Становище

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:

„Приложения на методите на вариационния анализ“

за придобиване на

образователна и научна степен „доктор“ от

кандидат: **Христина Йорданова Белчева**

Област на висше образование: **4. Природни науки, математика и информатика**

Професионално направление**: 4.5. Математика,**

Докторска програма: **„Иследване на операциите“**, катедра: **„Вероятности, изследване на операциите и статистика“, Факултет по математика и информатика (ФМИ), Софийски университет „Св. Климент Охридски“ (СУ)**

Становището е изготвена от мен, проф. дмн Петър Стоянов Кендеров, в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед
№ РД – 38 - 685 / 5.11.2025 . г. на Ректора на Софийския университет.

1. **Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали**

Представеният дисертационен труд ***„Приложения на методите на вариационния анализ“*** съдържа 59 страници и се състои се от увод и три глави. След увода е дадена справка с използваните в дисертационния труд означения, дефиниции и известни резултати. След трите глави, в раздел „Резюме“, са описани накратко най-важните приноси, дадени са координатите на три публикации, свързани с дисертацията. Те са отпечатани в реномирани математически списания с добър фактор на въздействие (Impact factor). Самите списания са във върховата част на квартилната категоризация. Изброени са 10 участия в научни форуми, от които три в чужбина, където са докладвани/апробирани резултатити от дисертационния труд. Представената библиография обхваща 40 заглавия – книги, статии и една дипломна работа за получаване на образователната степен „магистър“ (Станков). Най-ранната публикация в библиографията е от 1958 година (на Ефимов и Стечкин), а последната е от 2025 г. В нея дисертантката е съавтор.

Освен дисертацията (представена на английски език) и автореферата (на български и английски езици), по процедурата имах достъп до голямо количество материали, изискуеми от уредбата за провеждане на такива процедури.

2. **Данни и лични впечатления за кандидата**

Кандидатката е завършила Софийската математическа гимназия през 2014 година. Същата година постъпва във ФМИ на Софийския университет и през 2018 получава диплома за бакалавър по Приложна математика. Продължава образованието си в същия факултет и през 2020 г. получава диплома за магистър с квалификация по Изчислителна математика и математическо моделиране. Справката с взетите изпити показва, че през първата година в университета има известна колебливост, която бързо е преодоляна и в следващите години се вижда стремителен възход. В третата година на обучението вече е сред най-силните студенти.

Зачислена е като редовен докторант в докторска програма по Изследване на операциите със заповед на ректора на СУ (с номер РД 20-267 от 27.01.2022 г.) за периода от 01.02,2022 – 01.02.2025 година. Отчислена е със право на защита на дисертация със заповед РД 20 – 549/04.03.2025 (оформянето на текста на заповедта търпи сериозна критика, но кандидатката няма никаква вина за това). Нямам преки лични впечатления от работата на кандидатката като докторант. Представените по процедурата документи свидетелстват, че „образователната компонента“ на докторантурата е застъпена добре. Необходимите изпити са взети успешно. Съдейки по резултатите (публикувани статии и разработване на дисертационен труд) „изследователската компонента“ също е много добре представена.

3. Съдържателен анализ на научните и научноприложните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата

За родоначалник на съвременните вариационни принципи с основание се счита известната теоремата на Бишоп-Фелпс (1963 г.), според която множеството на непрекъснатите линейни функционали в едно Банахово пространство, които си достигат максимума (а, следователно, и минимума) върху единичното кълбо $\boldsymbol{B}$ е гъсто подмножество на спрегнатото банахово пространство. С други думи, ако някой непрекъснат линеен функционал $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ не си достига максимума (минимума) в единичното кълбо $\boldsymbol{B}$, то произволно близо до него може да се намери друг линеен и непрекъснат функционал $\boldsymbol{f'}$, който си достига максимума (минимума) върху $\boldsymbol{B}$. Ако банаховото пространство е строго изпъкнало, точката, в която линейният функционал $\boldsymbol{f'}$ си достига максимума (минимума) върху $\boldsymbol{B}$, е единствена. При допълнителни свойства на единичното кълбо $\boldsymbol{B}$ (например, ако то е локално равномерно изпъкнало), максимизационната (минимизационната) задача е “коректна“ по Тихонов: всяка максимизираща (минимизираща) редица от елементи на $\boldsymbol{B}$ клони към точката, в която се достига максимумът (минимумът) на $\boldsymbol{f'}$.

В този случай казваме, че f'има строг максимум (минимум). Естествено е да си мислим, че f' е вариация на f .

В по-общ контекст, нека $f: X \to R$ е ограничена отдолу и полунепрекъсната отдолу функция f (за краткост, пнд – функция) в пълно метрично пространство X и А$\subset X$. Във връзка с минимазационната задача $\min\limits_{x \in A} f(x)$, както и във връзка с много други математически задачи, възникват три важни въпроса:

а) Задачата има ли решение?

