

**СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ
БЪЛГАРИЯ, СОФИЯ 1164
БУЛ. "ДЖЕЙМЗ БАУЧЪР" 5**



**SOFIA UNIVERSITY
FACULTY OF PHYSICS
1164 SOFIA, BULGARIA
5 JAMES BOURCHIER BLVD.**

Катедра "Методика на обучението по физика"

Светослав Светославов Забунов

**Създаване и използване на система от 3D симулации към курса по
механика**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

НА ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД

за получаване на образователно-научната степен:
"Доктор"

по научна специалност
05.07.03 Методика на обучението по физика.

**Ръководител на докторанта:
доц. д-р Мая Гайдарова**

**Рецензенти:
проф. дхн. Борислав Тошев
проф. дфн. Иван Узунов**

София, 2011г.

СЪДЪРЖАНИЕ

Увод.....	4
Цел на дисертационния труд	5
Задачи	5
ГЛАВА 1. Същност на електронното обучение	6
1.1. Особенности на съвременното електронно обучение	6
1.2. Основни характеристики на съвременните системи за електронно обучение	7
1.2.1. Общ преглед на някои от модерните системи за електронно обучение	7
1.3. Преглед на съществуващи симулации по механика, предназначени за обучение на ученици и студенти	8
Изводи към първа глава	8
ГЛАВА 2. Математични модели за разработване на симулациите по механика.....	9
2.1. От векторна алгебра към матричен анализ	9
2.2. Крайни ротации	9
2.3. Свойства на ротационната матрица, свързани с реализираните симулации	10
Изводи към втора глава	10
ГЛАВА 3. Система от реализирани симулации по механика за обучението на студенти по обща физика	11
3.1. Махало в стерео 3D симулация	11
3.1.2. Възможности на симулацията	11
3.1.3. Описание на интерфейса	17
3.2. Движение на твърдо тяло в стерео 3D-симулация.....	18
3.2.1. Описание на проблема	19
3.2.2. Възможности на симулацията	19
3.2.3. Описание на интерфейса	21
3.3. Изучаване на инерчния елипсоид на твърдите тела	22
3.3.2. Използване на симулацията със студенти	22
3.4. Въртене на летящ диск в рамките на 3D-симулацията.....	23
3.4.1. Въртене на идеално твърдо тяло	23
3.4.2. Главни централни инерчни оси и симулиране на летящия диск	23
3.5. Конструкции на Poinsot и Binet в стерео 3D-симулацията на твърдо тяло.....	25
3.5.1. Общи понятия и елементи на потребителския интерфейс.	25
3.5.3. Конструкция на Poinsot.	25
3.5.4. Примери за симулации с представяне на конструкцията на Poinsot.....	27
3.5.5. Конструкция на Binet.	28
3.6. Аналитично решение на уравненията на Euler и сравнение с численото решение по време на симулацията	29
3.6.1. Аналитично решение	29
3.6.2. Сравнение на двете решения	30
Изводи към трета глава.....	30
ГЛАВА 4. Оценка на ефективността на създадената система от симулации.....	31
4.1. Съответствие на съдържанието на симулациите към структурата на общия курс по механика за първи курс във Физически факултет на СУ	31
4.2. Хипотези за проверка	32
4.3. Методи на изследване на ефективността на създадената система.....	32
4.3.1. Проучване и анализ на научна и учебна литература.	32
4.3.2. Открито наблюдение	32
4.3.3. Групова дискусия.....	32
4.3.4. Анкета.....	32
4.3.5. Анализ на посещенията и участието на студенти в предложения им сайт в интернет пространството - http://ialms.net/sim	32
4.4. Реализирани дидактически ситуации в обучението по механика	32
4.4.1. Онагледяване при лекции.....	32
4.4.2. Самостоятелна работа на студентите	32

4.5. Резултати от проведените наблюдения и анкети.....	33
4.5.1. Качествено наблюдение.	33
4.5.2. Анкета. Резултати от проведената анкета общо за всички анкетиращи студенти (37).....	33
4.5.3. Анализ на резултатите от анкетата.	35
Изводи към четвърта глава.....	37
ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМАТА В СПИСАНИЯ	38
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	39
Основни приноси в дисертационния труд	40
ЛИТЕРАТУРА.....	41

СПИСЪК НА ИЗПОЛЗВАНИ СЪКРАЩЕНИЯ

Клетъчните мрежи от трета генерация	3G
Конкурентно ориентирано обучение	KOO
Локална мрежа	ЛМ
Система за електронно обучение	CEO
Система за управление на релационна база от данни	СУРБД
Съдържанието на учебния материал	СУМ
Универсална мобилна телекомуникационна система	УМТС
Характеристична информация	ХИ
Application Programming Interface	API
Application Service Provider	ASP
Berkeley Software Distribution	BS
Gnu's Not Unix	GNU
Computer Based Training	CBT
Hyper Text Markup Language	HTML
Java 2 Platform Enterprise Edition	J2EE
International Data Corporation	IDC
Instructional Management Standards	IMS
Internet Protocol	IP
Lightweight Directory Access Protocol	LDAP
Learning Management System	LMS
Message Digest 5	MD5
Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment	MOODLE
Moving Picture Experts Group	MPEG
MPEG-1 Audio Layer 3	MP3
Open Knowledge Initiative	OKI
Personal Digital Assistant	PDA
Portable Document Format	PDF
PHP: Hypertext Preprocessor	PHP
Sharable Content Object	SCO
Shareable Content Object Reference Model	SCORM
Software Development Kit	SDK
Structured Query Language	SQL
Schools Interoperability Framework	SIF
Wideband Code Division Multiple Access	WCDMA
Wireless Local Area Network	WLAN
Wireless Application Protocol	WAP
Extensible markup language	XML

Увод

Най-общото определение за електронното обучение е обучение, използващо електронни и информационни технологии. Съвременните изисквания към електронното обучение обаче налагат редица допълнителни и задължителни норми като работа в Интернет среда, достъп през уеб-браузър, платформена независимост и др. Електронните симулации на физични процеси използват тези предимства като въвеждат качествено нови методически подходи като допълнение на съществуващите. Следва изброяване на най-важните предимства на електронното обучение:

- Ефективно обучение на глобално разпределена аудитория.
- Намалени разходи за публикуване и разпространение.
- Намаляване или елиминиране на разходите, свързани със заплатите на преподавателите, наемите за залите, пътуването на студентите, квартира и храна. Тези разходи са директно оценими.
- Индивидуализирано инструктиране – нещо, което печатният материал не може да предостави, а курсовете, водени от преподаватели са скъпоструващи.
- Отговаря на специфични нужди.
- Дава възможност за адаптиране на системата към нуждите на студента. Например поставяне на изучаваният физически процес в ситуация важна за студента и съответстваща на търсените от него знания.
- Самоопределяне на скоростта на обучение от обучаващия се.
- Намаляване на времето, прекарано от работещите извън работното място.
- Възможност за получаване на всяка информация по всяко време, създаваща условия на студентите да работят с удобство през почивните си часове или в къщи.

Въпреки своите безспорни предимства, електронното обучение има и недостатъци в сравнение с традиционното:

- Поради разходите за разработка предварителното инвестиране, за внедряването на електронно обучение, е по-голямо. Нужно е осигуряване на финансиране. До някъде този недостатък е само привиден, тъй като подготовката на преподаватели, участващи в традиционното обучение е също скъп и времеемък процес.
- Изисквания към използваните технологии. Тук е нужно да се определи дали наличната технологична инфраструктура може да постигне целите на обучението, дали допълнителните технологични разходи ще бъдат оправдани и дали ще бъде постигната съвместимост на софтуера и хардуера. Настоящият проект обръща внимание на този недостатък като цели разработените симулации да са приложими на стандартна компютърна база без специални изисквания към хардуера.

Причините, които в дадени случаи възпрепятстват електронното обучение да конкурира другите методи за обучение са:

- Технологичните пречки, стоящи пред потребителите. Те най-често са: недостъпност до нужните технологии и “технофобия”.
- Намаленото културно и социално взаимодействие. Потискането на персонализирането на човешката дейност от комуникационните механизми като например: невъзможността за предаване на езика на тялото (жестове) и елиминирането на прекия контакт.

Използването на електронно обучение при изучаването на физиката в университетите разкрива възможности, които са недостъпни чрез класическите методи на преподаване. Тези възможности са основно в две направления: практическо изучаване на ситуации и постановки, които не могат да бъдат реализирани (или това е твърде опасно) в лабораторни условия и представяне на характеристики на изучавания процес по време на практическото занимание, като вектори, траектории, конструкции, които не е възможно да бъдат наблюдавани в лабораторни условия. Настоящата дисертация разглежда иновативни компютърни симулации, създадени от автора, като метод на електронното обучение по физика, който постига гореспоменатите цели.

Разработените симулации са в две направления в областта на механиката: изучаване на сферично махало (в частните му случаи) и изучаване на движение на идеално твърдо тяло. Тези

явления и описващите ги величини и закономерности са трудни за изучаване, поради векторния им характер и затова бяха избрани за реализиране на симулации. Подобни симулации не бяха открити в Интернет пространството. Подходът е реализиран на базата на триизмерни интерактивни стереометрични симулации на компютър (платформено независими в среда Интернет - <http://ialms.net/sim/>).

Реализирането на симулации, включващи представяне на явления, които до сега не са били изучавани с тези средства се осъществява благодарение на информационните технологии и Интернет и тяхното развитие през последните години. Така Интернет се превръща в механизъм не само за световно разпространение на информация, но и в средство за разпространение на знания и обучение. Необходимостта от онагледяване и по-добро представяне на част от механиката, както и липсата на съществуващи симулации, определи целта на настоящата работа.

Цел на дисертационния труд

Целта на дисертационния труд е създаване на система от симулации, предназначени за обучението на студенти в общия курс по механика (първи курс) и проверка на нейната ефективност.

Задачи

За реализация на дефинираната по-горе цел се очертаха следните задачи:

Изясняване на същността на 3D симулациите като част от електронното обучение и проучване на съществуващи такива.

Избор на елементи от курса по механика, съобразно изучаваното учебно съдържание за създаване на симулации.

Изучаване на подходящи математични модели за реализиране на симулациите.

Създаване на симулации по механика.

Проверка на ефективността на симулациите в реални условия.

ГЛАВА 1. Същност на електронното обучение

В резултат от анализа на разпространените CEO, направен по-късно в настоящата глава, се разкрива една реалност на неусвоени ресурси, които изчислителните машини предлагат на потребителите на CEO. Това са ресурси, които позволяват разработването и реализацията на адаптивни симулации на физични процеси, с цел обучение по физика на студенти.

В модерните системи за електронно обучение съществуват опити за постигане на адаптивност по автоматичен път – системата за електронно обучение, според определен алгоритъм, променя учебното съдържание в съответствие с поведението на учащия се. В същото време се цели запазване на съвместимост между CEO от практическа гледна точка, а именно преносимост и повторно използване на курсовете за обучение и техни компоненти и взаимозаменяемост на отделни модули на CEO. При наличие на несъвместимост между две CEO, преподавателят ще положи почти същите усилия за пренасяне на учебен материал, каквито е положил при неговото първоначално създаване. Това несъответствие дава основния тласък за създаването на стандартизиран формат на учебния материал, използван в системите за електронно обучение. Най-разпространеният такъв формат е Shareable Content Object Reference Model (SCORM) – модел за преносимо учебно съдържание. SCORM предполага в своите дефиниции и елементи на индивидуализация и адаптиране, която се постига чрез структурата на учебното съдържание.

В SCORM се използва дървовидна структура за описание на йерархичните връзки в процеса на обучение. Тази структура описва целия курс на обучение и не е обобщена спрямо даден абстрактен компонент на учебното съдържание.

SCORM използва езика XML (Extensible markup language) за дефиниране на учебното съдържание и правилата за последователност.

Модерните системи за електронно обучение предлагат редица възможности, по-важни от които са:

- Организиране и достъп до учебната програма на курса на обучение;
- Управление на административна и организационна информация;
- Регистрация и организация на обучаваните;
- Създаване, организация и съхранение на учебния материал;
- Допълнителни ресурси, включващи материали за самостоятелна подготовка и външни ресурси от библиотеки и Интернет;
- Подсистема за тестване и самооценка;
- Електронни средства за комуникация, включващи електронна поща, форуми, чат-стаи;
- Поддържане на статистика, подходяща за следене и оценка на учебния процес;
- Взаимовръзка между отделните услуги и звена на системата за електронно обучение;
- Виртуални събития, които се случват във виртуални класни стаи или зали за лекции;
- Обучение със скорост, контролирана от обучаващия се;
- Сътрудничество във формата на учебни групи, чат-стаи или дискуссионни групи;
- Индивидуален план за обучение, съобразен с личните цели и професията на обучаващия се;
- Първоначално оценяване на знанията на обучаващия се.

1.1. Особенности на съвременното електронно обучение

В началото обучението с помощта на електронните технологии се е състояло в това да се автоматизира учебния процес, използвайки компютърните технологии и да се създаде основа за самообучение с минимална или отсъстваща ангажираност на преподавател. Този вид обучение е придобил наименованието Computer based training (CBT). Модерният e-learning произлиза от CBT като поставя нови цели, а именно електронното обучение да е възможно да се осъществи на всяко място и по всяко време и да цели максимално съответствие с индивидуалните нужди на обучаваните.

Модерните тенденции в развитието на електронното обучение са свързани с все по-голямата нужда за пряко приложимо обучение в производството в условията на глобализация на световната икономика [A. Jefferies, 2005].

Съществуват три важни направления в електронното обучение, свързани с Интернет:

- Обучение "по всяко време и на всяко място";
- Конкурентно-ориентирано обучение (КОО);
- Обучение, което продължава цял живот.

Тези направления спомагат развитието на електронното обучение в посока усъвършенстване на индивидуално-адаптивните методи, които то прилага.

Мобилно обучение

През последните години терминът "мобилно обучение" придоби голямо значение като включи в себе си обучението, осъществявано посредством безжичните технологии и преносими изчислителни системи.

Мобилният хардуер представлява хардуер, изграждащ компютърни системи, които могат лесно да бъдат пренасяни от едно място на друго и в същото време да поддържат безжична информационна връзка.

1.2. Основни характеристики на съвременните системи за електронно обучение

1.2.1. Общ преглед на някои от модерните системи за електронно обучение

В процеса на работа бяха изследвани възможностите и услугите предлагани от някои известни системи за електронно обучение. Предлаганите на пазара SEO могат да бъдат разделени на две групи според начина им на разпространение. При SEO, както и при останалите софтуерни продукти, се използват два основни метода на разпространение: безплатно разпространение (freeware-подобни лицензи) и платено разпространение. Безплатните системи обикновено се разпространяват в отворен код (open source), като в тези случаи възможностите за промяна на кода от потребителите или от трети лица са регламентирани в лицензното споразумение. От софтуерни продукти, разпространяващи се напълно безплатно, не могат да се очакват добри резултати. Компромисен вариант представляват софтуерните продукти, предлагани безплатно, но с набор от платени поддържащи услуги от страна на производителя като инсталиране, консултация по e-mail, телефон и др.

Някои от по-известните софтуерни пакети за електронно обучение са Class Server, BlackBoard, WebCT, Prometheus, Lotus Learning Space, Moodle, Claroline.

Class Server е система предлагана от Microsoft. BlackBoard доставя учебния материал чрез помагала, даващи възможност на преподавателите да оформят курсов материал, дискуссионни форуми, виртуални чат-стаи, он-лайн оценяване и организиране на център с ресурси, достъпен от Интернет. Включена е и възможност за настройка на личните данни, комуникация между потребителите и оценяване. WebCT е разработена от факултета по компютърни науки в Университета на Британска Колумбия, Канада. WebCT предлага базисна среда, в която се поставят уеб-страници. Преподавателите, използващи WebCT, имат предимството да създават почти всичко, което пожелаят. Гъвкавостта на WebCT позволява на потребителите да оформят много от аспектите на техните курсове. Prometheus, е система, в която курсовете се построяват чрез попълване на съответни полета.

Потребителите могат да изтеглят информация за учебната програма и своите задачи и домашни директно на ръчен компютър (PDA).

Според страницата на компанията, която произвежда системата, всички текстови полета в Prometheus приемат международни символи (букви) като западно европейки, традиционен китайски, опростен китайски, японски, кирилица, UNICODE и др.

Lotus Learning Space е продукт на IBM със съвместимост с други продукти на IBM. За постигане на по-добра съвместимост IBM се отказва от производството на този продукт като се насочва към предоставянето на Lotus Learning Management System. Съществуват и системи с отворен код, като Moodle и Claroline. Друг отворен проект е Sakai основан от Мичиганския университет, Университета на Индиана, МИТ, Станфорд, консорциума uPort и Инициативата за Отворени Знания (Open Knowledge Initiative (OKI)). Този проект е разработен на базата на BSD-подобен лиценз.

1.3. Преглед на съществуващи симулации по механика, предназначени за обучение на ученици и студенти

До тук разгледаните системи за електронно обучение са с общо предназначение и целят запознаване с тенденциите в тази област. Следва да бъде направено и по-тясно тематично проучване в областта на настоящата дисертация, а именно симулациите на физични процеси, използвани за обучение по физика и по-конкретно по механика.

След задълбочено проучване и разглеждане на над 260 симулации, предназначени за обучение по механика на ученици и студенти се разкри неусвоеният ресурс на 3D-компютърната графика и симулирането на механични процеси в пространството посредством интерактивни приложения. Особено отчетливо се откри липсата на сериозни симулации в областта на движението на твърдо тяло и съпровождащите го класически постановки в обучението по механика като сферично махало и твърдо тяло.

Следва преглед на по-интересните симулации, открити от автора при направеното проучване:

1. Симулацията представена на адрес <http://surendranath.tripod.com/AppletsJ2.html> реализира равнинно махало, като демонстрира нивата на потенциална и кинетична енергия с графики. Възможно е задаването на дължината на нишката и началният ъгъл на махалото.

2. Симулацията представена на адрес <http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=11> реализира отново равнинно махало, при което може да бъде наблюдаван импулсът във всеки един момент.

3. Следната симулация (<https://www.msu.edu/user/brechtjo/physics/pendulum/pendulum.html>) е отново на равнинно махало. Може да бъде зададена масата на махалото, неговата дължина и земното ускорение. Отклонението на махалото във времето е изобразено графично.

4. Следният пример представя модел на материални точки, свързани с пружини (адрес <https://people.ifm.liu.se/freka/particleworld/>). Рисува се траекторията на крайната материална точка.

5. Пример за 3D-симулации са симулациите по физика на Масачузетският технологичен университет (Massachusetts Institute of Technology - MIT) - <http://ocw.mit.edu/ans7870/8/8.02T/f04/visualizations/electrostatics/21-Molecules3d/21-Dynamics3d320.html>.

