СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Автореферат

на дисертация за придобиване на ОНС доктор в професионално направление 4.5 Математика в докторска програма „Изследване на операциите“

Приложения на методите на вариационния анализ

Христина Йорданова Белчева

Научен ръководител

проф. дн Надя Пейчева Златева

София, 2025

Увод

Задачите на вариационния анализ възникват от класическото вариационно смятане, което се фокусира върху минимизирането на интегрални функционали при ограничения в безкрайномерни пространства. Класическият подход включва изследване на малки отклонения (вариации) на дадена функция с цел да се характеризират решенията чрез т.нар. вариационни принципи.

Съвременният вариационен анализ се утвърждава като самостоятелна област на математиката през втората половина на XX век. С напредъка в теорията на оптимизацията и развитието на изчислителните методи възниква необходимост от обединяване на класическите подходи на вариационното смятане с нови инструменти — работа с недиференцируеми функции, пертурбации, описвани чрез многозначни изображения и други.

Терминът „вариационен анализ“ се налага с публикуването на монографията Variational Analysis [29] през 1998 г. от Рокафелар и Уетс, в която авторите поставят разширената теоретична рамка на съвременния вариационен анализ.

Вариационните принципи са основен инструмент във вариационния анализ, тъй като осигуряват съществуване на екстремуми, когато класическите подходи са неприложими поради липса на компактност, диференцируемост или изпъкналост. За разлика от традиционните оптимизационни техники, които разчитат на свойства като компактност на допустимото множество или изпъкналост на функцията, вариационните принципи позволяват да се докаже съществуване на минимум и при по-общи условия.

Необходимостта от вариационни принципи е добре илюстрирана от Тонели. През 1915 г. той въвежда така наречения директен метод във вариационното смятане — общ подход за доказване на съществуване на решения на вариационни задачи. Основната идея на този метод е да се използват компактност и полунепрекъснатост отдолу, т.е. ако функция е полунепрекъсната отдолу върху компакт, тя достига минимума си върху компакта. Този резултат обобщава класическата теорема на Вайерщрас и служи като основа за развитието на по-съвременни методи – например вариационния принцип на Екеланд.

През 1974 г. Екеланд доказва вариационен принцип, според който за всяка полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция, дефинирана върху пълно метрично пространство, съществува произволно малка пертурбираща функция, такава че пертурбираната фунцкия достига минимума си. Този резултат е едно от най-значимите постижения в нелинейния анализ през последните десетилетия и има множество приложения. Например, вариационният принцип на Екеланд е еквивалентен на съществуването на неподвижни точки за някои класове многозначни изображения (в частност от него следва теоремата за неподвижна точка на Каристи) и служи като основа за много резултати в теорията на оптимизацията. Известно е също, че принципът на Екеланд е еквивалентен на пълнотата на метрично пространство, в което той е в сила за произволна полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция.

Гладкият вариационен принцип на Борвейн и Прайс се появява по-късно – през 80-те години на XX век. Докато в банахово пространство принципът на Екеланд използва пертурбиране чрез нормата, която е недиференцируема функция, то принципът на Борвейн и Прайс показва, че е възможно пертурбиране чрез гладка по Фреше функция.

Пертурбационните пространства са средство за получаване на вариационни принципи. В частност, ако в банахово пространство E съществува липшицова камбановидна функция, която е диференцируема по Фреше извън началото, тогава всички функции g върху E, които са ограничени, липшицови и диференцируеми по Фреше, взети с нормата

$$\|g\| = \max\left\{\|g\|_\infty, \|g'\|_\infty\right\},$$

образуват пертурбационно пространство $\mathcal{P}_1$. Чрез това пространство се доказва вариант на гладкия вариационен принцип на Борвейн и Прайс, виж [8, Теорема 7.4].

За да се докаже вариационният принцип на Екеланд в произволно банахово пространство E, е достатъчно да се използва като пертурбационно пространство пространството $\mathcal{P}_2$ от всички ограничени липшицови функции g върху E с нормата

$$\|g\| = \sup\{|g(x)|, x \in E\} + \sup\left\{\frac{|g(x) - g(y)|}{\|x - y\|}, x, y \in E, x \neq y\right\},$$

виж [13].

