(\pi\frac{(n)}{r+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi l}{r+1}\right)}\right)\frac{\partial}{\partial x}(q_m q_n q_j)+\\
&+\frac{3}{2}\sum_{\substack{j+k=l\\ j,k=1}}^{r}\cot\left(\frac{\pi k}{r+1}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(q_j\frac{\partial q_k}{\partial x}\right)+\frac{3}{4}\cot\left(\frac{\pi l}{r+1}\right)\sum_{\substack{j+k=l\\ j,k=1}}^{r}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(q_j q_k)+\\
&+\beta\left(\sum_{\substack{j+k=l\\ j,k=1}}^{r}\frac{\partial}{\partial x}(q_j q_k)+\cot\left(\frac{\pi l}{r+1}\right)\frac{\partial^2 q_l}{\partial x^2}\right)+\gamma\frac{\partial q_l}{\partial x}+\left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi l}{r+1}\right)}{4\sin^3\left(\frac{\pi l}{r+1}\right)}\right)\frac{\partial^3 q_l}{\partial x^3}+\\
&+\sum_{k=1}^{r}\left[2\cos^2\left(\frac{\pi k}{r+1}\right)-\frac{1}{2}\right]\frac{\partial}{\partial x}\left(q_k q_{r+1-k} q_l\right),
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

където $\alpha=\frac{a^3}{b}$, $\beta=C\frac{a}{b}$ и $\gamma=-D\frac{a^2}{b}$.

Примери за $\beta=0$ и $\gamma=0$

Тези уравнения допускат Хамилтонова формулировка

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta q_{r+1-i}}\right).$$

В случая на $A_1^{(1)}$ алгебра, със следния потенциал

$$U(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}0 & q_1\\ q_1 & 0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

се получава добре известното фокусиращо МКДВ уравнение

$$\alpha\frac{\partial q_1}{\partial t}=-\frac{1}{4}\frac{\partial^3 q_1}{\partial x^3}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(q_1^3)\,.$$

В този случай Хамилтониана е

$$H=\frac{1}{8\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)^2-q_1^4\right).$$

В случая на $A_2^{(1)}$ алгебра се получава тривиалната система от уравнения $\partial_t q_1=0$, $\partial_t q_2=0$ и съответният Хамилтониан е билинеен спрямо q_1 и q_2.

В случая на $A_3^{(1)}$ алгебра потенциала на Лаксовия оператор е параметризиран с

$$U(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}0 & q_1 & q_2 & q_3\\ q_3 & 0 & q_1 & q_2\\ q_2 & q_3 & 0 & q_1\\ q_1 & q_2 & q_3 & 0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\end{pmatrix},$$

който е свързан със следната система уравнения

$$
\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial q_1}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + 3\frac{\partial q_2}{\partial x}q_3 + 3q_1q_2^2 + 2q_3^3\right),\\
\alpha\frac{\partial q_2}{\partial t} &= \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + 3\frac{\partial}{\partial x}\left(q_1^2 - q_3^2\right) + 12q_1q_2q_3 - 2q_2^3\right),\\
\alpha\frac{\partial q_3}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 q_3}{\partial x^2} - 3\frac{\partial q_2}{\partial x}q_1 + 3q_3q_2^2 + 2q_1^3\right).
\end{aligned}
$$

Съответният Хамилтониан е

$$
H = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right) - \frac{3}{2}(q_1^2 - q_3^2)\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{1}{2}q_1^4 - \frac{1}{4}q_2^4 + \frac{1}{2}q_3^4 + 3q_1q_2^2q_3\right\}.
$$

Следващият пример е свързан с алгебрата $A_4^{(1)}$. Потенциалът на Лаксовия оператор е

$$
U(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_4 & 0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_3 & q_4 & 0 & q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_4 & 0 & q_1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^4 \end{pmatrix},
$$

където $\omega = e^{2\pi i/5}$. Съответните уравнения са

$$
\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial q_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c_1}{2s_1^2}\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{3}{2s_1}q_4\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{3}{2s_2}q_3\frac{\partial q_3}{\partial x} + 3q_1q_2q_3 + q_2^3 + 3q_3q_4^2\right),\\
\alpha\frac{\partial q_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{c_2}{2s_2^2}\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} - \frac{3}{2s_2}q_3\frac{\partial q_4}{\partial x} + \frac{3}{2s_1}q_1\frac{\partial q_1}{\partial x} + 3q_1q_2q_4 + q_4^3 + 3q_1q_3^2\right),\\
\alpha\frac{\partial q_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{c_2}{2s_2^2}\frac{\partial^2 q_3}{\partial x^2} + \frac{3}{2s_2}q_2\frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{3}{2s_1}q_4\frac{\partial q_4}{\partial x} + 3q_1q_3q_4 + q_1^3 + 3q_4q_2^2\right),\\
\alpha\frac{\partial q_4}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c_1}{2s_1^2}\frac{\partial^2 q_4}{\partial x^2} - \frac{3}{2s_1}q_1\frac{\partial q_3}{\partial x} - \frac{3}{2s_2}q_2\frac{\partial q_2}{\partial x} + 3q_2q_3q_4 + q_3^3 + 3q_2q_1^2\right),
\end{aligned}
$$

където

$$
\begin{aligned}
s_k &= \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right), \qquad c_k = \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right), \qquad s_1 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\\
c_1 &= \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}), \qquad s_2 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \qquad c_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).
\end{aligned}
$$

Хамилтонианът е

$$
\begin{aligned}
H = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Bigg(&- \frac{c_1}{2s_1^2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q_4}{\partial x}\right) + \frac{c_2}{2s_2^2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right) + \frac{3}{4s_1}\left(q_4^2\frac{\partial q_2}{\partial x} - q_1^2\frac{\partial q_3}{\partial x}\right) + \\
&+ \frac{3}{4s_2}\left(q_2^2\frac{\partial q_1}{\partial x} - q_3^2\frac{\partial q_4}{\partial x}\right) + 3q_1q_2q_3q_4 + q_1^3q_2 + q_1q_3^3 + q_2^3q_4 + q_3q_4^3\Bigg).
\end{aligned}
$$

Поредният пример е свързан с алгебрата $A_5^{(1)}$. Потенциалът на Лаксовия оператор е

$$U(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ q_5 & 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_4 & q_5 & 0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_5 & 0 & q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & 0 & q_1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^5 \end{pmatrix},$$

където $\omega = e^{\pi i/3}$. Уравненията са

$$\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial q_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \sqrt{3}\left(4\frac{\partial q_2}{\partial x}q_5 + 2q_3\frac{\partial q_4}{\partial x} + 3\frac{\partial q_3}{\partial x}q_4\right) + \right.\\
&\qquad \left. + 6q_3(q_2^2+q_5^2) + 3q_1q_3^2 + 6q_4(q_1q_2+q_4q_5)\right),\\
\alpha\frac{\partial q_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{3}\left(4\frac{\partial q_1}{\partial x}q_1 + q_5\frac{\partial q_3}{\partial x} - 2\frac{\partial q_5}{\partial x}q_3\right) + 6q_5(q_1q_2+q_4q_5) + 3q_2q_3^2 + 12q_1q_3q_4\right),\\
\alpha\frac{\partial q_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q_3}{\partial x^2} + \sqrt{3}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}q_1 + 3q_2\frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{\partial q_4}{\partial x}q_5 - 3\frac{\partial q_5}{\partial x}q_4\right) + \right.\\
&\qquad \left. + 6(q_3(q_2q_4+q_1q_5) + q_1q_4^2 + q_2^2q_5) + 2q_1^3 - q_3^3 + 2q_5^3\right),\\
\alpha\frac{\partial q_4}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{3}\left(2\frac{\partial q_1}{\partial x}q_3 - q_1\frac{\partial q_3}{\partial x} - 4\frac{\partial q_5}{\partial x}q_5\right) + 6q_1(q_1q_2+q_4q_5) + 3q_4q_3^2 + 12q_2q_3q_5\right),\\
\alpha\frac{\partial q_5}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\partial^2 q_5}{\partial x^2} - \sqrt{3}\left(4\frac{\partial q_4}{\partial x}q_1 + 2q_3\frac{\partial q_2}{\partial x} + 3\frac{\partial q_3}{\partial x}q_2\right) + \right.\\
&\qquad \left. + 6q_3(q_1^2+q_4^2) + 3q_5q_3^2 + 6q_2(q_1q_2+q_4q_5)\right).
\end{aligned}$$

Хамилтонианът е

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dx \,&\left(-4\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q_5}{\partial x}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)^2 + \right.\\
&+ \sqrt{3}q_3\left(q_1\frac{\partial q_2}{\partial x} + 3q_2\frac{\partial q_1}{\partial x} - 3q_4\frac{\partial q_5}{\partial x} - q_5\frac{\partial q_4}{\partial x}\right) + \sqrt{3}\left(2q_5^2\frac{\partial q_2}{\partial x} - 2q_1^2\frac{\partial q_4}{\partial x}\right) + \\
&\left. + 3(q_1q_2+q_4q_5)^2 + 2q_3(q_1^3+q_5^3+3q_2^2q_5+3q_1q_4^2) + 3q_3^2(q_1q_5+q_2q_4) - \frac{1}{4}q_3^4\right).
\end{aligned}$$

5.4 Допълнителни инволюции

Уравненията от типа на МКДВ изведени досега съдържат само реалнозначни коефициенти. Това позволява да се разгледат два класа от решения:

- всички $q_j(x,t)$ са комплекснозначни функции;
- всички $q_j(x,t)$ са реалнозначни функции.

Втората опция може да се осъществи с налагането върху L на допълнителни $\mathbb{Z}_2$ инволюции.

По-общо, налагането на допълнителни инволюции генерирани от $\mathbb{Z}_2$ автоморфизъм върху $\mathfrak{g}$ води до разкриване на реалния Хамилтонов вид на МКДВ уравненията. Това е добре разгледано в [21], където реалния Хамилтонов вид на верижките на Тода е въведен.

