РЕЦЕНЗИЯ

за дисертацията на Цветелин Стефанов Заевски
на тема:
"Комбинирани процеси на Ито и Леви"
представена за присъждане на образователна и научната степен
"Доктор" в професионално направление 4.5 Математика.

Рецензент: проф. дмн Косто Вълов Митов

Съгласно заповед № РД38-359/05.06.2013г. съм включен в научното жури за защита на дисертацията на Цветелин Заевски и на първото заседание на журито бях избран за рецензент.

Биографична справка. Цветелин Заевски е роден на на 27 ноември 1974 в гр. София. Завършил е Математическа гимназия "Гео Милев", гр. Плевен през 1993 г. Завършва специалността "Приложна математика" бакалавър и магистър във ФМИ, СУ " Св. Климент Охридски". Дипломната му работа за магистърска степен на тема "Модели на финансовия пазар. Оценка на европейски деривати", е защитена с отличие през 1999 г. Приет е за редовен докторант към катедра ВОИС, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски" през 2001 г. Работил е като хоноруван асистент към ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски" по дисциплината "Теория на капиталовите пазари" в периода 2005-2010г. Работил е по проект "Option Pricing under Stochastic Volatility and Tempered Stable Lévy Jumps" заедно с проф. Рачо Денчев, проф. Светлозар Рачев, проф. Франк Фабоци и д-р Йонг Шин Ким в периода 2010-2013 г.

Представени материали. Материалите по защититата, които ми бяха предоставени, включват: хартиени копия на Дисертацията и Автореферата и диск, който, освен тези две неща, съдържа автобиография и две публикации по дисертацията.

Общо описание на дисертацията. Представената дисертация е в една от най-трудните области на стохастиката, а именно стохастичният анализ. Два класа случайни процеси са в основата на този анализ, а именно дифузионните процеси, чиито траектории са непрекъснати функции и процесите на Леви, чиито траектории допускат скокообразни изменения. Тези класове случайни процеси се използват за моделиране на реални процеси в различни области на науката и практиката като физика, химия, икономика, финанси и др. Идеята, която стои в основата на дисертационния труд е да се обобщят в определена насока класическите дифузионни процеси и процесите на Леви чрез рандомизация на началните условия като алтернатива на случайна смяна на временния параметър. Получените процеси са наречени процеси на Ито-Леви и про-

цеси на Леви-Ито, като първото име сочи кой процес се модифицира, а второто име сочи кой процес се използва за рандомизация на началните условия. За дефинираните процеси са доказани основни теореми: за съществуване, Марковско свойство, мартингалност, смяна на мярката, като се следват известните резултати за класическите процеси на Ито и Леви. Тук трябва да се отбележи веднага, че направените обобщения не са тривиални и дисертантът е показал много добро познаване на материята и майсторство при доказателствата на тези твърдения.

Дисертацията се състои от Увод (който е с номер 1), 5 глави и Заключение. Литературата съдържа 67 заглавия.

По-подробно за резултатите. Уводът (Глава 1) съдържа обща формулировка на решаваните в дисертацията проблеми, а именно: дефиниране на комбинирани процеси на Ито-Леви и на Леви-Ито и изследване на техните свойства с оглед приложение във финансите. По тази причина е направен кратък анализ на различните класове стохастични процеси, използвани при моделиране на ценови процеси. Посочени са техните положителни страни и недостатъци. Мотивирано е използването на процеси, които еволюират като дифузионни, но освен това допускат и скокове в случайни моменти от време, каквито са разглежданите в дисертацията процеси.

Глава 2 съдържа основни резултати за класическите дифузионни процеси на Ито. Дадена е дефиницията, показано е Марковското свойство и е даден инфинитезималния генератор. Приведени са решенията на диференцилните уравнения на Колмогоров и на Файнман-Кац. Показано е, че тези процеси са мартингали и е дадена смяната на мярката. Тук ще отбележа доказаните от докторанта Теореми 2.4, 2.5 2.6 и 2.7 за мартингалност на функция от дифузионен процес, които се използват по-нататък, но заслужават внимание и сами за себе си.

