С О Ф И Й С К И У Н И В Е Р С И Т Е Т
"СВ. К Л И М Е Н Т О Х Р И Д С К И"
==========

Ф А К У Л Т Е Т П О М А Т Е М А Т И К А И И Н Ф О Р М А Т И К А
==========

АВТОРЕФЕРАТ

НА ДИСЕРТАЦИЯ

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННИ И СТАБИЛНОСТНИ РЕЗУЛТАТИ В КВАТЕРНИОННО–КОНТАКТНАТА ГЕОМЕТРИЯ

за присъждане на научната степен

"Доктор на Науките"

Област на висшето образование: 4. Природни науки, Математика и Информатика

Професионално направление: 4.5. Математика

Научна специалност: "Геометрия"

на

Александър Владимиров Петков

СОФИЯ, 2026

В Римановата геометрия връзката между спектъра на Лапласиана и геометрията на пространството е интензивно изследвана, особено през последните 65 години. В частност, много красиви и силни резултати, отнасящи се до оценките на първата положителна собствена стойност на Лапласиана, са се появили в Диференциалната геометрия и в частност в Геометричния анализ. Насочваме читателя например към книгите на I. Chavel [33] и R. Schoen и S.-T. Yau [129] за сравнително изчерпателен обзор на тематиката. Типични примери в това отношение са фундаменталните работи на A. Lichnerowicz [103] и M. Obata [113]. Нека накратко да напомним съответните резултати. При дадено Риманово многообразие (M, g), метриката g определя еднозначно свързаността на Levi–Civita ∇^g, и по такъв начин геометрията на пространството определя спектъра на Лапласиана $\Delta^g := -tr^g(\nabla^g)^2$. Естествено е да се зададе обратният въпрос: "Как и при какви условия спектърът на Лапласиана се отразява върху геометрията на пространството?", или още по-добре: "Как и при какви условия спектърът на Лапласиана определя еднозначно пространството?". Резултатите, които отговарят на този тип въпроси, могат да бъдат интерпретирани като *характеризационни резултати* в Диференциалната геометрия. Да отбележим, че, грубо казано, характеризационен резултат в Математиката се нарича необходимо и достатъчно условие, различно и често по-просто от първоначалното, което характеризира еднозначно математически обект или клас математически обекти. Използвайки класическата формула на Bochner–Weitzenböck, Lichnerowicz [103] показва, че върху компактно Риманово многообразие (M, g) от размерност n, за което кривината на Ricci удовлетворява

$$Ric(X, X) \geq kg(X, X), \quad X \in \Gamma(TM), \tag{1}$$

където k е положителна константа, първата положителна собствена стойност λ_1 на (положителния) оператор на Лаплас Δ^g удовлетворява неравенството $\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}k$. Константата $\frac{n}{n-1}k$ може да бъде интерпретирана като първата ненулева собствена стойност на (положителния) Лапласиан върху n–мерната сфера $S^n(r, g_{round})$ с кръгова метрика g_{round}, с радиус $r = \sqrt{\frac{n-1}{k}}$ и скаларна кривина $S = kn$. Впоследствие, Obata [113] доказва, че равенство се постига точно тогава, когато Римановото многообразие е изометрично на сферата $S^n(r, g_{round})$, описана по-горе. Obata забелязва, че безследната част на Римановия Хесиан на собствена функция f на Лапласиана, отговаряща на собствена стойност $\lambda = \frac{n}{n-1}k$, се анулира, т.е. f удовлетворява линейната система от частни диференциални уравнения

от втори ред

$$(\nabla^g)^2 f = -\frac{k}{n-1} f g, \tag{2}$$

след което дефинира изометрия, използвайки анализ, базиран на теорията на геодезичните линии и резултати за сравнение чрез Хесиана на фунцията "разстояние" от точка. Всъщност, Obata показва, че върху n-мерно пълно Риманово многообразие (M, g) уравнението (2) допуска неконстантно решение тогава и само тогава, когато многообразието е изометрично на n-мерна сфера $S^n(r, g_{round})$ с кръгова метрика g_{round} и с радиус $r = \sqrt{\frac{n-1}{k}}$. В този случай, собствените функции, съответстващи на първата собствена стойност, са решенията на (2). По-късно, Gallot [**56**] обобщава тези резултати до твърдения, включващи собствени стойности от по-висок ред и съответните собствени функции на оператора на Лаплас.

В много, добре изучени, суб–Риманови геометрии, така нареченият суб–Лапласиан се появява естествено като суб-Риманов аналог на стандартния Лапласиан в Римановата геометрия. Тъй като суб–Лапласианът е суб-елиптичен линеен диференциален оператор от втори ред, неговият спектър е дискретен върху компактно многообразие и следователно възниква естествен въпрос дали горните резултати имат суб–Риманови версии.

В кватернионно–контактната геометрия, която е пример за суб–Риманова геометрия, суб–Лапласианът Δ, генериран от една канонична линейна свързаност – свързаността на Biquard, играе съответната фундаментална роля. Това е суб–елиптичен линеен диференциален оператор от втори ред, който върху компактно многообразие е самоспрегнат оператор с дискретен спектър

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

с $\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty$. Естествен въпрос е дали изучаването на поведението на тези собствени стойности би било толкова плодотворно и полезно, колкото в Римановата геометрия.

Една от основните цели на настоящата дисертация е получаването на резултати от тип на Obata в кватернионно–контактната геометрия. Получените резултати са всъщност *характеризационни резултати* в кватернионно–контактната геометрия. Глава 3 е посветена на тези резултати.

Друга централна тема на тезиса е изучаването на кватернионно–контактна версия на един наскоро появил се интересен резултат в Римановата геометрия, наречен *Почти Лема на Schur*. За Риманово многообразие (M^n, g) с размерност $n \geq 3$, известната Лема на Schur гласи, че ако (M^n, g) е Айнщайново, тогава то има постоянна скаларна кривина, $S = Const$. Метриката g се нарича Айнщайнова, ако тензорът на Ричи е пропорционален на метриката, $Ric = \frac{S}{n}g$. Интересно е да се види как S се различава от константа, когато $Ric - \frac{S}{n}g$ е близо до нула. Интересен резултат в тази посока, който всъщност е обобщение на Лемата на Schur, е установен през 2012 г. от De Lellis и Topping [**47**], и гласи както следва. Ако (M^n, g) е компактно Риманово многообразие от размерност $n \geq 3$ и с неотрицателен тензор на Ричи, $Ric \geq 0$, тогава е валидно следното неравенство

$$\int_M (S - \bar{S})^2 vol_g \leq \frac{4n(n-1)}{(n-2)^2} \int_M \left| Ric - \frac{S}{n} g \right|_g^2 vol_g, \tag{3}$$

където $\bar{S}$ означава средната стойност на скаларната кривина S на g. Равенството е валидно тогава и само тогава, когато многообразието е Айнщайново. Ясно е, че Лемата на Schur следва директно (в компактния случай) и този резултат е едно нейно обобщение. Най-общо казано, такъв тип резултати се наричат *резултати за стабилност* в Диференциалната геометрия, и в частност, в Геометричния анализ. В [**47**] е показано също, че условието за неотрицателност $Ric \geq 0$, което се предполага за тензора на Ricci, е съществено и ако това условие се игнорира, неравенство от вида (3) не винаги е изпълнено. При условие, че тензорът на Ricci е положителен, неравенството (3) е установено по-рано от Andrews [**39**, Theorem B.18 и Corollary B.20]. Подобни резултати за стабилност привличат много внимание през последните двадесет години. Трябва да се отбележи, че това ново поле за изследване започва с работата на C. De Lellis и S. Müller [**46**] в областта на Геометричния анализ.

Съответните резултати в кватернионно–контактната геометрия, които също са предмет на настоящата дисертация, могат да бъдат интерпретирани като *резултати за стабилност* в кватернионно–контактната геометрия. По-точно, ние представяме, от гледна точка на свързаността на Biquard, пет кватернионно–контактни версии на Почти Лемата на Schur, в зависимост от определени априорни условия за положителност. Струва си да се отбележи, че едно от тях се появява в условието за положителност от тип на Lichnerowicz в кватернионно–контактната геометрия, използвано за намиране на точна долна граница на първата собствена стойност на

суб–Лапласиана. От друга страна, второ условие се появява в априорното неравенство от тип на Cordes в кватернионно–контактната геометрия между (хоризонталния) Хесиан и суб–Лапласиана на функция. Глава 4 е посветена на тези резултати.