Чрез внимателен избор на подходящи пертурбации може да се гарантира коректна поставеност на задачи, като същевременно се запазва тяхната структура. Основната идея е, че пертурбиращите функции могат да се избират от пространства от функции, които имат хубави свойства – като изпъкналост, диференцируемост или определени условия за нарастване.

Предимството на пертурбационните пространства се състои в тяхната гъвкавост и възможността те да се адаптират към конкретната структура на задачата. Така например в статиите [21] и [22] се разглежда въпросът за това как, при зададена функция $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, да се избере пертурбираща функция $g : E \to \mathbb{R}$, принадлежаща на подходящо пространство от функции, така че сумата $f + g$ не само да достига минимума си, но и да запазва вида на първоначалната функция f.

В дисертацията използваме пертурбационни пространства, за да дадем общ метод за пертурбиране на редица или фамилия от функции с цел да получим непрекъснатост на минимумите.

В Глава 1 разглеждаме ситуацията, която е отправна точка към параметричен пертурбационен метод – а именно случаят, когато множеството от параметри е компактно. Като множество от параметри разглеждаме множеството $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, т.е. едноточковата компактификация на естествените числа, и изследваме сходяща редица от функции. Дори в този сравнително ограничен контекст, съществуващите резултати обикновено предполагат изпъкналост на функциите, виж [3]. Основният принос на нашата работа е, че не правим никакви предположения за изпъкналост. В Глава 1 разработваме нов метод за едновременна пертурбация на всички елементи на равномерна епи-сходяща редица от собствени полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу функции, дефинирани в пълно метрично пространство, така че строгите минимуми на пертурбираните функции да клонят към строгия минимум на пертурбираната гранична функция, виж Теорема 1.4.1.

Въведеното от нас понятие за равномерна епи-сходимост представлява по-силна форма на добре познатата епи-сходимост.

За доказателството на Теорема 1.4.1 въвеждаме и работим с много обща дефиниция на пертурбационно пространство – Дефиниция 1.1.1. Това пространство е концептуално близо до използваното в [22], но в нашия случай е необходимо допълнително изискване за равномерна непрекъснатост на пертурбиращите функции.

Като приложение, в Теорема 1.5.1 разглеждаме редица от минимизационни задачи с ограничения, при които допустимите множества клонят, в смисъл на Пенлеве–Куратовски, към допустимото множество на граничната задача, а целевите функции – собствени и полунепрекъснати отдолу – равномерно клонят към целевата функция на граничната задача, която е равномерно непрекъсната. В този случай може да се намери такава пертурбация, че всички пертурбирани задачи да бъдат коректно поставени в смисъл на Тихонов, като при това техните решения клонят към решението на пертурбираната гранична задача.

Резултатите от Глава 1 са публикувани в [36].

В Глава 2 доразвиваме метода, като разширяваме и обобщаваме подхода за пертурбиране на параметризирана фамилия от функции, дефинирани върху пълно метрично пространство. За разлика от Глава 1, тук работим с пертурбационно пространство от функции, които зависят както от пространствената променлива, така и от параметъра – виж Дефиниция 2.1.1.

В Теорема 2.4.3 доказваме следния резултат: Нека е дадена фамилия от собствени, полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу функции, дефинирани върху пълно метрично пространство, които са равномерно епи-непрекъснати. Нека също така W е изброимо и гъсто подмножество на параметричното множество, което е сепарабелно пълно метрично пространство. Тогава съществува гъсто G_δ множество от функции в пертурбационното пространство, такова че за всяка функция от него може да се намери гъсто G_δ подмножество на параметричното пространство, съдържащо W, такова че съответните пертурбирани функции достигат строги минимуми, които са непрекъснати върху него.

Като приложение получаваме резултат в областта на теорията на Стечкин. Най-общо казано, тази теория изследва еднозначност, немногозначност и други свойства на метричната проекция и метричната антипроекция в банахови пространства.