Наистина, заедно с $\mathbb{Z}_{r+1}$ редукцията може да се въведе една от следните инволюции ($\mathbb{Z}_2$ редукции) върху Лаксовата двойка:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & K_0^{-1}U^{\dagger}(x,t,\kappa_1(\lambda))K_0 = U(x,t,\lambda), & \kappa_1(\lambda) = \omega^{-1}\lambda^*; \\ \text{b)} & K_0^{-1}U^{*}(x,t,\kappa_2(\lambda))K_0 = -U(x,t,\lambda), & \kappa_2(\lambda) = -\omega^{-1}\lambda^*; \\ \text{c)} & U^T(x,t,-\lambda) = -U(x,t,\lambda), & \end{array} \tag{5.10}$$

където $K_0^2 = \mathbb{1}$ и * обозначава комплексно спрягане. Нека

$$K_0 = \sum_{k=1}^{r+1} E_{k,r-k+2},$$

тогава действието на K_0 върху базиса е както следва

$$K_0 \left(J_s^{(k)}\right)^{\dagger} K_0 = \omega^{k(s-1)} J_s^{(k)}, \qquad K_0 \left(J_s^{(k)}\right)^{*} K_0 = \omega^{-k} J_{-s}^{(k)}.$$

Непосредствено следствие от уравнения (5.10) са ограниченията върху потенциала:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & K_0^{-1}Q^{\dagger}(x,t)K_0 = Q(x,t), & K_0^{-1}(J_0^{(1)})^{\dagger}K_0 = \omega^{-1}J_0^{(1)}; \\ \text{b)} & K_0^{-1}Q^{*}(x,t)K_0 = -Q(x,t), & K_0^{-1}(J_0^{(1)})^{*}K_0 = \omega^{-1}J_0^{(1)}; \\ \text{c)} & Q^T(x,t) = -Q(x,t), & (J_0^{(1)})^T = J_0^{(1)}. \end{array} \tag{5.11}$$

По-точно от уравнения (5.11) следва всяко от алгебричните съотношения по-долу:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & q_j^*(x,t) = q_j(x,t), & \alpha = \alpha^*; \\ \text{b)} & q_j^*(x,t) = -q_{r-j+1}(x,t), & \alpha = \alpha^*; \\ \text{c)} & q_j(x,t) = -q_{r-j+1}(x,t), & \end{array} \tag{5.12}$$

където $j = 1, \ldots, r$ са съвместими с еволюцията на уравненията (5.9).

Тези инволюции редуцират вида на матрицата на разсейване ($\mathbb{Z}_2$ редукции):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & K_0^{-1}T^{\dagger}(\kappa_1(\lambda),t)K_0 = T^{-1}(\lambda,t); \\ \text{b)} & K_0^{-1}T^{*}(\kappa_1(\lambda),t)K_0 = T(\lambda,t); \\ \text{c)} & T^T(-\lambda,t) = T^{-1}(\lambda,t). \end{array}$$

Примери

Разглеждаме $A_3^{(1)}$ алгебра.

За случая a) от (5.12) се получават същите МКДВ уравнения с q_1, q_2 и q_3 чисто реални функции.

В случай b) от (5.12) нека $q_1 = -q_3^* = u$ и $q_2 = -q_2^* = iv$ откъдето следва

$$\alpha\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{4}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{3}{4i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2 - (u^*)^2\right) - 3\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2 v) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}v^3,$$
$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - i\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^*\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}(uv^2) - \frac{\partial}{\partial x}(u^*)^3,$$

където u е комплекснозначна функция, докато v е чисто реална функция. Тези уравнения допускат следната Хамилтонова формулировка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta u^*}\right), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta v}\right).$$

Съответния Хамилтониан е

$$H = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 3\Im(u^2)\frac{\partial v}{\partial x} + \Re(u^4) - \frac{1}{4}v^4 + 3|u|^2 v^2\right).$$

Следващите уравнения допускат Хамилтонова формулировка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta H}{\delta v}\right).$$

Случай c) от (5.12) довежда до добре известното дефокусиращо МКДВ уравнение

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x}(u^3),$$

където u е комплекснозначна функция. Съответният Хамилтониан е

$$H = -\frac{1}{4\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u^4\right).$$

Разглеждайки $A_5^{(1)}$ алгебрата с $\mathbb{D}_6$ редукция, в случай c) от (5.12) се получава

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 2\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) - 6\frac{\partial}{\partial x}(uv^2),$$
$$\alpha\frac{\partial v}{\partial t} = \sqrt{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2\right) - 6\frac{\partial}{\partial x}(u^2 v),$$

където u и v са комплекснозначни функции. Хамилтонианът се дава с

$$H = -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sqrt{3}u^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + 3u^2 v^2\right).$$

5.5 По-ниски членове от йерархията

5.5.1 Вторият нетривиален член от йерархията

Когато M съдържа полином от втора степен се получават следните уравнения

$$\frac{\partial q_l}{\partial t} = -\frac{b}{a^2}\left(\sum_{\substack{j+k=l \\ j,k=1}}^{r}\frac{\partial}{\partial x}(q_j q_k) + \cot\left(\frac{l\pi}{r+1}\right)\frac{\partial^2 q_l}{\partial x^2}\right) - \frac{E}{a}\frac{\partial q_l}{\partial x}.$$

Това представлява система уравнения от типа на нелинейния Шрьодингер, подробности могат да се намерят в [44].

Примери за $E = 0$

За случая на алгебрата $A_2^{(1)}$. Потенциалът на L се дава чрез

$$U(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ q_2 & 0 & q_1 \\ q_1 & q_2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

където $\omega = e^{2\pi i/3}$. Получава се следната система от интегрируеми частни диференциални уравнения

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{b}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}(q_2^2) + \frac{b}{a^2}\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} = 0,$$
$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{b}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}(q_1^2) - \frac{b}{a^2}\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} = 0.$$

Съответния Хамилтониан е

$$H = \frac{b}{3a^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(q_2 \frac{\partial q_1}{\partial x} - q_1 \frac{\partial q_2}{\partial x} \right) - q_1^3 - q_2^3 \right).$$

За $A_3^{(1)}$ алгебрата използвайки потенциала

$$U(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_3 & 0 & q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 & 0 & q_1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

се получава следната система от интегрируеми частни диференциални уравнения

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + 2\frac{b}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}(q_2 q_3) + \frac{b}{a^2}\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} = 0,$$
$$\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{b}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}(q_1^2) + \frac{b}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}(q_3^2) = 0,$$
$$\frac{\partial q_3}{\partial t} + 2\frac{b}{a^2}\frac{\partial}{\partial x}(q_1 q_2) - \frac{b}{a^2}\frac{\partial^2 q_3}{\partial x^2} = 0.$$

Съответния Хамилтониан е

$$H = \frac{b}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2}\left(q_3 \frac{\partial q_1}{\partial x} - q_1 \frac{\partial q_3}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(q_2^2) \right) - q_2(q_1^2 + q_3^2) \right).$$

5.5.2 Първият нетривиален член от йерархията

Когато M съдържа полином от първа степен се получават следните уравнения

$$\frac{\partial q_l}{\partial t} = \frac{b}{a}\frac{\partial q_l}{\partial x}.$$

5.6 Тривиален член от йерархията

Когато M съдържа полином от нулева степен се получават следните уравнения

$$\frac{\partial q_l}{\partial t} = 0.$$

Глава 6

МКДВ йерархия от системи уравнения свързани с алгебрата $A_r^{(1)}$

В тази глава са изведени рекурсионните съотношения с чиято помощ се задава цяла йерархия от уравнения. Разгледани са спектралните свойства на Лаксовите оператори и е показано как могат да бъдат решени съответните нелинейни еволюционни уравнения.

Главата се базира на [27, 28].

6.1 Рекурсионни съотношения

Тук се използва теорията на рекурсионните оператори [9, 14, 18, 19] за специалния избор на Лаксовите оператори (5.1) и (5.2). За простота нека m в (5.1) и (5.2) е $m \leq (r+1)$ и m е експонента на $\mathfrak{g}$.

Условието (5.3) задава следните рекурсионни съотношения

$$\begin{aligned}
\lambda^{m+1}: &\qquad \big[J, K\big] = 0,\\
\lambda^{m}: &\qquad \big[J, V^{(m-1)}(x,t)\big] + \big[Q(x,t), K\big] = 0,\\
\lambda^{s}: &\qquad i\frac{\partial V^{(s)}}{\partial x} + \big[Q(x,t), V^{(s)}(x,t)\big] - \big[J, V^{(s-1)}(x,t)\big] = 0,\\
\lambda^{0}: &\qquad -i\frac{\partial Q}{\partial t} + i\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} + \big[Q(x,t), V^{(0)}(x,t)\big] = 0.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

С ad_J е означен линейния оператор дефиниран чрез

$$\mathrm{ad}_J(X) = \big[J,\, X\big].$$

Този оператор има ядро и може да бъде обърнат само върху неговия образ. Обратния се означава с ad_J^{-1}. От неговите спектрални свойства следва, че ad_J^{-1} може да се изрази като полином по ad_J, подробно това е разработено в [46].

Всеки елемент се разделя на **ортогонална** и **успоредна** части

$$\begin{aligned}
V^{(s)}(x,t) &= V_{\perp}^{(s)}(x,t) + V_{\parallel}^{(s)}(x,t), \quad \mathrm{ad}_J\left(V_{\parallel}^{(s)}(x,t)\right) = 0,\\
V_{\parallel}^{(s)}(x,t) &= \begin{cases} 0, & \text{ако } s \text{ е равно на } 0,\\ c_s^{-1} J^s \left\langle V^{(s)}, J^{r+1-s}\right\rangle, & \text{ако } s \geq 1 \text{ е експонента,}\end{cases}
\end{aligned}$$

където $c_s = \left\langle J^s, J^{r+1-s} \right\rangle = r+1$. Тук с $\left\langle \, . \, , . \, \right\rangle$ е означена формата на Килинг за $\mathfrak{g}$.

От (6.1) се получава

$$V_\perp^{(s-1)}(x,t) = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\frac{\partial V^{(s)}}{\partial x} + \left[Q(x,t), V_\perp^{(s)}(x,t)\right] + \left[Q(x,t), V_\parallel^{(s)}(x,t)\right]\right),$$
$$i\frac{\partial V_\parallel^{(s)}}{\partial x} = -\left[Q(x,t), V_\perp^{(s)}(x,t)\right]_\parallel .$$

След интегриране на второто уравнение

$$V_\parallel^{(s)}(x,t) = i(\partial_x)_\pm^{-1}\left(\left[Q(x,t), V_\perp^{s}(x,t)\right]_\parallel\right) = \frac{i}{r+1} J^s (\partial_x)_\pm^{-1}\left\langle \left[Q(x,t), V_\perp^{s}(x,t)\right], J^{r+1-s}\right\rangle,$$

където $(\partial_x)_\pm^{-1} = \int_{\pm\infty}^{x} dy$ и всички интеграционни константи са поставени равни на нула. Така формалното решение на рекурентните съотношения приема вида

$$V_\perp^{(s)}(x,t) = \Lambda_{s+1}^{\pm} V_\perp^{(s+1)}(x,t).$$

Ако $s = 0$ (модул $(r+1)$) тогава

$$\Lambda_0 X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\frac{\partial X}{\partial x} + \left[Q(x,t), X\right]\right), \tag{6.2}$$

в противен случай

$$\Lambda_s^{\pm} X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\frac{\partial X}{\partial x} + \left[Q(x,t), X\right] + \frac{i}{r+1}\left[Q(x,t), J^s\right](\partial_x)_\pm^{-1}\left\langle \left[Q(x,t), X\right], J^{r+1-s}\right\rangle\right).$$

Елементите на потенциала се дават чрез

$$\begin{aligned}
V^{(m-1)} &= \mathrm{ad}_{\,J^{-1}}[J^m, Q], \\
V_\perp^{(m-2)} &= \Lambda_{m-1}\mathrm{ad}_{\,J^{-1}}[J^m, Q], \\
V_\perp^{(m-3)} &= \Lambda_{m-2}\Lambda_{m-1}\mathrm{ad}_{\,J^{-1}}[J^m, Q], \\
&\vdots \\
V_\perp^{(0)} &= \Lambda_1 \ldots \Lambda_{m-2}\Lambda_{m-1}\mathrm{ad}_{\,J^{-1}}[J^m, Q].
\end{aligned}$$

Съответните нелинейни еволюционни уравнения могат да се запишат като

$$i\ \mathrm{ad}_J^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t} - \Lambda_0 V^{(0)} = 0, \tag{6.3}$$

където Λ_0 се дава от (6.2).