Предполага се, че читателят е запознат с основните понятия и концепции на Диференциалната геометрия, и по-специално на Римановата геометрия и Геометричния анализ.

Дисертацията се основава на следните публикации:

1. Ivanov, S., Petkov, A., & Vassilev, D., *The Obata sphere theorems on a quaternionic contact manifold of dimension bigger than seven.* Journal of Spectral Theory, vol. **7**, No. 4 (2017), 1119–1170.
2. Ivanov, S., Petkov, A., *The Almost Schur Lemma in Quaternionic Contact Geometry.* Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. RASCAM (2023) No. **2**, Paper No. 77, 18 pp.

Сега ще опишем структурата и съдържанието на дисертацията. Ще се съсредоточим основно върху оригиналните резултати.

Глава 1 е уводна и е разделена на три раздела.

В раздел 1.1 припомняме някои основни дефиниции и факти, отнасящи се до суб–Римановата геометрия, както и някои основни понятия от Коши–Римановата (CR) геометрия.

Подраздел 1.1.1 е посветен на припомняне на общото определение на суб–Риманова геометрия, както и на някои от нейните характеристики.

В подраздел 1.1.2 припомняме дефиницията на CR многообразие, както и съществуването и свойствата на канонична линейна свързаност в CR геометрията - свързаността на Tanaka–Webster. Припомняме също концепцията за CR оператор на Paneitz, както и дефиницията и някои основни свойства на Сасакиевите пространства.

В раздел 1.2 събираме най-известните и важни резултати в Римановата геометрия, които са свързани с темата на дисертацията.

Подраздел 1.2.1 е колекция от известните резултати от тип на Lichnerowicz и Obata в Римановата геометрия, както и някои от техните по-нататъшни обобщения и разширения.

В подраздел 1.2.2 припомняме Почти Лемата на Schur в Римановата геометрия, както и някои от по-новите ѝ обобщения.

Раздел 1.3 има за цел да събере известните резултати в CR геометрията, които са свързани с темата на дисертацията.

В подраздел 1.3.1 събираме най-важните известни резултати в CR геометрията, отнасящи се до резултатите от типа на Lichnerowicz и Obata.

Подраздел 1.3.2 събира известните резултати в CR геометрията по отношение на CR версиите на Почти Лемата на Schur.

Глава 2 е посветена на кватернионно–контактната геометрия, включително и някои предварителни алгебрични сведения. Тя събира основните дефиниции, понятия, свойства и примери в тази геометрия и е разделена на три раздела.

В раздел 2.1 даваме някои добре познати алгебрични предварителни сведения, като например концепцията за кватерниони (подраздел 2.1.1) и компактната симплектична група (подраздел 2.1.2), които в известен смисъл формират алгебричната основа на кватернионно–контактната геометрия.

Раздел 2.2 събира основните дефиниции, понятия и свойства на кватернионно–контактната геометрия.

В подраздел 2.2.1 даваме определението за кватернионно–контактно многообразие – във формата, дадена от O. Biquard, и в експлицитна форма. Експлицитната дефиниция е следната [13]:

Определение 1 (Definition 2.2.1). *Кватернионно–контактна структура (или накратко, qc структура) върху* $(4n+3)$*-мерно гладко многообразие* M *се състои от подразслоение* H *с ранг* $4n$ *на допирателното разслоение* TM *на* M*, такова че:*

а) H *е снабдено с конформен клас* $[g]$ *от Риманови метрики;*

б) съществува подразслоение $\mathbb{Q}$ *с ранг* 3 *на разслоението* $End(H)$ *от ендоморфизмите на* H*, локално породено от три почти комплексни структури* I_1, I_2 *и* I_3 *върху* H*, удовлетворяващи тъждествата на кватернионните имагинерни единици, а именно,*

$$I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = -id|_H, \quad I_1 I_2 = -I_2 I_1 = I_3;$$

в) всяка почти комплексна структура $I_s, s = 1, \ldots, 3$*, е Ермитово съгласувана с всяка метрика* $g \in [g]$*, т.е.* $g(I_s X, I_s Y) = g(X, Y)$*;*

г) H *е локално зададено като ядрото на* 1*–форма* $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ *със стойности в* $\mathbb{R}^3$*, т.е.* $H = \bigcap_s \ker \eta_s$*, и са изпълнени следните условия за съгласуваност*

$$2g(I_s X, Y) = d\eta_s(X, Y), \tag{4}$$

за някоя $g \in [g]$ и за всяко s=1,...,3.

Едно $(4n+3)$–мерно многообразие M, снабдено с кватернионно–контактна структура, както е описано по-горе, се нарича *кватернионно–контактно* (съкр. *qc*) *многообразие* и се обозначава с $(M, [g], \mathbb{Q})$. Подразслоението H се нарича *хоризонтално (под)разслоение, хоризонтално (под)пространство* или *хоризонтално разпределение.* Всяко векторно поле $X \in \Gamma(H)$ се нарича *хоризонтално векторно поле*, докато всяка метрика $g \in [g]$ се нарича *хоризонтална метрика.* $\mathbb{R}^3$–значната 1–форма η се нарича *контактна форма.*

Метриката $g \in [g]$, която удовлетворява условието за съгласуваност (4), се нарича *съгласувана с контактната форма η.* Ако $g \in [g]$ е фиксирана метрика и тройките $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ и $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, I_3\}$ удовлетворяват условията на Определение 1, тогава множеството $\{\eta, \mathcal{I}\}$ се нарича *допустимо множество* за qc структурата.

Върху qc многообразие $(M, [g], \mathbb{Q})$, всяка тройка $(\eta, g, \mathbb{Q})$, където метриката $g \in [g]$ е съгласувана с контактната форма η, се нарича *qc псевдоермитова структура*, докато многообразието M, снабдено с тази структура, се нарича *qc псевдоермитово многообразие* и се означава с $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$.

Фундаменталните 2–форми ω_s върху qc псевдоермитово многообразие $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ се дефинират чрез

$$2\omega_s|_H = d\eta_s|_H, \quad i_\xi \omega_s = 0, \quad \xi \in V,$$

където V е дефинирано в Теорема 2. Фундаменталните 2–форми ω_s са локално дефинирани, докато 4–формата, дефинирана в [**80**],

$$\Omega := \omega_1 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_3$$

е глобално дефинирана хоризонтална, $Sp(n)Sp(1)$–инвариантна форма, чиято външна производна $d\Omega$ носи съществена информация за торзионния ендоморфизъм на свързаността на Biquard. 4–формата Ω се нарича *фундаментална 4–форма* за дадената qc псевдоермитова структура.

В подраздел 2.2.2 припомняме резултат, отнасящ се до съществуването и свойствата на канонична линейна свързаност – *свързаността на Biquard*, която играе фундаментална роля в кватернионно–контактната геометрия. Именно, припомняме следния резултат на O. Biquard [**13**]:

Теорема 2 (Theorem 2.2.4). *Нека $(M, g, \mathbb{Q})$ е кватернионно–контактно многообразие от размерност $4n+3 > 7$ и фиксирана метрика g върху H от конформния клас $[g]$. Тогава съществува единствена*

канонична линейна свързаност ∇ *с торзия* T *върху* M *и единствено допълващо подпространство* V *на* H *в* TM, *такива, че:*

а) ∇ *запазва разлагането* $H \oplus V$;

б) Ако $X, Y \in \Gamma(H)$, *тогава* $T(X,Y) = -[X,Y]|_V$;

в) ∇ *запазва* $Sp(n)Sp(1)$*–структурата върху* H, *т.е.* $\nabla g = 0$ *и* $\nabla\sigma \in \Gamma(\mathbb{Q})$ *за всяко сечение* $\sigma \in \Gamma(\mathbb{Q})$;

г) ако $\xi \in \Gamma(V)$, *тогава торзионният ендоморфизъм* $T(\xi,\cdot)|_H$ *на* H *принадлежи на* $(\mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{sp}(1))^\perp \subset \mathfrak{gl}(4n)$;

д) свързаността върху V *е индуцирана от естественото отъждествяване* φ *на* V *с подпространството* $\mathfrak{sp}(1)$ *на ендоморфизмите на* H, *т.е.* $\nabla\varphi = 0$.

