

## РЕЦЕНЗИЯ

върху дисертационния труд за придобиване  
на образователна и научна степен „доктор”  
в професионално направление 4.5. Математика,  
научна специалност „Алгебра и теория на числата”

**Автор на дисертационния труд:** гл. ас. Асен Иванов Божилов  
от катедра „Алгебра”

към Факултета по математика и информатика на СУ „Свети Климент Охридски”.

**Тема на дисертационния труд:** „Екстремални задачи за малки и големи множества в графи”.

**Член на научното жури:** акад. проф. дмн Веселин Стоянов Дренски от ИМИ към БАН.

Дисертационният труд е в областта на теорията на графите, която е дял от комбинаториката, но използва техники и от редица други математически дисциплини (например алгебра и анализ, комбинирани с активни пресмятания с компютри) и намира приложения както в математиката и информатиката, така и в техните приложения в други области на науката и практиката. (Например, много от алгоритмите за търсене се базират на теория на графите.) Традиционно, в зависимост от ориентацията на получените резултати и методите за получаването им, дисертациите по теория на графите в България се причисляват към специалностите „Алгебра и теория на числата“ или „Информатика“. Трудът е изложен на хvii + 66 „стандартни” TEX-страници. Състои се от увод (който съвпада с автореферата и съдържа авторската справка и списък на публикациите по дисертацията и техни цитирания), 6 глави и списък от 44 заглавия на използваната литература.

**1. Актуалност на разработвания проблем.** Теорията на графите е класическа, но продължаваща да бъде актуална, област на математиката. За нейно начало се приема известната статия на Ойлер за Кьонигсбергските мостове (която се счита и за първата статия по топология) „Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis“ („Решение на проблем, свързан с геометрията на местоположението“), представена пред Ст. Петербургската академия на науките на 26 август 1735 г. и публикувана в „Коментарите“ на Академията през 1741 г. От тази статия започва и една от пътеводните нишки в развитието на теорията на графите до наши дни: Какво може да се каже за свойствата на един граф, ако са известни някои негови числови характеристики? Сред най-изучаваните числови характеристики на един граф  $G$  са степените на върховете му  $\deg(v)$ , кликовото число  $\omega(G)$  (броят на върховете на максималния пълен подграф на  $G$ ), числото на независимост  $\alpha(G)$  (най-големият брой върхове на  $G$ , които не са свързани с ребра), хроматичното число  $\chi(G)$  (най-малкият брой цветове, в които могат да се оцветят върховете на графа така, че никои два съседни върха да не са от един и същи цвят). Типичен пример за резултат в този дух е свързан с въпросната статия на Ойлер: За даден граф съществува път, който минава през всички ребра точно по веднъж тогава и само тогава, когато графът е свързан и степените на всички върхове (с изключение на най-много на два) са четни числа. Друга типична теорема, която има непосредствено отношение към дисертационния труд, е теоремата на Туран от 1941 г., която дава оценката отгоре  $e(G) \leq n^2(\chi(G)-1)/2\chi(G)$  за броя на върховете  $e(G)$  на графа  $G$  с  $n$  върха. Оттук лесно следва ограничението отдолу  $\omega(G) \geq n/(n-d_1)$  за кликовото число  $\omega(G)$ , където

$d_1$  е средно-аритметичното на степените на върховете на графа. През 1977 г. Николай Хаджииванов и научният ръководител на докторанта Недялко Ненов въвеждат понятието малко множество (или  $\delta$ -множество) от върхове на един граф  $G$ , което обобщава понятието независимо множество. Те изучават свойствата на малките множества в серия от статии, публикувани през 2004-2005 г. През 2006 г. Ненов въвежда числото  $\phi(G)$ , което е равно на най-малкия брой малки множества, на които може да се разбие множеството от върховете на  $G$ . Очевидно,  $\phi(G) \leq \omega(G)$ . Освен това, Ненов подобрява редица известни неравенства, включващи кликовото число  $\omega(G)$ , като доказва, че те остават верни, ако то се замени с  $\phi(G)$ . В представената дисертация се прави детайлно изследване на свойствата на числото  $\phi(G)$ , както и на редица негови обобщения. Считам, че задачите, разглеждани в дисертацията, са интересни и актуални, което се потвърждава и от анализа на литературните източници, използвани в дисертацията, направен по-долу.

**2. Степен на познаване на състоянието на проблема и творческа интерпретация на литературата.** Дисертантът познава много добре състоянието на проблема. Дисертационният труд съдържа списък от 44 литературни източника. От тях 36 са на английски, 3 са на български и по една са на немски, чешки и унгарски. За актуалността на списъка говори фактът, че съществена част от публикациите – 20 – са след 2000 г. От публикациите след 2000 г. 11 са на чужди автори, което допълнително потвърждава актуалността на тематиката. Само ще отбележа, че през 2012 г. излиза обзор на 55 стр. с автори Шевали (Алжир), Фаварон (Франция), Хансберг (Испания) и Фолкман (Германия), посветен на обектите, разглеждани в глава 5. „Образователната” страна на степента „доктор” изисква кандидатът да докаже, че е навлязъл в областта. В случая Асен Божилов не само показва, че е навлязъл в съвременна и в същото време класическа област на математиката, но и е изложил състоянието на проблемите и своите резултати по такъв начин, че да ги направи достъпни за начинаещия читател. Трудът може успешно да служи за навлизане в тематиката на бакалаври, магистри и докторанти (и дори на ученици с повишен интерес към математиката), което несъмнено е негово достойнство.