6.2 Спектрални свойства на Лаксовите оператори

Тук са разгледани спектралните свойства на фундаменталните аналитични решения (ФАР) на Лаксовите оператори (5.1) и (5.2). Такива спектрални задачи свързани с всяка проста алгебра на Ли са анализирани в [22] за общия случай на комплексно-значен избор на J.

Изпълнено е, че

$$L\chi \equiv i\frac{\partial\chi}{\partial x} + (Q(x,t) - \lambda J)\chi(x,t,\lambda) = 0,$$

където $J = J_0^{(1)}$ е диагонална матрица с комплексни собствени стойности. Решенията на това уравнение с нормировка

$$\lim_{x\to\infty} \chi_+ e^{iJ\lambda x} = \mathbb{1}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \chi_- e^{iJ\lambda x} = \mathbb{1}$$

са така наречените решения на Йост.

Резултатите от [22] за случая на $\mathbb{Z}_{r+1}$ редукции са по-подробно обяснени в [15, 18]. Нека ξ са фундаменталните аналитични решения на линейната задача

$$\mathfrak{L}\xi \equiv i\frac{\partial\xi}{\partial x} + Q(x,t)\xi(x,t,\lambda) - \lambda[J,\xi(x,t,\lambda)] = 0.$$

ФАР са аналитични функции дефинирани в съответния регион на аналитичност Ω_ν, който се задава с $\frac{\nu\pi}{r+1} < \arg(\lambda) < \frac{(\nu+1)\pi}{r+1}$, където $\nu = 0, 1, \ldots, r$, виж Фигура (6.1). Те се разделят от лъчите l_ν определени от решенията на

$$\operatorname{Im}[\lambda\alpha(J)] = 0, \tag{6.4}$$

където α е корен от съответната алгебра. Решавайки това уравнение за всеки корен на съответната алгебра получаваме графиките на Фигура (6.1).

ФАР за L и $\mathfrak{L}$ са свързани посредством $\xi_\nu(x,t,\lambda) = \chi_\nu(x,t,\lambda)e^{iJ\lambda x}$.

Решенията на уравнение (6.4) позволяват на всяка права $l_\nu \cup l_{\nu+r+1}$ ($A_1^{(1)}$ е специален случай) да се свърже подмножество от множеството от положителни корени, които са взаимно ортогонални. Резултатът е даден в Таблици (6.1 − 6.5).

Границите на $\xi_\nu(x,t,\lambda)$ за $x \to \pm\infty$ по правите l_ν се определят от

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^{-i\lambda Jx}\xi_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx} &= S_\nu^+(t,\lambda), \\ \lim_{x\to\infty} e^{-i\lambda Jx}\xi_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx} &= T_\nu^-(t,\lambda)D_\nu^+(\lambda), \end{aligned}\right. \quad \forall\lambda \in l_\nu e^{+i0},$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^{-i\lambda Jx}\xi_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx} &= S_{\nu+1}^-(t,\lambda), \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-i\lambda Jx}\xi_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx} &= T_{\nu+1}^+(t,\lambda)D_{\nu+1}^-(\lambda), \end{aligned}\right. \quad \forall\lambda \in l_{\nu+1} e^{-i0},$$

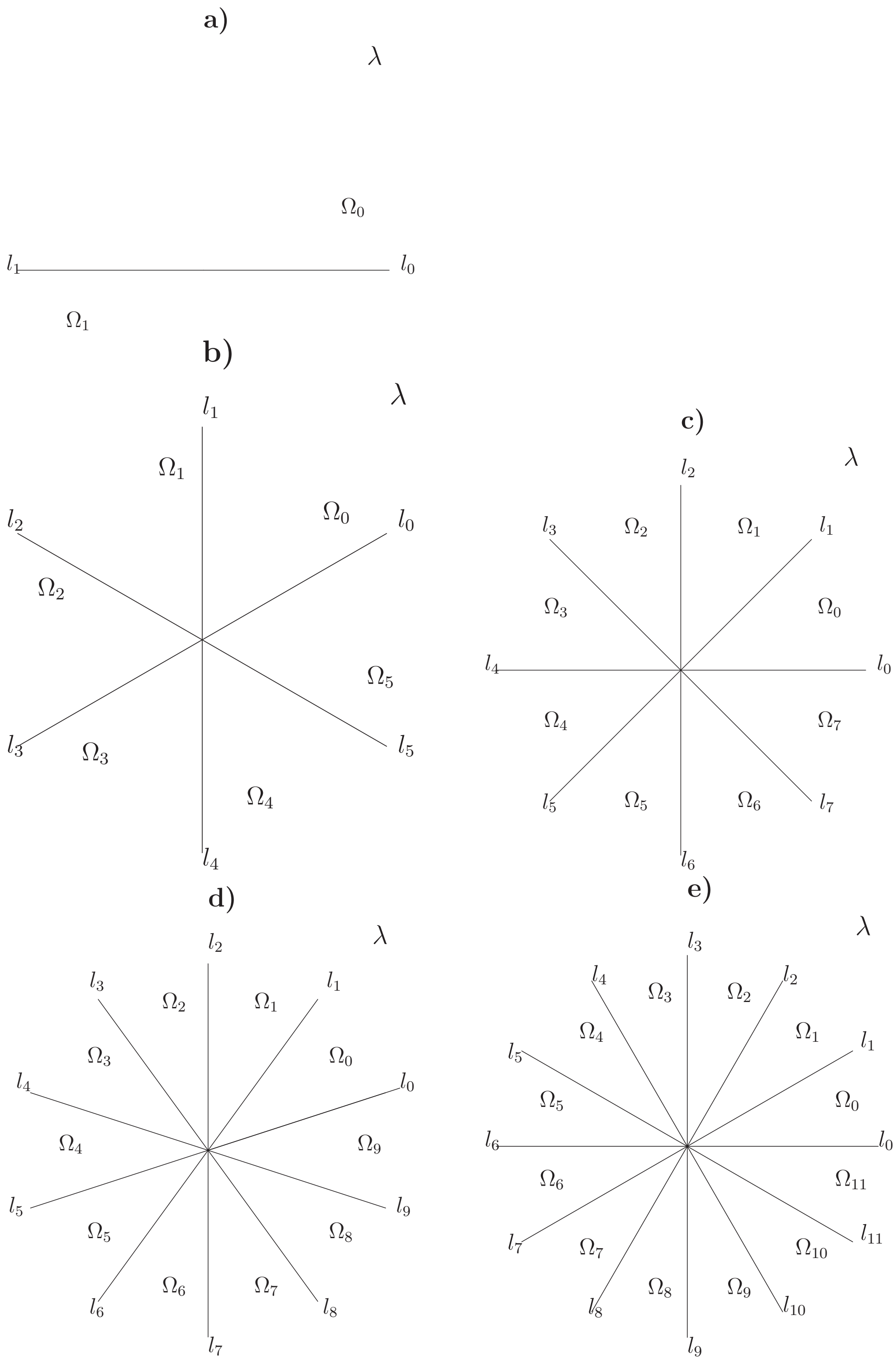
където $S_\nu^\pm$, $T_\nu^\pm$ и $D_\nu^\pm$ са елементи на подгрупата, чиято алгебра на Ли има като положителни корени подмножеството от корени свързани с l_ν. Това е показано на Таблици (6.1 − 6.5).

Границите на фундаменталните аналитични решения от двете страни на правите l_0 и по $l_r e^{i0}$, $l_1 e^{-i0}$ определят минималното множество от данни на разсейване за L. Останалите данни на разсейване могат да бъдат възстановени от минималното множество действайки посредством автоморфизма на Кокстър. Наистина $\mathbb{Z}_{r+1}$ симетрията означава

$$S_{\nu+2}^\pm(\lambda) = \tilde{C}_1 S_\nu^\pm(\omega\lambda)\tilde{C}_1^{-1}, \qquad T_{\nu+2}^\pm(\lambda) = \tilde{C}_1 T_\nu^\pm(\omega\lambda)\tilde{C}_1^{-1}.$$

Задачата на Риман-Хилберт, която е удовлетворена от фундаменталните аналитични решения се формулира като

$$\begin{aligned} \xi_\nu(x,t,\lambda) &= \xi_{\nu-1}(x,t,\lambda)G_\nu(x,t,\lambda), \qquad \lambda \in l_\nu, \\ G_\nu(x,t,\lambda) &= e^{-i\lambda Jx}(S_\nu^-(t,\lambda))^{-1}S_\nu^+(t,\lambda)e^{i\lambda Jx}. \end{aligned}$$



Фигура 6.1: Непрекъснат спектър и сектори на аналитичност на фундаменталните аналитични решения за Лаксовите оператори: a) случая на $A_1^{(1)}$, b) случая на $A_2^{(1)}$, c) случая на $A_3^{(1)}$, d) случая на $A_4^{(1)}$, e) случая на $A_5^{(1)}$.

Таблица 6.1: Подмножество от положителни корени свързани с правите $l_\nu \cup l_{\nu+1}$ за $A_1^{(1)}$.

$l_0 \cup l_1$
$e_1 - e_2$

Таблица 6.2: Подмножества от положителни корени свързани с правите $l_\nu \cup l_{\nu+3}$ за $A_2^{(1)}$.

$l_0 \cup l_3$	$l_1 \cup l_4$	$l_2 \cup l_5$
$e_1 - e_2$	$e_2 - e_3$	$e_1 - e_3$

Таблица 6.3: Подмножества от положителни корени свързани с правите $l_\nu \cup l_{\nu+4}$ за $A_3^{(1)}$.

$l_0 \cup l_4$	$l_1 \cup l_5$	$l_2 \cup l_6$	$l_3 \cup l_7$
$e_1 - e_3$	$e_1 - e_2, e_3 - e_4$	$e_2 - e_4$	$e_1 - e_4, e_2 - e_3$

Таблица 6.4: Подмножества от положителни корени свързани с правите $l_\nu \cup l_{\nu+5}$ за $A_4^{(1)}$.

$l_0 \cup l_5$	$l_1 \cup l_6$	$l_2 \cup l_7$	$l_3 \cup l_8$	$l_4 \cup l_9$
$e_1 - e_3, e_4 - e_5$	$e_1 - e_2, e_3 - e_5$	$e_2 - e_5, e_3 - e_4$	$e_1 - e_5, e_2 - e_4$	$e_1 - e_4, e_2 - e_3$

Таблица 6.5: Подмножества от положителни корени свързани с правите $l_\nu \cup l_{\nu+6}$ за $A_5^{(1)}$.