б) Решението единствено ли е? и

в) Има ли начин (алгоритъм) за намиране на решението?

Ако за някой от първите два въпроса отговорът е „не“, възниква друг въпрос:

г) Възможно ли е да видоизменим (пертурбираме) леко задачата, като заместим f с друга, близка до нея функция $f' = f + g$, а множеството А да заместим с друго множество $A' \subset X$, което в някакъв смисъл е близко до А , така щото новополучената задача $\min\limits_{x \in A'}(f(x) + g(x))$ да е коректна по Тихонов?

Защо се стремим да стигнем до коректна по Тихонов задача? Отговорът е прост: числените методи за решаване на оптимизационни задачи работят добре главно за такива задачи.

Ако отговорът на въпроса г) е „Да“ за произволно малки пертурбиращи функции g от някое предварително зададено множество от функци $\mathcal{P}$, казваме, че е налице вариационен принцип с пертурбационно множество $\mathcal{P}$. Обикновено, пертурбиращите функции g са „благородни“. Например, непрекъснати, диференцуеми и др. В дисертацията пертурбационното множество $\mathcal{P}$ най-често се състои от достатъчен запас от ограничени равномерно непрекъснати в X функции със свойства, описани в Дефиниция 1.1.1. В същата дефиниция се предполага също, че множеството $\mathcal{P}$ е снабдено с пълна метрика, която доминира равномерната норма в пространството $C(X)$ от всички ограничени непрекъснати функции в $\mathbf{X}$. Важно е да се държи сметка и за големината на множетвото от пертурбации $g \in \mathcal{P}$, за които съответната минимизационна задача е коректна. В Теорема 1.3.1 е доказано, че това многество е голямо от топологична гледна точка. То е гъсто G_δ подмножество на $\mathcal{P}$. Макар и формално нов, този резултат е близък по дух (а донякъде и по доказателство) до предишни известни резултати, в които се предполага съществуването на „камбановидна функция“ (условието (1.2) в Дефиниция 1.1.1 замества условието за наличие на „камбановидна функция“). Теорема 1.3.1 обаче влече след себе си формално по-силен резултат, който повдига въпроси за по-нататъшни изследвания: за всяка редица $f_n, n \geq 1$, от ограничени отдолу пнд – функции съществува една и съща пертурбация , за която всяка задача $\min\limits_{x}(f_n(x) + g(x)), n \geq 1$, има строг минимум, който ще означаваме с $x_n(g)$. Нещо повече, тези „едновременни пертурбации“ g са гъсто и G_δ подмножество $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ защото сечнието на изброимо много гъсти и G_δ подмножества на $\mathcal{P}$ отново е гъсто (и G_δ) в $\mathcal{P}$. Така постепенно стигаме до най-важния въпрос в дисертацията: Ако редицата от функции $f_n, n \geq 1$, клони в някакъв смисъл към функцията f_∞ и g е едновременна пертурбация със строги минимуми $\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, и $\boldsymbol{x_\infty}$, съответно за $\boldsymbol{f_n} + \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, и $\boldsymbol{f_\infty} + \boldsymbol{g}$, може ли да се твърди, че редицата $\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, клони към $\boldsymbol{x_\infty}$ и редицата $\boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{x_n}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_n}), \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, клони към $\boldsymbol{f_\infty}(\boldsymbol{x_\infty}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_\infty})$? Положителен отговор на този въпрос дава Теаорема 1.4.1, като за целта се използва ново понятие за сходимост на редици от функции „равнометна епи-сходимост“. Веднага е дадено и едно приложение на теоремата върху редица от минимизационни задачи с ограничения (Теорема 1.5.1). За редицата $\boldsymbol{A_n}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$, от допустими множества на задачите с ограничения се предполага, че клонят към допустимото множество $\boldsymbol{A_\infty}$ на граничната задача в смисъл на Пенлеве – Куратовски, както и че всяка $\boldsymbol{\varepsilon} -$околност на $\boldsymbol{A_\infty}$ съдържа елементите на редицата $\boldsymbol{A_n}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$ „от известно място – нататък“. От целевите функции на задачите се изисква да клонят равномерно към равномерно непрекъснатата целева функция на граничната задача. Доказва се, че множеството на едновременните пертурбации $\boldsymbol{g}$, за които пертурбираните задачи са коректни по Тихонов и има сходимост на решенията им към решението на граничната задача, образуват гъсто $\boldsymbol{G_\delta}$ подмножество на $\boldsymbol{\mathcal{P}}$.

Във втора глава задачата е още по−амбициозна. Вместо рдица от функции се разглежда параметризирана фамилия от функции и се предлага общ метод за пертурбиране на фамилията от функции с цел да се получи непрекъснатост на минимумите. Като следствие се получава резултат (Теорема 2.5.4) за метрични проекции в сепарабелно банахово пространство: Ако W е изброимо гъсто множество на банаховото пространство и C е непразно, затворено, изпъкнало и ограничено множество в него, то тогава съществуват еквивалентна норма, произволно близка до дадената, и гъсто G_δ множество V, $W \subset V$, такива че метричната проекция върху C по отношение на новата норма е еднозначна и непрекъсната върху V.