Симулациите на MIT предлагат достъп в среда Интернет и 3D-графично представяне в уеб-браузър, което е едно от изискванията на съвременното електронно обучение. Гледната точка (камерата) може да бъде въртяна, с цел да се наблюдава постановката от различни ъгли. Тези симулации помагат в ученето и разбирането на процесите и явленията в молекулярната физика, кристалните решетки и електромагнетизма.

6. Друг пример е софтуерният продукт ThreeDimSim, който предлага безплатна тестова версия. Той предлага задълбочена настройка на началните условия за разнообразни механични системи, които се дефинират чрез свързването на твърди тела чрез връзки помежду им.

7. Още един пример е софтуерният продукт NewtonPlayGround v1.53 (безплатна тестова версия). Той притежава подобни качества на предишния пример като осигурява гъвкав начин за свързване на твърди тела в механизми и наблюдаване на тяхното движение при дадени начални условия и действащи сили.

Изводи към първа глава

Първа глава прави преглед на електронното обучение и тенденциите в неговото развитие. Резюмирани са повечето известни и широко разпространени системи за електронно обучение с общо предназначение. Конкретно в областта на симулациите по физика са отбелязани съществуващи системи, предназначени за обучение в областта на механиката. Те представляват ценно помагало в учебния процес по физика, но техните свойства и характеристики са твърде ограничени за едно пълноценно и ефективно практическо обучение. Недостатъците се състоят в липса на пълно представяне на симулираното явление. Тези предпоставки дават възможност за нововъведение в системите за електронно обучение по физика, а именно представяне на величините, които съпровождат физичните процеси (векторни, скаларни и тензорни) и реализиране на симулации в тримерна графика и стерео режим на наблюдение в среда Интернет.

ГЛАВА 2. Математични модели за разработване на симулациите по механика

Представените симулации от една страна спомагат студентите да усвоят лежащия в основата математически модел. От друга страна правдоподобността на симулациите се дължи на това, че те са изградени на базата на даден математически модел – моделът на класическата Нютонова механика.

Настоящата глава представя математическите методи, използвани при реализиране на симулациите.

При симулирането на физични явления в областта на механиката е нужно да се дефинират предварително функции, описващи движението на телата - линейно и въртливо. След това е нужно да се извърши числено интегриране на така дефинираните величини. Описанието на линейното движение е тривиално, затова то няма да бъде разисквано детайлно. От друга страна, за да се обоснове автентичността на разработените симулации трябва да се обърне внимание на въртливото движение. Трябва да се опише функция, която проследява въртенето на едно твърдо тяло или на материална точка около даден център и след това тази функция трябва да бъде диференцирана до втори ред, така че нейната производна да зависи от силите, действащи върху симулираните обекти, респективно да зависи от моментите, които тези сили създават. Следващата стъпка е да се реализира симулацията чрез числено интегриране на така получените функции. Както ще стане дума и по-късно в текста крайните ротации не са комутативни и не могат да бъдат описани чрез вектор или векторна функция [Goldstein, H., et al., 2001]. Затова ротацията се описва от матрична функция – ротационна матрица. За да се обоснове правилността на изградените симулации е нужно да се дефинира процеса на диференциране на ротационната матрица и след това да се направи заместване на ротационната матрица с ротационен кватернион, който от своя страна да бъде диференциран. Нуждата от прилагане на кватерниони като форма на редукция на ротационната матрица се налага от тяхното превъзходство над ротационната матрица по отношение на бързодействие на изчисленията при компютърна реализация.

Благодарение на пълния динамичен модел на симулирания процес, системата е способна да показва различни променливи като вектори под формата на стрелки в пространството. Като пример може да се разгледа фигура 4, на която се виждат векторите \vec{F}_g (хомогенно гравитационно поле), вектор на импулса \vec{P} , векторите на резултантната сила \vec{F} и на силата на реакцията \vec{F}_r . От друга страна при симулацията на твърдо тяло се демонстрира външния момент \vec{M} , създаден от силата \vec{F} и рамото \vec{r}_F . Инерционната отправна система е показана с вектори $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$. Още се наблюдава и векторът на момента на импулса \vec{L} и ъгловата скорост $\vec{\omega}$.

2.1. От векторна алгебра към матричен анализ

Матричното представяне на вектори е за предпочитане и то ще бъде приложено от тук нататък, защото векторите се използват в матричното смятане. Матричното представяне дава възможност за ясно формулиране на различни уравнения.

2.2. Крайни ротации

Нека се дефинира крайна ротация в тримерното евклидово пространство с ос на ротация \vec{n} и ъгъл θ . Ротацията трансформира вектор \vec{r}' в \vec{r}_1 :

$$(2.2.1a.) \quad \vec{r}_1 = \vec{n}(\vec{n}\vec{r}') + (\vec{r}' - \vec{n}(\vec{n}\vec{r}')) \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{r}') \sin \theta$$

Горното равенство може да бъде представено и в матрична форма като така се изразява вектор \vec{r}_1 като резултат от ротацията на вектор \vec{r}' на ъгъл θ с ос на ротация, определена от единичния вектор \vec{n} .

Така представената ротация е дясно-ориентирана и се дефинира в дясно-ориентирана координатна система. Видно е, че ротацията на вектор \mathbf{r}' във вектор \mathbf{r}_1 се постига с помощта на ротационна матрица \mathbf{R} на дадената крайна ротация. Кратко се записва така:

$$(2.2.2.) \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'\mathbf{R}$$

Ротационната операция има три степени на свобода, но ротационната матрица има девет елемента. Възможно е елементите на ротационната матрица да се представят, използвайки само три независими променливи. Чрез подходящи произведения се извеждат шест уравнения относно елементите на ротационната матрица. Така деветте променливи на ротационната матрица се редуцират до три независими променливи. Като пример на едно възможно представяне на крайната ротация с три променливи може да се спомене моделът на ъглите на Euler. По-интересна редукция на ротационната матрица е редукцията до ротационни кватерниони, при която липсва неопределеността, която е характерна за моделът с ъглите на Euler, но с цената на въвеждане на четири вместо само три променливи.

2.3. Свойства на ротационната матрица, свързани с реализираните симулации

Както беше вече споменато крайните ротации са некомутативни, но са асоциативни. Ако две последователни ротации се приложат към вектор \mathbf{r}' , редът на тези ротации не може да бъде променян:

$$\mathbf{r}'\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \neq \mathbf{r}'\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$$

В същото време асоциирането на отделните умножения е произволно:

$$(\mathbf{r}\mathbf{R}_1)\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \mathbf{r}\mathbf{R}$$

Единичният вектор \mathbf{n} , определящ оста на ротацията, е собствен вектор на ротационната матрица. Вектор \mathbf{n} и който и да е друг вектор, успореден на него не търпят трансформация при ротацията:

$$\mathbf{n}\mathbf{R} = \lambda\mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{R} - \mathbf{1}) = 0$$

Собственото число λ на който и да е собствен вектор на \mathbf{R} е 1 (в множеството на реалните числа). Съществува едно изключение на това правило. При ротацията на π радиана λ е -1 и всеки вектор е собствен на ротационната матрица, освен един – оста на ротацията, чието собствено число е отново 1.

Свойствата на ротационната матрица могат да бъдат обобщени като специален случай на свойствата на ортогоналните матрици. Ротационната матрица представлява специална ортогонална матрица.

Всички 3×3 ортогонални матрици представляват ортогоналната група $O(3)$, а всички ротационни матрици със същата размерност – специалната ортогонална група $SO(3)$.

Сега лесно се вижда, че умножението на ротационни матрици представлява отново ротационна матрица.

Изводи към втора глава

Втора глава дава основата, върху която се изграждат симулациите за обучение по механика. Математичният модел е важен от три гледни точки:

Обосновава правдоподобността на симулациите.

Дава възможност за създаване на примери и задачи, които естествено съпровождат практическите занимания със симулациите.

Определя насоки за това как да бъдат използвани симулациите и какви физични закони и явления могат да бъдат представени чрез тях на студентите.

ГЛАВА 3. Система от реализирани симулации по механика за обучението на студенти по обща физика

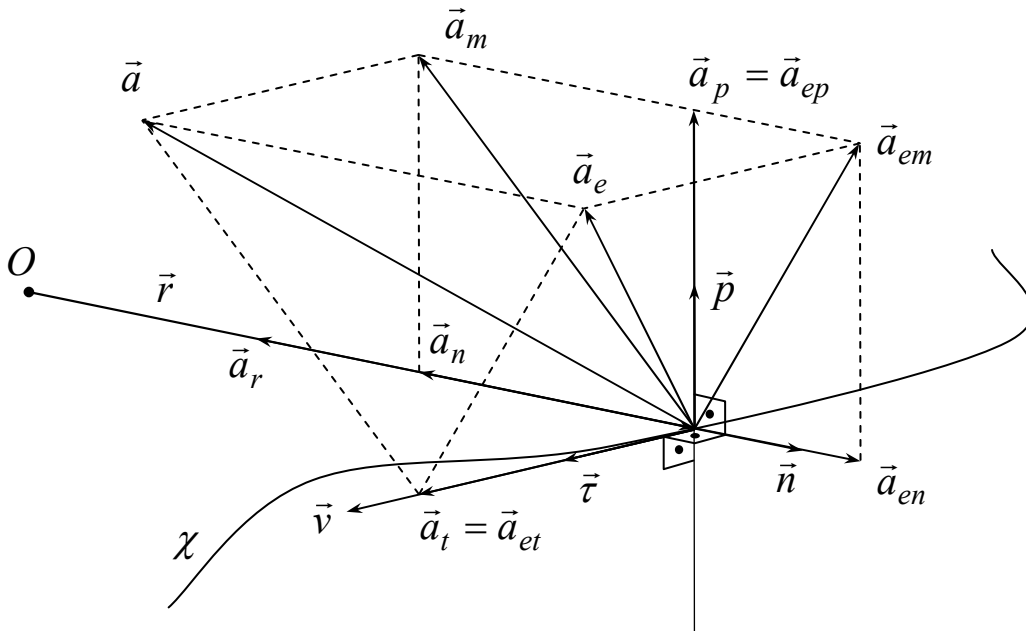
Към настоящата дисертация бяха реализирани две групи стерео 3D-симулации по механика: симулация на сферично махало и симулация на идеално твърдо тяло.

3.1. Махало в стерео 3D симулация

3.1.2. Възможности на симулацията

Пространственото движение на махалото е представено на фигура 9. От този общ случай произлизат всички частни случаи като равнинното махало и коничното махало. Траекторията на махалото е обозначена с χ . В пространствения случай тя е крива по повърхността на сфера с радиус r , равен на дължината на нишката (фиг. 7). От тук следва, че уравнения (3.1.2.1) и (3.1.2.6) са в сила и при сферичното махало. Аналогично на равнинния случай, пълното ускорение е равно на:

$$(3.1.2.12) \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_m = \vec{a}_t + \vec{a}_n + \vec{a}_p$$



Фигура 9. Кинематика на сферично махало.

\vec{a}_t - тангенциално ускорение: компонента на \vec{a} по посока на вектора на скоростта \vec{v} или по посока на единичния тангенциален вектор към траекторията $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}, v = |\vec{v}|$ ($\vec{\tau} \parallel \vec{v}$).

\vec{a}_m - нормално ускорение: компонента на \vec{a} по посока перпендикулярна на \vec{v} ($\vec{\tau}$).

\vec{a}_n - централно нормално ускорение: компонента на \vec{a}_m по посока на радиус-вектора \vec{r} или $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ ($\vec{n} \parallel \vec{r}$).

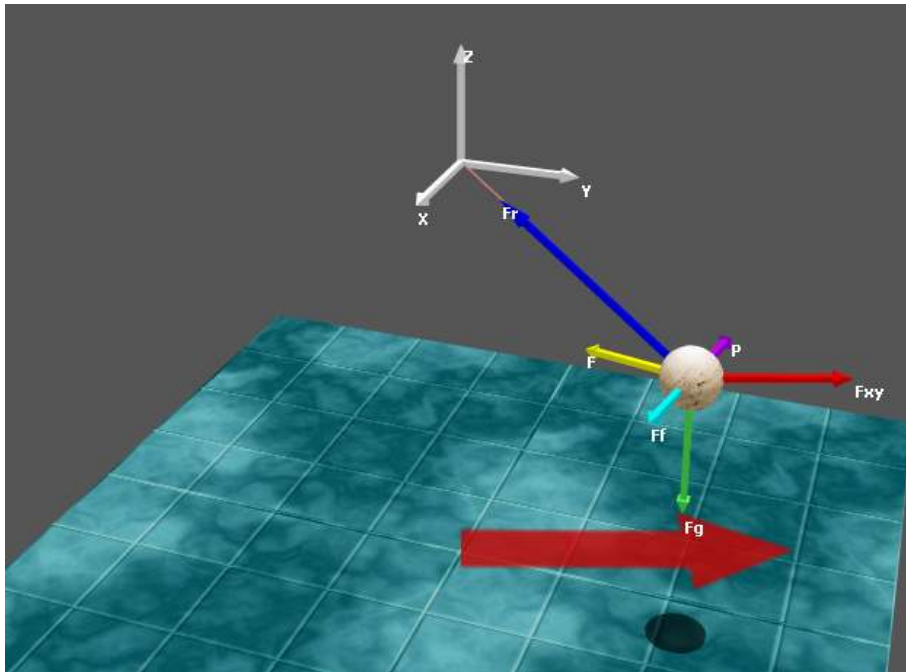
\vec{a}_p - компонента на \vec{a}_m по посока на единичния вектор $\vec{p} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

И тук нека отбележим взаимната ортогоналност на компонентите на \vec{a} : $\vec{a}_t \perp \vec{a}_n$, $\vec{a}_t \perp \vec{a}_m$, $\vec{a}_t \perp \vec{a}_p$, $\vec{a}_n \perp \vec{a}_p$.

Представената система за електронно обучение позволява включването на различни външни сили (фиг.4) като сила на триене (синьо-зелен вектор), сила на тежестта (зелен вектор) и периодична хармонична външна сила в равнината Oxy (червен вектор). Отново, както и в

предходния случай, пълното ускорение на махалото е равно на сумата от външното ускорение и ускорението на реакцията:

$$(3.1.2.13) \quad \vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$



Фигура 10. Сферично махало при въздействието на три външни сили.

Нека разложим външното ускорение на три компонента по единичните взаимно перпендикулярни вектори $\vec{t}, \vec{n}, \vec{p}$ (фиг. 9):

$$(3.1.2.14) \quad \vec{a}_e = \vec{a}_{et} + \vec{a}_{en} + \vec{a}_{ep}$$

От (3.1.2.12), (3.1.2.13) и (3.1.2.14) следва, че:

$$(3.1.2.15) \quad \vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r = \vec{a}_{et} + \vec{a}_{en} + \vec{a}_{ep} + \vec{a}_r = \vec{a}_t + \vec{a}_m = \vec{a}_t + \vec{a}_n + \vec{a}_p$$

За $\dot{\vec{t}}$ имаме, както и преди, че е перпендикулярен на \vec{t} . Ако разгледаме пълното ускорение като производна на скоростта и вземем предвид (3.1.2.12) получаваме:

$$(3.1.2.16) \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d v \vec{t}}{d t} = \dot{v} \vec{t} + v \dot{\vec{t}} = \vec{a}_t + \vec{a}_m \Rightarrow \begin{cases} \dot{v} \vec{t} = \vec{a}_t \\ v \dot{\vec{t}} = \vec{a}_m \end{cases}$$

Така можем да изразим $\dot{\vec{t}}$ чрез \vec{a}_m :

$$(3.1.2.17) \quad \dot{\vec{t}} = \frac{1}{v} \vec{a}_m$$

И след това да заместим в (3.1.2.16):

$$(3.1.2.18) \quad v = -\frac{1}{v} \vec{r} \cdot \vec{a}_m \Rightarrow v^2 = -\vec{r} \cdot \vec{a}_m = -\vec{r} \cdot \vec{a}_n - \vec{r} \cdot \vec{a}_p$$

Векторите \vec{r} и \vec{a}_p са ортогонални, затова тяхното скалярно произведение е нула, а векторите \vec{r} и \vec{a}_n са успоредни. Така, вземайки предвид от (3.1.2.15), че $\vec{a}_n = \vec{n} a_n$, (3.1.2.18) се опростява до:

$$(3.1.2.19) \quad v^2 = -r a_n \Rightarrow a_n = -\frac{v^2}{r} \Rightarrow \vec{a}_n = \vec{n} a_n = -\vec{n} \frac{v^2}{r}$$

Отново получаваме, че големината на вектор \vec{a}_n зависи само от моментната скорост v и не зависи от моментните стойности на други параметри на махалото.

Но от (3.1.2.15) имаме, че:

$$(3.1.2.20) \quad \vec{a}_n = \vec{a}_{en} + \vec{a}_r = -\vec{n} \frac{v^2}{r} \Rightarrow \vec{a}_r = -\vec{n} \frac{v^2}{r} - \vec{a}_{en}$$

Както в равнинния случай, ускорението на реакцията е равно на разликата между централното нормално пълно ускорение \vec{a}_n и централното нормално външно ускорение \vec{a}_{en} . При определена моментна скорост \vec{v} , различна от нула имаме, че $|\vec{a}_r| \neq |\vec{a}_{en}|$.