Глава 3 съдържа изложение на основни резултати за процесите на Леви. Дефинирана е Поасонова случайна мярка и са формулирани теоремите на Леви-Ито за декомпозицията и на на Леви-Хинчин за представяне на характеристичната функция. Като примери са дадени четири от най-важните класове процеси на Леви: Поасонов, Сложен Поасонов, Стабилни и Модифицирани стабилни процеси. Даден е инфинитезималния генератор и е отбелязано Марковското свойство. Дадена е дефиниция на стохастичен интеграл относно процес на Леви и накрая е показана смяна на мярката.

Глава 4 е най-голяма по обем и съдържа резултатите, получени в дисертацията за процесите на Ито-Леви. Тези процеси са получени като началното условие в стохастичното диференциално уравнение на дифузионния процес не е вече фиксирано число. Сега началното условие е случайна величина, получена като функция от независим процес на

Леви.

Въпросът за съществуване е решен по два начина. В първия случай са зададени крайномерните разпределения и са проверени за тях условията на Теоремата на Колмогоров. При втория подход е конструиран процес върху декартовото произведение на вероятностните пространства, в които са зададени дифузионният процес и процесът на Леви съответно. Показано е, че двете дефиниции са еквивалентни. Казаното в увода, че се променя само началното условие на стохастичното диференциално уравнение не е съвсем точно. И от двете дефиниции се вижда, че траекторията на новия процес е съставена грубо казано от парчета от разни траектории на дифузионния процес, всяка от който започва от различна начална точка в зависимост от състоянието на процеса на Леви в момента на наблюдение. Така за дефинирането на съставния процес се използва фамилия от зависими решения на СДУ (4.1), започващи от различни начални точки, но управлявани от едно и също Брауново движение, $B(t)$.

По-нататък е следвана структурата на Глава 2, в която се излагат резултатите за класическите дифузионни процеси. Така в параграф 4.5 е изведена формула за условното математическо очакване относно естествената филтрация на процеса. Доказана е и формула за условното математическо очакване на дисконтирания процес (Твърдение 4.4). В §4.6 е показано, че дефинирания процес на Ито-Леви, започващ в дадена точка z не е Марковски спрямо естествената филтрация, породена от него, но е Марковско семейството от всички процеси с всевъзможните начални точки спрямо филтрацията, породена от това семейство.

В §4.7 е дефиниран инфинитезималният генератор на процеса и е намерена формула за него при $s = 0$ и за произволно s. След това е дефиниран обобщен инфинитезимален генератор над множеството от операторите, изобразяващи множеството от функции на една променлива в точки от реалната права. Показано е, че обичайният инфинитезимален генератор е частен случай от обобщения. В следващите параграфи са изведени уравненията на Колмогоров и Файнман-Кац за процеса на Ито-Леви и е дадено обяснение за единственост на представянето на процеса. Параграф 4.11 заема централно място в тази глава. В него се разглежда въпросът за смяна на мярката. Дефинирана е еквивалента мярка чрез една еквивалентна мярка за процеса на Ито и фамилия от подходящо избрани еквивалентни мерки за процеса на Леви. Относно новата мярка са намерени формули за математическото очакване, условното математическо очакване, инфинитезималния генератор и производната на Радон-Никодим, свързваща двете мерки.

Както е известно, смяната на мярката най-често се прави с цел спрямо новата мярка процесът да е мартингал. В параграфи 4.12 и 4.13 се

дефинира псевдомартингална мярка, като фамилия от мерки, зависещи от времето и удовлетворяващи условието за съгласуваност 4.1. В параграф 4.14 е даден начин за конструиране на такава псевдомартингална мярка. Параграф 4.16 съдържа важното Твърдение 4.24 и Следствие 4.6, в които е намерена мартингалната мярка за процес на Ито-Леви. В параграф 4.17 са дадени обобщения на теореми 2.4, 2.5, 2.6 и 2.7 за процесите на Ито-Леви.