Във връзка с тази теорема възниква въпрос. Новополучената метрична проекция е, общо взето, многозначно изображение, което може да има понякога и празни образи. Доказано е, че рестрикцията на тази метрична проекция върху V е мепрекъснато еднозначно изображение. Дали е вярно по-силното твърдение, че в точките на V метрическата проекция, разглеждана като многозначно изображение, е полунепрекъсната отгоре?

От гледна точка на оптимизационните задачи, в трета глава привлича вниманието разглеждането на задачи, които са коректни в обобщен смисъл: множеството M от точките на минимум е непразно и компактно и за всяко $\varepsilon > 0$, всяка минимизираща редица от известно място нататък принадлежи на ε –околност на M. Теорема 3.2.2 дава условия за съществуване на произволно малки пертурбации g, такива че задачата за минимизиране на функцията $f + g$ върху допустимото множество да е коректна в обобщен смисъл. В същата глава са разкрити и интересни връзки с пространствата на Орлич и със въпросите за съществуване на диференцуеми камбановидни функции в някои банахови пространства.

4. Апробация на резултатите

По темата на дисертацията са публикувани три статии:

Topalova, H., Zlateva, N. Perturbation Method in Orlicz Sequence Spaces. *Set-Valued Var. Anal* 32, 12 (2024). https://doi.org/10.1007/s11228-024-00715-5; Web of Science, IF (1.1 - 2024), Web of Science Quartile: Q2 (162/343 Mathematics Applied)

Hristina Topalova, Nadia Zlateva, Simultaneous perturbed minimization of a convergent sequence of functions, Optimization, 2024, pages:1-11, ISSN (print):0233-1934, ISSN (online):1029-4945, doi https://doi.org/10.1080/02331934.2024.2386112 Ref, Web of Science, IF (1.8 - 2024), Web of Science Quartile: Q1 (Mathematics Applied 78/343)

H. Topalova, N. Zlateva, Generic continuity of perturbed minima of certain parametric optimization problems, Positivity, vol:29, issue:3, 2025, pages:1-17, ISSN (print):1385-1292, ISSN (online):1572-9281, doi: https://doi.org/10.1007/s11117-025-01133-z, Ref, Web of Science, IF (0.9 - 2024), Web of Science Quartile: Q2 (Mathematics (159/483)

Не е представена информация за цитирания на тези статии.

Както бе споменато по-горе, апробацията на резултатите е напълно задоволителна. Те са докладвани на 10 научни форума, три от които – в чужбина.

Публикуваните статии и изработването на дисертационния труд покриват с голям излишък минималните национални изисквания (по чл. 2б, ал. 2 и 3 на ЗРАСРБ) и, съответно, допълнителните изисквания на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване на образователна и научна степен „Доктор“. При необходими 80 точки, докторантката има 245 точки.

Няма доказано по законоустановения ред плагиатство в представения дисертационен труд и научните трудове по тази процедура.

5. Качества на автореферата

Авторефератът отговаря на всички изисквания за изготвянето му и представя коректно и пълно резултатите и съдържанието на дисертационния труд.

6. Критични бележки и препоръки

Нямам съществени критични бележки. Постановката на задачите, дълбочината на анализа, получените резултати и оформянето на автореферата и дисертационния труд определено излъчват научна зрялост. За това принос, разбира се, има и научният ръководител на дисертантката проф. Надя Пейчева Златева.

Сред малкото неточности, които забелязах, ще отбележа само две.

а) Дефиницията за inner limit на редица от множества (последния ред на стр. 5 от дисертационния труд) е дефектна. Според тази дефиниция, граничното множество не може да има повече от една точка.

Това не се отразява на верността на резултатите в дисертацията, защото в разсъжденията се използва друга дефиниция за сходимост на редица от множества по Пенлеве –Куратовски, която е еквивалентна на оргиналната..

б) Страница 43, ред 10 – 11 отдолу-нагоре:

„Clearly, if X is finite dimensional and S is closed then for any proper lower semicontinuous function $f : S \to R \cup \{+\infty\}$ bounded below on S the problem (f, S) is wpmc.“

Трябва да се спомене, че S е ограничено множество. Иначе твърдението не е вярно.

7. Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни и научноприложни приноси, **потвърждавам,** че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване от кандидатката на образователната и научна степен „доктор“ в научната област

4. Природни науки, математика и информатика и професионално направление **4.5. Математика.** В частност, кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, с пълна убеденост, **препоръчвам** на научното жури да присъди на **Християна Йорданова Белчева** образователна и научна степен „доктор“ в научна област **4. Природни науки, математика и информатика**, професионално направление **4.5. Математика**.

04.01.2026 г. Изготвил становището: Проф. дмн Петър Кендеров

(академична длъжност, научна степен, име, фамилия)