Съответният резултат в седем–мерния случай е получен от D. Duchemin в [50].

Подраздел 2.2.3 е преглед на фундаменталните резултати на O. Biquard и D. Duchemin, които интерпретират кватернионно–контактните структури като конформни безкрайности на така наречените асимптотично хиперболични кватернионно–Келерови (AHQK) метрики.

В подраздел 2.2.4 припомняме начина, по който ендоморфизъм, действащ върху хоризонталното разпределение, може да бъде разложен на $Sp(n)$– и $Sp(n)Sp(1)$–инвариантни, спрямо кватернионната структура, части.

Подраздел 2.2.5 събира дефинициите и основните свойства на тензорите на торзията и на кривината на свързаността на Biquard, както и се напомня понятието qc–Айнщайново пространство.

Подраздел 2.2.6 е посветен главно на тъждествата на Ricci от втори и трети ред. Припомняме също термините „хоризонтален градиент“, „сублапласиан“ и др. на гладка функция, както и „формулата за интегриране по части“.

В подраздел 2.2.7 припомняме понятията „P–форма“ и „P–функция“ в кватернионно–контактната геометрия.

Раздел 2.3 предоставя някои основни примери за кватернионно–контактни структури.

В подраздел 2.3.1 представяме плоския модел в кватернионно–контактната геометрия – кватернионната група на Хайзенберг.

Подраздел 2.3.2 е посветен на 3–Сасакиевите пространства, които в известен смисъл, поне локално, са единствените qc–Айнщайнови пространства. Припомняме също понятието 3–Сасакиева сфера, което играе централна роля в тази дисертация.

Глава 3 съдържа първия цикъл от основните резултати на дисертацията, а именно тези, отнасящи се до теоремите от тип на Obata в кватернионно–контактната геометрия.

В раздел 3.1 даваме някои предварителни факти, свързани с резултатите от тип на Lichnerowicz в кватернионно–контактната геометрия, и формулираме основните резултати. Първият основен резултат е следната теорема от типа на Obata:

Теорема 3 (Theorem 3.1.4). *Нека $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е компактно кватернионно–контактно многообразие от размерност $4n + 3 > 7$, чийто qc–Ricci тензор и тензор на торзията на свързаността на Biquard удовлетворяват неравенството*

$$(5)\quad Ric(X,X)+\frac{2(4n+5)}{2n+1}T^0(X,X)+\frac{6(2n^2+5n-1)}{(n-1)(2n+1)}U(X,X) \geq k_0 g(X,X)$$

за всяко хоризонтално векторно поле X, където k_0 е положителна константа. Тогава първата положителна собствена стойност λ на сублапласиана $\triangle$ удовлетворява равенството

$$\lambda = \frac{n}{n+2}k_0$$

тогава и само тогава, когато qc многообразието $(M, g, \mathbb{Q})$ е qc–хомотетично на единичната $(4n+3)$–мерна 3-Сасакиева сфера.

Вторият основен резултат е следващата теорема от тип на Obata:

Теорема 4 (Theorem 3.1.5). *Нека $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е кватернионно–контактно многообразие от размерност $4n+3 > 7$, което е пълно спрямо естествената Риманова метрика върху него*

$$(6)\qquad h = g + (\eta_1)^2 + (\eta_2)^2 + (\eta_3)^2.$$

Да предположим, че съществува неконстантна гладка функция f, чийто хоризонтален Хесиан удовлетворява

$$(7)\qquad \nabla df(X,Y) = -fg(X,Y) - \sum_{s=1}^{3} df(\xi_s)\omega_s(X,Y).$$

Тогава qc многообразието $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е qc–хомотетично на единичната $(4n+3)$–мерна 3-Сасакиева сфера.

Раздел 3.2 съдържа доказателствата на основните резултати от Глава 3. Тъй като доказателствата са изключително дълги, разделяме този раздел на следните подраздели.

В подраздел 3.2.1 представяме няколко основни тъждества, които екстремалната функция удовлетворява, и които се явяват важни етапи в доказателствата на основните резултати от тази глава. Първото е доказано в следната

Лема 5 (Lemma 3.2.1). *С допусканията на Теорема 4, имаме следната формула за третата ковариантна производна на функцията f:*

$$\nabla^3 f(A,X,Y) = -df(A)g(X,Y) - \sum_{s=1}^{3} \omega_s(X,Y)\nabla^2 f(A,\xi_s), \quad A \in \Gamma(TM).$$

Следващият важен резултат от този подраздел е следната

Лема 6 (Lemma 3.2.2). *С допусканията на Теорема 4, вярно е следното тъждество*

$$(S-2)df(Z) + \frac{2n+3}{2n+1}T^0(Z,\nabla f) + \frac{2(2n-1)(n+2)}{(2n+1)(n-1)}U(Z,\nabla f) = 0.$$

Освен това, имаме

$$T^0(I_s\nabla f,\nabla f) = 0, \qquad U(I_s\nabla f,\nabla f) = 0.$$

Подраздел 3.2.2 е посветен на изчисленията на производните от втори ред на екстремалната функция, включващи и вертикалните посоки. Първият основен резултат от този подраздел е съдържанието на следната

Лема 7 (Lemma 3.2.3). *С допусканията на Теорема 4 имаме*

$$\nabla df(\xi_i, I_iZ) = -df(Z) + \frac{2n+3}{4(2n+1)}\Big[T^0(Z,\nabla f) - T^0(I_iZ, I_i\nabla f)\Big] + \frac{2n^2+3n-1}{(2n+1)(n-1)}U(Z,\nabla f)$$

и

$$\nabla df(Z,\xi_i) = df(I_iZ) - \frac{n+1}{2n+1}\Big[T^0(I_iZ,\nabla f) + T^0(Z, I_i\nabla f)\Big] - \frac{4n}{(2n+1)(n-1)}U(I_iZ,\nabla f).$$

След това изчисляваме вторите вертикални производни на f. Започваме с основно полезно тъждество, включващо само вертикални производни.

Лема 8 (Lemma 3.2.4). *С допусканията на Теорема 4 е валидно следното тъждество*

$$\nabla^2 f(\xi_i,\xi_i)$$

$$= -f - \frac{n+1}{4n(2n+1)}\Big[(\nabla_{e_a}T^0)(e_a,\nabla f) - (\nabla_{e_a}T^0)(I_ie_a, I_i\nabla f)\Big] - \frac{1}{(2n+1)(n-1)}(\nabla_{e_a}U)(e_a,\nabla f).$$

В подраздел 3.2.3 доказваме, че екстремалната функция удовлетворява специфично елиптично частно диференциално уравнение. А именно, доказваме следната

Лема 9 (Lemma 3.2.6). *Върху кватернионно–контактно многообразие от размерност по-голяма от седем, всяка гладка функция, удовлетворяваща* (7)*, удовлетворява и уравнението*

$$\triangle^h f = (4n+3)f + \frac{n+1}{n(2n+1)}(\nabla_{e_a}T^0)(e_a,\nabla f) + \frac{3}{(2n+1)(n-1)}(\nabla_{e_a}U)(e_a,\nabla f).$$

В подраздел 3.2.4 и подраздел 3.2.5 извеждаме редица специфични тъждества, отнасящи се до тензора на торзията и неговите ковариантни производни, свързани с екстремална функция.

Подраздел 3.2.6, който е ключов за Глава 3, съдържа доказателството, че тензорът на торзията се анулира, чрез изчисляване по два начина на смесените трети ковариантни производни на екстремална собствена функция. По-точно, следният резултат е валиден.