Направените разглеждания в предишната точка са в помощ при дефинирането на условията за реализиране на конично махало, като частен случай на сферичното махало. Коничното махало се движи в равнина с нормала вектор \vec{Oz} или единичния вектор в тази посока \vec{n}_z (виж фиг.5). По тази причина траекторията му χ е окръжност. При разглежданото конично махало външна сила е само силата на тежестта, следователно външното ускорение се свежда само до земното ускорение $\vec{g} = -\vec{n}_z g$ ($g > 0$). От (3.1.2.20) имаме, че:

$$(3.1.2.21) \quad \vec{a}_r = \vec{n} a_r = -\vec{n} \frac{v^2}{r} - \vec{a}_{en} = -\vec{n} \frac{v^2}{r} - \vec{g}_n = -\vec{n} \left(\frac{v^2}{r} + g_n \right),$$

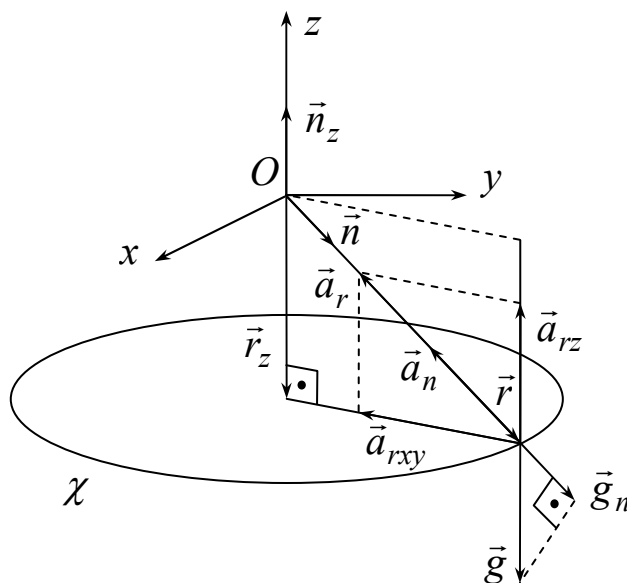
където $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, а $\vec{g}_n = \vec{n} g_n$ е компонентът на \vec{g} по посока на \vec{r} . Нека означим с $r_z = \vec{n}_z r_z$ проекцията на \vec{r} по посока \vec{n}_z . От подобните триъгълници на фигура 9 и след като вземем предвид знаците на съответните скаларни величини получаваме, че $\frac{g_n}{g} = -\frac{r_z}{r} \Rightarrow g_n = -\frac{r_z g}{r}$. След заместване в

(3.1.2.21):

$$(3.1.2.22) \quad \vec{a}_r = -\vec{n} \left(\frac{v^2}{r} - \frac{r_z g}{r} \right) = -\vec{n} \frac{1}{r} (v^2 - r_z g)$$

Пълното ускорение на коничното махало не трябва да има компонента по Oz , защото скоростта винаги е хоризонтална, т.е. за $\vec{a}_{rz} = \vec{n}_z a_{rz}$ (компонентът на \vec{a}_r по посока на \vec{n}_z) имаме, че $\vec{a}_{rz} = -\vec{g}$, но от подобните триъгълници на фигура 9 също се вижда, че:

$$(2.1.2.23) \quad \frac{a_{rz}}{a_r} = \frac{r_z}{r} \Rightarrow a_r = \frac{r a_{rz}}{r_z} = \frac{r g}{r_z}$$



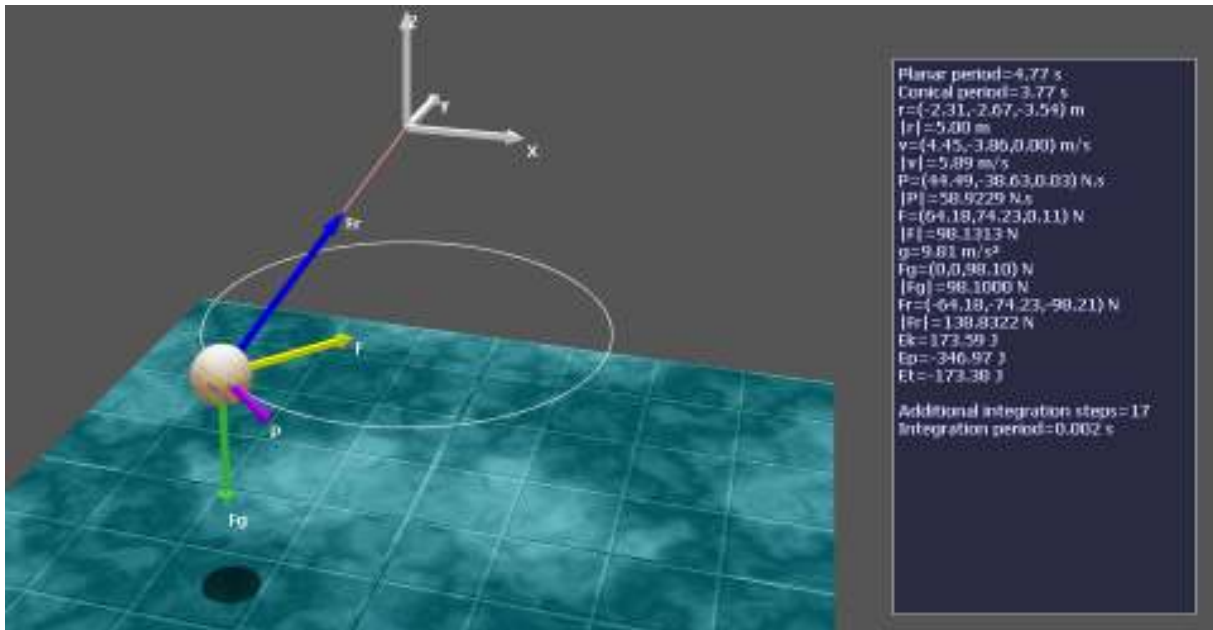
Фигура 11. Кинематика на конично махало.

Окончателно от (3.1.2.22) и (3.1.2.23) получаваме, че:

$$(3.1.2.24) \quad \frac{rg}{r_z} = -\frac{1}{r}(v^2 - r_z g) \Rightarrow v^2 = -g \frac{r^2 - r_z^2}{r_z}$$

Ако равенство (3.1.2.24) е изпълнено няма да съществува ускорение по вертикала и така скоростта винаги ще остава хоризонтална. Нека отбележим, че при $r_z \notin [-r; 0)$ уравнение (3.1.2.24) няма реално решение.

Описаната интерактивна симулация дава възможност на студента да наблюдава това явление. Използвайки формула (3.1.2.24) се определя началната хоризонтална и тангенциална скорост на махалото и след това се проследява неговото поведение.



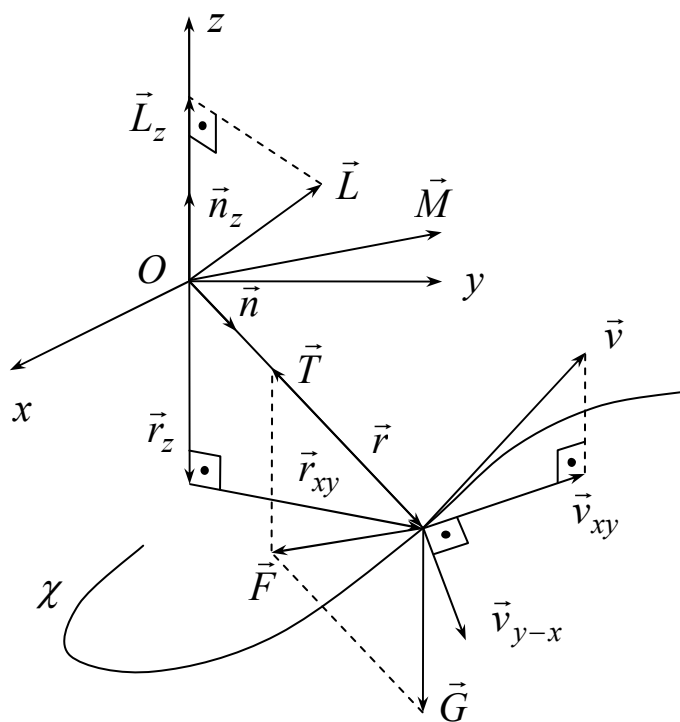
Фигура 12. Конично махало в симулация.

Поради ясния случай на равнинното махало, няма да се спираме на неговата динамика и ще пристъпим директно към динамика на конично махало. Основният въпрос, който възниква след определяне на условието за движение по конус е дали това състояние на махалото е стабилно. Под стабилно състояние на дадена динамична система в случая разбираме състояние, при което изменение на пълната енергия на системата би предизвикала пропорционално изместване на траекторията на движение. Пълната енергия на сферичното махало (в частен случай на коничното махало) е:

$$(3.1.2.25) \quad E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgr_z = m \left(\frac{v^2}{2} + gr_z \right)$$

От (3.1.2.24) и (3.1.2.25) се вижда, че v и r_z са свързани с две различни зависимости и за да се промени траекторията (r_z) е нужна промяна на общата енергия. Също така, при малки промени (пертурбации) в траекторията (r_z) следва пропорционално изменение в общата енергия, което ограничава промяната на траекторията в рамките на пертурбацията. Като контрастен пример може да се даде свободното въртене на твърдо тяло около главна централната инерчна ос с междинен (не екстремален) инерчен момент [Goldstein, H., et al., 2001]. За разлика от коничното махало последният пример демонстрира нестабилно въртене, защото при безкрайно малки изменения (пертурбации) на оста на въртене (респективно на енергията на въртене) се навлиза в степен на свобода на траекторията, която периодично „обръща“ тялото. Това обръщане се състои в завъртане на оста на въртене на ъгъл, клонящ към 180° .

А какво е поведението на махалото в общия случай, когато не се движи нито във вертикална равнина, нито по конус?



Фигура 13. Динамика на сферично махало.

За отговора на този въпрос не е достатъчно разглеждането на кинематичния модел на сферичното махало, а трябва да се обърне внимание на неговата динамика и се изгради конструкция на неговото движение, на базата на динамичния закон, на който то се подчинява, и ограниченията, които естествено се налагат при наличието на единствена външна сила – силата на тежестта.

Единствената външна сила в разглеждания случай (силата на тежестта \vec{G}) е постоянна по големина и посока и е по направление на оста Oz и обратна по посока на единичния вектор \vec{n}_z , като $\vec{G} = -\vec{n}_z G$ и $G = mg > 0$ (фиг. 13). Така за момента на резултантната сила $\vec{F} = \vec{T} + \vec{G}$, действаща на махалото (сумата от силата на тежестта \vec{G} и силата, с която действа нишката \vec{T}) имаме:

$$(3.1.2.26) \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{T} + \vec{r} \times \vec{G} = \vec{r} \times \vec{G}$$

Като вземем предвид казаното по-горе, че \vec{G} е вертикален вектор, следва, че $\vec{r} \times \vec{G}$ е ортогонален на вертикала и лежи в равнината Oxy , т.е. моментът \vec{M} на общата сила, действаща на махалото, лежи в равнината Oxy .

От друга страна за момента на импулса на махалото имаме:

$$(3.1.2.27) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

От където за неговата производна спрямо времето следва, че:

$$(3.1.2.28) \quad \dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = m(\vec{v} \times \vec{v}) + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

След като \vec{M} лежи в равнината Oxy и в същото време се явява производна на \vec{L} следва, че компонентът на \vec{L} по посока на вектор \vec{Oz} е постоянна: $\vec{L}_z = \vec{n}_z L_z = const$ (фиг. 11) и следователно зависи само от началните условия. Това е важно ограничение върху вектора на момента на

импулса, което ще влезе в употреба при изграждането на конструкцията на сферичното махало. Вземайки предвид (3.1.2.27) ограничението за L_z може да бъде записано още така:

$$(3.1.2.29) \quad L_z = m(r_x v_y - r_y v_x) = m(r_x, r_y, 0)(v_y, -v_x, 0) = m \vec{r}_{xy} \cdot \vec{v}_{y-x}$$

Т.е. може да се представи като масата умножена по скаларното произведение на проекцията на \vec{r} в равнината Oxy ($\vec{r}_{xy} = (r_x, r_y, 0)$) и завъртаната на -90° проекция на \vec{v} в равнината Oxy ($Rot_{Z(-90^\circ)}(\vec{v}_{xy}) = \vec{v}_{y-x} = (v_y, -v_x, 0)$). От (3.1.2.29) става ясно, че скаларното произведение $\vec{r}_{xy} \cdot \vec{v}_{y-x}$ е положително, когато проекцията на скоростта в равнината Oxy сочи на ляво, гледано към равнината Oxy по посока обратна на \vec{n}_z . В този случай $L_z > 0$. Съответно въртеливото движение на махалото ще е винаги наляво, тъй като условието $L_z = const > 0$ не се изменя във времето. Аналогично, при $L_z < 0$ махалото ще се върти надясно, гледано към равнината Oxy по посока обратна на \vec{n}_z . И окончателно махалото няма да се върти, а ще се люлее във вертикална равнина тогава, когато $L_z = 0$.

Сферичното махало има четири степени на свобода в своето фазово пространство – по две за координатите и скоростта, но след въведените две ограничения (3.1.2.25) и (3.1.2.29) следва, че степените на свобода спадат до две [Arnold, V. I., 1989]. Това означава, че при зададени начални условия и текущи координати на махалото неговата скорост е еднозначно определена по големина и посока.

Нека на база двете ограничения (3.1.2.25) и (3.1.2.29), изведени до тук, изградим конструкция, описваща динамичното движение на махалото:

$$(30) \quad \begin{cases} const = \frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} + gr_z \Rightarrow v^2 = 2\left(\frac{E}{m} - gr_z\right) \\ const = \frac{L_z}{m} = \vec{r}_{xy} \cdot \vec{v}_{y-x} \end{cases}$$

При дадено r_z , v е определено от първото уравнение в системата. Отново при дадено r_z , от второто уравнение се вижда, че максималната абсолютна стойност, която $\frac{L_z}{m}$ би могло да има е тази, при която проекциите на \vec{r} и \vec{v} в равнината Oxy са ортогонални. Тъй като \vec{r} и \vec{v} са взаимно ортогонални вектори, техните проекции в Oxy ще са ортогонални тогава и само тогава, когато вектор \vec{v} е хоризонтален, т.е. съвпада със своята проекция в равнината Oxy . Така $\left|\frac{L_z}{m}\right|_{\max} = |\vec{r}_{xy}|v = \sqrt{r^2 - r_z^2}v$. Ако повдигнем двете страни на квадрат и заместим v^2 с дясната страна на първото уравнение от системата (3.1.2.30) получаваме:

$$(3.1.2.31) \quad \left|\frac{L_z}{m}\right|_{\max}^2 = 2(r^2 - r_z^2)\left(\frac{E}{m} - gr_z\right)$$

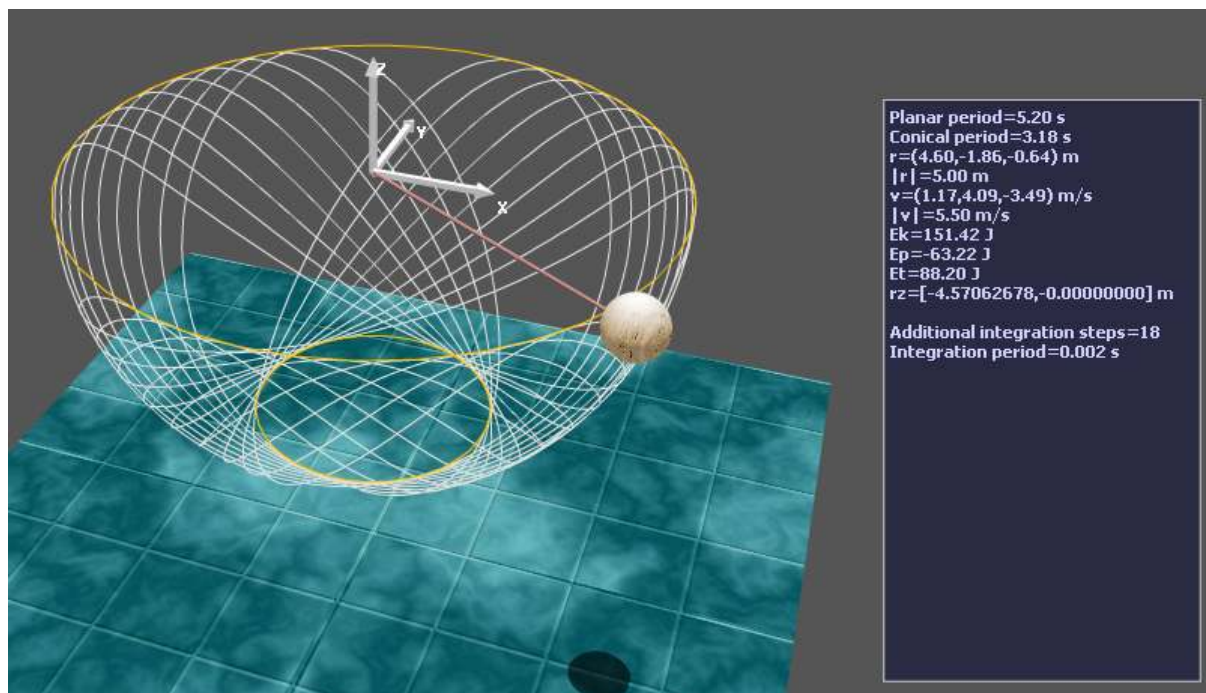
За конкретната абсолютна стойност на $\frac{L_z}{m}$ е ясно, че е по-малка или равна на максималната абсолютна стойност:

$$(3.1.2.32) \quad \left|\frac{L_z}{m}\right| \leq \left|\frac{L_z}{m}\right|_{\max}$$

Повдигаме (3.1.2.32) на квадрат и използваме (3.1.2.31):

$$(3.1.2.33) \quad \left(\frac{L_z}{m}\right)^2 = \left|\frac{L_z}{m}\right|^2 \leq \left|\frac{L_z}{m}\right|_{\max}^2 = 2(r^2 - r_z^2)\left(\frac{E}{m} - gr_z\right) \Rightarrow \frac{L_z^2}{2m^2} \leq gr_z^3 - \frac{E}{m}r_z^2 - gr^2r_z + r^2\frac{E}{m} \Rightarrow gr_z^3 - \frac{E}{m}r_z^2 - gr^2r_z + r^2\frac{E}{m} - \frac{L_z^2}{2m^2} \geq 0$$

В кубичното неравенство (3.1.2.33) единствена променлива е r_z , докато другите величини са константни (масата m , общата енергия E , дължината на нишката r , земното ускорение g и вертикалната компонента на момента на импулса L_z). При определени начални условия посредством (3.1.2.30) се определят константните величини $\frac{E}{m}$ и $\frac{L_z}{m}$. Така масата няма отношение към решението на кубичното неравенство (3.1.2.33). Решаването на това кубично неравенство води до ограничение за r_z както отгоре, така и от долу, затваряйки r_z в „пояс“, определен от два хоризонтални кръга, между които махалото може да се движи (потенциална яма [Arnold, V. I., 1989]), описвайки пространствена циклоида χ (фиг. 12).



Фигура 14. Сферично махало в симулация.

3.1.3. Описание на интерфейса

Описаната симулация демонстрира движението на сферично махало при различни условия. Най-простият случай е, когато не действат външни сили. Движението се определя единствено от ограничението на без-масовата пръчка на махалото (нишка). Друга възможност е да се въведе външна сила (сила на тежестта), която се явява консервативна сила и създава консервативно силово поле. От друга страна, наблюдателят може да въведе не консервативни сили като например дисипативни сили на триене и външни периодични синусоидални сили. Настоящата точка обръща внимание на консервативния случай, който се създава чрез сила на тежестта, действаща по направление на оста Oz.