$l_0 \cup l_6$ $e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_5 - e_6$	$l_1 \cup l_7$ $e_1 - e_3, e_4 - e_6$	$l_2 \cup l_8$ $e_1 - e_2, e_3 - e_6, e_4 - e_5$
$l_3 \cup l_9$ $e_2 - e_6, e_3 - e_5$	$l_4 \cup l_{10}$ $e_1 - e_6, e_2 - e_5, e_3 - e_4$	$l_5 \cup l_{11}$ $e_1 - e_5, e_2 - e_4$

Тя допуска нормировка

$$\lim_{\lambda\to\infty} \xi_\nu(x,t,\lambda) = \mathbb{1}.$$

Този важен факт е в основата на метода на обличането на Захаров-Шабат [5], който позволява да се конструират безотражателни потенциали на L и солитонни решения на съответните нелинейни еволюционни уравнения.

6.3 Решаване на уравненията с помощта на МОЗР

В тази глава е показано как се намират решения на този тип уравнения.

Системата от уравнения може да бъде решена посредством МОЗР [1, 2]. Нека q_0 да бъде началното условие на тези уравнения във време $t = 0$, т.е. $q_0(x) = Q(x, t = 0)$. Нека също L_0 да бъде Лаксовия оператор с потенциал $q_0(x)$.

Тогава, първо се решава правата задача за разсейване, знаейки $q_0(x)$ да се определи матрицата на разсейване $T(\lambda, 0)$ с помощта на решенията на Йост.

След това да се определи еволюцията на матрицата на разсейване във времето.

Накрая трябва да се реши обратната задача за разсейване, да се възстанови $Q(x,t)$ от матрицата на разсейване.

Последната стъпка се свежда до задача на Риман-Хилберт и се използва метода на обличането.

6.3.1 Еволюция на матрицата на разсейване

Задачата е да се пресметне матрицата на разсейване $T(\lambda,t)$ във време $t > 0$. За даден регион на аналитичност Ω_ν (изпускаме индекса за региона на аналитичност оттук насетне, освен в случаите когато това е изрично отбелязано) се получава следното.

Двете решения на Йост $\chi_\pm(x,t,\lambda)$ удовлетворяват уравненията (3.1) и (3.2). Границата се пресмята като

$$\lim_{x\to\infty}(M\chi_+(x,t)) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} + V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 \cdots - \lambda^m K\right) e^{-i\lambda J_0^{(1)}x}\right] = e^{-i\lambda J_0^{(1)}x}\Gamma(\lambda).$$

Преполагайки , че дефинициите на решенията на Йост не зависят от времето t следва

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{x\to\infty}(V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 \cdots - \lambda^m K) = -\lambda^m K.$$

След което

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(M\chi_-(x,t)) &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma(\lambda)\right) e^{-i\lambda J_0^{(1)}x} T(\lambda,t)\right] = \\ &= e^{-i\lambda J_0^{(1)}x}\left(i\frac{\partial T}{\partial t} + \Gamma(\lambda)T(\lambda,t)\right) = e^{-i\lambda J_0^{(1)}x}T(\lambda,t)\Gamma(\lambda).\end{aligned}$$

Следователно, ако $Q(x,t)$ удовлетворява уравненията (6.3) матрицата на разсейване $T(\lambda,t)$ трябва да удовлетворява следното линейно еволюционно уравнение

$$i\frac{\partial T}{\partial t} + [\Gamma(\lambda), T(\lambda,t)] = 0.$$

В частност, когато $V_i = 0$ се получава

$$i\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda^s[K, T(\lambda, t)] = 0,$$

чието решение е

$$T_{ij}(\lambda, t) = e^{-i\lambda^s(\omega^{si} - \omega^{sj})t} T_{ij}(\lambda, 0).$$

Така $T_{ij}(\lambda, 0)$ представляват данните на Коши за началните условия за матрицата на разсейване. Следователно решаването на уравненията (6.3) се редуцира до решаване на правата и обратната задачи за разсейване за Лаксовия оператор L, подробно това е описано в [16, 18, 44].

6.3.2 Метод на обличането

Най-ефективният метод за решаването на обратната задача за разсейване е базиран на конструирането на ФАР на L и по-нататъшното редуциране на задачата до задача на Риман-Хилберт [16]. Това е методът на обличането [47].

За да се конструират едносолитонните решения използваме следния анзац за обличащия множител и неговия обратен

$$u(x, \lambda) = \mathbb{1} + \sum_{p=0}^{r} \frac{c^p A_1 c^{-p}}{\lambda\omega^p - \lambda_1^+},$$
$$u^{-1}(x, \lambda) = \mathbb{1} + \sum_{p=0}^{r} \frac{c^p B_1 c^{-p}}{\lambda\omega^p - \lambda_1^-},$$

където е отчетена $\mathbb{Z}_{r+1}$ редукцията. В горната формула A_1 и B_1 са матрици които трябва да се определят тепърва и с c отбелязваме автоморфизма на Кокстър в съответната реализация, който е използван в извода на съответните уравнения.

Два различни случая трябва да бъдат разгледани:

- $\lambda_1^+ \neq \lambda_1^-$;
- $\lambda_1^+ = \lambda_1^- = \lambda_0$.

Обличащият множител u е решение на уравненията

$$\begin{aligned} i\frac{\partial u}{\partial x} + (Q_1 - \lambda J)u - u(Q_0 - \lambda J) = 0,\\ i\frac{\partial u^{-1}}{\partial x} + (Q_0 - \lambda J)u^{-1} - u^{-1}(Q_1 - \lambda J) = 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

С $\chi_1(x, \lambda)$ и $\chi_0(x, \lambda)$ са обозначени съответните ФАР за двата Лаксови оператора

$$L_1\chi_1(x, \lambda) = 0, \qquad L_0\chi_0(x, \lambda) = 0.$$

Примерно, за случая на $\lambda_1^+ \neq \lambda_1^-$. Пресмятайки границата на (6.5) първо към λ_1^+ и след това към λ_1^-

$$i\frac{\partial A_1}{\partial x} + (Q_1 - \lambda_1^+ J)A_1 - A_1(Q_0 - \lambda_1^+ J) = 0,$$
$$i\frac{\partial B_1}{\partial x} + (Q_0 - \lambda_1^- J)B_1 - B_1(Q_1 - \lambda_1^- J) = 0,$$

откъдето следва, че A_1 и B_1 може да се представят с помощта на така наречените поляризационни вектори

$$A_1 = |n_1\rangle\langle m_0|, \qquad B_1 = |r_0\rangle\langle s_1|,$$

където

$$\begin{aligned} |n_1\rangle &= \chi_1(x, \lambda_1^+)|n_{10}\rangle, \qquad & \langle m_0| &= \langle m_{00}|\chi_0^{-1}(x, \lambda_1^+), \\ |r_0\rangle &= \chi_0(x, \lambda_1^-)|r_{00}\rangle, \qquad & \langle s_1| &= \langle s_{10}|\chi_1^{-1}(x, \lambda_1^-). \end{aligned}$$

Следващата стъпка е извеждането на алгебрични уравнения свързващи поляризационните вектори в A_1 и B_1. Използвайки $uu^{-1} = u^{-1}u = \mathbb{1}$ и отчитайки границата $\lambda \to \lambda_1^\pm$

$$A_1 \left(\mathbb{1} + \sum_{p=0}^{r} \frac{c^p B_1 c^{-p}}{\lambda_1^+ \omega^p - \lambda_1^-} \right) = 0,$$
$$\left(\mathbb{1} + \sum_{p=0}^{r} \frac{c^p A_1 c^{-p}}{\lambda_1^- \omega^p - \lambda_1^+} \right) B_1 = 0.$$

Получава се следната линейна спрямо $|\vec{n}_1\rangle$ и $\langle \vec{s}_1|$ система от уравнения

$$\langle m_0| \left(\mathbb{1} + \sum_{p=0}^{r} \frac{c^p |r_0\rangle\langle s_1| c^{-p}}{\lambda_1^+ \omega^p - \lambda_1^-} \right) = 0,$$
$$\left(\mathbb{1} + \sum_{p=0}^{r} \frac{c^p |n_1\rangle\langle m_0| c^{-p}}{\lambda_1^- \omega^p - \lambda_1^+} \right) |r_0\rangle = 0,$$

която може да бъде решена.

Знаейки решенията за голия потенциал Q_0, ние може да намерим решенията за облечения потенциал Q_1, използвайки само обличащият множител u, неговия обратен u^{-1} и техните производни.

В (6.5), извършвайки прехода $\lambda \to \infty$

$$Q_1 = Q_0 + \lim_{\lambda \to \infty} \lambda [J, u].$$

Получаваме за решенията

$$Q_1 = Q_0 + \lim_{\lambda \to \infty} \lambda [J, \mathbb{1}] + \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{p=0}^{r} \frac{\lambda [J, c^p A_1 c^{-p}]}{\lambda \omega^p - \lambda_1^+} = Q_0 + \sum_{p=0}^{r} \frac{[J, c^p |n_1\rangle\langle m_0| c^{-p}]}{\omega^p}.$$

Глава 7

Системи от уравнения свързани с алгебрите $B_2^{(1)}$, $A_4^{(2)}$ и $A_5^{(2)}$

В настоящата глава от дисертацията са изведени система от уравнения свързана с ортогоналната алгебра $B_2^{(1)}$ и две системи от уравнения свързани с алгебрите на Кац-Муди с височина 2 - $A_4^{(2)}$ и $A_5^{(2)}$. Намерени са Хамилтонианите и рекурсионните оператори за съответните системи. Задачата на Риман-Хилберт за Лаксовия оператор е формулирана и неговите спектрални свойства са разгледани.

Главата се базира на [29, 30].

7.1 Уравнения свързани с алгебрата $B_2^{(1)}$

Подробности могат да се намерят в [41, 42, 43]. Ранга на алгебрата $B_2^{(1)}$ е 2, докато числото на Кокстър е $h = 4$. Експонентите на алгебрата са $1, 3$. Така автоморфизма на Кокстър [29] задава градуировка в алгебрата $B_2^{(1)}$ по следния начин

$$B_2^{(1)} = \bigoplus_{k=0}^{3} \mathfrak{g}^{(k)}.$$

Градуировъчното условие е в сила

$$\left[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(l)}\right] \subset \mathfrak{g}^{(k+l)},$$

където $k + l$ е взето по модул 4.