В Теорема 2.5.4 доказваме следното: Ако в сепарабелно банахово пространство са дадени непразно, затворено, изпъкнало и ограничено множество C, изброимо гъсто множество W, както и еквивалентна норма, тогава съществува еквивалентна норма, произволно близка до дадената, и гъсто G_δ множество (съдържащо W), такава че метричната проекция върху C по отношение на тази норма да бъде еднозначна и непрекъсната върху това множество.

Получените в Глава 2 резултати са по-общи от тези в Глава 1. Пертурбационният резултат от Глава 1 (Теорема 1.4.1) може да бъде получен като следствие от пертурбационния резултат в Глава 2 (Теорема 2.4.3). Въпреки това, разглежданията в Глава 1 добре илюстрират първоначалната ни идея и техните доказателства са по-лесни за проследяване. Освен това, интересното им приложение – Теорема 1.5.1 - не следва непосредствено от резултатите в Глава 2.

Резултатите от Глава 2 са публикувани в [37].

Както вече отбелязахме, пертурбационните пространства представляват мощен и гъвкав инструмент. В Глава 3 използваме пертурбационно пространство, виж Дефиниция 3.2.1, пригодено за работа с минимизационни задачи с ограничения. В Теорема 3.2.2 доказваме, че за дадено непразно множество S в банахово пространство и функция f, която е собствена, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу върху S, съществува функция g от пертурбационното пространство, малка по норма, такава че задачата $(f+g, S)$ е коректно поставена по модул компакт. В частност, функцията $f+g$ достига минимума си върху S.

Този вариационен принцип води до интересни резултати в редичните пространства на Орлич. Ако функцията на Орлич M удовлетворява Δ_2 условието в нулата, то за всяка собствена, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция f, дефинирана върху редичното пространство на Орлич l_M, и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува пертурбация от вида

$$g_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n M(|x_n|)$$

на дефиниращата за пространството функция $\sigma_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M(|x_n|)$, такава че $0 \le a_n \le \varepsilon$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $f + g_a$ достига минимума си, виж Теорема 3.3.3.

Предимството на такава пертурбация – т.е. пертурбация, която запазва вида на функцията σ_M – е, че можем да приложим горния резултат за функцията $f - \sigma_M$, където f е собствена, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция с ограничено дефиниционно множество. Така получаваме коефициенти $a_n \in [1, 2]$, за които функцията

$$f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n M(|x_n|)$$

достига минимум – виж Теорема 3.3.4.

С други думи, можем да подпрем функцията f отдолу с функция, много близка по форма до σ_M. Това означава, че ако M няма гладкост в нулата, то f също не може да бъде гладка в дефиниционното си множество. Прилагаме тази идея за функцията $f = b^{-2}$, където b е нетривиална камбановидна функция, за да докажем, че в ℓ_M не съществуват камбановидни функции, притежаващи определени свойства на гладкост – в Твърдение 3.4.1, Твърдение 3.4.2 и Твърдение 3.4.3.

Резултатите от Глава 3 са публикувани в [35].

Глава 1

Пертурбационен метод за равномерно епи-сходяща редица от функции

Основният въпрос, разглеждан в Глава 1, е следният: дали за дадена редица от собствени, полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу функции може да се намери една обща пертурбираща функция, такава че всяка от пертурбираните функции да достига строг минимум. Освен това, ако дадената редица от функции в някакъв смисъл клони към някаква гранична функция, може ли да намерим една и съща пертурбираща функция на всичките (вкл. и на граничната), т.ч. строгите минимуми на пертурбираните функции да клонят към строгия минимум на пертурбираната гранична функция?