За да се стартира симулацията потребителят трябва да натисне бутона 'Start'. Бутонът 'Pause' спира симулацията в пауза, но в това състояние наблюдателят все още може да променя ъгъла на гледане на камерата и да включва и изключва визуализацията на вектори и други елементи. Махалото се представя в 3D-графична среда с помощта на текстури и осветяване с цел да се подобри степента на възприятие. Всички вектори са също представени в 3D-изглед с помощта на стрелки с различни цветове. Потребителят може да наблюдава лабораторната отправна система като избере 'Show coordinate axes' (фиг. 4). Последната се изобразява чрез вектори в бял цвят. Студентите могат да видят импулса на махалото (виолетов цвят). Още, всички действащи сили могат да бъдат показани като вектори заедно с вектора на момента на импулса (пурпурен цвят) и моментът на резултантната сила (зелен цвят). Всички тези вектори се показват и скриват чрез избор на отметка в съответните полета на интерфейса (фиг. 4). Двата момента се пресмятат спрямо начална точка, която по подразбиране е 0,0,0. Тя може да бъде

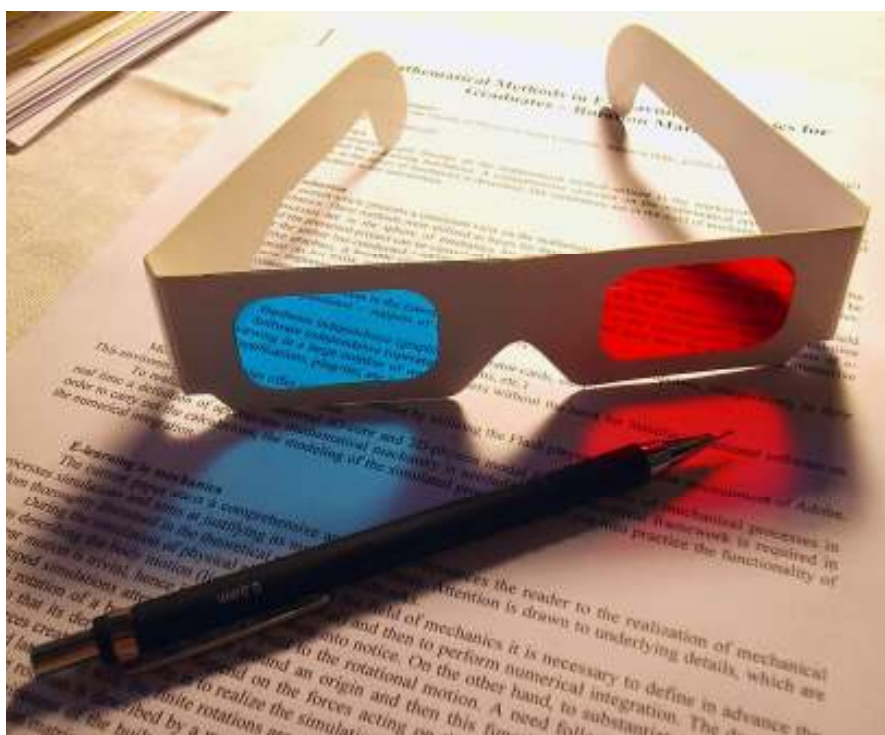
променяна чрез избор на стойности в съответните полета като X, Y и Z координати. В панела за данни (долу в дясно на интерфейса) се показват динамично компонентите и дължините на видимите вектори заедно с други скаларни величини, свързани със симулирания процес като например периода на махалото, енергиите на махалото и потенциалната яма. В който и да е момент потребителят може да скрие повечето елементи от интерфейса като премахне отметката в полето 'Show all interface elements'. За да се контролира гледната точка на камерата, наблюдателят може да използва слайдерите в горната част на интерфейса и да задава дължина и ширина на ориентацията на камерата. Преди да се стартира симулацията, студентът може да зададе начални стойности за позицията на махалото чрез ъгли на завъртане, наречени дължина и ширина. Още, студентът може да зададе начална скорост на махалото. Ученикът може да избере и дължината на махалото и неговата маса. По всяко време потребителят може да показва или скрива траекторията на махалото или неговата потенциална яма.

3.2. Движение на твърдо тяло в стерео 3D-симулация

В настоящата част се обръща внимание на движението на идеално твърдо тяло и трудностите, които срещат студентите при изучаването му.

Повечето величини, свързани с движението на твърдото тяло имат векторен характер, или по-скоро се изучават чрез векторен формализъм. Някои от тях са в такива зависимости, че студентите срещат затруднение да ги представят. Стига се често до наизустяване на връзките и уравненията без ясна интерпретация на техния физичен смисъл. Също така разкриването на причинно следствените връзки между векторните величини се загубва, например връзката между момента на резултантната външна сила и момента на импулса. Като следствие се нарушават разбирането на физичните закони и принципите за запазване на определени величини при свободното движение на твърдо тяло. Настоящата точка представя възможностите на създадената 3D-симулация, която цели да изясни тези въпроси на студентите първи курс в Софийски университет, които изучават механика в курса по Обща физика.

Важно е да се отбележи гледната точка на автора, че интерактивните симулации на компютър не могат да заместят един лабораторен експеримент, защото не могат да заместят реалността. В този ред на мисли, приложението на симулации в учебния процес е само като допълнителен метод, с който се цели да се разкрият ситуации, гледни точки, параметри и конструкции, които е невъзможно или опасно да бъдат наблюдавани в реални лабораторни условия.



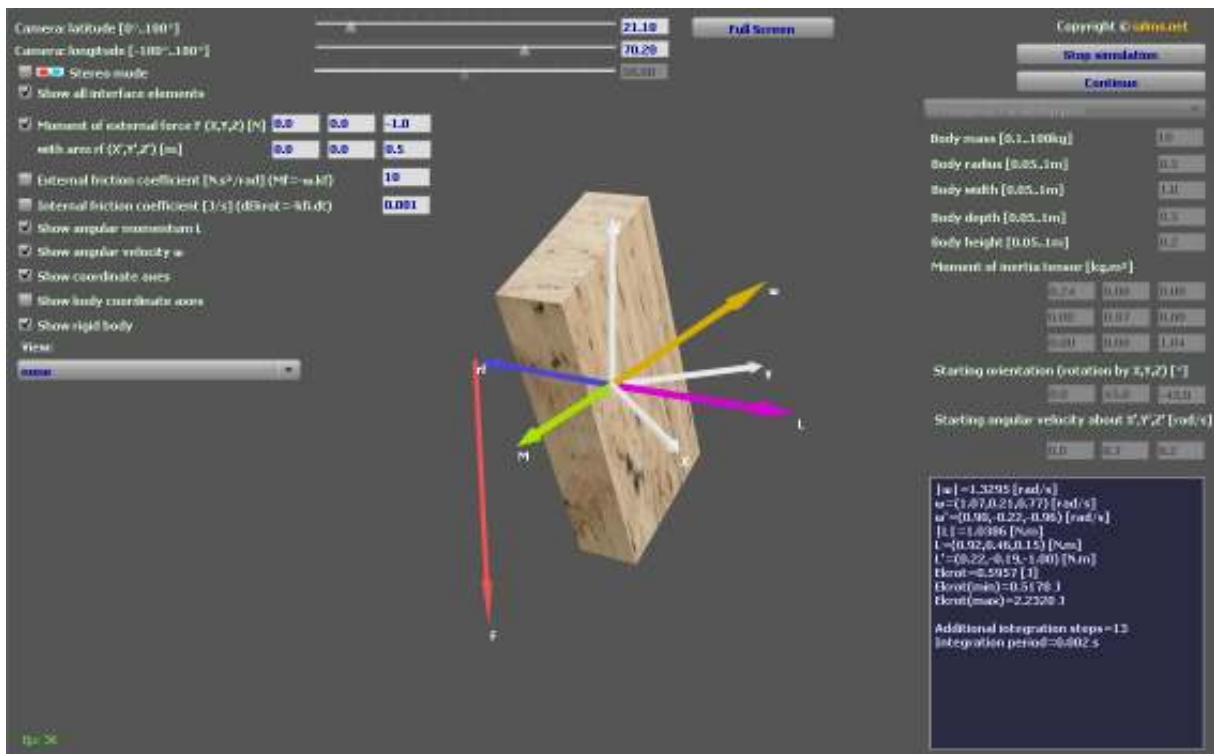
Фигура 15. Анаглифни стереоскопични 3D-очила.

3.2.1. Описание на проблема

Описаната симулация на твърдо тяло е приложена в няколко направления:

1. Като демонстрация на връзките и зависимостите, и като визуално представяне по време на лекции.
2. В лабораторния практикум като симулации преди реалния експеримент.
3. В семинарните занятия като помагало при решаването на задачи.
4. При самоподготовка на студентите в и извън университета.

Въпреки, че никоя симулация не може да представи реалността в пълнота е възможно дадена симулация да се направи, така че да отговаря на математическия модел, описващ наблюдаваното явление. По този начин симулацията спомага изучаването на математическия формализъм, лежащ в основата на описанието на движението на твърдо тяло. Симулираният процес не се наблюдава само като движение, но и всички съпровождащи вектори и скаларни величини, свързани с него, се онагледяват.



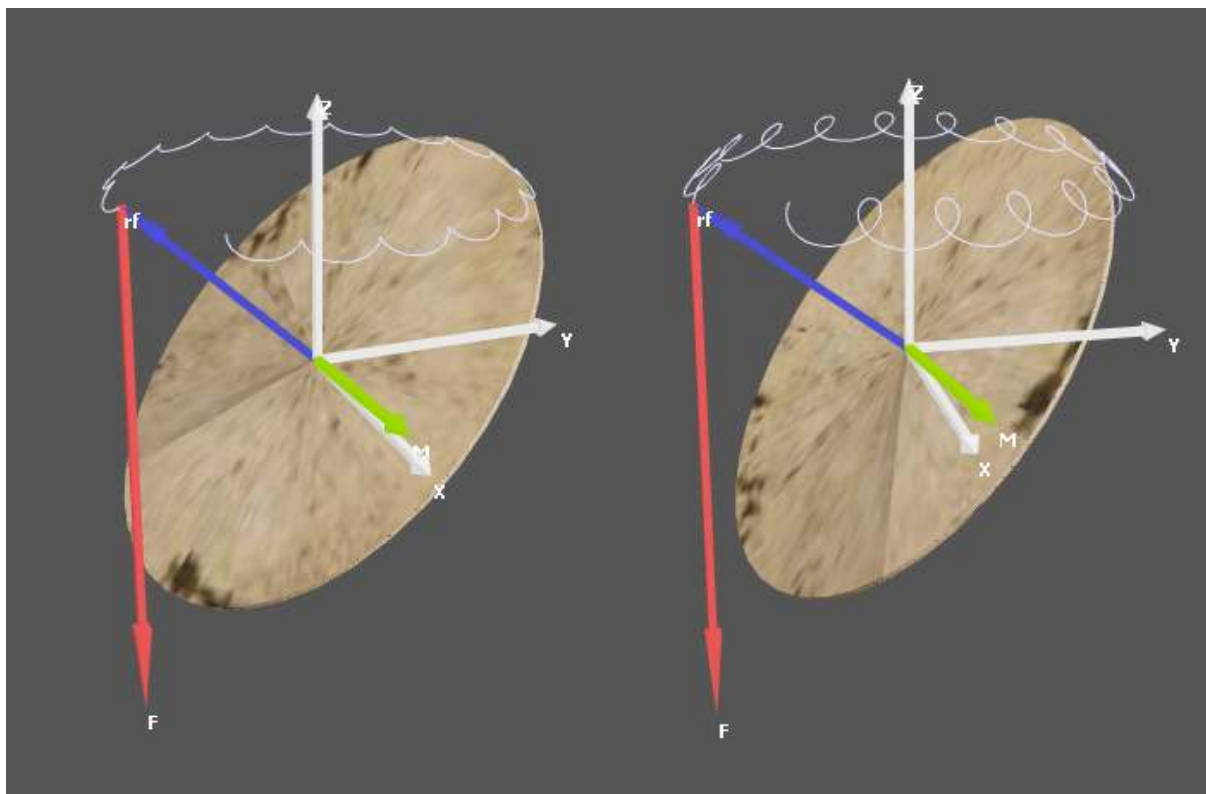
Фигура 16. Интерфейс на симулацията (движение на твърдо тяло под въздействието на външен въртящ момент).

3.2.2. Възможности на симулацията

Едно от основните качества на симулацията е възможността да се представят графично векторни величини. Такива са векторните бази на двете отправни системи – лабораторната отправна система и отправната система свързана с тялото. Първата е показана в бял цвят, а втората – в лазурен цвят (фиг. 17). Векторът на ъгловата скорост $\vec{\omega}$ е представен в оранжев цвят, а векторът на момента на импулса \vec{L} – в пурпурен цвят (фиг. 17). Външният момент \vec{M} се визуализира посредством зелен вектор, а създаващата го сила \vec{F} и нейното рамо \vec{r}_F са показани в червен и син цвят (фиг. 16, фиг. 18). Твърдото тяло не се движи линейно и центъра на масата е винаги в началото на лабораторната отправна система. Така постъпателното движение се избягва, за да се обърне внимание само на въртеливото движение, което е по-сложно и предизвикателно за студентите.

Освен представянето на вектори, симулацията демонстрира зависимости и отношения между величините. Някои от тях са:

1. Уравнението, свързващо външния момент \vec{M} и производната спрямо времето на момент на импулса $\frac{d\vec{L}}{dt}$, т.нар. уравнение на моментите. Когато не съществува външен момент (движението е свободно) векторът на момента на импулса \vec{L} остава постоянен и така се демонстрира закона за запазване на момента на импулса. В останалите случаи, когато резултантният външен момент е различен от нула, векторът на момента на импулса се променя във времето.
2. Уравнението, свързващо ъгловата скорост $\vec{\omega}$ и момента на импулса \vec{L} посредством тензора на инерчния момент \mathbf{I} . Тези два вектора са успоредни, когато ротацията е спрямо една от главните централни инерчни оси. В този случай, векторът на моментът на импулса се различава от ъгловата скорост само по големина и уравнението, свързващо тези два вектора е $\vec{L} = I\vec{\omega}$, където I е скалар. От друга страна в общия случай \vec{L} и $\vec{\omega}$ не са успоредни и са свързани чрез тензора на инерчния момент \mathbf{I} [Arnold, V. I., 1989]. В случая на свободно въртене \vec{L} е константен вектор. Въпреки това е лесно да се види как ъгловата скорост не е постоянна, когато тялото се върти около главна инерчна ос.
3. Визуално представяне на тензорни величини. Тензорът на инерчния момент \mathbf{I} се представя чрез инерчен елипсоид (фиг. 19). Всички симулирани тела са хомогенни. Промяната на размерите на телата и тяхната форма дефинира различни тензори на инерчния момент и съответно различни инерчни елипсоиди. Осевосиметричните тела, като цилиндри и дискове, са свързани с аксиално-симетрични елипсоиди, докато осевосиметрични тела спрямо всички три оси притежават инерчни елипсоиди, на които всичките три оси са равни (инерчна сфера). Примери за последните тела са кубове и сфери.
4. Рисува се траекторията на рамото на външната сила или на Z' базисния вектор. Това позволява да се наблюдава свободната прецесия на тялото, прецесията и нутацията на тялото (фиг. 18).



Фигура 18. Балансиран (свободен) жirosкоп с траекторията на Z' -базисния вектор (вижда се прецесията и нутацията).

Симулацията е също така приложима при демонстрирането на явления, свързани със свободното и принуденото въртене на твърди тела:

1. Нестабилна свободна ротация около междинната централна главна инерчна ос. Когато се завърта около тази ос, при наличието на минимални пертурбации, тялото се обръща с голям период [Goldstein, H., et al., 2001]. При по-малки пертурбации, периодът на обръщане е по-голям.
2. Нестабилна ротация около минималната централна главна инерчна ос при въздействието на вътрешно триене [Goldstein, H., et al., 2001]. Тялото постепенно измества оста си на въртене, приближавайки я към централната главна инерчна ос с максимален инерчен момент. В това състояние при постоянен момент на импулса, кинетичната енергия на въртене е най-малка.
3. Демонстриране на въртене на спящ пумпал при въздействие на външен момент и външно триене. Последното постепенно забавя въртенето до критичния момент, в който „спящия“ пумпал се събужда [Arnold, V. I., 1989].
4. Показване на прецесия и зависимостта на нейния период (съответно честота) от големината на ъгловата скорост.
5. Демонстриране на траекторията на z' -базисния вектор и така показване на характерната нутация при външен момент. На фигура 16 са показани два случая на нутация: с начална ъглова скорост, успоредна на оста на симетрия на тялото (графиката от ляво) и с начална ъглова скорост, която не е успоредна на оста на симетрия (графиката от дясно).

3.2.3. Описание на интерфейса

Симулацията реализира въртене на твърдо тяло при различни условия. Основният случай е, когато не действат външни сили. Тогава движението е свободно. Втори вариант е да се въведат външни сили, създаващи различни по големина и посока въртящи моменти. Допълнително наблюдателят може да инициира вътрешно и външно триене при движението на твърдото тяло.