Лема 10 (Lemma 3.2.10). *Ако M удовлетворява предположенията на Теорема 4, тогава тензорът на торзията се анулира, $T^0 = 0$, $U = 0$, т.е. M е qc–Айнщайново многообразие.*

Основният резултат от подраздел 3.2.7 е, че в случая на qc–Айнщайновост, наличието на екстремална функция влече факта, че тази функция удовлетворява класическото уравнение на Obata по отношение на свързаната с qc многообразието Риманова метрика, и следователно qc многообразието, разглеждано като Риманово многообразие, е изометрично на единичната сфера с кръгова метрика. Именно, важи следната лема:

Лема 11 (Lemma 3.2.11). *Нека $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ е qc-Айнщайново многообразие, $T^0 = U = 0$, от размерност $4n+3 > 7$, и нека h е асоциираната с него Риманова метрика* (6)*. Ако f е гладка функция, чийто хоризонтален Хесиан удовлетворява* (7)*, тогава Римановият Хесиан на f спрямо метриката h удовлетворява уравнение от типа* (2)*, или по-точно,*

$$(\nabla^h)^2 f = -fh.$$

Подраздел 3.2.8 и подраздел 3.2.9 са посветени на теорема от типа на Liouville в кватернионно–контактната геометрия. Тази теорема служи за доказателство на qc частта на Теорема 4 и гласи следното.

Теорема 12 (Theorem 3.1.6). *Нека $\Sigma \subset \mathbb{S}^{4n+3}$ е свързано отворено подмножество на $\mathbb{S}^{4n+3}$. Ако $F : \Sigma \to \mathbb{S}^{4n+3}$ е qc-конформна трансформация, тогава F е рестрикция върху Σ на елемент от $PSp(n+1,1)$ - групата на изометриите на кватернионното хиперболично пространство.*

Като следствие получаваме следната

Теорема 13 (Theorem 3.2.14). *Ако (M,η) е просто свързано qc–конформно плоско qc многообразие от размерност $4n+3$, тогава съществува qc–конформна имерсия $\Phi : M \to \mathbb{S}^{4n+3}$, където $\mathbb{S}^{4n+3}$ е 3-Сасакиевата единична сфера в $(n+1)$–мерното кватернионно пространство.*

В подраздел 3.2.10 завършваме доказателствата на основните резултати от Глава 3.

В подраздел 3.2.11 даваме ново, унифицирано доказателство на оценките от тип на Lichnerowicz в кватернионно–контактната геометрия.

Глава 4 съдържа втория цикъл от основните резултати на дисертацията, а именно тези, свързани с кватернионно–контактни версии на Почти Лемата на Schur.

Раздел 4.1 съдържа необходимите основни понятия, както и формулировките на основните резултати от Глава 4.

Припомняме термините qc–Айнщайново, qc–псевдо–Айнщайново и qc–приблизително–Айнщайново многообразие.

Започваме със следната qc версия на Почти Лемата на Schur:

Теорема 14 (Theorem 4.1.5). *Нека $(M,g,\mathbb{Q})$ е компактно кватернионно–контактно многообразие от размерност $4n+3 > 7$ и е изпълнено следното априорно условие*

$$Ric(X,X) + \alpha(n)T^0(X,X) + \beta(n)U(X,X) \geq 0, \quad X \in \Gamma(H). \tag{8}$$

Тогава

$$\begin{aligned}\int_M (Scal - \overline{Scal})^2\, Vol_\eta &\leq \gamma(n) \sum_{a,b} ||\mathring{Ric}(e_a,e_b)||^2_{L^2} \\ &+ \delta(n) \int_M \left[(n+1)(\nabla_{e_a}T^0)(e_a,\nabla\varphi) + \frac{3(n+3)}{n-1}(\nabla_{e_a}U)(e_a,\nabla\varphi)\right] Vol_\eta.\end{aligned} \tag{9}$$

Ако равенството в (9) *е изпълнено, тогава*

$$\int_M (Scal - \overline{Scal})^2 \, Vol_\eta = \gamma(n) \sum_{a,b} ||\mathring{Ric}(e_a, e_b)||^2_{L^2}$$

и

$$\int_M (\nabla_{e_a} T^0)(e_a, \nabla\varphi) \, Vol_\eta = \int_M (\nabla_{e_a} U)(e_a, \nabla\varphi) \, Vol_\eta = 0.$$

В горните формули, $\overline{Scal} = \int_M Scal \, Vol_\eta$ е средната стойност на qc скаларната кривина, а $\mathring{Ric}$ означава безследния qc тензор на Ricci,

$$\mathring{Ric} := Ric - \frac{Scal}{4n} g.$$

Освен това, функцията $\varphi \in \mathcal{F}(M)$, появяваща се по-горе, е единственото решение на субелиптичното уравнение на Poisson

$$\Delta\varphi = Scal - \overline{Scal} \quad \text{с} \quad \int_M \varphi \, Vol_\eta = 0.$$

Накрая, размерностните константи $\alpha(n), \beta(n), \gamma(n)$ и $\delta(n)$ са дефинирани чрез

$$\alpha(n) = \frac{2(3n+4)}{n}, \quad \beta(n) = \frac{6(n+3)}{n-1},$$
$$\gamma(n) = \frac{4n(n-1)(n+2)^2(4n+3)}{(n+1)^2(n+3)(2n+1)^2} \quad \text{и} \quad \delta(n) = \frac{16n(n+2)}{(n+1)(2n+1)}.$$

Горният резултат може да се интерпретира като резултат за стабилност – ако безследният qc тензор на Ricci $\mathring{Ric}$ и следите във втория ред на (9) са близки до нула, тогава qc скаларната кривина е близка до константа и, разбира се, ако многообразието е qc–Айнщайново, следва, че qc скаларната кривина е константа, $Scal = \overline{Scal}$.

Като просто следствие от горната теорема, след интегриране по части получаваме следното

Следствие 15 (Corollary 4.1.6). *Нека* $(M, g, \mathbb{Q})$ *е компактно кватернионно–контактно многообразие от размерност* $4n + 3 > 7$ *и е изпълнено априорното условие* (8). *Освен това, да приемем, че*

$$(\nabla_{e_a} \nabla_{e_b} T^0)(e_a, e_b) = (\nabla_{e_a} \nabla_{e_b} U)(e_a, e_b) = 0.$$

Тогава

$$\int_M (Scal - \overline{Scal})^2 \, Vol_\eta \leq \gamma(n) \sum_{a,b} ||\mathring{Ric}(e_a, e_b)||^2_{L^2}.$$

В частност, ако

$$\mathring{Ric}(e_a, e_b) = 0 \quad \text{за всяко} \quad a, b = 1, \ldots, 4n,$$

тогава qc скаларната е константа.

Очевидно е, че горното условие (приемайки изискването за положителност (8)), за да бъде qc скаларната кривина константа, е по-слабо от условието многообразието да бъде qc–Айнщайново.

В следващите резултати предполагаме следните априорни условия за положителност. Първото е условието от тип на Lichnerowicz:

$$(10)\quad Lic(X,X) := Sg(X,X) + \frac{2n+3}{2n+1}T^0(X,X) + \frac{2(n+2)(2n-1)}{(n-1)(2n+1)}U(X,X) \geq 0, \quad X \in \Gamma(H).$$

Второто е условието от тип на Cordes:

$$(11)\quad Cor(X,X) := Sg(X,X) + \frac{n+2}{n}T^0(X,X) + \frac{2(n+1)}{n-1}U(X,X) \geq 0, \quad X \in \Gamma(H).$$

Нека обърнем внимание, че лявата страна на (10) е същата, с точност до константния множител $2(n+2)$, както лявата страна на условието (5) от тип на Lichnerowicz.

Също така, с $\bar{S}$ означаваме средната стойност на (нормализираната) qc скаларна кривина S,

$$\bar{S} = \int_M S\, Vol_\eta.$$

Освен това, в следващите резултати, с $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ означаваме единственото решение на субелиптичното уравнение на Poisson:

$$\triangle\varphi = S - \bar{S}, \quad \int_M \varphi\, Vol_\eta = 0.$$

Вторият основен резултат гласи следното.

