РЕЦЕНЗИЯ

от проф. дмн Тодор Желязков Моллов
професор във ФМИ при ПУ "Паисий Хилендарски"
на дисертационен труд за получаване на
образователната и научна степен „доктор“
по професионално направление 4.5 „Математика“
(Алгебра и теория на числата)
Тема: "Екстремални задачи за малки и
големи множества в графи"
Автор: Асен Иванов Божилов
Научен ръководител: проф. дмн Недялко Ненов

Дисертационният труд е посветен на теорията на графите. Известните математици в България, които работят в това направление, са проф. дмн Николай Хаджииванов и проф. дмн Недялко Ненов. Дисертацията се състои от 79 страници, от които увод от 17 стр., авторска справка, списък на публикациите по дисертацията, съдържание, изложение от 55 стр. и Библиография от 44 заглавия.

1) Анализ на научните и научно-приложните постижения в дисертационния труд

В Глава 1 се дефинират основни понятия и означения от теория на графите.

В дисертацията се разглеждат неориентирани графи с n върха, без кратни ребра и примки. Степен $\deg_G(v) = \deg(v)$ на върха v се нарича броя на съседните на v върхове. Едно подмножество A на множеството $V(G)$ от върховете на G се нарича k-*малко* (k-*голямо*), ако за всеки връх $v \in A$ е изпълнено $\deg(v) \leq n - |A| + k$

($\deg(v) \geq |A| - k - 1$). При $k = 0$ се говори за малко (голямо) множество. С $\mathrm{S}_k(G)$ ($\mathrm{L}_k(G)$) се означава максималния брой елементи в k-малко множество (в k-голямо множество) в $V(G)$. Нека $\varphi_k(G)$ ($\Omega_k(G)$) е минималното цяло t, за което съществува разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на t k-малки множества (на t k-големи множества). Когато $k = 0$, се използва $\varphi(G)$ вместо $\varphi_0(G)$ и $\Omega(G)$ вместо $\Omega_0(G)$. Нека $\mathrm{d}_k = \mathrm{d}_k(G)$ е k-тото средно-степенно на върховете на G. Подмножеството $W \subset \mathrm{V}(G)$ се нарича независимо множество, ако в W няма съседни върхове.

В Теорема 2.9 се дава долна и горна граница на $\varphi(G)$, изразени съответно чрез d_1 и най-голямата степен $\Delta = \Delta(G)$ на върховете на графа G. Доказва се $\omega(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_2}$, където $\omega(G)$ е кликовото чило на G, т.е. най-големият брой върхове на G, всеки два върха на които са съседни (Следствие 2.23). Доказателството на горното неравенство изправя неточност в доказателството му, дадено от Edwards и Elphick (1983). Доказва се, че $\alpha(G) \leq \theta(G) \leq S(G)$ (Твърдение 2.26), където $\alpha(G)$ е числото на независимост на G, т.е. най-големият брой върхове в G, които образуват независимо множество. В твърдение 2.27 е предложен начин за пресмятане на $\mathrm{S}(G)$ и за намиране на едно максимално малко множество. Дава се една горна граница на $S(G)$ (Следствие 2.30), зависеща от максималната степен Δ на G и от броя $e(G)$ на ребрата на G и като следствие се получава неравенството $\alpha(G) \leq \left\lfloor \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2 - n - 2\mathrm{e}(G)} \right\rfloor$, известно като неравенство на Hansen-Zheng.

В Теорема 3.2, в която се използва методът на Лагранж за намиране на екстремуми на функция на няколко променливи, се доказва, че

а) за всяко естествено число $r \leq \varphi(G)$ важи $\varphi(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$,

б) $\varphi(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$ и

в) ако $\varphi(G) \neq 2$, то $\varphi(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$, но съществува граф G, за който $\varphi(G) = 2$ и $\varphi(G) < \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$.
В случаите а) и б) се дават неоходими и достатъчни условия, за да има равенство. В Следствие 3.3 по естествен начин се получават аналогични неравенства, в които $\varphi(G)$ е заменено с $\omega(G)$, като в случаите а) и б) се доказва, че равенство има точно тогава, когато G е пълен $\omega(G)$-регулярен граф на Turán. По такъв начин в Следствие 3.3 е получено усилване на теоремата на Turán.

В глава 4 се разглеждат някои модификации на малки множества, а именно δ_k-малки множества и α-малки множества. Подмножеството $W \subseteq \mathrm{V}(G)$ се нарича δ_k-малко множество на G ако $\mathrm{d}_k(W) \leq n - |W|$. С $\varphi^{(k)}(G)$ се означава най-малкия брой δ_k-малки множества на G, на които $\mathrm{V}(G)$ се разлага. Нека $\mathrm{S}^{(k)}(G)$ е максималния брой върхове в δ_k-множество на G и $\chi(G)$, наречено хроматично число на G, е най-малкото естествено число r, за което G има разлагане на r две по две непресичащи се независими множества. Подмножеството $W \subseteq \mathrm{V}(G)$ се нарича α-малко множество, ако $\mathrm{CW}(W) = \sum_{v \in W} \dfrac{1}{n - d(v)} \leq 1$. Най-малкото естествено число r, за което $\mathrm{V}(G)$ се разлага на r α-малки множества, се означава с $\varphi^{\alpha}(G)$.