Базис съвместим с градуировката на алгебрата $B_2^{(1)}$ е [29]

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}^{(0)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{11}^{+}, \mathcal{E}_{22}^{+}\}, \qquad &&\mathfrak{g}^{(1)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{12}^{+}, \mathcal{E}_{23}^{+}, \mathcal{E}_{41}^{+}\}, \\ &\mathfrak{g}^{(2)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{13}^{+}, \mathcal{E}_{31}^{+}\}, \qquad &&\mathfrak{g}^{(3)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{21}^{+}, \mathcal{E}_{32}^{+}, \mathcal{E}_{14}^{+}\}, \end{aligned}$$

където

$$\mathcal{E}_{ij}^{\pm} = E_{i,j} \mp S_1 E_{ij}^{T} S_1^{-1} = E_{i,j} \mp (-1)^{i+j} E_{6-j,6-i}. \tag{7.1}$$

Използвани са следните означения E_{ij} е 5×5 матрица с матрични елементи $(E_{ij})_{n,p} = \delta_{in}\delta_{jp}$ и

$$S_1 = E_{15} - E_{24} + E_{33} - E_{42} + E_{51}, \qquad S_1^2 = 1\!\!1 \tag{7.2}$$

представлява действието на външния автоморфизъм на алгебрата $\mathfrak{sl}(5, \mathbb{C})$, отчитащ симетрията на диаграмата на Динкин за същата алгебра [43]. Очевидно, всички $\mathcal{E}_{ij}^{+}$ принадлежат към подалгебрата $\mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ на $\mathfrak{sl}(5, \mathbb{C})$.

За извода на уравненията се използва следната Лаксова двойка [29]

$$L = i\partial_x + Q(x,t) - \lambda J,$$
$$M = i\partial_t + V^{(0)}(x,t) + \lambda V^{(1)}(x,t) + \lambda^2 V^{(2)}(x,t) - \lambda^3 K$$

с

$$Q(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_1(x,t)\mathcal{E}_{11}^+ + u_2(x,t)\mathcal{E}_{22}^+\right), \qquad J = \mathcal{E}_{12}^+ + \mathcal{E}_{23}^+ + \mathcal{E}_{41}^+,$$
$$V^{(0)}(x,t) = v_1^{(0)}\mathcal{E}_{11}^+ + v_2^{(0)}\mathcal{E}_{22}^+,$$
$$V^{(1)}(x,t) = v_1^{(1)}\mathcal{E}_{12}^+ + v_2^{(1)}\mathcal{E}_{23}^+ + v_3^{(1)}\mathcal{E}_{41}^+,$$
$$V^{(2)}(x,t) = v_1^{(2)}\mathcal{E}_{13}^+ + v_2^{(2)}\mathcal{E}_{31}^+, \qquad K = 2^6(\mathcal{E}_{21}^+ + 2\mathcal{E}_{32}^+ + \mathcal{E}_{14}^+).$$

Трябва $[L,M] = 0$ за всяко λ. Условието $[L,M] = 0$ води до множество от рекурентни съотношения [10, 18, 44], от които се определят различните $V^{(k)}(x,t)$, чрез потенциала $Q(x,t)$ и неговите производни по x.

След смяна на променливите $u_1 \mapsto iu_1$, $u_2 \mapsto -iu_2$, $x \mapsto 2x$ и $t \mapsto 2t$, уравненията добиват вида

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = 4\frac{\partial}{\partial x}\left(-u_1^3 + 3u_2^2u_1 - 4\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 6u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = 4\frac{\partial}{\partial x}\left(-u_2^3 + 3u_1^2u_2 + 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - 6u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\right).$$

Това са Хамилтонови уравнения за движение

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta q_i} \tag{7.3}$$

с Хамилтониан

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(u_1^4 + u_2^4 - 6u_1^2u_2^2 - 8\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 - 12u_1^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\right),$$

който съвпада, както и трябва да бъде с дадения Хамилтониан в [17].

7.2 Рекурсионни оператори за $B_2^{(1)}$

Намерено е, че

$$\mathrm{ad}_J^{-1} = \frac{1}{16}(6\ \mathrm{ad}_J^3 + \mathrm{ad}_J^7).$$

Аналогично на предходната глава формалното решение за рекурентните съотношения се дава с

$$V_\perp^{(2s)}(x,t) = \Lambda_0 V_\perp^{(2s+1)}(x,t), \qquad V_\perp^{(2s-1)}(x,t) = \Lambda_{2s}^\pm V_\perp^{(2s)}(x,t),$$

където

$$\Lambda_0 X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\frac{\partial X}{\partial x} + \left[Q(x,t), X\right]\right),$$
$$\Lambda_{2s}^\pm X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\frac{\partial X}{\partial x} + \left[Q(x,t), X\right] + ic_s^{-1}\left[Q(x,t), J^s\right](\partial_x)_\pm^{-1}\left\langle\left[Q(x,t), X\right], J^{h-s}\right\rangle\right).$$

Решенията за $V^{(s)}$ в термини на рекурсионните оператори са

$$\begin{aligned}
V^{(2s)} &= \Lambda_0\Lambda_4^{\pm}\Lambda_0\Lambda_4^{\pm}\Lambda_0\ldots\Lambda_0\Lambda_{2s}^{\pm}\Lambda_0\mathrm{ad}_J^{-1}\left[K, Q(x,t)\right],\\
V^{(2s-1)} &= \Lambda_2^{\pm}\Lambda_0\Lambda_4^{\pm}\Lambda_0\ldots\Lambda_0\Lambda_{2s}^{\pm}\Lambda_0\mathrm{ad}_J^{-1}\left[K, Q(x,t)\right].
\end{aligned}$$

Съответните уравнения се дават с

$$i\ \mathrm{ad}_J^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t} - \Lambda_0 V^{(0)} = 0.$$

7.3 Уравнения свързани с алгебрата $A_4^{(2)}$

Аналогично и в случая за алгебрата $A_4^{(2)}$. Рангът и е 2, съответното число на Кокстър е $h = 10$ и експонентите на алгебрата $A_4^{(2)}$ са $1, 3, 7, 9$. Автоморфизмът на Косктър е от ред 10 и с негова помощ се въвежда следната градуировка

$$A_4^{(2)} = \mathop{\oplus}_{k=0}^{9} \mathfrak{g}^{(k)}.$$

Градуировъчното условие е в сила

$$\left[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(l)}\right] \subset \mathfrak{g}^{(k+l)},$$

където $k + l$ се взима по модул 10 [17, 29, 42].

Базис съвместим с градуировката на алгебрата $A_4^{(2)}$ е [29]

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}^{(0)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{11}^{+}, \mathcal{E}_{22}^{+}\}, &&\mathfrak{g}^{(1)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{14}^{-}, \mathcal{E}_{31}^{-}, \mathcal{E}_{42}^{-}\},\\
&\mathfrak{g}^{(2)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{12}^{+}, \mathcal{E}_{23}^{+}\}, &&\mathfrak{g}^{(3)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{21}^{-}, \mathcal{E}_{32}^{-}, \mathcal{E}_{15}^{-}\},\\
&\mathfrak{g}^{(4)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{13}^{+}, \mathcal{E}_{41}^{+}\}, &&\mathfrak{g}^{(5)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{11}^{-} - \mathcal{E}_{22}^{-}, \mathcal{E}_{22}^{-} - \mathcal{E}_{33}^{-}\},\\
&\mathfrak{g}^{(6)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{14}^{+}, \mathcal{E}_{31}^{+}\}, &&\mathfrak{g}^{(7)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{12}^{-}, \mathcal{E}_{23}^{-}, \mathcal{E}_{51}^{-}\},\\
&\mathfrak{g}^{(8)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{21}^{+}, \mathcal{E}_{32}^{+}\}, &&\mathfrak{g}^{(9)} : \mathrm{l.c.}\,\{\mathcal{E}_{13}^{-}, \mathcal{E}_{41}^{-}, \mathcal{E}_{24}^{-}\},
\end{aligned}$$

където е използван базиса (7.1) генериран от матрицата S_1 (7.2).

За извода на уравненията се използва следната Лаксова двойка [29]

$$\begin{aligned}
L &= i\partial_x + Q(x,t) - \lambda J,\\
M &= i\partial_t + V^{(0)}(x,t) + \lambda V^{(1)}(x,t) + \lambda^2 V^{(2)}(x,t) - \lambda^3 K
\end{aligned}$$

с

$$\begin{aligned}
Q(x,t) &= u_1(x,t)\mathcal{E}_{11}^{+} + u_2(x,t)\mathcal{E}_{22}^{+}, \qquad J = \mathcal{E}_{14}^{-} + \mathcal{E}_{31}^{-} + \mathcal{E}_{42}^{-},\\
V^{(0)}(x,t) &= v_1^{(0)}\mathcal{E}_{11}^{+} + (v_2^{(0)} - v_1^{(0)})\mathcal{E}_{22}^{+},\\
V^{(1)}(x,t) &= v_1^{(1)}\mathcal{E}_{14}^{-} + v_2^{(1)}\mathcal{E}_{31}^{-} + v_3^{(1)}\mathcal{E}_{42}^{-},\\
V^{(2)}(x,t) &= v_1^{(2)}\mathcal{E}_{12}^{+} + v_2^{(2)}\mathcal{E}_{23}^{+}, \qquad K = 20(\mathcal{E}_{21}^{-} - 2\mathcal{E}_{32}^{-} + \mathcal{E}_{15}^{-}).
\end{aligned}$$

Аналогично на предходният случай условието $[L, M] = 0$ води до множество от рекурентни съотношения [10, 18, 44], от които се определят различните $V^{(k)}(x,t)$, чрез потенциала $Q(x,t)$ и неговите производни по x.

След смяна на променливите $u_1 \mapsto iu_2$, $u_2 \mapsto -iu_1$ и $x \mapsto 2x$ уравненията добиват вида

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= -2\frac{\partial}{\partial x}\left(3\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + (3u_2 + 6u_1)\frac{\partial u_2}{\partial x} + 3u_2^2 u_1 - 2u_1^3\right),\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= -2\frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - (6u_1 + 3u_2)\frac{\partial u_1}{\partial x} + 3u_1^2 u_2 - 2u_2^3\right).
\end{aligned}$$

Това са Хамилтонови уравнения за движение (7.3) с Хамилтониан H [17]

$$\begin{aligned}
H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Bigg(& u_1^4 + u_2^4 - 3u_1^2 u_2^2 + 4\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \\
& + 3u_2^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - 6u_1^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + 6\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

7.4 Рекурсионни оператори за $A_4^{(2)}$

Намерено е, че

$$\mathrm{ad}_J^{-1} = \frac{2^8}{5^5}(5^4\ \mathrm{ad}_J^9 + 2^8\ \mathrm{ad}_J^{19}).$$

Формалното решение на рекурентните съотношения се дава с

$$V_\perp^{(s)}(x,t) = \Lambda_{s+1} V_\perp^{(s+1)}(x,t).$$

Получаваме

$$\Lambda_0 X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\frac{\partial X}{\partial x} + \big[Q(x,t), X\big]\right),$$

$$\Lambda_s^{\pm} X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\frac{\partial X}{\partial x} + \big[Q(x,t), X\big] + ic_s^{-1}\big[Q(x,t), J^s\big](\partial_x)_{\pm}^{-1}\left\langle [Q(x,t), X], J^{h-s}\right\rangle\right).$$

Съответните нелинейни еволюционни уравнения добиват вида

$$i\ \mathrm{ad}_J^{-1}\frac{\partial Q}{\partial t} - \Lambda_0 V^{(0)} = 0.$$

7.5 Уравнения свързани с алгебрата $A_5^{(2)}$

Усуканата алгебра на Кац-Муди $A_5^{(2)}$ има ранг - 3, числото на Коксътр $h = 10$ и нейните експоненти са $1, 3, 5, 7, 9$ [17, 42]. Автоморфизмът на Коксътр е

$$C(X) = C_2 V(X) C_2^{-1},$$

където V е външния автоморфизъм на алгебрата $\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$, отчитащ симетрията на нейната диаграма на Динкин и C_2 е елемент на подгрупата на Картан. По-точно

$$V(X) = -S_2 X^T S_2^{-1}, \quad S_2 = E_{1,6} - E_{2,5} + E_{3,4} - E_{4,3} + E_{5,2} - E_{6,1}.$$

Тук матриците E_{kj} са 6×6 матрици равни на $(E_{k,j})_{np} = \delta_{kn}\delta_{jp}$ и $S_2^2 = -\mathbb{1}$.