Глава 5 има същата структура като Глава 4, като тук се дефинира процес на Леви-Ито. Иначе казано, това е процес на Леви, сумиран с функция от процес на Ито. Изведени са формулите за математическото и условното математическо очакване и е изяснен въпросът за Марковост на процеса. Намерен е вида на инфинитезималния генератор (Твърдения 5.4, 5.5) в обичайния смисъл и е дефиниран обобощен инфинитезимален генератор. Показан е начин за конструиране на еквивалентна мярка, и въз основа на това на мартингална мярка за процеса на Леви-Ито. Получени са резултати, обобщаващи Теореми 2.4, 2.5, 2.6 и 2.7 за процесите на Леви-Ито.

Последната Глава 6 съдържа приложение на процесите, изследвани в предните две глави за моделиране в областта на финансите. В първите 3 параграфа са дадени необходимите факти от тази област. В параграф 6.4.1 (Теорема 6.6) е изведна формула за цена на Европейска call-опция, при условие, че ценовият процес на базовия актив е процес на Ито-Леви, който удовлетворява определени допълнителни условия.

Като частен случай е получена формулата на Black-Scholes.

В параграф 6.4.2 е разгледан случаят, когато цената на базовия актив следва процес на Леви-Ито, удовлетворяващ някои допълнителни условия. Отново е изведена формула за цената на Европейска call-опция (Теорема 6.7). Като частен случай е получена отново формулата на Black-Scholes.

Бележки. Считам, че някои от фактите в Глава 3 са излишни и не се ползват по-нататък, макар от друга страна да дават по-завършен вид на главата.

Според мен е било добре примерът от §4.3 (или друг подобен) да се развие през цялата Глава 4 и Глава 6 за пояснyване и подкрепа на представените резултати.

Означенията са твърде нечитаеми и трудни за разгадаване в цялата работа, но има места, където съм сигурен, че и докторантът трудно ще се ориентира в тях, ако не сега, то след известно време (например стр. 78-79 и др.).

Използвано е едно странно означение с вертикална черта и някакво равенство след нея, което както се изясни в личен разговор с дисертанта, не е условие при условно математическо очакване, а е нещо друго.

Многоетажните формули като тези на стр. 38, 39, 52 и др. от някъде ги е видял или сам ги е измислил докторанта?

Всичко това прави работата много трудна, а на места според мен и невъзможна за проверка в разумно време. Считам, че това се дължи преди всичко на сложността на разглежданата материя, но може би е трябвало докторантът да се постарае да направи изложението по- малко трудно за четене.

Има и дребни правописни грешки, на който няма да се спирам.

Авторефератът представлява дисертацията без доказателствата, така че отразява пълно и точно нейното съдържание. Считам, че заявените в него приноси действително са такива.

Публикации по дисертацията. Представени са две работи по дисертацията. Те са публикувани в международното списанието Concrete and Applicable Mathematics, доста са обемисти и съдържат действително основни части от дисертационния труд. По такъв начин са удовлетворени изискванията на правилника на ФМИ за докторска дисертация. Сведения за цитирания нямам, докторантът също не е посочил цитирания.

Не познавам лично докторанта и заключението ми се основава на представените материали.

Заключение. Въз основа на казаното до тук и въпреки направените бележки по изложението, считам, че представения дисертационен труд отговаря на изискванията на ЗРАСРБ и правилниците за неговото приложение. Давам положителна оценка на дисертационния труд и предлагам на научното жури да присъди на Цветелин Заевски образователната и научна степен ДОКТОР в професионално направление 4.5 Математика.

гр. Плевен
15.08.2013г.

/_____/
Косто Митов