Един възможен подход към този проблем е използването на параметрични вариационни принципи. Един от първите резултати, разширяващи в тази посока теорията на вариационните принципи, е на П. Георгиев, който в [17] доказва параметричен гладък вариационен принцип от типа на този на Борвейн и Прайс. Няколко години по-късно, през 2009 г., Л. Весели в [38] модифицира доказателството на П. Георгиев. През същата 2009 година в [9] Р. Девил и А. Прохазка доказват параметрична версия на гладкия вариационен принцип с ограничения. И в трите доказателства се използва вариант на теоремата за непрекъсната селекция на Майкъл, което налага да се предположи изпъкналост. Нашият подход се основава на използването на абстрактен вариационен принцип, базиран на концепцията за пертурбационно пространство от функции, което позволява да се избегнат предположения за изпъкналост.

Идеята за използване на пертурбации от банахово пространство от функции е предложена за пръв път от Девил, Годофроа и Зизлер [7, 8]. Например, ако едно банахово пространство $\mathcal{P}$ от ограничени непрекъснати функции върху банахово пространство E удовлетворява условията на [8, Лема II.2.5], то за всяка собствена, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, множеството от всички функции $g \in \mathcal{P}$, за които пертурбираната функция $f + g$ достига строгия си минимум върху E, е гъсто G_δ множество в $\mathcal{P}$.

В тази глава работим със следната дефиниция за пертурбационно пространство от функции, дефинирани върху пълно метрично пространство (X, d). Да отбележим, че споменатите в увода пространство $\mathcal{P}_1$ (разбира се, от функции върху подходящо банахово пространство E), както и пространството $\mathcal{P}_2$ от функции върху произволно банахово пространство E, са пертурбационни пространства в смисъла на следващата дефиниция.

Дефиниция 1.1.1. Нека (X, d) е пълно метрично пространство. Пространството $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ от реалнозначни, равномерно непрекъснати и ограничени върху X функции, се нарича пертурбационно пространство върху X, ако са изпълнени следните условия:

(i) $\mathcal{P}$ е пълно по отношение на нормата $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$, която доминира равномерната сходимост върху X, т.е. съществува константа $c > 0$, такава че

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq c\|g\|_{\mathcal{P}}, \quad \forall g \in \mathcal{P}. \tag{1.1}$$

С други думи, $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ е банахово пространство от ограничени върху X равномерно непрекъснати функции.

(ii) За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че за всяка точка $x \in X$ съществува функция $g_x \in \mathcal{P}$, удовлетворяваща

$$\|g_x\|_{\mathcal{P}} < \varepsilon \quad \text{и} \quad g_x(y) < g_x(x) + \delta \Rightarrow d(y, x) < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Равномерна епи-сходимост на редица от функции. Свойства.

Епи-сходимостта е основно понятие във вариационния анализ. Тя дефинира сходимостта на редица от функции чрез сходимостта на техните епиграфики.

Редицата от функции $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, където $f_n : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, е епи-сходяща към функция $f_\infty : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ако са изпълнени следните две условия

$$\forall x \in X,\ \exists x_n \to x : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f_\infty(x),$$

$$\forall x \in X,\ \forall x_n \to x : \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n) \geq f_\infty(x), \tag{1.3}$$

вж. [29, Proposition 7.2]. Граничната функцията f_∞ задължително е полунепрекъсната отдолу.

Както се посочва в [29], епи-сходимостта предоставя надеждна основа за изследване на устойчивостта на оптимизационни задачи и техните решения, тъй като гарантира, че граничната функция улавя асимптотичното поведение на разглежданата редица от функции.

В контекста на нашите разглеждания въвеждаме ново понятие за сходимост, което наричаме равномерна епи-сходимост.

Дефиниция 1.2.1. Ако функциите $f_n : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, удовлетворяват условията

$$\forall x \in X,\ \exists x_n \to x : \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f_\infty(x), \tag{1.4}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X : \quad f_n(x) \geq \inf f_\infty(B_\varepsilon(x)) - \varepsilon, \tag{1.5}$$

където

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X :\ d(y,x) \leq \varepsilon\},$$

казваме, че редицата $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е равномерно епи-сходяща към функцията f_∞.

Нека отбележим, че условието (1.4) съвпада с първото условие за епи-сходимост, докато условието (1.5) е по-силно от второто условие за епи-сходимост (1.3).