Теорема 16 (Theorem 4.1.7). *Нека $(M, g, \mathbb{Q})$ е компактно кватернионно–контактно многообразие от размерност $4n+3 > 7$. Да предположим, че условието за положителност (10) е изпълнено. Тогава имаме*

$$(12)\quad \int_M (S-\bar{S})^2\, Vol_\eta \leq \frac{n+2}{2n(n-1)(2n+5)^2(2n+1)} \int_M |Ric_{[3][0]}|^2\, Vol_\eta - \frac{2}{2n+1}\int_M T^0(e_a,e_b)(\nabla^2\varphi)_{[-1][sym]}(e_a,e_b)\, Vol_\eta$$
$$= \frac{2(n+2)}{n(n-1)(2n+1)}\int_M |U|^2\, Vol_\eta - \frac{2}{2n+1}\int_M T^0(e_a,e_b)(\nabla^2\varphi)_{[-1][sym]}(e_a,e_b)\, Vol_\eta.$$

Ако равенството е в сила, тогава

$$(13)\quad \int_M (S-\bar{S})^2\, Vol_\eta = \frac{n+2}{2n(n-1)(2n+5)^2(2n+1)} \int_M |Ric_{[3][0]}|^2\, Vol_\eta = \frac{2(n+2)}{n(n-1)(2n+1)} \int_M |U|^2\, Vol_\eta$$

и qc конформната структура $\bar{\eta} = \frac{n}{2} e^{-2\varphi}\eta$ *ще бъде qc–псевдо–Айнщайнова.*

Третият основен резултат е аналогичен на предишния, но априорното условие от тип на Lichnerowicz (10) е заменено с условието от тип на Cordes (11). По-точно, имаме

Теорема 17 (Theorem 4.1.8). *Нека* $(M, g, \mathbb{Q})$ *е компактно кватернионно–контактно многообразие от размерност* $4n+3 > 7$. *Да предположим, че условието за положителност* (11) *е изпълнено. Тогава имаме*

$$(14)\quad \int_M (S-\bar{S})^2\, Vol_\eta \leq \frac{(n+2)^2(4n+3)}{4n(n-1)(n+3)(2n+5)^2(2n+1)^2} \int_M |Ric_{[3][0]}|^2\, Vol_\eta - \frac{2}{2n+1} \int_M T^0(e_a, e_b)(\nabla^2\varphi)_{[-1][sym]}(e_a, e_b)\, Vol_\eta = \frac{(n+2)^2(4n+3)}{n(n-1)(n+3)(2n+1)^2} \int_M |U|^2\, Vol_\eta - \frac{2}{2n+1} \int_M T^0(e_a, e_b)(\nabla^2\varphi)_{[-1][sym]}(e_a, e_b)\, Vol_\eta.$$

Ако равенството е в сила, тогава

$$(15)\quad \int_M (S-\bar{S})^2\, Vol_\eta = \frac{(n+2)^2(4n+3)}{4n(n-1)(n+3)(2n+5)^2(2n+1)^2} \int_M |Ric_{[3][0]}|^2\, Vol_\eta = \frac{(n+2)^2(4n+3)}{n(n-1)(n+3)(2n+1)^2} \int_M |U|^2\, Vol_\eta$$

и qc конформната структура $\bar{\eta} = \frac{n(n+3)(2n+1)}{(n+2)(4n+3)} e^{-2\varphi}\eta$ *ще бъде qc–псевдо–Айнщайнова.*

Като просто следствие от горните две теореми установяваме, след интегриране по части на последния член в (12) и в (14), съответно, следното

Следствие 18 (Corollary 4.1.9). *Нека* $(M, g, \mathbb{Q})$ *е компактно кватернионно–контактно многообразие от размерност* $4n+3>7$, *и да приемем, че*

$$(\nabla_{e_a}\nabla_{e_b}T^0)(e_a, e_b) = 0.$$

a) *Ако условието за положителност* (10) *е изпълнено,* $Lic(X,X) \geq 0$, *тогава*

$$\int_M (S-\bar{S})^2\, Vol_\eta \leq \frac{n+2}{2n(n-1)(2n+5)^2(2n+1)} \int_M |Ric_{[3][0]}|^2\, Vol_\eta = \frac{2(n+2)}{n(n-1)(2n+1)} \int_M |U|^2\, Vol_\eta.$$

b) *Ако условието за положителност* (11) *е изпълнено,* $Cor(X,X) \geq 0$, *тогава*

$$\int_M (S-\bar{S})^2\, Vol_\eta \leq \frac{(n+2)^2(4n+3)}{4n(n-1)(n+3)(2n+5)^2(2n+1)^2} \int_M |Ric_{[3][0]}|^2\, Vol_\eta = \frac{(n+2)^2(4n+3)}{n(n-1)(n+3)(2n+1)^2} \int_M |U|^2\, Vol_\eta.$$

И в двата случая, ако M *е qc–псевдо–Айнщайново, тогава qc скаларната кривина* S *е константа.*

Четвъртият основен резултат от тази глава представлява кватернионно–контактна версия на Почти Лемата на Schur в термините на безследната $[-1]$–компонента на qc тензора на Ricci, и е съдържанието на следната

Теорема 19 (Theorem 4.1.10). *Нека* $(M, g, \mathbb{Q})$ *е компактно кватернионно–контактно многообразие от размерност* $4n+3>7$. *Да предположим, че условието за положителност* (10) *е изпълнено,* $Lic(X,X) \geq 0$. *Тогава имаме*

$$\int_M (S-\bar{S})^2\, Vol_\eta \leq \frac{1}{8n(n+1)^2(2n+1)} \int_M |Ric_{[-1]}|^2\, Vol_\eta + \frac{4(n+2)}{(n-1)(2n+1)} \int_M (\nabla_{e_a}U)(e_a, \nabla\varphi)\, Vol_\eta = \frac{1}{2n(2n+1)} \int_M |T^0|^2\, Vol_\eta - \frac{4(n+2)}{(n-1)(2n+1)} \int_M U(e_a, e_b)(\nabla^2\varphi)_{[3][0]}(e_a, e_b)\, Vol_\eta. \tag{16}$$

Ако равенството е в сила, тогава

$$\int_M (S-\bar{S})^2\, Vol_\eta = \frac{1}{8n(n+1)^2(2n+1)} \int_M |Ric_{[-1]}|^2\, Vol_\eta \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2n(2n+1)} \int_M |T^0|^2 \, Vol_\eta.$$

Петият основен резултат е аналогичен на предишния, но априорното условие от тип на Lichnerowicz (10) е заменено с условието от тип на Cordes (11). По-точно, имаме

Теорема 20 (Theorem 4.1.11). *Нека $(M, g, \mathbb{Q})$ е компактно кватернионно–контактно многообразие от размерност $4n+3 > 7$. Да предположим, че условието за положителност (11) е изпълнено, $Cor(X,X) \geq 0$. Тогава имаме*

$$\int_M (S-\bar{S})^2 \, Vol_\eta \leq \frac{4n+3}{16n(n+1)^2(2n+1)^2} \int_M |Ric_{[-1]}|^2 \, Vol_\eta + \frac{4(n+2)}{(n-1)(2n+1)} \int_M (\nabla_{e_a} U)(e_a, \nabla\varphi) \, Vol_\eta = \frac{4n+3}{4n(2n+1)^2} \int_M |T^0|^2 \, Vol_\eta - \frac{4(n+2)}{(n-1)(2n+1)} \int_M U(e_a, e_b)(\nabla^2\varphi)_{[3][0]}(e_a, e_b) \, Vol_\eta. \tag{18}$$

Ако равенството е в сила, тогава

$$\int_M (S-\bar{S})^2 \, Vol_\eta = \frac{4n+3}{16n(n+1)^2(2n+1)^2} \int_M |Ric_{[-1]}|^2 \, Vol_\eta = \frac{4n+3}{4n(2n+1)^2} \int_M |T^0|^2 \, Vol_\eta. \tag{19}$$

Като просто следствие от горните две теореми, след интегриране по части на последния член в (16) и в (18), съответно, получаваме следното

Следствие 21 (Corollary 4.1.12). *Нека $(M, g, \mathbb{Q})$ е компактно кватернионно–контактно многообразие от размерност $4n+3 > 7$, и да приемем, че*

$$(\nabla_{e_a} \nabla_{e_b} U)(e_a, e_b) = 0.$$

a) *Ако условието за положителност (10) е изпълнено, $Lic(X,X) \geq 0$, тогава*

$$\int_M (S-\bar{S})^2 \, Vol_\eta \leq \frac{1}{8n(n+1)^2(2n+1)} \int_M |Ric_{[-1]}|^2 \, Vol_\eta = \frac{1}{2n(2n+1)} \int_M |T^0|^2 \, Vol_\eta.$$

b) *Ако условието за положителност (11) е изпълнено, $Cor(X,X) \geq 0$, тогава*

$$\int_M (S-\bar{S})^2 \, Vol_\eta \leq \frac{4n+3}{16n(n+1)^2(2n+1)^2} \int_M |Ric_{[-1]}|^2 \, Vol_\eta$$

$$= \frac{4n+3}{4n(2n+1)^2} \int_M |T^0|^2 \, Vol_\eta.$$

И в двата случая, ако M е qc–приблизително–Айнщайново, тогава qc скаларната кривина S е константа.