Също така

$$\mathcal{E}_{ij}^{\pm} = E_{i,j} \mp S_2 E_{ij}^T S_2^{-1} = E_{i,j} \mp (-1)^{i+j} E_{7-j,7-i},$$

което очевидно удовлетворява

$$V(\mathcal{E}_{ij}^{+}) = \mathcal{E}_{ij}^{+}, \qquad V(\mathcal{E}_{ij}^{-}) = -\mathcal{E}_{ij}^{-}.$$

Наистина $\mathcal{E}_{ij}^{+}$ задава базис за подалгебрата $sp(6)$ на $A_5^{(2)}$. Елемент от погрупата на Картан C_2 е дефиниран като

$$C_2 = \operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, 1).$$

Базиса има вида

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}^{(0)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{11}^{+}, \mathcal{E}_{22}^{+}, \mathcal{E}_{33}^{+}\}, &&\mathfrak{g}^{(1)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{21}^{+}, \mathcal{E}_{32}^{+}, \mathcal{E}_{43}^{+}, \mathcal{E}_{15}^{-}\},\\
&\mathfrak{g}^{(2)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{31}^{+}, \mathcal{E}_{42}^{+}, \mathcal{E}_{14}^{-}\}, &&\mathfrak{g}^{(3)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{14}^{+}, \mathcal{E}_{25}^{+}, \mathcal{E}_{13}^{-}, \mathcal{E}_{24}^{-}\},\\
&\mathfrak{g}^{(4)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{51}^{+}, \mathcal{E}_{12}^{-}, \mathcal{E}_{23}^{-}\}, &&\mathfrak{g}^{(5)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{16}^{+}, \mathcal{E}_{61}^{+}, \mathcal{E}_{33}^{-} - \mathcal{E}_{11}^{-}, \mathcal{E}_{33}^{-} - \mathcal{E}_{22}^{-}\},\\
&\mathfrak{g}^{(6)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{15}^{+}, \mathcal{E}_{21}^{-}, \mathcal{E}_{32}^{-}\}, &&\mathfrak{g}^{(7)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{41}^{+}, \mathcal{E}_{52}^{+}, \mathcal{E}_{31}^{-}, \mathcal{E}_{42}^{-}\},\\
&\mathfrak{g}^{(8)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{13}^{+}, \mathcal{E}_{24}^{+}, \mathcal{E}_{41}^{-}\}, &&\mathfrak{g}^{(9)} : \text{l.c.}\, \{\mathcal{E}_{12}^{+}, \mathcal{E}_{23}^{+}, \mathcal{E}_{34}^{+}, \mathcal{E}_{51}^{-}\}.
\end{aligned}$$

Градуировъчното условие е както винаги

$$\left[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(l)}\right] \subset \mathfrak{g}^{(k+l)},$$

където $k + l$ се взима по модул 10.

Използваме Лаксова двойка от следния вид

$$\begin{aligned}
L &= i\partial_x + Q(x,t) - \lambda J,\\
M &= i\partial_t + V^{(0)}(x,t) + \lambda V^{(1)}(x,t) + \lambda^2 V^{(2)}(x,t) - \lambda^3 K
\end{aligned}$$

където

$$Q(x,t) \in \mathfrak{g}^{(0)}, \quad V^{(k)}(x,t) \in \mathfrak{g}^{(k)}, \quad K \in \mathfrak{g}^{(3)}, \quad J \in \mathfrak{g}^{(1)}.$$

Това означава, че

$$Q(x,t) = i\sum_{j=1}^{3} u_j(x,t)\mathcal{E}_{jj}^{+}, \qquad J = \mathcal{E}_{21}^{+} + \mathcal{E}_{32}^{+} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{43}^{+} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{15}^{-},$$

$$\begin{aligned}
V^{(0)}(x,t) &= \sum_{j=1}^{3} v_j^{(0)} \mathcal{E}_{jj}^{+},\\
V^{(1)}(x,t) &= v_1^{(1)}\mathcal{E}_{21}^{+} + v_2^{(1)}\mathcal{E}_{32}^{+} + \frac{1}{2}v_3^{(1)}\mathcal{E}_{43}^{+} + \frac{1}{2}v_4^{(1)}\mathcal{E}_{15}^{-},\\
V^{(2)}(x,t) &= -v_1^{(2)}\mathcal{E}_{31}^{+} - v_1^{(2)}\mathcal{E}_{42}^{+} - \frac{1}{2}v_3^{(2)}\mathcal{E}_{14}^{-}, \qquad K = bJ^3.
\end{aligned}$$

Условието $[L, M] = 0$ води до множество от рекурентни съотношения [10, 18, 44], от които се определят различните $V^{(k)}(x,t)$, чрез потенциала $Q(x,t)$ и неговите производни по x.

Уравненията добиват

$$\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-5\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 3u_1\frac{\partial}{\partial x}(3u_2 + u_3) - 2u_1^3 + 3u_1(u_2^2 + u_3^2)\right),\\
\alpha\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(4u_2 + 3u_3) + 3u_2\frac{\partial u_3}{\partial x} - 9u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + 6u_3\frac{\partial u_3}{\partial x} - 2u_2^3 + 3u_2(u_1^2 + u_3^2)\right),\\
\alpha\frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_3 + 3u_2) - 6u_3\frac{\partial u_2}{\partial x} - 3u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - 3u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} - 2u_3^3 + 3u_3(u_1^2 + u_2^2)\right),
\end{aligned}$$

където $\alpha = \frac{5}{b}$.

Съответният Хамилтониан е (7.3)

$$H = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dx \Bigg(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} u_i^4 + \frac{3}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i^2 u_j^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial u_2}{\partial x}\left(\frac{9}{2}u_1^2 - 3u_3^2\right) + \frac{3}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x}(u_1^2 + u_2^2) - 3\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\Bigg).$$

7.6 Спектрални свойства

7.6.1 Обща теория

Общата схема за конструирането на ФАР за оператори на Лакс L с дълбоки редукции е подробно разгледана в [15, 18, 22, 48, 49]. Тук ще бъде разгледано конструирането на ФАР за трите различни Лаксови оператора.

След трансформация на подобие, която диагонализира съответната матрица J, всеки от горните Лаксови оператори изпълнява

$$\tilde{L}\tilde{\chi} \equiv i\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial x} + (\tilde{Q}(x,t) - \lambda \tilde{J})\tilde{\chi}(x,t,\lambda) = 0, \tag{7.4}$$

където $\tilde{J}$ е диагонална матрица с комплексни собствени стойности.

Основен елемент, който е нужен за решаването на правата и обратната задачи за разсейване за $\tilde{L}$ са решенията на Йост $\tilde{\chi}$.

Лаксовите оператори от вида (7.4) с произволно комплекснозначно $\tilde{J}$ позволяват решения на Йост само за потенциали върху компактен носител [48]. Важна теорема доказана от Бийлс и Койфман [48] гласи, че всеки гладък потенциал $\tilde{Q}(x,t)$ може да бъде апроксимиран с произволна точност с потенциал с краен носител.

Следващата стъпка, направена от Бийлс и Койфман [48] е била да се докаже, че могат да се конструират ФАР, които могат да бъдат аналитично продължени в определен сектор Ω_ν в комплексната λ равнина. Тези резултати са обобщени за всяка проста алгебра на Ли в [15, 49]. Резултатът е, че сектора Ω_ν има за граници лъчите започващи от началото $l_{\nu-1}$ и l_ν, виж Фигури (7.1,7.2). Лъчите l_ν се определят от решението на линейните уравнения

$$\mathrm{Im}\,[\lambda\alpha(\tilde{J})] = 0, \tag{7.5}$$

където α е корен от съответната алгебра.

Операторът $\tilde{\mathfrak{L}}$, се дефинира като

$$\tilde{\mathfrak{L}}\tilde{\xi} \equiv i\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} + \tilde{Q}(x,t)\tilde{\xi}(x,t,\lambda) - \lambda[\tilde{J}, \tilde{\xi}(x,t,\lambda)] = 0.$$

Решенията $\tilde{\xi}_\pm(x,t,\lambda)$ трябва да удовлетворяват интегрални уравнения от типа на Волтера

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_+(x,t,\lambda) &= \mathbb{1} + i\textstyle\int_\infty^x dy\; e^{-i\lambda\tilde{J}(x-y)}\tilde{Q}(y,t)\tilde{\xi}_+(y,t,\lambda)e^{i\lambda\tilde{J}(x-y)}, \\ \tilde{\xi}_-(x,t,\lambda) &= \mathbb{1} + i\textstyle\int_\infty^x dy\; e^{-i\lambda\tilde{J}(x-y)}\tilde{Q}(y,t)\tilde{\xi}_-(y,t,\lambda)e^{i\lambda\tilde{J}(x-y)}. \end{aligned}$$

Сега ще се формулират основните свойства на $\tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda)$ - ФАР за $\tilde{\mathfrak{L}}$.

1. Непрекъснатият спектър на $\tilde{\mathfrak{L}}$ запълва лъчите l_ν.

2. Благодарение на $\mathbb{Z}_h$ симетрията, лъчите l_ν затварят ъгли равни на $\pi/2h$ или π/h в зависимост от алгебрата която се разглежда.

3. На всеки лъч l_ν се съпоставя подмножество от корени δ_ν на $\mathfrak{g}$, което удовлетворява условието (7.5). Така на всеки лъч l_ν съответства подалгебра генерирана посредством $E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha$ за $\alpha \in \delta_\nu$.