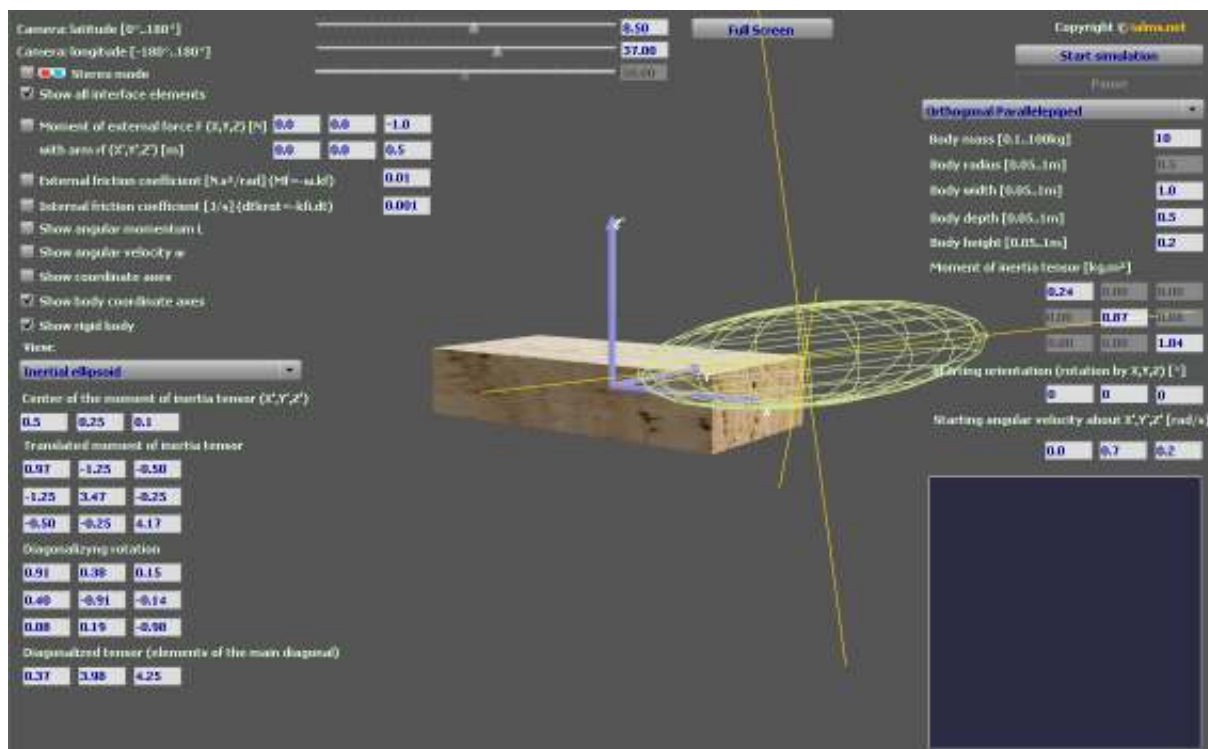
За да се стартира симулацията се използва бутонът 'Start'. Бутон 'Pause' спира симулацията, като тя може да се продължи от момента, в който е спряна по-късно. В режим на пауза, потребителят може да завърта камерата, т.е. да променя гледната точка към сцената. Също така, той може да изключва и включва показването на вектори и други елементи. Твърдото тяло се рисува в 3D-графика с текстури и осветяване, за да се подобри възприемането на наблюдаваните обекти. Всички вектори се представят като 3D-стрелки в различни цветове. Както вече стана дума, центърът на масата на твърдото тяло е поставено в началото на лабораторната отправна система, чиито базис-вектори могат да бъдат наблюдавани с включване на опцията 'Show coordinate axes' (фиг. 16). Тези вектори се рисуват с бял цвят. Началото на отправната система, свързана с тялото също се намира в центъра на масата. За да бъде наблюдавана трябва да се маркира опцията 'Show body coordinate axes' (векторните стрелки са в бледо син цвят). Студентът още може да види векторът на ъгловата скорост (оранжев цвят) и момента на импулса (пурпурен цвят). Както при симулацията на махало, така и тук в панела за данни долу в дясно се показват текущите стойности на всички видими вектори заедно с други скаларни величини като кинетичната енергия на въртене. Във всеки момент потребителят може да скрие повечето елементи на интерфейса като премахне отметката от опцията 'Show all interface elements'. Слайдерите в горната част на интерфейса могат да се използват, за да се променя гледната точка към сцената. Преди стартиране на симулацията, студентът може да въведе стойности за ориентацията на тялото чрез три последователни ротации спрямо осите на лабораторната отправна система (полета 'Starting orientation'). Също преди стартиране може да бъде зададена началната ъглова скорост на тялото в полетата 'Starting angular velocity'. Обърнете внимание, че последните стойности се задават в отправната система, свързана с тялото. Възможен е и избора на вида на тялото, което ще се симулира. Поддържат се няколко вида тела, като правоъгълен паралелепипед, сфера, диск и цилиндър. Масата на тялото и размерите на тялото се задават в съответните полета. Така напълно се определят инерчните свойства на тялото, защото то е хомогенно. Инерчните свойства на тялото се изразяват в тензора на инерчния момент I' , който се изписва като диагонален тензор, защото телата са симетрични и правилно ориентирани в отправната система, свързана с тялото. Тези полета са само за четене.

След стартиране на симулацията, студентът може да превключва между различни режими на визуализация като избира елементи от списъка 'View' долу в ляво. Възможните режими са инерчен елипсоид (фиг. 20), Конструкция на Poinsot в три варианта (фиг. 30), конструкция на Бине (фиг. 33), рисуване на траекторията на рамото на външната сила (фиг. 19) и рисуване на траекторията на базис-вектора Z' (фиг. 25). Твърдото тяло винаги може да бъде скрито като се

премахне отметката от опцията 'Show rigid body', за да се осигури по-добра видимост на конструкциите. По всяко време студентът може да включи стерео режим на наблюдение, където процесът може да се наблюдава с 3D-стереоскопични анаглифни очила (фиг. 15).

3.3. Изучаване на инерчния елипсоид на твърдите тела

Настоящата точка представя в дълбочина как вече описаната симулация на твърдо тяло може да бъде използвана за изучаване на инерчния елипсоид и тензора на инерчни момент на разнообразни по форма и размери твърди тела. Симулацията дава възможност инерчния елипсоид, респективно тензора на инерчния момент, да се пренася в произволна точка в отправната система, свързана с тялото. Главните инерчни оси се изобразяват заедно с диагонализираният преместен тензор и диагонализиращата ротационна матрица (фиг. 18).



Фигура 20. Преместване на тензора на инерчния момент във върха на тялото (по всички три оси) и визуализиране в 3D-сцената на съответстващия инерчен елипсоид.

3.3.2. Използване на симулацията със студенти

Симулацията беше разработена, за да спомогне практическата работа на студентите, посещаващи курса по Обща физика в Софийски университет, докато се изучават инерчните свойства на твърдите тела. Симулацията помага при начертаване на сеченията на инерчния елипсоид на различни по форма и размери твърди тела и в наблюдението на главните инерчни оси.

С помощта на симулацията редица сложни задачи могат да бъдат решени с лекота и отговорите да бъдат наблюдавани в 3D-стерео режим с цел студентите да разберат изследваното явление. Всяка стъпка на решението има своето графично представяне, което изяснява разбирането на използвания математически формализъм. Примери за задачи, решавани с помощта на симулацията са:

1. Пресмятане на тензора на инерчния момент на хомогенни идеално твърди тела с правилни форми.
2. Транслиране на тензора на инерчния момент в произволна точка в пространството.
3. Диагонализиране на транслирания тензор на инерчния момент.
4. Пресмятане на ротационната матрица, използвана за диагонализиране на транслирания тензор на инерчния момент.

3.4. Въртене на летящ диск в рамките на 3D-симулацията

Добре известната игра, която се състои в хвърляне на летящ диск (още позната като Frisbee®) крие в себе си важни физични явления, някои от които са присъщи на всички твърди тела, не само на тези с форма на диск. Повечето хора са добре запознати с тази игра на хвърляне на диска. Въпреки това за тези които не знаят играта се състои в хвърлянето на летящ диск с диаметър в рамките на 20-30 сантиметра, направен от пластмаса или леко дърво. Профилът на вертикалното сечение на диска е подобно на крилото на самолет. Така се създава аеродинамична подемна сила и дискът лети, когато се хвърли хоризонтално от един човек към друг. Но тъй като дискът е нестабилен в полет, той трябва да се завърти, когато се хвърля. Именно това завъртане стабилизира диска и ще бъде обект на настоящото описание.

3.4.1. Въртене на идеално твърдо тяло

Движението на всички твърди тела може да бъде идеализирано и формализирано в две отделни движения. Това са постъпателно и въртеливо движение. Те се наслаждат едно върху друго при движението на твърдото тяло в пространството. При постъпателното движение твърдото тяло може да бъде апроксимирано до материална точка, която съвпада с центъра на масата. Въртеливото движение е много по-сложно. Симулацията може да даде представа на студентите за качествена оценка на отделните явления, които се наблюдават при въртенето на твърдите тела.

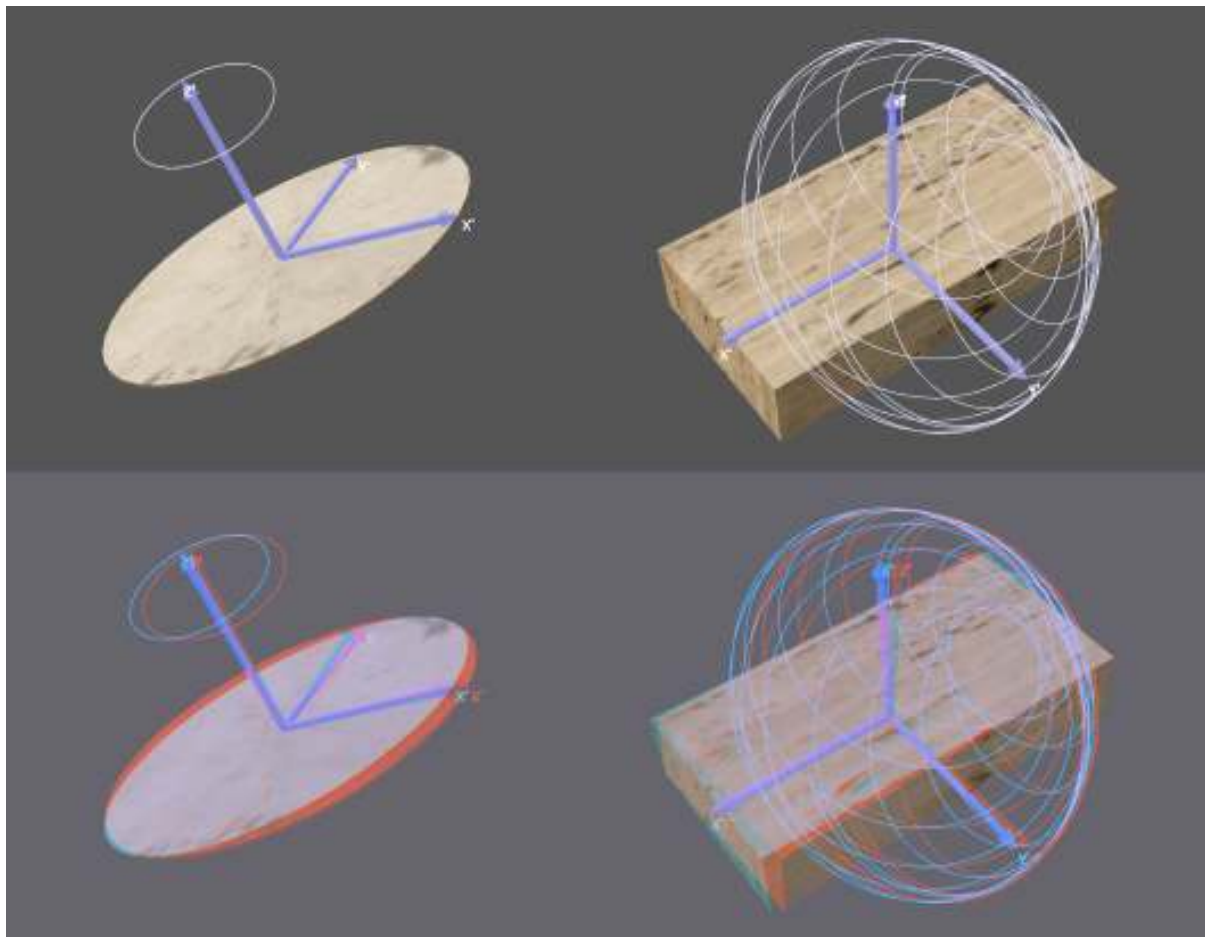
Основната идея е да се демонстрира въртенето на летящия диск и да се обясни защо и как това въртене стабилизира диска и как то не позволява на диска да се преобърне докато лети. От друга страна, ако хвърлим диска със залюляване и наблюдаваме неговия полет ще забележим, че на практика дискът се стреми да се успокои и началното залюляване намалява след една или две секунди в полет.

3.4.2. Главни централни инерчни оси и симулиране на летящия диск

Както вече беше споменато всяко твърдо тяло притежава три главни централни инерчни оси, които са перпендикулярни една на друга. На фигура 25 са показани две хомогенни тела с различна форма заедно с техните отправни системи, свързани с тялото (вектори X' , Y' , Z'), ориентирани по централните главни инерчни оси. Инерчният момент спрямо тези три оси в общия случай е различен, като спрямо една от осите е максимален, спрямо друга е минимален, а спрямо третата - междинен. Ако тялото се върти с една и съща ъглова скорост около всяка една от трите оси, то ще има максимална кинетична енергия, когато се върти около оста с максимален инерчен момент.

Ако едно твърдо тяло се завърти около оста с максимален инерчен момент и след това се остави да се върти свободно, въртенето е стабилно – ротацията няма да се отклони от първоначалната ос. Ако тялото се завърти около ос, която не е нито с максимален, нито с минимален инерчен момент и се остави свободно след това, то ще започне да се накланя – оста на ротация непрекъснато ще се изменя спрямо пространството и спрямо тялото. Този процес се нарича свободна прецесия.

Когато едно хомогенно твърдо тяло е осево-симетрично една от неговите централни главни инерчни оси съвпада с оста на симетрия, докато другите две могат да бъдат избрани свободно в равнината, перпендикулярна на оста на симетрия при условие, че и трите оси са взаимно перпендикулярни. Дискът и цилиндърът са именно такива тела. Друг термин за осево симетрични хомогенни твърди тела е пумпал. Свободната прецесия на осево-симетричните тела притежава много по-проста форма, от колкото свободната прецесия на твърдо тяло в общия случай (фиг. 25). В същото време свободните прецесии и на двата вида тела отговарят на еднакви правила. Наблюдавайки траекторията на Z' вектора на диска може да се види, че тя е кръг, докато Z' базисният вектор на правоъгълния паралелепипед следва сложна траектория с формата на сферична циклоида ограничена между два кръга (фиг. 25).



Фигура 25. Свободна прецесия на диск и правоъгълен паралелепипед. Показани са в стандартен режим (горе) и стереоскопичен режим (долу).

Има ли нещо още по-специално, свързано с централната главна инерчна ос с максимален инерчен момент? Да. Когато едно тяло се завърти около тази ос силите на триене във външната среда (във въздуха) стабилизират допълнително неговото въртене. В случая на летящия диск свободната прецесия е нежелана, защото тя непрекъснато ще изменя ъгъла на атака на диска при неговия полет. В следствие на това обтичането на диска от въздушния поток ще е неправилно и може да се достигне дори до загубване на скорост, поради нарушаване на ламинарното обтичане и завихряне на въздушния поток. Така дискът може да падне скоро след като е хвърлен. За щастие дискът винаги се завърта спрямо оста с максимален инерчен момент (оста Z' на фигура 25) и триенето във въздуха го стабилизира (фиг. 26). Също така трябва да се спомене, че ако завъртим един пумпал (например цилиндър) около оста на симетрия и в същото време тази ос е с минимален инерчен момент, въздушното триене ще дестабилизира въртенето – процес познат като събуждане на спящ пумпал. На фигура 26 виждаме как триенето стабилизира въртенето и постепенно намалява свободната прецесия. В първоначалния момент на симулацията, дискът е завъртян около ос близка до оста на симетрия, но с определено отклонение, така че да можем да наблюдаваме свободна прецесия. В симулацията включваме външното триене (триене във въздуха) и също така показването на траекторията на базис-вектора Z' . Траекторията вече не е кръг както в случая на свободно въртене, а е спирала с постепенно намаляващ радиус. Колкото по-малък става кръга на свободната прецесия, толкова по-стабилно става въртенето на диска (фиг. 26).

Докато свободната прецесия се минимизира от триенето във въздуха, ротацията на диска спомага за това, той да не се обърне по време на полет. Въздушната подемна сила, действаща на диска при полет е неравномерно разпределена по неговата повърхност и това предизвиква въртящ момент, който се опитва да обърне диска (да го изведе от неговата хоризонтална ориентация). Въртенето на диска създава жироскопичен ефект и така въртящият момент не успява да обърне диска като единствено успява да предизвика не свободна прецесия. Колкото по-висока е скоростта на въртене, толкова тази прецесия ще е по-незначителна. На фигура 16 е показана прецесията на въртящ се диск, предизвикана от въртящ момент. Траекторията на базис-вектора Z' показва прецесия и нутация. Дискът никога не се обръща и поддържа своята почти

горизонтална ориентация. Абстрактната сила, създаваща въртящия момент, е показана с червен вектор, а нейното рамо – със син вектор по оста Z' . Самият въртящ момент е представен със зелен вектор.

3.5. Конструкции на Poinsot и Binet в стерео 3D-симулацията на твърдо тяло

3.5.1. Общи понятия и елементи на потребителския интерфейс.

Тази точка представя конструкциите на Poinsot и Binet и така дава възможност за една богата основа при преподаването на механика в курса по Обща физика [Poinsot, Louis, 1834]. Усвояването на математическият формализъм, лежащ в основата на класическата механика се подобрява, а на студентите, търсеци повече знания се предоставя поле за развитие. Представянето на тези конструкции в реални лабораторни условия е немислимо. Конструкциите на Poinsot и Binet са изобразени в стереоскопична тримерна графична среда. Видими са всички елементи: инвариантни елипсоиди, инвариантна равнина, полход, херполход и т.н.

След като симулацията на свободно въртене на твърдо тяло е стартирана, студентът може избере режим на изглед от следните възможности:

1. 'Poinsot construction' (complete) – Показване на конструкцията на Poinsot с всички нейни елементи: ограничителен елипсоид, инвариантна равнина, полход и херполход.
2. 'Poinsot construction' (inv. plane) – Показване на конструкцията на Poinsot само с инвариантна равнина и херполхода.
3. 'Poinsot construction' (ellipsoid) – Показване на конструкцията на Poinsot само с ограничителния елипсоид и полхода.
4. 'Binet construction' – Показване на конструкцията на Binet с всички нейни елементи: ограничителен елипсоид, ограничителна сфера и ход.

За да са по-добре видими конструкциите, тялото може да бъде скрито по всяко време като се отнеме отметката в полето 'Show rigid body'. Докато се наблюдава конструкцията на Poinsot трябва да се има предвид, че полхода (кривата върху ограничителния елипсоид) и херполхода (кривата върху инвариантната равнина) се рисуват от върха на вектора на ъгловата скорост, докато при конструкцията на Binet рисуващият вектор е моментът на импулса. Затова е полезно да се включва съответния вектор при избор на дадена конструкция.

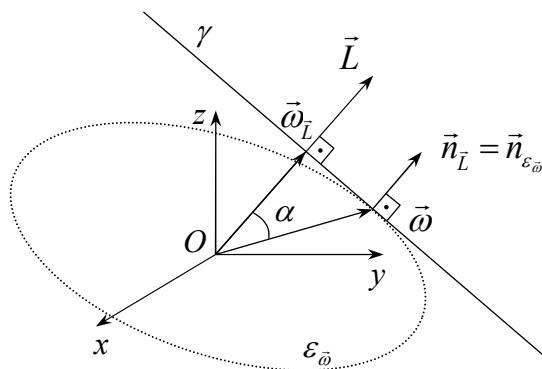
3.5.3. Конструкция на Poinsot.

От таблица 1 веднага се вижда, че при свободното въртене на твърдо тяло момента на импулса е константен:

$$(3.5.3.1) \quad \dot{\vec{L}} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}_{ext}) = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

Уравнение (3.5.3.1) представя първата инвариантна величина, спрямо която се изграждат конструкциите на Poinsot и Binet. Ако отправната система, свързана с тялото, се избере да е по централните главни инерчни оси, тензорът на инерчния момент има диагонален вид

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} I'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{bmatrix} = const. \text{ Обратната матрица на } \mathbf{I}' \text{ е също диагонален тензор.}$$



Фигура 27. Конструкция на Poinsot в лабораторната отправна система.