Раздел 4.2 събира основните спомагателни тъждества, които се използват в раздел 4.3 за доказателствата на основните резултати от глава 4.

В раздел 4.3 представяме доказателствата на основните резултати от глава 4, разпределени в съответните подраздели.

В Приложение А припомняме концепцията за Риманова група на холономия, както и известната класификация на Berger.

Приложение Б събира определенията на Келерови, ХиперКелерови и Кватернионно-Келерови многообразия, които са тясно свързани с темата на дисертацията.

Библиография

[1] Alexander, H., *Holomorphic mappings from the ball and polydisc.* Math. Ann., **209**, (1974), 249–257.

[2] Aronszajn, N., *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order.* J. Math. Pures Appl. (9) **36** (1957), 235–249.

[3] Astengo, F., Cowling, M., & Di Blasio, B., *The Cayley transform and uniformly bounded representations.* J. Funct. Anal. **213** (2004), no. 2, 241–269.

[4] Aubin, T., *Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire.* J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 269–296.

[5] Barbosa, E. R., *A note on the Almost–Schur Lemma on 4–dimensional Riemannian closed manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), pp. 4319–4322.

[6] Barletta, E., *The Lichnerowicz theorem on CR manifolds.* Tsukuba J. Math. **31** (2007), no. 1, 77–97.

[7] Baudoin, F., & Garofalo, N., *Curvature-dimension inequalities and Ricci lower bounds for sub-Riemannian manifolds with transverse symmetries.* J. Eur. Math. Soc. **19** (2017), no. 1, pp. 151–219.

[8] Baudoin, F., Grong, E., Molino, G., & Rizzi, L., *Comparison theorems on H-type sub-Riemannian manifolds.* Calc. Var. **64**, 143 (2025). https://doi.org/10.1007/s00526-025-02992-w

[9] Baudoin, F., Grong, E., Rizzi, L., & Vega-Molino, G., *H-type foliations.* Differential Geometry and its Applications **85** (2022), 101952.

[10] Berger, M., *Sur les Groupes d'Holonomie Homogène des Variétés à Connexion Affine et des Variétés Riemanniennes.* Bull. Soc. Math. France, **83** (1955), 279–330.

[11] Besse, A. L., *Einstein manifolds, classics in mathematics.* Berlin: Springer–Verlag, 1987. https://doi.org/10.1007/978-3-540-74311-8

[12] Biquard, O., *Métriques autoduales sur la boule.* Ivent. Math. **148** (2002), pp. 545–607.

[13] Biquard, O., *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques.* Astérisque **265** (2000). 6, 7

[14] Biquard, O., *Quaternionic contact structures.* Quaternionic structures in mathematics and physics (Rome, 1999), 23–30 (electronic), Univ. Studi Roma "La Sapienza Roma 1999.

[15] Blair, D.E., *On the characterization of complex projective space by differential equations.* J. Math. Soc. Japan **27** (1975) 9–19.

[16] Bojarski, B., & Iwaniec, T., *Another approach to Liouville theorem.* Math. Nachr. **107** (1982), 253–262.

[17] Born, M., *Natural Philosophy of Cause and Chance.* Dover Publications (1964).

[18] Boyer, Ch. & Galicki, K., *3-Sasakian manifolds.* Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds, 123–184, Surv. Differ. Geom., **VI**, Int. Press, Boston, MA, 1999.

[19] Boyer, Ch., Galicki, K., & Mann, B., *The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds.* J. Reine Angew. Math., **455** (1994), 183–220.

[20] Burns, D., Jr., & Shnider, S., *Spherical hypersurfaces in complex manifolds.* Invent. Math. **33** (1976), no. 3, 223–246.

[21] Čap, A., & Slovák, J., *Parabolic geometries I: Background and general theory.* Mathematical Surveys and Monographs, **154**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. x+628 pp.

[22] Capogna, L., *Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg group.* Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), no. 9, 867–889.

[23] Capogna, L., & Cowling, M., *Conformality and Q-harmonicity in Carnot groups.* Duke Math. J. **135** (2006), no. 3, 455–479.

[24] Capria, M., & Salamon, S., *Yang-Mills fields on quaternionic spaces.* Nonlinearity **1** (1988), no. 4, 517–530.

[25] Carathéodory, C., *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik.* Mathematische Annalen **67** (1909), 355–386.

[26] Cartan, É, *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **11** (1932), 17–90.

[27] ———, *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes II.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **1** (1932), 333—354.

[28] Chang, S.-C., & Chiu, H.-L., *Nonnegativity of CR Paneitz operator and its application to the CR Obata's theorem.* J. Geom. Anal. **19** (2009), 261–287.

[29] ———, *On the CR analogue of Obata's theorem in a pseudohermitian 3-manifold.* Math. Ann. **345** (2009), 33–51.

[30] Chang, S.-C., & Chiu, H.-L., *On the estimate of the first eigenvalue of a subLaplacian on a pseudohermitian 3-manifold.* Pacific J. Math. **232** (2007), no. 2, 269–282.

[31] Chang, S.-C., & Wu, C.-T., *The entropy formulas for the CR heat equation and their applications on pseudohermitian $(2n+1)$-manifolds.* Pacific J. Math., **246** (2010), no. 1, 1–29.

[32] Chanillo, S., & Manfredi, J.J., *Sharp global bounds for the Hessian on pseudo-Hermitian manifolds.* In: Recent developments in real and harmonic analysis. Appl. Numer. Harmon. Anal., pp. 159–172. Birkhäuser Boston, Inc., Boston (2010).

[33] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry.* Academic Press, Inc., New York, London, Toronto, Tokyo, 1984. (MR 0768584) 2

[34] Chen, J.-T., Saotome, T., & Wu, C.-T., *The CR Almost Schur lemma and Lee conjecture.* Kyoto J. Math., **52** (2012), no. 1, 89–98.

[35] Cheng, X., *A generalization of almost-Schur lemma for closed Riemannian manifolds.* Annals of Global Analysis and Geometry, **43** (2013), pp. 153–160.

[36] Chern, S.S. & Moser, J., *Real hypersurfaces in complex manifolds.* Acta Math. **133** (1974), 219–271.

[37] Chiu, H.-L., *The sharp lower bound for the first positive eigenvalue of the subLaplacian on a pseudohermitian 3-manifold.* Ann. Global Anal. Geom. **30** (2006), no. 1, 81–96.

[38] Chow, W.-L., *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* Math. Annalen **117** (1939), pp. 98–105.

[39] Chow, B., Lu, P., & Ni, L., *Hamilton's Ricci Flow.* Graduate Studies in Mathematics **77**. Providence, RI/New York: American Mathematical Society/Science Press, 2006. 4

[40] Conti, D., Fernández, M., & Santisteban, J. A., *On seven-dimensional quaternionic contact solvable Lie groups.* Forum Mathematicum, vol. **26**, no. 2, 2014, pp. 547–576.

[41] Cowling, M.G., & Ottazzi, A., *Conformal maps of Carnot groups.* Annales Fennici Mathematici, **40**(1), 203–213 (2015). https://doi.org/10.5186/aasfm.2015.4008

[42] Cowling, M., Dooley, A. H., Korányi, A. & Ricci, F., *H-type groups and Iwasawa decompositions*, Adv. Math., **87** (1991), 1–41.