В дисертацията се дава горна и долна граница на $\varphi^{(k)}(G)$ (Твърдение 4.8). Доказва се (Теорема 4.9 б)), че съществува естествено число $k_0 = k_0(G)$, такова че за всяко $k \geq k_0$ е в сила

$$\varphi^{(1)}(G) \leq \cdots \leq \varphi^{(k_0)}(G) = \varphi^{(k_0+1)}(G) = \cdots = \varphi(G).$$

Дават се горни граници за $d_k(G)$ (Теорема 4.11), а също и долни граници за $\varphi^{s}(G)$ и $\varphi(G)$ (Следствия 4.12, 4.14, 4.15 и 4.19), изразени чрез $d_k(G)$. Доказва се (Теорема 4.25), че за всяко естествено число k са в сила следните неравенства: $n - \Delta(G) \leq \mathrm{S}^{(k)}(G) \leq n - \delta(G)$.

Дава се горна граница на $S^{(k)}G$, изразена чрез $\Delta(G)$ и $e(G)$ (Следствие 4.28) и две вериги от неравенства, свързани с минималния брой малки множества (Теорема 4.31). Като следствие се получава по-точна оценка за горната граница на $e(G)$ (Следствие 4.33 б)), свързана с класическата теорема на Turán, а именно

$$\mathrm{e}\,(G) \leq \frac{(\mathrm{CW}(G)-1)n^2}{2\,\mathrm{CW}(G)}.$$

Дават се различни долни граници на $S_k(G)$ и $L_k(G)$ (Теорема 5.12), а също долни и горни граници на $S_k(G)$ и $L_k(G)$(Твърдение 5.13). Доказва се, че съществува разлагане на $V(G)$ на k-малко множество V_S и k-голямо множество V_L, като се дават съответно горна граница за $|V_L|$ и долна граница за $|V_S|$ (Теорема 5.19). Дават се различни долни и горни граници за $\varphi_k(G)$ и $\Omega_k(G)$ (Теореми 5.20 и 5.23). Резултатът

$$\alpha(G) \geq \Omega(G) \geq \sum_{v\in V(G)} \frac{1}{\deg(v)+1} \geq \frac{n}{\mathrm{d}_1+1},$$

доказан в Следствие 5.21 б), подобрява неравенството

$\alpha(G) \geq \sum_{v\in V(G)} \frac{1}{\deg(v)+1}$ на Caro-Wei и резултата $\alpha(G) \geq \frac{n}{\mathrm{d}_1+1}$ на P. Erdös and T. Gallai.

В глава 6 се получават два линейни алгоритъма спрямо броя на върховете за пресмятане на $\varphi_k(G)$ и $\Omega_k(G)$ и е доказана тяхната коректност (Теореми 6.1 и 6.4 и Следствия 6.3 и 6.5).

Научните приноси на дисертацията представляват новости за науката. Получени са редица нови оригинални резултати за оценяване на числото на независимост, хроматичното число, кликовото число и други чрез функциите $\varphi(G)$ и $\Delta(G)$ и някои техни обобщения.

Считам, че най-значителните резултати на дисертацията са споменатите Теорема 3.2 и Следствие 5.21.

Дисертантът е добре литературно осведомен.

2) Общо описание на публикациите, отражение на резултатите в трудовете на други автори и импакт-фактор

Публикациите, свързани с дисертацията, са три и са в съавторство с научния ръководител. В една от тях съавтори са още Y. Caro и A. Hansberg. Две от работите са публикувани в трудовете на пролетните конференции на СМБ, които се рецензират. Една от тях е в списание "Discrete and applied mathematics"с импакт-фактор 0.718. Считам, че участието на авторите в тези работи е равностойно. Посочените три работи са цитирани по един път от чуждестранни автори.

3) Апробация на резултатите

Резултатите на дисертационният труд са докладвани на семинара към катедра "Алгебра"на ФМИ на СУ "Св. Кл. Охридски на отчетни сесии на ФМИ и на 41 и 42 пролетни конференции на СМБ (2012 г. и 2013 г.) в Боровец.

4) Критични бележки

1) Доказателството на Твърдение 4.5, стр. 30, се повтаря в доказателството на Теорема 4.31 а).

2) Срещат се технически грешки. Например

2.1) на стр iii, ред 7 отгоре, би трябвало да се пише $d_1 \leq d_2$, а не обратно;

2.2) в (10), на стр. 4, знака П трябва да се замени със знак за сума;

2.3) на стр. 31, в Твърдение 4.6 б), би трябвало δ_{k-1} да се замени с δ_k и обратно;

2.4) на стр. 37:

а) на ред 4 отдолу, вместо n^4 трябва да се пише n^5, б) на ред 3 отдолу, вместо $2/3$ би трябвало да се замени с $(2/3)^4$ и

в) на ред 1 отдолу, вместо $d_4(G)$ трябва да се пише $d_4(G)/n$.

2.5) В Теорема 4.31 б), Пример 4.32 и Следствие 4.33 б) $\mathrm{CW}(\overline{G})$ трябва да се замени с $\mathrm{CW}(G)$.

2.6) В Забележка 5.3, на стр. 44, би трябвало да се пише $(k+t)$-голямо, а не $(k-t)$-голямо.

5) Качества на автореферата

Авторефератът отразява достатъчно пълно съдържанието на дисертационния труд и основните приноси на дисертанта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дисертационния труд са получени редица нови оригинални резултати за оценяване на важни параметри на графите и два линейни алгоритъма за оценяване на основни функции на тези графи. Част от резултатите продължават и обобщават резултати на чуждестранни математици. Представеният дисертационен труд отговаря напълно на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за прилагане на ЗРАСРБ, Правилника за развитие на академичния състав на СУ "Св. Климент Охридски"и специфичните изисквания на ФМИ. Постигнатите резултати в дисертацията ми дават пълно основание да предложа на Почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен "доктор"на Асен Иванов Божилов по професионално направление 4.5 Математика (Алгебра и теория на числата).

31.08.2014 г. Рецензент:

гр. Пловдив (проф. дмн Тодор Моллов)