**3. Научни и научноприложни приноси.** В дисертацията се разглеждат крайни неориентирани графи без примки и кратни ребра. Изследванията продължават изследванията, започнати от Ненов през 2006 г. Първата серия от резултати включват оценки за различни числови параметри на графите, в които кликовото число се заменя с функцията на Ненов  $\phi(G)$ . По такъв начин се подобряват известни преди това резултати, като същевременно се дават нови доказателства на стари теореми. В частност, дава се доказателство на неравенството на Едуардс и Елфик  $\omega(G) \geq n/(n-d_2)$ , където  $d_2$  е средно-квадратичното на степените на върховете на граф  $G$  с  $n$  върха (в оригиналното доказателство на което има съществен пропуск). Освен това се показва, че в някои случаи неравенството на Туран е по-грубо от получените в дисертацията неравенства. Подобрява се и неравенството на Каро и Вей от 1979-81 г.  $\omega(G) \geq \sum_{v \in V(G)} 1/(n-\deg(v))$ , като отново се заменя  $\omega(G)$  с  $\phi(G)$ . Освен средно-аритметичните и средно-квадратичните на степените на върховете на графа, се получават резултати и за средно-степенни от висок ред. В много от случаите резултатите се илюстрират с подходящи примери и се указва точно, за кои графи в неравенствата се достигат равенства. По-нататък се изследват различни модификации на малките множества и се получават връзки между тях и между другите числови параметри на графа. Освен това, наред с малките множества и техните модификации, се изследват дуалните им големи множества. Накрая се дават алгоритми за намиране на функцията  $\phi(G)$  и нейните обобщения. Показва се

коректността на алгоритмите и се установява, че те завършват своята работа за линейно време. Даденото описание на алгоритмите позволява лесна програмна реализация, което ги прави приложими за изследване на конкретни графи. За получаване на основните резултати се използват различни методи, повечето от които почиват на прости идеи и са лесни за проследяване. Коректността на доказателствата не буди съмнение. Прави приятно впечатление същественото използване на аналитични методи, което, доколкото ми е известно, е новост в българските изследвания по теория на графите.

Първата глава на дисертацията съдържа необходимите сведения от теория на графите. Във втора глава се изучават малките множества от върхове. Трета глава е посветена на средно-степенните от по-висок ред. В четвърта глава се разглеждат модификации на малките множества. В пета глава се изучават големите множества и различни техни варианти. Последната шеста глава е посветена на алгоритмите за пресмятане на числовите функции  $\phi_k(G)$  и  $\Omega_k(G)$ .

**4. Преценка на публикациите по дисертационния труд.** Бройката и качеството на публикациите удовлетворяват изискванията, предявявани във ФМИ на СУ. По темата на дисертацията са публикувани 3 статии, излезли от печат през 2012-2013 г., всичките съвместни с научния ръководител. В една от тях съавтори са и Каро и Хансберг. Приемам, че и в трите статии е налице равноправно участие на съавторите. Статията с Каро и Хансберг е публикувана в *Discrete Applied Mathematics* (с импакт-фактор 0.838 за 2013 г., когато е публикувана статията). Другите две статии са публикувани в трудовете на Пролетната конференция на СМБ. Всички публикации са минали рецензиране преди да излязат. И трите статии са достъпни на страниците на списанието и на СМБ в Интернет, освен това са качени в базата от препринти arXiv, която се следи от цялата математическа колегия по света. Две от статиите са цитирани в статия на Елфик и Воцян от 2014 г., а третата статия е цитирана в предварителните варианти на статията им в arXiv, но не е попаднала в окончателния журнален вариант. Освен това, резултатите от дисертацията са докладвани на семинара по алгебра и на научни сесии на ФМИ на СУ и на две Пролетни конференции на СМБ.

**5. Мнения, препоръки и бележки:** Нямам съществени критични бележки и препоръки по дисертацията. Единствените ми забележки се отнасят до изложението. (1) В увода (и в автореферата, който съвпада с увода) се срещат понятия и означения, които са дефинирани в основния текст на дисертацията, но не са обяснени преди това. Това не е от съществено значение при четенето на увода, но създава известни затруднения при четенето на автореферата. (2) Някои от понятията в основния текст на дисертацията не са дефинирани в явен вид и читателят трябва да се досеща за тях от контекста. (3) Има известен разнобой в цитирането на литературата. Някои от източниците са дадени без страници или заглавията са „капитализирани“ непоследователно или неточно (например в заглавието на статията на Туран на немски език съществителните започват с малка буква). Един от литературните източници на български език е даден на кирилица, а заглавията на другите две и на статията на руски са дадени на английски. Мисля, че горните недостатъци са лесно отстраними и не развалят общото положително впечатление от дисертацията.

**6. Авторефератът и справката за приносите** са написани достатъчно подробно и дават ясна и адекватна представа за съдържанието и основните резултати на дисертацията.

**Заклучение:** Представеният дисертационен труд е в класическа, но продължаваща да бъде актуална област. Той е на много добро образователно и научно ниво и

удовлетворява всички изисквания, поставени пред един дисертационен труд в областта на математиката и нейните приложения. Препоръчвам на почитаемото Научно жури да присъди на гл. ас. Асен Иванов Божилов образователната и научна степен „доктор” в професионално направление 4.5. Математика, научна специалност „Алгебра и теория на числата”.

София, 11 септември 2014 г.

Рецензент:

(акад. д.м.н. В. Дренски)