[43] Cowling, M., De Mari, F., Korányi, A., & Reimann, H.M., *Contact and conformal maps in parabolic geometry. I.* Geom. Dedicata **111** (2005), 65–86.

[44] Cowling, M. & Korányi, A., *Harmonic analysis on Heisenberg type groups from a geometric viewpoint*, in "Lie Group Representation III pp. 60-100, Lec. Notes in Math., **1077** (1984), Springer–Verlag.

[45] Davidov, J., Ivanov, S., & Minchev, I., *The twistor space of a quaternionic contact manifold.* Quart. J. Math. (Oxford) **63** (2012), no. 4, 873–890.

[46] De Lellis, C., & Müller, S., *Optimal rigidity estimates for nearly umbilical surfaces.* Journal of Differential Geometry, **69**(1): 075–110, 2005. 4

[47] De Lellis, C., & Topping, P., *Almost–Schur lemma.* Calc. Var. Partial Differ. Equations, **43** (2012), pp. 347–354. 4

[48] De Mari, F., Ottazzi, A., *Rigidity of Carnot groups relative to multicontact structures.* Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 5, 1889–1895.

[49] Dragomir, S., & Tomassini, G., *Differential geometry and analysis on CR manifolds.* Progress in Math., vol. **246**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.

[50] Duchemin, D., *Quaternionic contact structures in dimension 7.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 4, 851–885. 8

[51] Egorov, Yu. V., *Subelliptic operators.* Uspekhi Mat. Nauk, 1975, Volume **30**, Issue 2 (182), 57–114.

[52] Fefferman, C., & Graham, C.R., *Conformal invariants.* The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984). Astérisque 1985, Numéro Hors Série, 95–116.

[53] Folland, G.B., *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups.* Ark. Math., **13** (1975), 161–207.

[54] Folland, G.B., & Stein, E.M., *Estimates for the $\bar{\partial}_b$ Complex and Analysis on the Heisenberg Group.* Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 429–522.

[55] Frances, C., *Une preuve du théorème de Liouville en géométrie conforme dans le cas analytique.* (French) [Proof of the Liouville theorem of conformal geometry in the analytic case] Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 1-2, 95–100.

[56] Gallot, S., *Équations différentielles caractéristiques de la sphère.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), no. 2, 235–267. 3

[57] Garofalo, N., & Vassilev, D., *Symmetry properties of positive entire solutions of Yamabe type equations on groups of Heisenberg type.* Duke Math J, **106** (2001), no. 3, 411–449.

[58] Ge, Y., Wang, G., *An almost Schur Theorem on 4-dimensional manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), pp. 1041–1044.

[59] Ge, Y., Wang, G., *A new conformal invariant on 3-dimensional manifolds.* Adv. Math. **249** (2013), 131–160.

[60] Gehring, F. W., *Rings and quasiconformal mappings in space.* Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 353–393.

[61] Graham, C. R., & Lee, John M., *Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball.* Adv. Math. **87** (1991), no. 2, 186–225.

[62] Greenleaf, A., *The first eigenvalue of a subLaplacian on a pseudohermitian manifold.* Commun. Partial Diff. Equations, **10** (1985), no. 2, 191–217.

[63] Gromov, M., *Carnot–Carathéodory spaces seen from within.* pp. 79–323 in Sub–Riemannian geometry, Progr. Math. **144**, Birkhäuser, Basel, 1996.

[64] Guedj, V., Kolev, B., & Yeganefar, N., *A Lichnerowicz estimate for the first eigenvalue of convex domains in Kähler manifolds.* Analysis and PDE, Vol. **6**, No. 5 (2013).

[65] Hartman, P., *On isometries and on a theorem of Liouville.* Math. Z. **69** (1958), 202–210.

[66] Hitchin, N. J., *The self-duality equations on a Riemann surface.* Proc. London Math. Soc. (3), **55**, 1987, 59–126.

[67] Hladky, R.K., *Bounds for the first eigenvalue of the horizontal Laplacian in positively curved sub-Riemannian manifolds.* Geom. Dedicata **164**, 155–177 (2013). https://doi.org/10.1007/s10711-012-9766-5

[68] Hörmander, L., *Hypoelliptic second order differential equations.* Acta Mathematica **119** (1967), 147–171.

[69] Ishihara, S., & Tashiro, Y., *On Riemannian manifolds admitting a concircular transformation.* Math. J. Okayama Univ., **9** (1959), 19–47.

[70] Ivanov, S., Minchev, I., & Vassilev, D., *Quaternionic contact Einstein structures and the quaternionic contact Yamabe problem.* Memoirs Am. Math. Soc., vol. **231**, number 1086 (2014).

[71] ———, *Quaternionic contact Einstein manifolds.* Math. Res. Lett. **23** (5) 1405–1432, January 2017. https://doi.org/10.4310/MRL.2016.v23.n5.a8

[72] ———, *Extremals for the Sobolev inequality on the seven dimensional quaternionic Heisenberg group and the quaternionic contact Yamabe problem.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12** (2010), no. 4, 1041–1067.

[73] ———, *The optimal constant in the L^2 Folland-Stein inequality on the quaternionic Heisenberg group.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. **XI** (2012), 635–662.

[74] Ivanov, S., Petkov, A., *The Almost Schur Lemma in Quaternionic Contact Geometry.* Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. RASCAM (2023) No. **2**, Paper No. 77, 18 pp.

[75] ———,*The CR Almost Schur Lemma and the positivity conditions.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.(5) Vol. **XXVI** (2025), 1617–1637.

[76] Ivanov, S., Petkov, A., & Vassilev, D., *The sharp lower bound of the first eigenvalue of the sub-Laplacian on a quaternionic contact manifold.* The Journal of Geometric Analysis **24** (2011): 756–778. DOI 10.1007/s12220-012-9354-9.

[77] ——— *The sharp lower bound of the first eigenvalue of the sub-Laplacian on a quaternionic contact manifold in dimension seven.* Nonlinear Anal. - Theor., **93** (2013) 51–61.

[78] _____ *The Obata sphere theorems on a quaternionic contact manifold of dimension bigger than seven.* Journal of Spectral Theory, vol. **7**, No. 4 (2017), 1119–1170.

[79] Ivanov, S., & Vassilev, D., *Conformal quaternionic contact curvature and the local sphere theorem.* J. Math. Pures Appl. **93** (2010), 277–307.

[80] _____, *Quaternionic contact manifolds with a closed fundamental 4-form.* Bull. London Math. Soc., (2010) **42** (6), 1021–1030. 7

[81] _____, *Extremals for the Sobolev Inequality and the Quaternionic Contact Yamabe Problem.* Imperial College Press Lecture Notes, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.

[82] _____, *An Obata type result for the first eigenvalue of the sub-Laplacian on a CR manifold with a divergence free torsion.* J. Geom. **103** (2012), no. 3, 475-504 ; arXiv:1203.5812.

[83] _____, *An Obata-type theorem on a three dimensional CR manifold.* Glasgow Math. J., volume **56**, issue 02, pp. 283-294; arXiv:1208.1240.

[84] Ivanov, S., Vassilev, D., & Zamkovoy, S., *Conformal Paracontact curvature and the local flatness theorem.* Geom. Dedicata **144** (2010), 79–100.

[85] Iwaniec, T., & Martin, G., *The Liouville theorem.* (English summary) Analysis and topology, 339–361, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.

[86] Jacobowitz, H., *Two notes on conformal geometry.* Hokkaido Math. J. **20** (1991), no. 2, 313–329.

[87] Jung, S. D., Lee, K. R., & Richardson, K., *Generalized Obata theorem and its applications on foliations.* J. Math. Anal. Appl. **376** (2011), no. 1, 129–135.

[88] Kashiwada, T., *A note on Riemannian space with Sasakian 3-structure.* Nat. Sci. Reps. Ochanomizu Univ., **22** (1971), 1–2.

[89] Korányi, A., *Kelvin transform and harmonic polynomials on the Heisenberg group.* Adv. Math. **56** (1985), 28–38.