4. Във всеки сектор Ω_ν може да се пресметнат границите за $x \to \pm\infty$ по лъчите l_ν; по-точно

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty}(e^{-i\lambda Jx}\tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx}) = S_\nu^+(t,\lambda), \\ &\lim_{x\to\infty}(e^{-i\lambda Jx}\tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx}) = T_\nu^-(t,\lambda)D_\nu^+(\lambda), \end{aligned}\right. \qquad \forall\lambda \in l_\nu e^{+i0}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty}(e^{-i\lambda Jx}\tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx}) = S_{\nu+1}^-(t,\lambda), \\ &\lim_{x\to\infty}(e^{-i\lambda Jx}\tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx}) = T_{\nu+1}^+(t,\lambda)D_{\nu+1}^-(\lambda), \end{aligned}\right. \qquad \forall\lambda \in l_{\nu+1} e^{-i0},$$

където $S_\nu^\pm$, $T_\nu^\pm$ и $D_\nu^\pm$ се дават с

$$S_\nu^\pm(\lambda,t) = \exp\left(\sum_{\alpha\in\delta_\nu} s_{\nu,\alpha}^\pm(\lambda,t)E_{\pm\alpha}\right), \quad D_\nu^\pm(\lambda) = \exp\left(\sum_{\alpha\in\delta_\nu} d_{\nu,\alpha}^\pm H_\alpha\right),$$
$$T_\nu^\pm(\lambda,t) = \exp\left(\sum_{\alpha\in\delta_\nu} t_{\nu,\alpha}^\pm(\lambda,t)E_{\pm\alpha}\right).$$

Очевидно те приемат стойности в подгрупата, чиято алгебра на Ли има като положителни корени подмножеството от корени свързани с лъча l_ν, виж Таблици (7.1-7.3).

5. Зависимостта от времето на $S_\nu^\pm$, $T_\nu^\pm$ и $D_\nu^\pm$ се определя от M оператора като

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial S_\nu^\pm}{\partial t} - \lambda^3[\tilde{K}, S_\nu^\pm(\lambda,t)] = 0, \qquad i\frac{\partial D_\nu^\pm}{\partial t} = 0, \\ &i\frac{\partial T_\nu^\pm}{\partial t} - \lambda^3[\tilde{K}, T_\nu^\pm(\lambda,t)] = 0, \end{aligned}$$

където K определя водещия член на M оператора.

6. Асимптотиките на $S_0^\pm$, $T_0^\pm$, $D_0^\pm$ и $S_1^\pm$, $T_1^\pm$, $D_1^\pm$ може да се разглеждат като независими. Всчики други се получават от тях чрез $\mathbb{Z}_h$ симетрия.

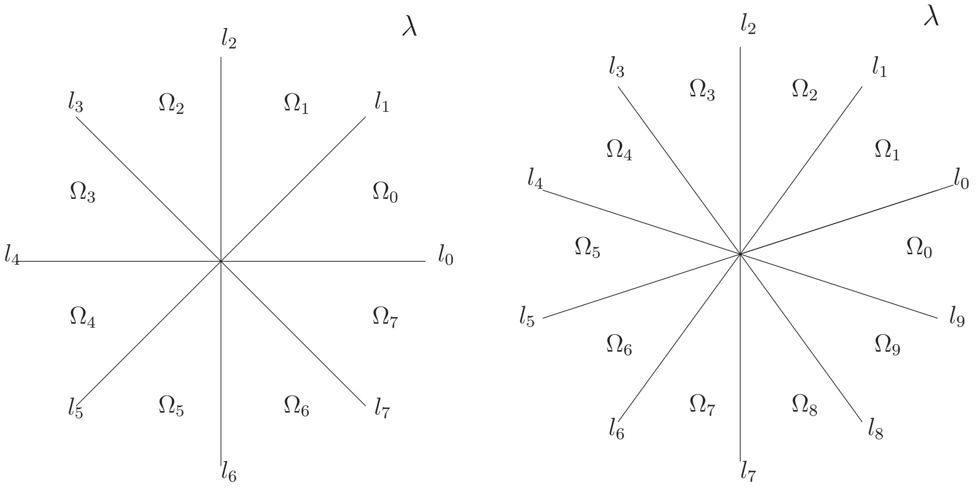
Като следствие на горните свойства е доказана следната лема, която обобщава резултатите на Захаров и Шабат [47] за този тип алгебри.

Лема 2. *ФАР $\tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda)$ на $\tilde{\mathfrak{L}}$ са решения на задачата на Риман-Хилберт*

$$\tilde{\xi}_{\nu+1}(x,t,\lambda) = \tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda)G_{\nu+1}(x,\lambda), \qquad G_{\nu+1}(x,\lambda) = e^{-i\tilde{J}\lambda x}(S_{\nu+1}^-)^{-1}S_{\nu+1}^+ e^{i\tilde{J}\lambda x},$$

която допуска канонична нормировка

$$\lim_{\lambda\to\infty}\tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda) = \mathbb{1}.$$



Фигура 7.1: Непрекъснат спектър и аналитични сектори на ФАР за операторите на Лакс: за случая на $B_2^{(1)}$ - лявата фигура, за случая на $A_4^{(2)}$ - дясната фигура.

Задачата на Риман-Хилберт се удовлетворява от ФАР и се формулира като

$$\tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda) = \tilde{\xi}_{\nu-1}(x,t,\lambda) G_\nu(x,t,\lambda), \qquad \lambda \in l_\nu,$$

където $G_\nu(x,t,\lambda)$ е известна функция. Нормировката е

$$\lim_{\lambda\to\infty} \tilde{\xi}_\nu(x,t,\lambda) = \mathbb{1}.$$

Този важен факт е в основата на метода на обличането [3, 5, 47], с чиято помощ може да се конструират безотражателни потенциали на $\tilde{L}$ и солитонните решения на съответните нелинейни еволюционни уравнения.

Тук са дадени специфичните свойства за трите алгебри поотделно.

7.6.2 $B_2^{(1)}$

Тук $h = 4$ и $\tilde{J} \propto \operatorname{diag}(1, i, 0, -i, -1)$. Лъчите l_ν се дефинират чрез $l_\nu : \arg\lambda = \nu\pi/4$. Те образуват ъгли $\pi/4$ помежду си. Секторите Ω_ν, $\nu = 0, \ldots, 7$ са показани на Фигура (7.1), лявата фигура. Множеството от корени δ_ν свързани с всеки лъч l_ν са дадени в Таблица (7.1).

Таблица 7.1: Подмножество от положителни корени свързани с лъчите $l_\nu \cup l_{\nu+4}$, $\nu = 0, \ldots, 3$ за алгебрата $B_2^{(1)}$.

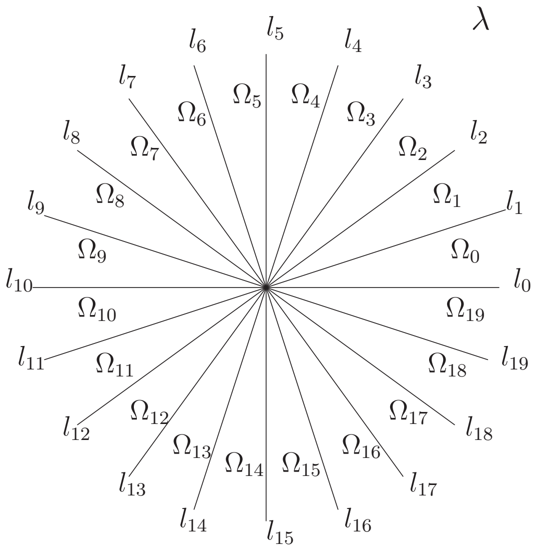
$l_0 \cup l_4$	$l_1 \cup l_5$	$l_2 \cup l_6$	$l_3 \cup l_7$
e_1	$e_1 - e_2$	e_2	$e_1 + e_2$

7.6.3 $A_4^{(2)}$

Аналогично за $A_4^{(2)}$, тук $h = 10$ и $\tilde{J} \propto \operatorname{diag}(\omega, \omega^3, -1, \omega^{-3}, \omega^{-1})$ с $\omega = \exp(2\pi i/10)$. Лъчите l_ν са дефинирани посредством $l_\nu : \arg\lambda = (2\nu+1)\pi/10$, $\nu = 0, \ldots, 9$. Така те сключват ъгли $\pi/5$ помежду си. Секторите Ω_ν, $\nu = 0, \ldots, 9$ са показани на Фигура (7.1), дясната фигура. Множеството от корени δ_ν свързани към всеки лъч l_ν са дадени в Таблица (7.2).

Таблица 7.2: Подмножество от положителни корени свързани с лъчите $l_\nu \cup l_{\nu+5}$, $\nu = 0, \dots, 4$ за алгебрата $A_4^{(2)}$.

$l_0 \cup l_5$	$l_1 \cup l_6$	$l_2 \cup l_7$	$l_3 \cup l_8$	$l_4 \cup l_9$
$e_1 - e_2, e_3 - e_5$	$e_2 - e_5, e_3 - e_4$	$e_1 - e_5, e_2 - e_4$	$e_1 - e_4, e_2 - e_3$	$e_1 - e_3, e_4 - e_5$



Фигура 7.2: Непрекъснат спектър и аналитични сектори на ФАР за оператора на Лакс за случая на $A_5^{(2)}$.

7.6.4 $A_5^{(2)}$

За $A_5^{(2)}$ имаме $h = 10$ и $\tilde{J} \propto \operatorname{diag}(\omega, \omega^3, -1, \omega^{-3}, \omega^{-1})$ с $\omega = \exp(2\pi i/10)$. Лъчите l_ν са дефинирани посредством $l_\nu : \arg\lambda = \nu\pi/10$, $\nu = 0, \dots, 19$. Те сключват ъгли $\pi/10$ помежду си. Секторите Ω_ν, $\nu = 0, \dots, 19$ са показани на Фигура (7.2). Множеството от корени δ_ν свързани към всеки лъч l_ν са дадени в Таблица (7.3).

Таблица 7.3: Подмножество от положителни корени свързани с лъчите $l_\nu \cup l_{\nu+10}$, $\nu = 0, \dots, 9$ за алгебрата $A_5^{(2)}$.

$l_0 \cup l_{10}$ $e_1 - e_6$	$l_1 \cup l_{11}$ $e_1 - e_3, e_4 - e_5$	$l_2 \cup l_{12}$ $e_3 - e_6$	$l_3 \cup l_{13}$ $e_1 - e_2, e_3 - e_5$	$l_4 \cup l_{14}$ $e_5 - e_6$
$l_5 \cup l_{15}$ $e_2 - e_5, e_3 - e_4$	$l_6 \cup l_{16}$ $e_2 - e_6$	$l_7 \cup l_{17}$ $e_1 - e_5, e_2 - e_4$	$l_8 \cup l_{18}$ $e_4 - e_6$	$l_9 \cup l_{19}$ $e_1 - e_4, e_2 - e_3$

Научни резултати

Тази дисертация е по-нататъшно развитие на работите [16] и [17]. Базирайки се на тези работи са построени Лаксовите двойки и са изучени уравненията от типа на МКДВ свързани с алгебрите на Кац-Муди от типа $A_r^{(1)}$, $A_r^{(2)}$, $B_r^{(1)}$. Основните резултати могат да се обобщят.

- Построени са представянията на Лакс за уравненията от типа на МКДВ свързани с алгебрите $A_r^{(1)}$, $A_r^{(2)}$, $B_r^{(1)}$, което позволява получаването на съответните уравнения в явен вид. Показано е, че тези уравнения допускат Хамилтонови формулировки и също така са построени техните Хамилтониани. Хамилтонианите на уравненията за алгебрите с ниски рангове съвпадат с някои от примерите в [17]. Получено е явно уравнение от типа на МКДВ за алгебрата $A_5^{(2)}$.

