

## РЕЦЕНЗИЯ

върху дисертационен труд  
за присъждане на образователната и научна степен  
“Доктор”

Направление: Физически науки 4.1

Научна специалност: Теоретична и Математична Физика,  
01.03.01.

Автор на дисертационния труд: Александър Алексиев Стефанов

Тема на дисертационния труд: Нелинейни динамични системи  
свързани с безкрайномерни алгебри на Ли

РЕЦЕНЗЕНТ: проф. дфн Бойка Любомирова Анева

Като цяло настоящата дисертация се отнася към областта на групово - алгебричния подход в теоретичната и математичната физика, който е един от най-мощните, и успешни методи за построяване на модели, и създаване на физически теории. Приложението на алгебрични методи в различни области на физиката за описание и точно решаване на нелинейни системи е актуално и активно развиващо се направление. Именно решаването на уравнението на Кортевег де Вриз и намирането на солитонни решения дават нов тласък за построяването на интегрируеми модели на физически системи. Методът на Лакс, представляващ алгебричната формулировка на метода на обратната задача за разсейване се превръща в основна техника за намиране на нови интегрируеми уравнения. Показано е, че и нелинейното уравнение на Шрьодингер допуска солитонни решения като напълно интегрируема Хамилтонова система. Едновременно с това се разглеждат и модифицираното уравнение на Кортевег де Вриз, както и интересни обобщения на уравнението на Кортевег де Вриз.

Нова насока в това направление е намерената от Дринфелд и Шабат връзка между солитонните уравнения и безкрайномерните алгебри на Ли. Те разкриват връзката между модифицираното уравнение на Кортевег де Вриз и афинната алгебра на Кац-Муди за построяване на интегрируема иерархия от би-Хамилтонови уравнения. Последвалите ги серии от публикации в това направление са съсредоточени върху изследвания, използващи безкрайномерни алгебри на Ли като афинните алгебри на Кац-Муди  $A_1^{(1)}$ ,  $A_\infty$ ,  $G_1^{(1)}$ . Развитието на техниката на рекурсионните оператори и метода на групата на редукции на Михайлов се превръщат в мощен апарат за решаване на нелинейни еволюционни уравнения.

Целта на представения за рецензиране труд е изучаването на връзката между интегрируемите иерархии на модифицираното уравнение на Кортевег де Вриз и афинните алгебри на Кац-Муди от типа  $D_4$ . Това се явява естествено продължение на използването на безкрайномерни алгебри на Ли за изследване на интегрируемите уравнения. Фактът че тази алгебра не е използвана досега прави разглеждането особено актуално. Алгебрата  $D_4$  е интересна с това, че е единствената проста алгебра на Ли със свойството да има двузначна експонента 3. Като следствие, съвкупността от модифицирани уравнения на Кортевег де Вриз, свързани с алгебрата  $D_4^{(1)}$ , зависи от два произволни параметъра. Нещо повече, чрез подходяща мащабна трансформация единият параметър може да бъде изключен и крайният резултат да зависи само от един произволен параметър. Освен това наличието на  $S_3$  инвариантност на диаграмата на Динкин, което отново не се наблюдава за никоя друга проста алгебра на Ли, я прави още по-

интересна за приложение, тъй като внася допълнителна симетрия в задачата. Заедно с алгебрата  $D_4^{(1)}$  в дисертацията са изследвани интегрируемите модели, свързани с усуканите афинни алгебри на Кац-Мууди –  $D_4^{(2)}$  и  $D_4^{(3)}$ .

Целта на представения за рецензиране труд е формулирана в увода. Дисертацията е написана на английски език в обем 57 страници и включва: съдържание, увод, шест глави, заключение, приложение и списък на цитираната литература от 62 заглавия. Накрая е даден списък на публикациите, върху които се основава дисертационният труд. Те са три статии в реферирани авторитетни международни списания с импакт фактор и сборник трудове на конференции, както следва: статия в *Eur.Phys.J.Plus* **130** (2015) p.106, статия в *Rom.J.Phys.* **61**, n.1-2 (2016), статия в сб. *Mathematics in Industry*, ed.A.Slavova, 345-355 (Cambridge Scholar Publishing, 2014), както и три доклада, и един постер на международни конференции,. Освен това докторантът е съавтор на още две публикации в реферирани списания с импакт фактор и два публикувани доклада на международни конференции, чиито резултати не са включени в дисертацията.