[90] Korányi, A., & Reimann, H. M., *Horizontal normal vectors and conformal capacity of spherical rings in the Heisenberg group.* Bull. Sci. Math. **111** (1987), no. 1, 3–22.

[91] Korányi, A., & Reimann, H. M., *Quasiconformal mappings on the Heisenberg group.* Invent. Math. **80** (1985), no. 2, 309–338.

[92] Kuiper, N. H., *On conformally-flat spaces in the large.* Ann. of Math. (2) **50**, (1949), 916–924.

[93] Kunkel, Chr. S., *Quaternionic contact pseudohermitian normal coordinates.* preprint, arXiv:0807.0465[math .DG].

[94] Kwong, K.-K., *On an Inequality of Andrews, De Lellis, and Topping.* J. Geom. Anal. **25**, 108–121 (2015).

[95] Le Donne, E., & Ottazzi, A., *Isometries of Carnot Groups and Sub–Finsler Homogeneous Manifolds.* The Journal of Geometric Analysis **26** (2012): 330–345.

[96] LeBrun, C., *On complete quaternionic-Kähler manifolds.* Duke Math. J. **63** (1991), no. 3, 723–743.

[97] Lee, J., *Pseudo-Einstein structures on CR manifolds.* Amer. J. Math., **110** (1988), 157–178.

[98] Lee, Jeffrey M., & Richardson, K., *Lichnerowicz and Obata theorems for foliations.* Pacific J. Math. **206** (2002), no. 2, 339–357.

[99] _____, *Riemannian foliations and eigenvalue comparison.* Ann. Global Anal. Geom. **16** (1998), no. 6, 497–525.

[100] Li, S.-Y., & Luk, H.-S., *The sharp lower bound for the first positive eigenvalue of a sub-Laplacian on a pseudo-Hermitian manifold.* Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 3, 789–798.

[101] Li, S.-Y., Wang, X., *An Obata type theorem in CR geometry.* arXiv:1207.4033, version 1.

[102] _____, *An Obata type theorem in CR geometry.* J. Differential Geom. **95** (2013), no. 3, 483–502, arXiv:1207.4033, version 2.

[103] Lichnerowicz, A., *Géométrie des groupes de transformations.* Travaux et Recherches Mathematiques, III. Dunod, Paris 1958. 2

[104] Liouville, J., *Théorème sur l'équation* $dx^2+dy^2+dz^2=\lambda(d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2)$. J. Math. Pures Appl. **15** (1850), 103.

[105] _____, *Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géograhpique.* Note VI. - In: Monge, G. (ed.), Application de l'analyse à la géométrie, Bachelier, Paris, 1850, 609–616.

[106] Minchev, I., & Slovak, J., *On the existence of local quaternionic contact geometries.* New York Journal of Mathematics, **26** (2020), pp. 1093–1129.

[107] Mohamed, A., Vassilev, D., *The Obata First Eigenvalue Theorem on a Seven-Dimensional Quaternionic Contact Manifold.* J. Geom. Anal. **33**, 13 (2023).

[108] Montgomery, R., *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Gedoesics and Applications.* Mathematical Surveys and Monographs, Volume **91**, AMS, Providence, RI, 2002.

[109] Morbidelli, D., *Liouville theorem, conformally invariant cones and umbilical surfaces for Grushin-type metrics.* Israel J. Math. **173** (2009), 379–402.

[110] Mostow, G. D., *Strong rigidity of locally symmetric spaces.* Annals of Mathematics Studies, No. **78**. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973. v+195 pp.

[111] Nagano, T., *On the minimum eigenvalues of the Laplacians in Riemannian manifolds.* Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, **11** (1961), 177–182.

[112] Nevanlinna, R., *On differentiable mappings.* 1960 Analytic functions, pp. 3–9, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

[113] Obata, M., *Certain conditions for a Riemannian manifold to be iosometric with a sphere.* J. Math. Soc. Japan **14**, no.3, (1962), 333–340. 2

[114] Obata, M., *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds.* J. Differ. Geom. **6** (1971), 247–258.

[115] Ottazzi, A., *Multicontact vector fields on Hessenberg manifolds.* J. Lie Theory **15** (2005), no. 2, 357–377.

[116] _____, *A sufficient condition for nonrigidity of Carnot groups.* Math. Z. **259** (2008), no. 3, 617–629.

[117] Pak, E., Minn, H., Yoon, O.K., & Chi, D.P., *On the first eigenvalue estimate of the Dirichlet and Neumann problem.* Bull. Korean Math. Soc. **23:1** (1986), 21–25.

[118] Pak, H., & Park, J., *A note on generalized Lichnerowicz-Obata theorems for Riemannian foliations.* Bull. Korean Math. Soc. **48** (2011), no. 4, 769–777.

[119] Pansu, P., *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un.* Ann. of Math. (2) **129** (1989), no. 1, 1–60.

[120] Petkov, A., *A Lichnerowicz-type result on a seven-dimensional quaternionic contact manifold.* Ann. Sofia Univ., Fac. Math. and Inf. **101** (2013): 193–213.

[121] Pinsky, Mark A., *A topological version of Obata's sphere theorem.* J. Differential Geometry **14** (1979), 369–376.

[122] Poincaré, H., *Les fonctions analytiques de deus variables et la représentation conforme.* Rend. Circ. Mat. Palermo, **23** (1907), 185–220; Oeuvres, t. IV, 244–289.

[123] Rashevskii, P. K., *About connecting two points of complete non–holonomic space by admissible curve.* (in Russian) Uch. Zapiski ped. inst. Libknexta, no. **2**, pp. 83–94, (1938).

[124] Reilly, R. C., *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold.* Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), no. 3, 459–472.

[125] Reimann, H.M., *Rigidity of H-type groups.* Math. Z. **237** (2001), no. 4, 697–725.

[126] Rešetnjak, Ju. G., *Liouville's conformal mapping theorem under minimal regularity hypotheses.* (Russian) Sibirsk. Mat. Ž. **8** (1967), 835–840.

[127] Salamon, S.M., *Riemannian geometry and holonomy groups.* Longman, Harlow, 1989.

[128] Schoen, R., *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature.* J. Diff. Geom. **20** (1984), 479–495.

[129] Schoen, R., & S.-T. Yau, *Lectures on differential geometry.* International Press, Cambridge, MA, 1994. (MR 1333601) 2

[130] Tanaka, N., *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds.* Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, No. **9**. Kinokuniya Book-Store Co., Ltd., Tokyo, 1975.

[131] Tanaka, N., *On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables.* J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 397–429.

[132] Tang, P., *Regularity and extremality of quasiconformal homeomorphisms on CR 3–manifolds.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **21** (1996), no. 2, 289–308.

[133] Trudinger, N., *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968), 265–274.

[134] Wang, W., *The Yamabe problem on quaternionic contact manifolds.* Ann. Mat. Pura Appl., **186** (2007), no. 2, 359–380.

[135] Webster, S.M., *Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface.* J. Differential Geom. **13** (1) (1978) 25–41.

[136] Webster, S. M., *Real hypersurfaces in complex space.* Thesis, University of California, 1975.

[137] Wu, G., & Ye, R., *A Note on Obata's Rigidity Theorem.* Commun. Math. Stat. **2**, 231–252 (2014). https://doi.org/10.1007/s40304-014-0038-6

[138] Yamabe, H., *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds.* Osaka Math. J. **12** (1960), 21–37.

[139] Yamaguchi, K., *Differential systems associated with simple graded Lie algebras.* In: Progress in Differential Geometry, Adv. Stud. Pure Math. **22**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1993, pp. 413–494.

[140] Yano, K., *The theory of Lie derivatives and its applications.* Amsterdam, 1957.

[141] Yano, K., & Nagano, T., *Einstein spaces admitting a one-parameter group of conformal transformations.* Ann. of Math. (2), **69** (1959), 451–461.

[142] Zorich, V., *Asymptotic Geometry and Conformal Types of Carnot-Carathéodory Spaces.* GAFA, Geom. funct. anal. **9** (1999), 393–411.

Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че новите резултати, описани в дисертацията, са изцяло негови собствени. Всички резултати на други автори са отбелязани със съответните цитирания.

Александър Владимиров Петков