Втората инвариантна величина при свободното въртене на твърдо тяло е кинетичната енергия на въртене E_{Krot} . Този константен параметър води до следното ограничение на движението:

$$(3.5.3.2a) \quad E_{Krot} = \frac{I\omega^2}{2} = const$$

Аналогично горното равенство може да бъде записано спрямо момента на импулса:

$$(3.5.3.2b) \quad E_{Krot} = \frac{L^2}{2I} = const$$

Развивайки тези две уравнения по компонентите на векторите и инерчните моменти спрямо главните инерчни оси дава:

$$(3.5.3.3a) \quad \omega_x'^2 I_{xx}' + \omega_y'^2 I_{yy}' + \omega_z'^2 I_{zz}' = 2E_{Krot} = const$$

$$(3.5.3.3b) \quad L_x^2 I_{xx}'^{-1} + L_y^2 I_{yy}'^{-1} + L_z^2 I_{zz}'^{-1} = 2E_{Krot} = const$$

Тези две уравнения представят два елипсоида, които са инвариантни (статични) в отправната система, свързана с тялото. Ще ги означим съответно с ε_{ω}' и ε_L' (с ε_{ω} и ε_L в лабораторната отправна система). Тези два елипсоида зависят единствено от инерционните качества на разглежданото твърдо тяло и от кинетичната енергия на неговото въртене. Ако кинетичната енергия на въртене се запазва постоянна, върховете на двата вектора $\vec{\omega}'$ и \vec{L}' са ограничени да попадат съответно върху повърхностите на двата елипсоида, дефинирани с уравнения (3.5.3.3a) и (3.5.3.3b). Ако, който и да е от двата вектора $\vec{\omega}'$ и \vec{L}' сочи извън съответния му ограничителен елипсоид, то E_{Krot} трябва да се увеличи. Аналогично, ако някои от двата вектора сочи вътре в съответния ограничителен елипсоид, E_{Krot} трябва да намалее.

Като се приложи ограничението за \vec{L} (3.5.3.1) върху ограничението за E_{Krot} (3.5.3.2a), получаваме следния резултат:

$$(3.5.3.4) \quad \vec{\omega}\vec{L} = 2E_{Krot} = const$$

С други думи проекцията $\vec{\omega}_L$ на вектор $\vec{\omega}$ върху правата, определена от вектор \vec{L} е винаги една и съща (фиг. 25). Видно е, че вектор $\vec{\omega}$ може да сочи където и да е в инвариантната равнина γ , дефинирана от вектор \vec{L} и E_{Krot} чрез (3.5.3.4). Тази инвариантна равнина е определена в лабораторната отправна система. Вектор $\vec{\omega}$ е ограничен да сочи в тази инвариантна равнина и в същото време е ограничен да сочи по повърхността на своя ограничителен елипсоид ε_{ω}' , дефиниран чрез (3.5.3.3a). ε_{ω}' трябва да се транспира в лабораторната отправна система като

$\varepsilon_{\vec{\omega}}$, в която отправна система този елипсоид, в общия случай, постоянно се върти. Комбинирайки тези две ограничения достигаме до сечението на инвариантната равнина γ и ограничителния елипсоид $\varepsilon_{\vec{\omega}}$. Тук е удобно да отбележим, че градиентът на E_{Krot} , по отношение на $\vec{\omega}$, е в посока на \vec{L} :

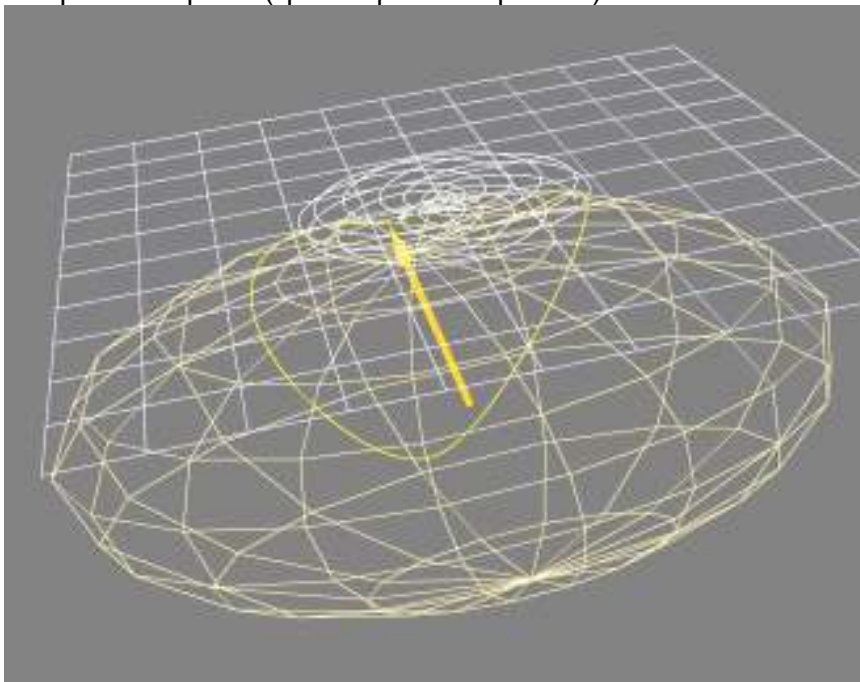
$$(3.5.3.5) \quad \nabla_{\vec{\omega}} E_{Krot} = \frac{dE_{Krot}}{d\vec{\omega}} = \frac{1}{2} \vec{L}$$

Градиентът е по посока на нормалния вектор към повърхността на елипсоида $\varepsilon_{\vec{\omega}}$, защото повърхността на елипсоида е инварианта на E_{Krot} . Проекцията на $\nabla_{\vec{\omega}} E_{Krot}$ върху повърхността на елипсоида е нула. В същото време нормалният вектор на инвариантната равнина е също по посока на \vec{L} . Следва, че инвариантната равнина и ограничителния елипсоид се пресичат тангенциално, т.е. елипсоидът винаги докосва равнината и се търкаля върху нея. Търкалянето се получава без приплъзване, защото точката на тангенциално пресичане лежи на оста на ротация (вектор $\vec{\omega}$) и затова има нулева скорост на въртене – не се движи и не приплъзва върху инвариантната равнина, която е стационарна. В това се състои добре известната конструкция на Poinsot (фиг. 27). Кривата, която вектор $\vec{\omega}$ рисува върху γ е наречена херполход (фиг. 30), а кривата, която същия вектор рисува върху $\varepsilon_{\vec{\omega}}$ - полход (фиг. 30). Херполходът и полходът винаги се докосват тангенциално в точката, където сочи вектор $\vec{\omega}$ (фиг. 27, 30). Конструкцията на Poinsot дава добра представа и разбиране от една страна за вектор $\vec{\omega}$ и от друга за въртеливото движение на тялото, защото ограничителният елипсоид е стационарен спрямо тялото.

3.5.4. Примери за симулации с представяне на конструкцията на Poinsot.

Симулацията на свободно въртене на твърдо тяло показва ограничителния елипсоид, графично представен с контури (фиг. 30). По време на симулацията върха на вектор $\vec{\omega}$ рисува полхода в жълт цвят. Инвариантната равнина γ е представена в синьо-бял цвят, а херполхода се рисува с бял цвят (фиг. 30).

Херполходът не винаги е затворена крива, както полхода и този факт ясно се наблюдава в симулацията. В общия случай, когато инерчните моменти спрямо централните главни инерчни оси са различни, херполходът е равнинна циклоида, която може да е или да не е затворена след определен краен интервал от време (краен брой завъртания).



Фигура 30. Пълна конструкция на Poinsot, показваща инвариантната равнина, херполхода, ограничителния елипсоид и полхода.

Циклоидата на херполхода променя своя вид при различни начални условия на симулацията, а изрисуваната фигура напомня на цвете. Циклоидата е винаги затворена между два концентрични кръга, лежащи в инвариантната равнина. Центровете на тези два кръга съвпадат с пресечната точка на правата, върху която лежи вектор \vec{L} и инвариантната равнина γ .

На фигура 30 е демонстрирана конструкцията на Poinsot, показваща само инвариантната равнина и херполхода. Другите елементи заедно с твърдото тяло са изключени. Така студентите могат ясно да разглеждат тези два елемента на конструкцията на Poinsot.

Същата симулация с непроменени параметри е показана с ограничителен елипсоид и полход – фигура 30.

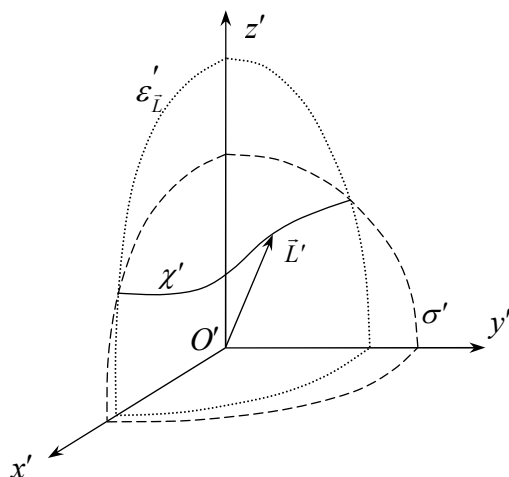
Накрая е демонстрирана пълната конструкция на Poinsot и всички елементи са изобразени едновременно (фиг. 30). Все пак твърдото тяло отново е скрито, защото многото елементи затрудняват наблюдението.

В общия случай полходът е затворена крива с формата на седло както се вижда на фигури 30. В граничния случай когато тялото е осево-симетрично (два от трите инерчни моменти на централните главни инерчни оси са равни) полходът и херполходът стават кръгове. Този граничен случай е демонстриран на фигура 30, където се симулира въртенето на цилиндър.

3.5.5. Конструкция на Binet.

Чрез пренасяне на ограничението върху \vec{L} в отправната система, свързана с тялото се получава друга конструкция на свободното въртене на твърдо тяло – конструкцията на Binet. \vec{L} е константен вектор в лабораторната отправна система, но веднъж пренесен в отправната система, свързана с тялото като \vec{L}' , той вече не е константен и, в общия случай, непрекъснато се върти. Въпреки това този вектор продължава да е ограничен в своята дължина, защото ротацията запазва дължината. Вектор \vec{L}' има константна дължина и е ограничен да сочи по повърхността на сфера σ' с радиус L . Следва, че вектор \vec{L}' трябва да сочи в сечението на тази ограничителна сфера σ' и неговия ограничителен елипсоид ε'_L дефиниран чрез (3b). Това сечение е показано на фигура 32 в първи октант.

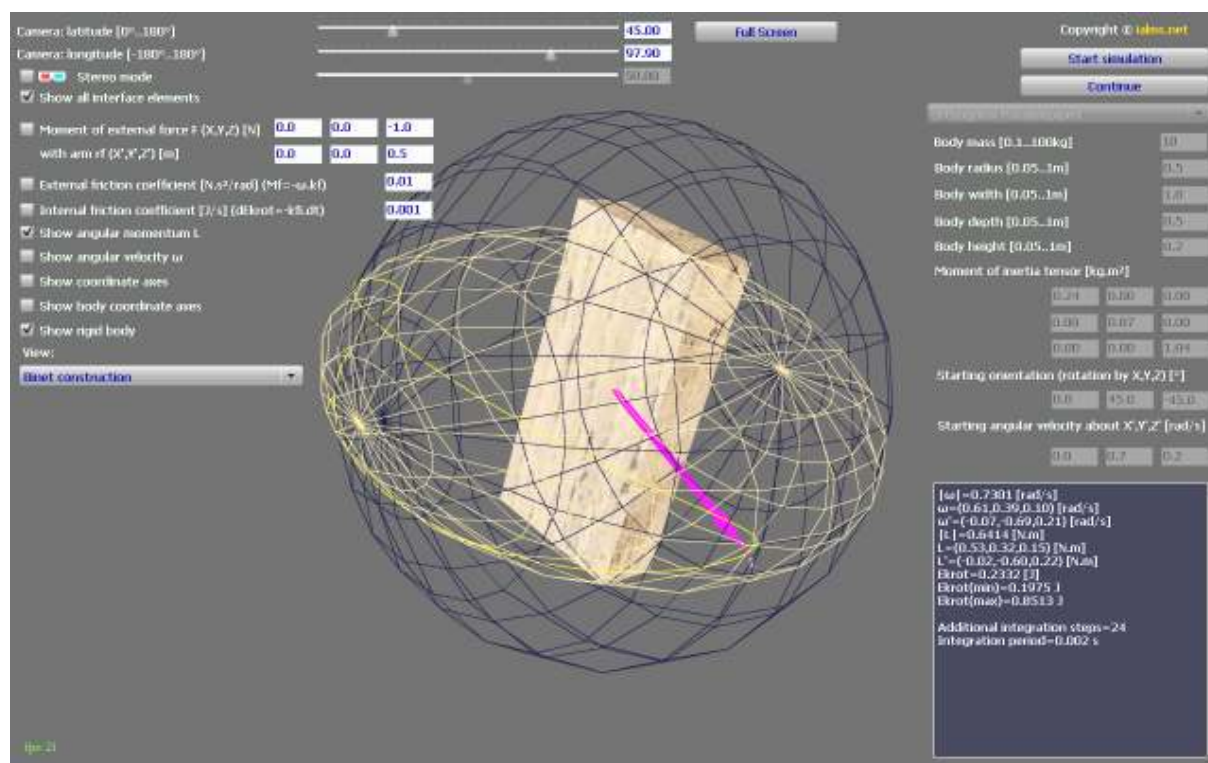
$$(3.5.5.1) \quad \varepsilon'_L \wedge \sigma' : \begin{cases} L_x^2 I'^{-1}_{xx} + L_y^2 I'^{-1}_{yy} + L_z^2 I'^{-1}_{zz} = 2E_{Krot} = const \\ L \Rightarrow L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 = const \end{cases}$$



Фигура 32. Конструкция на Binet в отправната система, свързана с тялото (първи октант).

Уравнения (3.5.5.1) ограничават вектор \vec{L}' да сочи върху кривата $\chi' = \varepsilon'_L \wedge \sigma'$, представяща сечението на ε'_L и σ' . Веднага се вижда, че това движение има една степен на свобода за вектор \vec{L}' . В лабораторната отправна система, векторът на момента на импулса \vec{L} е константен, докато

ограничителния елипсоид $\varepsilon_{\vec{L}}$ се върти. В лабораторната отправна система ограничителната сфера е σ и тя също се върти, но този факт не носи никакво значимо последствие. Симулацията показва ограничителния елипсоид $\varepsilon_{\vec{L}}$ и сферата σ с контури в лабораторната отправна система, където те се въртят заедно с тялото. Сферата е показана с тъмен син цвят. Сечението се рисува от върха на вектор \vec{L} с жълт цвят (фиг. 33). Студентите могат да наблюдават конструкцията на Binet при различни начални условия и да изучават движението при визуализираните ограничения. Сечението е затворена крива, която в общия случай е с формата на седло. За разлика от конструкцията на Poinsot, при конструкцията на Binet симулацията разкрива защо кривата χ , върху която сочи вектор \vec{L} , има формата на седло – тя е сечението на асиметричен елипсоид и сфера, и този факт се вижда веднага. Както в конструкцията на Poinsot, така и при конструкцията на Binet, когато тялото е осево симетрично кривата χ става кръг. Отново студентите могат да видят защо това е така – сечението на аксиално-симетричен елипсоид със сфера е кръг и този факт се наблюдава в 3D визуализация.



Фигура 33. Симулация на конструкцията на Binet.

3.6. Аналитично решение на уравненията на Euler и сравнение с численото решение по време на симулацията

3.6.1. Аналитично решение

До каква степен симулациите демонстрират точно поведението на твърдите тела може да се определи чрез сравнение с точните аналитични решения, там където те са възможни. Както е известно при движението на твърди тела съществуват три случая, в които е възможно аналитично решение [Whittaker, E. T., 1904], [Whittaker, E. T., 1988], [Audin, M. 1996]:

1. Пумпал на Euler.
2. Пумпал на Lagrange [Lagrange, J-L. 1788].
3. Пумпал на Софья Ковалевская [Kowalevski, Sophie (1889)], [Kowalevski, Sophie (1890)].

Тези три случая разглеждат твърди тела в консервативна система, в която енергията е постоянна. В допълнение към това ограничение всеки един от трите случая въвежда допълнително ограничение, пораждащо константи на движението, благодарение на които е

възможно интегриране. Последното се дефинира в рамките на система на Hamilton в смисъла на Liouville.

Пумпалът на Euler представлява несиметрично твърдо тяло, движещо се свободно. Пумпалът на Langrange е осево-симетрично твърдо тяло, при което центърът на масата лежи върху оста на симетрия. За разлика от първия случай, тук движението не е свободно, а твърдото тяло има една стационарна точка, лежаща върху оста на осева симетрия. Движението се извършва под въздействието на силата на тежестта. Третият случай е пумпалът на Ковалёвская. Това е специално осево-симетрично тяло, което също има стационарна точка, за която главните инерчни моменти са в следната зависимост:

$$I_1 = I_2 = 2I_3$$

Още центърът на масата лежи в равнината, определена от осите с равни инерчни моменти.

За целта на сравнението с аналитично решение тук се изчислява движението на пумпалът на Euler. Решението на уравненията на движението дават моментната стойност на вектора на ъгловата скорост $\vec{\omega}$, който в симулацията може да се сравни нагледно с числено интегрираната стойност на същия вектор.

3.6.2. Сравнение на двете решения

Сравнява се аналитичното решение на пумпала на Euler с численото интегриране на движението на твърдото тяло по симплектичен метода Euler-Cromer. Наблюденията показват, че е нужно да се изчака около 10 минути, за да се получи видима разлика между аналитичното и численото решение. Също така се вижда, че при симулация близка до критичната крива, съответстваща на въртене около междинната централна главна инерчна ос се наблюдават бързи отклонения на числения метод от аналитичния. Това се дължи на близостта до състоянието на неопределеност, при което имаме нестабилно равновесие – тялото се обръща, но твърде малки пертурбации поражда твърде големи отклонения в едната или другата посока. Това води до усилване на грешките при числения метод и обяснява наблюдаваното отклонение.

Изводи към трета глава

Трета глава представя възможностите на създадените симулации и практическите ползи от тяхното приложение. Описани са редица примери на явления, които могат да се изучават в стерео 3D-режим и среда Интернет, иначе недостъпни в съществуващите системи за електронно обучение или в практическите занимания в лабораторни условия.