В увода са очертани основните насоки на развитие на теорията на солитонните уравнения, връзката им с безкрайномерните алгебри на Ли, методът на обратната задача на разсейването и проблемът на Риман-Хилберт. Подчертана е ролята на формулирането на метода на обратната задача чрез двойка оператори на Лакс, както и на рекурсионните оператори и редукцията на Михайлов за получаване на интегрируеми иерархии. Главата след увода е посветена на основни понятия и дефиниции от теорията на простите алгебри на Ли, както и

на афинните алгебри на Кац-Муди. В третата глава са резюмирани основни положения от теорията на интегрируемите модели. Споменати са свойствата на представянето на Лакс като представяне с нулева кривина, направен е кратък преглед на рекурсионните оператори като основно средство за извеждане на уравненията, накратко е представена групата на редукциите на Михайлов и Хамилтоновата формулировка на уравненията. И двете глави съдържат информация за приложения математическия формализъм за постигане на целите на дисертацията във възможно най-кратка и сбита форма. В главите 4, 5 и 6 са изведени уравненията, свързани с алгебрите на Кац-Муди  $D_4^{(1)}$ ,  $D_4^{(2)}$  и  $D_4^{(3)}$ , съответно. Построени са съответните Кокстеровите автоморфизми  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , и са получени параметризиациите на Лаксовите оператори за всеки отделен случай. Разглеждането следва аналогични стъпки за всяка от алгебрите. Във всяка глава е изведена съвкупност от уравнения, представляваща първия нетривиален член на съответната интегрируема иерархия, както и съответният хамилтониан. В седма глава е предложена процедура за решаване на уравненията. За тази цел най-напред са дефинирани решенията на Йост и е построена матрицата на разсейване. Изследвани са спектралните свойства на Лаксовите оператори. Въведени са две съвкупности от минимални данни на разсейване, за които е доказана Лема, че еднозначно определят матрицата на разсейване и потенциала.

За решаването на поставените задачи са използвани съвременни математични методи от теорията на алгебрите на Ли и техните представяния, теорията на безкрайномерните алгебри на Ли, теорията на разсейването. Използвани са прецизни и сложни техники, и методи

като методът на обратната задача на разсейването, проблемът на Хилберт-Риман, методът на редукциите, рекурсионните оператори и представянето на Лакс, фундаменталните аналитични решения.

В дисертацията са получени следните по-важни резултати, представляващи принос в теорията на интегрируемите модели с афинна симетрия на Кац-Мууди:

1. В алгебрата  $D_4^{(1)}$ , с помощта на зададения автоморфизъм  $C_1$  е въведена стандартна градуировка и е зададен базис. Построена е Лаксова двойка, от условието за съгласуваност на която, следва еднопараметрична система от 4 уравнения от вида на модифициран Кортевег де Вриз. За първи път тук е получена система еднопараметрични уравнения на Кортевег де Вриз от модифициран тип, свързана с тази алгебра.

2. В усуканата алгебра  $D_4^{(2)}$  е въведена градуировка чрез композиция на подходящо избран вътрешен автоморфизъм на  $D_4$  от четвърти ред и външен автоморфизъм от втори ред, и е построен базис. Получена е Лаксова двойка, чието условие за съвместимост води до система от три уравнения от вида на модифициран Кортевег де Вриз.

3. В усуканата алгебра  $D_4^{(3)}$  е въведена градуировка чрез композиция на подходящо избран вътрешен автоморфизъм на  $D_4$  от трети ред и външен автоморфизъм от трети ред, и е построен базис. Получена е Лаксова двойка, чието условие за съвместимост води до система от две уравнения от вида на обобщено уравнение на Кортевег де Вриз.

4. Получени са в явен вид рекурсионни оператори за всяка от алгебрите  $D_4^{(1)}$ ,  $D_4^{(2)}$  и  $D_4^{(3)}$ . Намерени са явно съответните иерархии от интегрируеми уравнения, както и техните иерархии от Хамилтонови структури.

5. Изследвани са спектралните свойства на Лаксовите оператори. Построени са фундаментални аналитични решения и е показано, че обратната задача на разсейване се свежда до проблем на Риман-Хиберт върху система от  $h$  прави ключващи ъгли  $\pi/h$ .
6. Изследвано е приложението на метода на обличането в случая на алгебра  $D_4$ . Показано е, че параметризирането на обличащия множител се свежда до решаване на система линейни уравнения.

Математическата формулировка и изчисленията, направени от докторанта, са доста сложни и обемисти, понякога дори трудно обозрими, което е обичайно за метода на обратната задача. На всяка стъпка от провеждане на изследването е необходимо нетривиално хрумване за постигане на резултата, като например: избор на подходящ автоморфизъм на Кокстер, алгебрични преобразувания за извеждане на интегрируеми уравнения, подходящ граничен преход, позволяващ конструиране на съвкупности от минимални данни на разсейване.

Като цяло основните резултати на дисертацията са изведени в представените три научни публикации и три доклада на международни конференции, в които докторантът има съществен принос.

Дисертационният труд е написан математически прецизно и с разбиране. За мен е без съмнение, че докторантът познава добре литературата в областта и има задълбочено отношение към поставените проблеми за изследване, с чието решаване се е справил успешно. Получените резултати говорят за умение да борави и прилага самостоятелно прецизни методи от съвременната теоретична и математична физика. Авторефератът е написан съгласно изискванията

и отразява точно основните положения и научните приноси на дисертационния труд.

След внимателното запознаване с дисертационния труд, в заключение на гореизложеното смятам, че дисертацията отговаря напълно на изискванията за образователната и научна степен “Доктор”. Убедено препоръчвам на Уважаемото Научно Жури да гласува ЗА присъждане на докторанта Александър А. Стефанов на образователната и научна степен “Доктор”.

29.02.2016

София

проф. дфн Б.Анева