- Показано е, че Лаксовите оператори за МКДВ уравненията могат да се получат от оператори в общо положение с помощта на групата на редукциите на Михайлов [16].

- Построени са фундаменталните аналитични решения за съответните Лаксови оператори. Решаването на обратната задача за разсейването за всеки от тях е сведено до задача на Риман-Хилберт. Това позволява да бъдат намерени солитонни решения с помощта на метода на обличането на Захаров-Шабат.

- Показано е, че всяко от уравненията от типа на МКДВ принадлежи към йерархия, която се поражда от рекурсионни оператори. Същите рекурсионни оператори пораждат и йерархия от Хамилтонови структури.

Резултатите на дисертацията са публикувани в две журнални статии и в два доклада в трудовете на международни конференции [27, 28, 29, 30].

Публикации

Публикувани доклади от международни конференции

1. V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev,
MKdV-type of equations related to $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$ algebra,
Mathematics in Industry, ed. A. Slavova, 335-344, Cambridge Scholar Publishing (2014).

2. V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev,
MKdV-type of equations related to $B_2^{(1)}$ and $A_4^{(2)}$ algebra,

Springer Proceedings in Physics, 163, Nonlinear Mathematical Physics and Natural Hazards, eds. B. Aneva, M. Kouteva-Guentcheva, 59-69, Springer (2014).

Публикувана статия в международно списание с импакт фактор
V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev,
Integrable equations and recursion operators related to the affine Lie algebras $A_r^{(1)}$,
J. Math. Phys. 56, 052702 (2015).

Публикувана статия в международно списание с импакт ранг
V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev,
On mKdV equations related to the affine Kac-Moody algebra $A_5^{(2)}$,
J. Geom. Symmetry Phys. 39, 17-31 (2015).

Конференции

Изнесени доклади на конференции

1. Eighth Annual Meeting of the Bulgarian Section of Society of Industrial and Applied Mathematics (BGSIAM'13), December 18 - 19, 2013, Sofia, Bulgaria.
   Заглавие на доклада
   MKdV-type equations related to $sl(N,\mathbb{C})$ algebras.

2. The 9-th Workshop Quantum Field Theory and Hamiltonian Systems, September 24-28, 2014, Sinaia, Romania.
   Заглавие на доклада
   MKdV-type equations related to the affine Lie algebra A_r .

Представени постери на конференции
International School and Workshop Nonlinear Mathematical Physics and Natural Hazards, November 28 - December 2 2013, Sofia, Bulgaria.
Заглавие на постера
New type of equations related to $sl(N,\mathbb{C})$ algebra.
Участие в школи и конференции

1. The International Spring School on Physics of Complex Systems, May 13 - June 8, 2012, Trieste, Italy.

2. 7-th Mathematical physics meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, September 9-19, 2012, Belgrade, Serbia.

3. 8-th International School and Workshop on Quantum Field Theory and Hamiltonian Systems, September 19-22 , 2012, Craiova, Romania.

4. SEENET-COSMO 2014 Seminar, February 12-15 2014, Niš, Serbia.

Библиография

[1] Clifford S. Gardner, John M. Greene, Martin D. Kruskal, Robert M. Miura, *Method for solving the Korteweg–deVries equation*, Physical Review Letters 19 (19), 1095–1097 (1967).

[2] P. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Applied Math. 21 (5), 467–490 (1968).

[3] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, *A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I*, Funct. Anal. Appl., 8(3), 226–235 (1974).

[4] V.E. Zakharov, L.D. Faddeev, *Korteweg-de Vries equation: A completely integrable Hamiltonian system*, Funct. Anal. Appl. 5, 280-287 (1971).

[5] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, *Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. II*, Funct. Anal. Appl., 13(3), 166–174 (1979).

[6] S.P. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, V.E. Zakharov, *Theory of solitons: The inverse scattering method*, Plenum, Consultants Bureau, New York (1984).

[7] F. Calogero, A. Degasperis, *Spectral transform and solitons, Vol. I*, North Holland, Amsterdam (1982).

[8] L. D. Faddeev, L.A. Takhtadjan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer Verlag, Berlin (1987).

[9] V.S. Gerdjikov, G. Vilasi, A.B. Yanovski, *Integrable Hamiltonian hierarchies. Spectral and geometric methods*, Lecture Notes in Physics 748, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2008).

[10] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur, *The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems*, Studies in Appl. Math. 53, 249-315 (1974).

[11] D. J. Kaup, *Closure of the squared Zakharov-Shabat eigenstates*, J. Math. Anal. Appl. 54, 849-864 (1976).

[12] V. S. Gerdjikov, E. K. Khristov, *On the evolution equations, solvable by the inverse problem method. I. Spectral theory*, Bulg. J. Phys., 7, 28–31 (1980) (in russian).
V. S. Gerdjikov, E. K. Khristov, *On the evolution equations solvable with the inverse scattering problem. II. Hamiltonian structures and Bäcklund transformations*, Bulg. J. Phys., 7(2), 119–133 (1980) (in russian).

[13] V.S. Gerdjikov, P.P. Kulish, *The generating operator for the $n \times n$ linear system*, Physica D, 3, 549-564 (1981).

[14] V.S. Gerdjikov, *Generalised Fourier transforms for the soliton equations. Gauge covariant formulation*, Inverse Problems 2, 51-74 (1986).

[15] V.S. Gerdjikov, A.B. Yanovski, *CBC systems with Mikhailov reductions by Coxeter automorphism: I. Spectral theory of the recursion operators*, Stud. Appl. Math. 134, 145-180 (2015).

[16] A.V. Mikhailov, *The reduction problem and the inverse scattering problem*, Physica D, 3, 73-117 (1981).

[17] V.V. Drinfel'd, V.G. Sokolov, *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*, Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Sovremennye Problemy Matematiki (Noveishie Dostizheniya), 24, 81-180 (1984) (in russian).
V.V. Drinfel'd, V.G. Sokolov, *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*, Sov. J. Math. 30, 1975-2036 (1985).

[18] V.S. Gerdjikov, A.B. Yanovski, *On soliton equations with $\mathbb{Z}_h$ and $\mathbb{D}_h$ reductions: conservation laws and generating operators*, J. Geom. Symmetry Phys. 31, 57-92 (2013).

[19] A. Yanovski, *Recursion operators and expansions over adjoint solutions for the Caudrey-Beals-Coifman system with $\mathbb{Z}_p$ reductions of Mikhailov type*, J. Geom. Symm. Phys. 30, 105-119 (2013).

[20] A. Yanovski, G. Vilasi, *Geometric theory of the recursion operators for the generalized Zakharov-Shabat system in pole gauge on the algebra $sl(n, \mathbb{C})$: with and without reductions*, SIGMA 8, 87-110 (2012).

[21] V. S. Gerdjikov, A. Kyuldjiev, G. Marmo, G. Vilasi, *Real Hamiltonian forms of Hamiltonian systems*, European Phys. J. B. 38, 635-649 (2004).

[22] V.S. Gerdjikov, A.B Yanovski, *Completeness of the eigenfunctions for the Caudrey-Beals-Coifman system*, J. Math. Phys. 35, 3687-3725 (1994).

[23] V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov, *Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method*, Soviet Phys. JETP 47, 1017-1027 (1978).

[24] A.V. Mikhailov, V.E. Zakharov, *On the integrability of classical spinor models in two-dimensional space-time*, Commun. Math. Phys. 74, 21-40 (1980).

[25] M. Dunajski, *Solitons, instantons and twistors*, Oxford university press (2010).

[26] M.J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM, Philadelphia (1981).

[27] V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev, *MKdV-type of equations related to $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ algebra*, Mathematics in Industry, ed. A. Slavova, 335-344, Cambridge Scholar Publishing (2014).

[28] V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev, *Integrable equations and recursion operators related to the affine Lie algebras* $A_r^{(1)}$, J. Math. Phys. 56, 052702 (2015).

[29] V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev, *MKdV-type of equations related to* $B_2^{(1)}$ *and* $A_4^{(2)}$ *algebra*, Springer Proceedings in Physics, 163, Nonlinear Mathematical Physics and Natural Hazards, eds. B. Aneva, M. Kouteva-Guentcheva, 59-69, Springer (2014).

[30] V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev, *On mKdV equations related to the affine Kac-Moody algebra* $A_5^{(2)}$, J. Geom. Symmetry Phys. 39, 17-31 (2015).

[31] V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev, *On a one-parameter family of mKdV equations related to the* $\mathfrak{so}(8)$ *Lie algebra*, Mathematics in Industry, ed. A. Slavova, 345-354, Cambridge Scholar Publishing (2014).

[32] V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev, *Soliton equations related to the affine Kac-Moody algebra* $D_4^{(1)}$, Eur. Phys. J. Plus 130: 106 (2015).

[33] V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev, *MKdV equations related to the* $D_4^{(2)}$ *algebra*, excepted for publication in Romanian Journal of Physics.

[34] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, 60, Springer (1989).

[35] I. M. Gelfand, B. M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 15, 309–360 (1951).

[36] V. A. Marchenko, *Reconstruction of the potential energy from the phases of scattered waves*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 104, 695–698 (1955).

[37] E. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, Œevres Complètes, 1, CNRS, 137–288 (1984).

[38] W. Killing, *Die zusammensetzung der stetigen endlichen transformationsgruppen I*, Math. Ann., 31 252-290 (1888).

[39] H. Weyl, *Theorie der darstellung kontinuierlicher halb-einfacher gruppen durch lineare transformationen I*, Math. Z., 23 271-309 (1925).

[40] J. Serre, *Complex semisimple Lie algebras*, New York, Springer-Verlag, 48-49 and 52-55 (1987).

[41] V. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).

[42] R. Carter, *Lie algebras of finite and affine type*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).

[43] S. Helgasson, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, New York, (1978).

[44] V.S. Gerdjikov, *Derivative nonlinear Schrödinger equations with $\mathbb{Z}_N$ and $\mathbb{D}_N$ reductions*, Romanian Journal of Physics 58, 573-582 (2013).

[45] V.S. Gerdjikov, *Z_N-reductions and new integrable versions of derivative nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear Evolution Equations: Integrability and Spectral Methods, Ed. A.P. Fordy, A. Degasperis, M. Lakshmanan, Manchester University Press, 367-372 (1988).

[46] V. S. Gerdjikov, A. B. Yanovski, *Gauge covariant formulation of the generating operator. II. Systems on homogeneous spaces*, Phys. Lett. A, 110(2), 53–58 (1985).

[47] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Soviet Physics-JETP 34, 62-69 (1972).

[48] R. Beals, R. Coifman, *Inverse scattering and evolution equations*, Commun. Pure Appl. Math. 38, 29-42 (1985).

[49] V.S. Gerdjikov, *Algebraic and analytic aspects of N-wave type equations*, Contemporary Mathematics 301, 35-68 (2002).