ГЛАВА 4. Оценка на ефективността на създадената система от симулации

4.1. Съответствие на съдържанието на симулациите към структурата на общия курс по механика за първи курс във Физически факултет на СУ

Създадените симулации в основни линии следват програмата на обучение за студенти първокурсници по обща физика. В част от нея (Дечева В., Съева Д., 2008) при преподаване на съдържанието могат да се използват симулациите.

Програма по физични основи на механиката:

1. Кинематика.
2. Динамика на материална точка.
6. Динамика на идеално твърдо тяло.

Както е видно от изложеното във втора и трета глава на дисертацията, симулациите могат да се използват в над една трета от обема на предвиденото съдържание в програмата за обучение. Чрез тях се изясняват основни величини в кинематиката, като скорост – линейна и ъглова, ускорение – линейно и ъглово и връзката между тях. От особена важност е възможността да се чертаят траектории на движение, което способства за подобряване на представите за предисторията на движението и прогнозирането на следващите координати на тялото.

Убедителни са демонстрациите при въртливо движение на материална точка и на твърдо тяло, като те могат да бъдат разширени и с движение около променяща се с времето ос.

Основните величини и характеристики, които се показват в 3D- среда са:

- различни видове сили – на тежестта, на опъване на нишката, триене и съпротивление, външни сили;
- момент на тези сили спрямо произволна точка и произволна ос, както и различието между момент на сила спрямо точка и момент на сила спрямо ос;
- импулс на тяло (материална точка);
- момент на импулса на тялото (материалната точка) спрямо произволна точка и произволна ос, както и различието между момент на импулс спрямо точка и момент на импулс спрямо ос;
- инерчен момент на твърдо тяло (различни по форма тела) спрямо различни оси, както и главни инерчни оси и главни инерчни моменти при въртене около различни оси;
- централни главни инерчни оси и централни главни инерчни моменти както и понятието център на масите;
- свободни оси;
- инерчен елипсоид като графично изображение на тензора на инерчния момент;
- движение на жироскоп – прецесия и нутация на различни по вид жироскопи.

Основни закономерности, които могат да се демонстрират, са:

- уравнение при въртливо движение;
- уравнение на моментите;
- закон за запазване на момента на импулса и закон за изменение на момента на импулса.

Възможностите на симулациите надхвърлят предвиденото по програма учебно съдържание, което дава възможност на студентите с по-големи интереси по-задълбочено да проверят гранични случаи или физични явления, които не се изучават по обща физика. Чрез тях могат да се генерират и множество задачи, което създава предпоставка за самостоятелни проучвания на ситуации, които не биха могли по друг познат начин да бъдат проверявани.

4.2. Хипотези за проверка.

Извършването на качествен експеримент цели проверката на следните формулирани работни хипотези:

1. Използването на симулации при лекции, семинарни упражнения и в лабораторни условия повишава мотивацията на студентите за участие в обучението.

2. Извършването на различни дейности – наблюдение, участието в дискусии и самостоятелната работа със симулациите подобрява разбирането на студентите за основните величини в механиката и основните принципи и закономерности в механичните явления.

4.3. Методи на изследване на ефективността на създадената система.

4.3.1. Проучване и анализ на научна и учебна литература.

Изследването на ефективността на системата от симулации се извършва върху ограничен обем от студенти – 37, което го аташира към качествените изследвания. Избраната методика и анализът на резултатите се извършват според изискванията на качествените изследвания (Бижков, Краевски, 2007).

4.3.2. Открито наблюдение

Наблюдението като основен метод на качествените изследвания се използва за изясняване на общата картина на процеса на работа със системата от симулации.

4.3.3. Групова дискусия.

Използването на този метод се свързва с факта, че студентите предварително познават съдържанието, върху което са изградени симулациите и донякъде владеят научния за физиката език. Симулациите ги въвлечат в ситуации, в които се обсъжда различното поведение на физични обекти при промяна на условията на движението им. Ръководител на дискусията е преподавателят по физика (лекторът).

4.3.4. Анкета.

Типът анкета, която е избрана, е частично стандартизирана писмена анкета, в която част от въпросите са структурирани предварително, а част са със свободен отговор. Някои въпроси са скалирани. За проверката на дефинираните хипотези анкетата е наш основен метод, тъй като въпросите от анкетата са за събиране на мнения, позиции, мотиви, отношение и оценки за използване на симулациите като елемент на електронното обучение. Анкетната карта е съставена според изискванията, като формата е анонимна, по желание анкета, в която затворените въпроси изискват еднозначен отговор в съответствие с нейната цел. Тя има уводна, основна и заключителна част, като при провеждането ѝ беше обяснена нейната цел.

4.3.5. Анализ на посещенията и участието на студенти в предложения им сайт в интернет пространството - <http://ialms.net/sim>

Това е неосновен метод за събиране на информация за интереса към предложените симулации чрез посещението на упоменатия сайт и самостоятелната работа със симулациите. Наблюденията показват, че броят на посещенията след провеждане на демонстрациите е нараснал.

4.4. Реализирани дидактически ситуации в обучението по механика

4.4.1. Онагледяване при лекции

Създадената система от симулации беше представена на две части след преподаване на учебното съдържание при студентите от специалност инженерна физика с лектор доц. Дочка Съева и при студентите от специалност физика с лектор доц. Мирослав Абрашев.

4.4.2. Самостоятелна работа на студентите

Както беше споменато, на студентите беше предоставен свободен достъп до сайт в интернет <http://ialms.net/sim>, където те можеха (и към настоящия момент) да работят със симулациите без никакви ограничения от своя собствен компютър или от компютър за обществено ползване или университетска зала. На сайтът бяха записвани посещенията до симулациите, като ръстът на посещенията се увеличи и в момента за период от 3 месеца наброява над 3400 посещения.

Една от основните цели на настоящите симулации беше те да са достъпни от всеки компютър, който има връзка с интернет без да се налага инсталирането на допълнителен софтуер. Тази цел беше изпълнена и тя спомогна за отбелязаният голям брой посещения.

От друга страна се получиха устни отзиви от студенти употребявали сайта в къщи, като всички бяха положителни, а някои от тях включваха и предложения за подобрене и усъвършенстване.

4.5. Резултати от проведените наблюдения и анкети

4.5.1. Качествено наблюдение.

Част от разработените симулации се представиха по време на лекции със студенти от специалността физика (16 студенти) и инженерна физика (22-ма студенти). По време на симулациите се проведе и беседа и групово дискусия по разглежданата тематика. В края на демонстрациите се проведе анкета, с която се провериха хипотезите на качествения експеримент и се очертаха изводи.

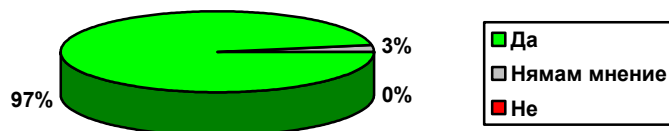
Като резултат от работата на системата от симулации за електронно обучение студентите, посетили този обучителен експеримент, получиха адекватен отговор от системата при работа с нея, като техните знания повлияха на обучителния процес в индивидуален план. Така, от една страна, поради адаптивното представяне на учебния материал, натовареността на залата се минимизира, а от друга - ефективността на обучителния процес се повишава поради факта, че подготвените студенти не бяха затормозени с излишен учебен материал, а неподготвените - получиха адекватно, изчерпателно внимание от страна на електронната система, благодарение на което те успяха да подобрят своите знания по изучавания материал.

Наблюдателите (доц. Мая Гайдарова и съответния преподавател) установиха, че част от студентите водиха бележки по време на представяне на симулациите и задаваха въпроси. Някои от тях изказаха желание да бъдат представени случаи на движение, които надхвърлят предвидените по учебната програма въпроси, например движение на несвободни тела, движение на сферично махало при всички възможни начални условия, зависимост между движенията прецесия и нутация и др. Това показва, че активността на студентите при преподаване на учебния материал се повишава и се разширява мотивационната сфера за обучение. Прилагаме мнение на наблюдаващи преподаватели.

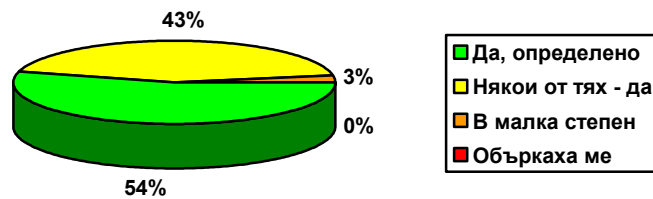
4.5.2. Анкета. Резултати от проведената анкета общо за всички анкетиращи студенти (37)

Структурирани въпроси

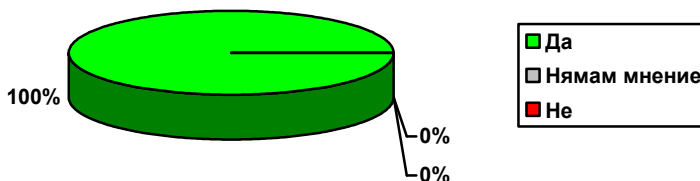
1. Одобрявате ли използването на симулации при лекции и семинари?



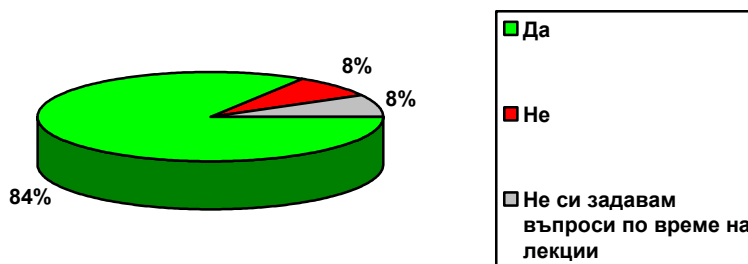
2. Помогнаха ли симулациите за изясняването на величините и закономерностите в механиката?



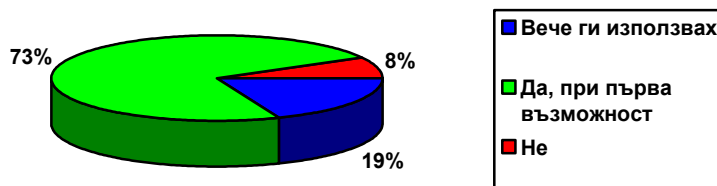
4. Искате ли да продължаваме да използваме подобни симулации в обучението?



5. Отговориха ли симулациите на възникнали по време на лекции въпроси?



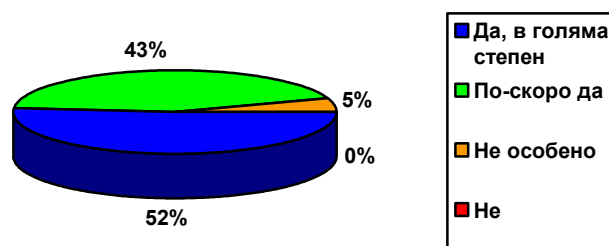
7. Бихте ли използвали симулацията от предложения сайт да работите самостоятелно и да изследвате различните възможности, които предлага?



8. Как оценявате качествата на симулациите като цяло? (Изберете от 2 до 6)

2 - 0 3 - 0 4 - 0 5 - 15 6 - 22

10. Смятате ли, че използването на симулации създава положителна мотивация за учене?



4.5.3. Анализ на резултатите от анкетата.

Структурирани въпроси

Анализът на резултатите се основава на отговорите на двете групи студенти - физика и инженерна физика. Почти всички студенти (само един няма мнение) одобряват използването на симулации в обучението по физика. На 20 студенти от цялата група (общо 37), симулациите са помогнали за изясняването на всички величини, на 16 студенти – само за някои величини.

Всички студенти искат да продължи тази практика в процеса на обучение, което означава, че им е била полезна и разнообразяваща, излагането на материала. За 31 студента демонстрациите са отговорили на възникнали по време на лекции въпроси, 3-ма не си задават въпроси по време на лекции, а други 3-ма не са получили отговор на въпросите, които са си задавали.

Една четвърт от студентите са използвали сайта за самостоятелна работа със симулациите преди анкетирането на студентите. Това са предимно студенти от специалност физика със засилен интерес към физичните процеси и явления. Почти всички останали изясняват желание да работят при първа възможност. Това показва засилена мотивация за изследване на явленията чрез симулации.

Две трети от студентите оценяват качествата на симулациите като отлични, останалите – като много добри. Това е добър показател, още повече, че голям брой студенти показаха интерес и към създадения софтуер и демонстрираха отлични познания по компютърни технологии.

51% от студентите смятат, че използването на симулации създава в голяма степен положителна мотивация за учене, 45% – в положителна и само 4% от тях не свързват използването на симулации като мотивиращ фактор. Последните са и от двете групи.

Въпроси със свободен отговор

Анкетата съдържа три въпроса със свободен отговор. Отговорите на студентите на въпроса какво им харесва в симулациите обхващат варианти, които показват, че най-много се харесва това, което не може по друг по-добър начин да се представи на лекции, а именно възможността за пространствена представа за векторите и взаимното им разположение, проследяване на движението при промяна на началните условия и някои от параметрите, възможността да се наблюдава траекторията на движението. Някои одобряват и обясненията и дискусиите по време на симулациите.

На въпроса има ли по-добър начин да се онагледят съдържанието по механика, повечето студенти отговарят, че това е най-добрият начин. Само един предлага видео.

Две трети от студентите имат препоръка да се продължи с изработването на подобни симулации за цялата механика, като някои от тях изказват мнение да се използват повече цветове и някои препоръки относно дизайна.

Статистическа проверка на хипотезите на изследването.

Обща постановка на изследването.

За изследването използваме свободни от разпределение статистически методи, тъй като не се прави проверка за вида на разпределението [Дж. Гласс, Дж. Стэнли, (1976)]. Разполагаме с две групи, чиито отговори сравняваме. Групите приемаме за независими извадки. Изследваме и отговорите на групата, получена от двете групи.

1. Изследваме отговорите на въпрос 10-ти със структуриран отговор (за мотивацията). От общата група анкетираните студенти (37) само 2 посочват отговор „не особено” на въпроса дали използването на симулации създава положителна мотивация за учене. Другите отговори са „да” и „по-скоро да”.

Формулираме нулева хипотеза:

Под 1% от анкетираните студенти смятат, че симулациите не повишават мотивацията им за обучение, т.е.

$$H_0 : p \leq 0,01, \quad q \geq 0,99$$

$$H_1 : p > 0,01, \quad q < 0,99$$

За проверката използваме биномиален статистически критерий, с ниво на значимост $\alpha = 0,05$, едностранен критерий.

$n = 37$, $p = 0,01$, $q = 0,99$, $f = 2$. Критичната стойност $f_{кр} = 3$, $f_{кр} > 2$, следователно нулевата хипотеза не се отклонява (Използваме таблица за биомно статистическо разпределение).

По-малко от 1% от анкетираните студенти смятат, че симулациите не повишават мотивацията им за обучение.

Това подкрепя основната хипотеза на изследването.

2. А) Изследваме отговорите на студентите за 2 – и въпрос, отнасящ се за подпомагане на разбирането на физичните величини и закони чрез използване на симулации. Сравняваме честотите на отговорилите „да, определено” от двете независими извадки – студентите от физика и инженерна физика. Използваме биномиален статистически критерий, тъй като извадките не надвишават 50 анкетирани, с ниво на значимост $\alpha = 0,05$, двустранен критерий.

Формулираме нулева хипотеза:

Честотите на отговорилите „да, определено” от двете независими извадки не се различават, т.е.

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

$p_1 = \frac{f_1}{n_1}$ е относителният дял на отговорилите „да, определено” от първата извадка, $p_2 = \frac{f_2}{n_2}$ е

относителният дял на отговорилите „да, определено” от втората извадка, където

$$f_1 = 12, \quad n_1 = 22$$

$$f_2 = 8, \quad n_2 = 15$$

Използваме статистиката $z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\left(\frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$. Тъй като критерият е двустранен,

проверяваме критичната стойност на z за $1-\alpha/2$, която е $1,96$. $0,975 \alpha = 1,96$. Намерената емпирична стойност за z е $z = 0,07$. Тя е по-малка от критичната, следователно честотите на положително отговорилите студенти от двете групи не се различават.

2. Б) Проверяваме може ли да се приеме, че броят на студентите от двете групи, които са отговорили „да, определено” от първата извадка, са повече от отговорилите „някои от тях - да”.

Формулираме нулева хипотеза:

Честотите на отговорите „да, определено” и „някои от тях - да” от двете групи се срещат равновероятно в генералната съвкупност, т.е. не се различават.

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

$n = 37$ е броят на анкетираните студенти, $f_1 = 20$ е броят на отговорилите „да, определено” от двете групи, а $f_2 = 17$ е на отговорилите „някои от тях-да” от двете групи (включително един отговорил „в малка степен”). Избираме ниво на значимост $\alpha = 0,05$, двустранен критерий. Статистическият извод се основава на честоти от двузначна съвкупност.

Използваме таблица за биномно статистическо разпределение. Критичната стойност за $n = 37$ и $\alpha = 0,05$ е $f_{кр} = 25$, $f_{кр} > 20 > 17$. Следователно приемаме нулевата хипотеза.

Равенството на отговорите вероятно се дължи на това, че част от симулациите обясняват явления извън предвидените по програма, като бяха показани по настояване на някои студенти. Сумарно броят на положително отговорилите студенти подкрепят основната хипотеза за повишаване на мотивацията.

3. Изследваме отговорите по 5-ти въпрос, дали симулациите са отговорили на въпроси, възникнали по време на лекции. Формулираме нулева хипотеза – Не повече от 10% от студентите отговарят отрицателно.

$$H_0 : p \leq 0,10, \quad q \geq 0,90$$

$$H_1 : p > 0,10, \quad q < 0,90$$

За проверката използваме биномиален статистически критерий, с ниво на значимост $\alpha = 0,05$, едностранен критерий. Броят студенти, отговорили сумарно отрицателно и „не си задавам въпроси по време на лекции” е 6.

Формалното записване на данните е $n=37$, $p=0,10$, $q=0,90$, $f=6$. Използваме таблица за биномно статистическо разпределение. Критичната стойност за $n=37$ и $\alpha=0,05$ е $f_{кр} = 8$, $f_{кр} > 6$. Следователно приемаме нулевата хипотеза.

Тя подкрепя основната хипотеза на изследването за подпомагане на разбирането и усвояването на материала по механика.

4. Анализираме 7-ми въпрос (за самостоятелната работа със симулациите). Ранжираме отговорите на всички студенти в три групи по отношение на честотата на отговорите „да- при първа възможност”, (27) – 1-ви ранг, „вече я използвам” (7) – 2-и ранг и „не” (3) – трети ранг. Проверяваме дали разликите между ранговете са статистически значими. Формулираме нулева хипотеза - В генералната съвкупност няма разлика между отделните рангове, присъдени на групите отговори, т.е.

$$H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = 0,333$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq 0,333$$

Избираме вероятност 0,05. Използване статистическия метод (критерий) на Колмогоров-Смирнов, тъй като броят на общата извадка е $n = 37 > 20$.

$$D = \frac{1,36}{\sqrt{n}} = 0,22$$

Ако получената стойност е по-голяма (или равна) на честотата, определена от нулевата хипотеза, може да се приеме алтернативната хипотеза. В случая $D < 0,333$ и нулевата хипотеза не може да бъде отклонена. Следователно ранговете на отговорите са равни – от генералната съвкупност не се различава броят на студентите, които вече са използвали или имат желание при първа възможност да използват симулациите от сайта за самостоятелна работа.

5. Проверяваме по същия статистически критерий има ли разликата в ранговете, определени от броя отговори на 8-ми въпрос по отношение на оценката на качествата на създадените симулации. Присъждаме първи ранг на отговор „отличен 6” (22) и втори ранг на отговор „мн. добър 5” (15). Формулираме нулева хипотеза-

$$H_0 : p_1 = p_2 = 0,5$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2 \neq 0,5$$

Изчисляваме $D = \frac{1,36}{\sqrt{n}} = 0,22$. При статистическа вероятност 0,05 приемаме нулевата хипотеза

поради по-малката получена стойност от зададената. Следователно за генералната съвкупност оценките са с еднакви честоти.

Въпроси със свободен отговор

Анкетата съдържа три въпроса със свободен отговор. Отговорите на студентите на въпроса какво им харесва в симулациите обхващат варианти, които показват, че най-много се харесва това, което не може по друг по-добър начин да се представи на лекции, а именно възможността за пространствена представа за векторите и взаимното им разположение, проследяване на движението при промяна на началните условия и някои от параметрите, възможността да се наблюдава траекторията на движението. Някои одобряват и обясненията и дискусиата по време на симулациите.

На въпроса има ли по-добър начин да се онагледят съдържанието по механика, повечето студенти отговарят, че това е най-добрият начин. Само един предлага видео.

Две трети от студентите имат препоръка да се продължи с изработването на подобни симулации.

Изводи към четвърта глава

Изводите, които се налагат от наблюденията, дискусиите и анализа на анкетата е, че:

1. Използването на симулации повишава мотивацията и засилва интереса към изучаваното съдържание.
2. Наблюдението и самостоятелната работа с предложените симулации подобряват разбирането на понятията и законите в механиката на твърдо тяло.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМАТА В СПИСАНИЯ

В обратен хронологичен ред:

<p>1. A COMPARISON BETWEEN ALGORITHMICALLY-FORMAL AND SELF-DEFININGLY-CREATIVE INDIVIDUALIZATION METHODS IN E-LEARNING</p>	<p>Zabunov, S. & Gaydarova, M., 2010. A Comparison between Algorithmically-Formal and Self-Definingly-Creative Individualization Methods in E-Learning. <i>Sofia University E-Learning Journal</i> , Issue 4, 2010</p>		
<p>2. Mathematical Methods in E-Learning Mechanics for Graduates – Rotation Matrix</p>	<p><i>Awaiting issue to be printed</i></p>		
<p>3. Изучаване на сферичното махало чрез 3D-стерео симулации</p>	<p>Забунув, С., 2010. Изучаване на сферичното махало чрез 3D-стерео симулации. <i>списание "Физика"</i>, Том 35(53) 2010, Книга 5</p>		
<p>4. Rigid body motion in stereo 3D simulation</p>	<p>Zabunov, S., 2010. Rigid body motion in stereo 3D simulation. <i>Eur. J. Phys.</i>, ISSN 0143-0807 (Print), ISSN 1361-6404 (Online), 31 (2010) 1345-1352.</p>		<p>Импакт фактор = 0.741</p>
<p>5. TEACHING PHYSICS USING VIRTUAL LABORATORY EXERCISES IN THE ENVIRONMENT OF AN ADAPTIVE E-LEARNING SYSTEM</p>	<p>Zabunov, S. & Velichkova, K., 2009. Teaching Physics Using Virtual Laboratory Exercises in the Environment of an Adaptive E-Learning System. <i>Khimiya/Chemistry. Bulgarian Journal of Chemical Education</i>, ISSN 0861-9255, issue 4 (July - August) of Volume 18 (2009)</p>		<p>SCImago Journal Rank = 0.036 (2009)</p>

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата работа се разкрива едно от основните преимущества на електронното обучение по физика – благодарение на своите гъвкавост и ефективност то провокира и отговаря на много въпроси, които трудно се поставят и дискутират чрез класическите методи на обучение. Чрез интерактивните 3D-симулации по механика се стига до отговорите на възникналите въпроси. Освен широката достъпност и удобство, симулациите на механични процеси в стерео 3D-среда създават предпоставки за изучаване и разбиране на процеси и величини, явления и закони. Въпреки, че симулациите на физични процеси никога не могат да съответстват напълно на реалността, поради своята пространствена реализация и интерактивен режим в реално време, те дават на студента възможност за взаимодействие близко до това в лабораторни условия и в същото време опасните или невъзможни за реализация процеси в лабораторията, стават възможни – ограниченията се елиминират, както са например симулирането на безтегловност или липсата на сили на триене, показването на вектори, траектории и конструкции в движение, промяна на точката на наблюдение от всички ъгли и посоки и т.н.

Представените симулации са платформено независими. Достъпът до тях е в среда Интернет и може да се осъществи от всеки персонален компютър през уеб-браузер дистанционно и независимо от операционната система или типа на използвания компютър. Използването на модерни технологии за 3D-графика осигурява платформена независимост и дистанционна достъпност в среда Интернет. Всеки персонален компютър може да бъде използван за обучение – в лаборатория, в университетска компютърна зала, интернет клуб или в дома. Симулациите лесно се демонстрират и в зала за лекции, използвайки мултимедиен проектор.

Представянето на механични процеси в стерео 3D-симулации създава възможност за изучаване и обяснение на редица величини, свързани с изучаваните процеси. Въпреки, че една симулация никога не може да съответства напълно на реалността, невъзможността да се реализират определени механични процеси в лабораторни условия и невъзможността да се наблюдават динамично векторни и други величини налага използването на симулациите като незаменим метод за обучение, чиито възможности не се предлагат от другите методи за обучение. Визуализацията в стерео 3D-режим представлява метод за обучение по механика, предлагащ значителни възможности. Създадените симулации разкриват на студентите трудно разбираемите детайли на физичните явления и така разширяват границите на електронното обучение по физика.

Системата е предпоставка за индивидуализация на процеса на обучение. Студентът може да работи индивидуално със системата, да я поставя в желана от него / нея ситуация и да наблюдава какво се случва. Този подход е добре известен от лабораторните упражнения, но за разлика от тях тук студентът може да поставя системата в такива ситуации, които иначе са или невъзможни в лабораторни условия или твърде опасни за експериментиране. Симулациите са приспособени към различните познавателни възможности на студентите – могат да се използват и от тези, които имат минимални познания до тези, за които учебната програма не предоставя достатъчно разширяване на знанията за физичните процеси и явления в механиката.

Така представените методи за обучение имат особено ниска цена, което също представлява принос към процеса на обучение по физика.

Особено важен принос е възможността студенти с увреждания безопасно да работят със симулациите, за разлика от аналогични лабораторни практики.

Тук представените симулации разкриват едно неизползвано поле от методи на обучение, които в бъдеще могат да бъдат доразвивани и разширявани в редица области на физиката.

За реализиране на целта на работата, свързана със създаване и използване на симулации в общия курс по механика, бяха осъществени следните задачи:

Проучиха се възможностите на 3D симулациите като съществена и значителна част от електронното обучение.

Проучиха се тези елементи от курса по механика, съобразно изучаваното учебно съдържание, които създават най-голямо затруднение на студентите по отношение на разбирането и усвояването им, за създаване на симулации.

Проучиха се подходящи математични модели за реализиране на симулациите. Тези модели представляват математически формализми на класическата механика.

Беше създадена система от 3D стерео симулации по механика, съобразно изучаваното учебно съдържание.

Направи се проверка на ефективността на симулациите в реални условия.

Смятаме, че поставената цел в уводната част е постигната.

Създадените симулации могат да се използват за обучение на студенти освен в общия курс по механика и в аналитичната механика, астрофизика и др.

Тези симулации могат да се доразвият до реализиране на цели механизми (системи от твърди тела), до симулиране на тела, които не са идеално твърди, симулиране на движение на флуиди, аеродинамика и др.

Основни приноси в дисертационния труд

1. Проектирана и създадена система от 3D стерео симулации към общия курс по механика за СУ.

■ Възможност за симулиране на явления по механика, недостъпни в лабораторни условия.

■ Визуализиране на вектори, траектории и конструкции, недостъпни в обикновена учебна среда.

2. Осъществяване на пространствена 3D графика чрез стереоскопичен метод.

3. Платформена независимост на създадените симулации.

4. Реализиран дистанционен достъп до симулациите в Интернет среда с помощта на произволен уеб браузър.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Jefferies, M. Thornton, S. Parkhurst, M. Doolan, and J. Alltree (UK), (2005). Any Time? Any Place? – The Impact on Student Learning of an On-Line Learning Environment - *Web-based Education ~WBE 2005~*
2. AdVal Group plc, (2000). e-Learning – A Panacea or a Cultural Change?
3. Arnold, V. I., (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics Second Edition*. Springer-Verlag
4. Attwell, G. (2006), Evaluating E-learning: A Guide to the Evaluation of E-learning - *Evaluate Europe Handbook Series Volume 2, ISSN 1610-0875, 2006*
5. Audin, M., (1996). *Spinning tops*. Cambridge Univ. Press, 1996.
6. Barker, P., (2000). Designing Teaching Webs: Advantages, Problems and Pitfalls. *Educational Multimedia, Hypermedia & Telecommunication. Association for the Advancement of Computing in Education, Charlottesville, VA 2000, 54-59.*
7. A Guide to Learning Management Systems - Canal View Boulevard, Rochester, NY 14623, 1-800-434-3466, www.elementk.com.
8. Bluetooth – <http://www.bluetooth.com>
9. Brandon Hall, (1997). Web-based Training Cookbook - *John Wiley & Sons*
10. Brusilovsky, P., (2004). KnowledgeTree: A Distributed Architecture for Adaptive E-Learning
11. Brusilovsky, P., (1999). Adaptive and Intelligent Technologies for Web-based Education - *KI - Kunstliche Intelligenz, 1999.*
12. Brusilovsky, P., H. Nijhavan, (2002). A Framework for Adaptive E-Learning Based on Distributed Reusable Learning Activities - *Proceedings of World Conference on E-Learning, E-Learn 2002*
13. Chorfi, H., M. Jemni, (2004). PERSO: Towards an Adaptive E-Learning System - *Journal of Interactive Learning Research, Vol. 15, 2004*
14. Claroline - <http://www.claroline.net>, Copyright (c) 2001, 2002 Universite catholique de Louvain (UCL). Authors: Thomas Depraetere depraetere@ipm.ucl.ac.be, Hugues Peeters peeters@ipm.ucl.ac.be, Christophe Gesché gesche@ipm.ucl.ac.be.
15. Class Server - <http://www.microsoft.com/education/>
16. Connell E H, (2000). Elements of abstract and linear algebra, Department of Mathematics, University of Miami, www.math.miami.edu/~ec/book/
17. Daniel, G., K. Cox, (2002). Wireless Learning / Mobile Learning / M-Learning
18. Dillich, S., (2000). E-Learning to take off in 2000 - *BusinessWire*
19. Ducker, M., (2001). Matrix and vector manipulation for computer graphics, [GameDev.net -- Math and Physics](http://GameDev.net)
20. Vermue, Ed., (2002). The Future of Book History Research - *Electronic Publishing Resource Center*
21. Eliot, C. and Woolf, B. (1995). An Adaptive Student Centered Curriculum for an Intelligent Training System. *User Modeling and User-Adapted Interaction, 5, 1, pp. 67-86.*
22. eMarketer magazine, Inc. 049601 ©2003
23. Eric J. Simon, (2001). Are e-Books Ready for the Classroom? -<http://www.syllabus.com> - *technology for higher education*
24. Moreno, F. J. T., Moreno, M. J. G., Carreras, A. O., Royo, E. R. (2005). Using Bayesian Networks in the Global Adaptive E-learning Process - *EUNIS 2005 - Leadership and Strategy in a Cyber-Infrastructure World*
25. Boerner, G. L., (2002). The Brave New World of Wireless Technologies: A Primer for Educators - <http://www.syllabus.com> - *technology for higher education*
26. Goldstein, H., Pool, C., and Safko, J., (2001). *Classical Mechanics Third Edition*. Addison Wesley
27. Hamilton, R., C. Richards, C. Sharp, (2001). An Examination of E-Learning and E-Books – *SoCbytes Journal, June 2001.*
28. Hamilton, William Rowan, (1844). On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine. Vol. 25, n 3. p. 489-495. 1844,* <http://www.emis.ams.org/classics/Hamilton/OnQuat.pdf>
29. Hardless, C., J. Lundin, A. Löf, L. Nilsson, U. Nuldén, (2000). MobiLearn Education for mobile people - *Viktoria Institute, Box 620, 405 30 Göteborg, Sweden*
30. Hatcher, A., (2002). Algebraic topology, Cambridge University Press
31. Horn, R. A. and Johnson, C. R., (1985). Matrix analysis, Cambridge University Press
32. Kruse, K., (2002). The State of e-Learning: Looking at History with the Technology Hype Cycle - *Chief Learning Officer*
33. Kinshuk, A., R. Oppermann, R. Rashev, H. Simm, (2000). A Cognitive Load Reduction Approach to Exploratory Learning and Its Application to an Interactive Simulation-Based Learning System - *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia, 9 (3), 253-276 (2000).*
34. Keenoy, K., A. Poulouvassilis, G. Papamarkos, P.T. Wood, V. Christophides, A. Magkanaraki, M. Stratakis, P. Rigaux, N. Spyrtatos, (2005). Adaptive Personalisation in Self e-Learning Networks - *1st International*

Kaleidoscope Learning Grid SIG Workshop on Distributed e-Learning Environments, Hotel Oriente, Vico Equense (Naples), Italy. 14 March 2005

35. Kowalevski, Sophie, (1889). Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Mathematica* **12** (1): 177–232, doi:[10.1007/BF02592182](https://doi.org/10.1007/BF02592182)
36. Kowalevski, Sophie, (1890). Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Mathematica* **14** (1): 81–93, doi:[10.1007/BF02413316](https://doi.org/10.1007/BF02413316)
37. Lennox, D., 2001. Managing Knowledge with Learning Objects - A WBT Systems White Paper, <http://www.wbtssystem.com>.
38. MIT 3D simulations: <http://ocw.mit.edu/ans7870/8/8.02T/f04/visualizations/electrostatics/21-Molecules3d/21-Dynamics3d320.html>
39. Kinshuk, A., T. Lin, (2003). User Exploration Based Adaptation in Adaptive Learning Systems - *Information Systems Department Massey University, Palmerston North, New Zealand, 2003*
40. Kruse, K., (2004). The Benefits and Drawbacks of e-Learning – *eLearningGuru.com, 2004*.
41. Lagrange, J.L., (1788). *Mechanique Analytique*, Chez la Veuve Desaint, Paris.
42. Learning Cooperative, (2003) - <http://www.worldwidelearn.com/> - *Quarterly Fall/Winter, 2003*
43. Moodle - <http://moodle.com>, Copyright (C) 2000-2002 Martin Dougiamas martin@dougiamas.com, <http://dougiamas.com>.
44. National Center for Education Statistics - *US, June 2003*
45. Poinsot, Louis (1834). *Theorie Nouvelle de la Rotation des Corps*'.
46. Jaffray, P., (1999). Helping Investors Climb the E-Learning Curve.
47. Sage Learning, (2001). Facts and Figures from the Worlds of E-Learning - <http://www.sagelearning.com>
48. Mödritscher, F., V. M. Garcia-Barrios, C. Gütl, (2004). The Past, the Present and the Future of adaptive E-Learning. An Approach within the Scope of the Research Project AdeLE - *Proceedings of the International Conference on Interactive Computer Aided Learning (ICL2004)*
49. Tetsuya, N., L. Bojiang, Y. Kazumasa, (2006). Adaptive e-Learning Sequencing Control Model Based on ECA Rules - *IPJS SIG Technical Reports, Z0031B, ISSN:0919-6072, VOL.2006;NO.77(DBS-140);PAGE.1-6(2006)*
50. Sasakura, M., S. Yamasaki, (2007). A Framework for Adaptive e-Learning Systems in Higher Education with Information Visualization - *iv, pp. 819-824, 11th International Conference Information Visualization (IV '07), 2007*
51. Srinivasan, R., (2001). Is e-learning an extension of class room training? – *The IT Business News Magazine*
52. Strategic Visions International, 2002. E-Learning Or M-Learning?
53. Strategic Visions International, 2002. The Current State of E-Learning.
54. Tait, P.G., (1890). *An Elementary Treatise on Quaternions*, Cambridge: C.J. Clay and Sons
55. Whittaker, E.T. (1904). *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. First Edition, Cambridge 1904.
56. Whittaker, E.T. (1988). *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, Cambridge.
57. William Horton, (2001). Leading e-Learning - *FREE e-Learning Newsletter!* at <http://www.e-LearningGuru.com>
58. Wireless Local Area Network – <http://www.ieee802.org/11/>
59. Zafar, A., N. Ahmad, (2008). Technological Research Challenges in Realizing Adaptive E-Learning - *The Icfai Journal of Computer Sciences, Vol. 2, No. 1, pp. 60-69, January 2008*
60. Zheliazkova, I. I., R. Kolev, (2004). Modeling Teaching and Learning Environments - *CompSysTech'2004*
61. Zheliazkova, I. I., R. Kolev, (2004). A three-level learner's model for the needs of an integrated environment for individual planned teaching - *Proceedings of the 5th international conference on Computer systems and technologies, 2004*
62. Арнольд, В. И. (1989). *Математические методы классической механики*. — 3-е изд.. — М.: Наука.
63. Бижков Г., Краевски Володар, (2007). *Методология и методи на педагогическите изследвания*. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2007, ISBN 978 954 07 2639 7
64. Дечева В., Съева Д., (2008). *Физични основи на механиката*. Изд. „Д-р Иван Богоров“, С., 2008, ISBN 987 954 316 065 5
65. Дечева В., Гайдарова М., Чолаков П., (2009). *Ръководство за решаване на задачи по механика*. изд. Парадигма, 2009, ISBN 978 954 326097 3
66. Дж. Гласс, Дж. Стэнли, (1976). *Статистические методы в педагогике и психологии*, Москва 1976.