Също така, ако епиграфиката на функцията f_∞ „поглъща" епиграфиките на функциите f_n, т.е. ако

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \operatorname{epi} f_n \subset \operatorname{epi} f_\infty + \varepsilon B_{X\times\mathbb{R}}, \quad \forall n \geq N,$$

където

$$\operatorname{epi} f_\infty + \varepsilon B_{X\times\mathbb{R}} := \{(y,s) \in X \times \mathbb{R} : \exists (x,r) \in \operatorname{epi} f_\infty \text{ т.ч. } d(y,x) + |s-r| \leq \varepsilon\},$$

то редицата $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е равномерно епи-сходяща към функцията f_∞.

Въпреки това, пример, включващ на части линейни изпъкнали функции върху $\mathbb{R}$, показва, че е възможно f_n да бъдат епи-сходящи към f_∞, но да не е изпълнено $\inf f_n \to \inf f_\infty$ (виж [29, стр. 263]). Функциите

$$f_n(x) := \max\{-1, x/n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R},$$

са епи-сходящи към $f_\infty \equiv 0$. Лесно може да се провери, че за тези функции не е в сила заключението на Теорема 1.4.1.

Това подчертава необходимостта от въвеждане на допълнително условие за равномерност, каквото е и условието (1.5). Изискването $\inf f_n \to \inf f_\infty$

само по себе си не е достатъчно, тъй като това свойство не се запазва при добавяне на произволна пертурбираща функция — ключов момент в нашия метод, както може да се види в Твърдение 1.2.4.

Следните две твърдения съдържат някои свойства на равномерно епи-сходяща редица от функции.

Твърдение 1.2.3. Нека (X, d) е метрично пространство и нека функциите $f_n : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ са собствени и ограничени отдолу и удовлетворяват условията (1.4) и (1.5). Нека редицата $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е такава, че

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - \inf f_n) = 0. \tag{1.7}$$

Да допуснем, че x_∞ е точка на строг минимум на функцията f_∞. Тогава са изпълнени

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f_\infty(x_\infty).$$

Твърдение 1.2.4. Нека (X, d) е метрично пространство и нека редицата от функции $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{R}$ клони равномерно към равномерно непрекъснатата и ограничена отдолу функция $\varphi_\infty : X \to \mathbb{R}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi_\infty(x)| : x \in X\} = 0.$$

Ако редицата от собствени и ограничени отдолу функции $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ удовлетворява условията (1.4) и (1.5), то и редицата $(\psi_n + \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ също ги удовлетворява.

Вариационен принцип

Всяка собствена, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция може да бъде пертурбирана чрез функция от пертурбационното пространство по такъв начин, че получената пертурбирана функция да достига строг минимум. Освен това съществуват много такива пертурбиращи функции — те образуват гъсто G_δ множество в пертурбационното пространство.

Теорема 1.3.1. Нека (X, d) е пълно метрично пространство и $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ е пертурбационно пространство върху X. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция. Тогава множеството от всички функции $g \in \mathcal{P}$, за които функцията $f + g$ достига строг минимум, е гъсто G_δ подмножество на $\mathcal{P}$.

Едновременна пертурбация на членовете на равномерно епи-сходяща редица от функции. Приложение.

Теорема 1.4.1 показва как вариационният принцип от Теорема 1.3.1 може да бъде приложен едновременно върху всички членове на равномерно епи-сходяща редица от функции $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$.

Теорема 1.4.1. Нека (X, d) е пълно метрично пространство и $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ е пертурбационно пространство върху X. Нека функциите $f_n : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ са собствени, полунепрекъснати отдолу, ограничени отдолу и удовлетворяват условията (1.4) и (1.5).

Тогава съществува гъсто G_δ множество $U \subset \mathcal{P}$, такова че за всяка функция $g \in U$, функциите $f_n + g$, $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, достигат строг минимум в $x_n = x_n(g) \in X$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f_\infty(x_\infty). \tag{1.14}$$

Разглеждаме редица минимизационни задачи с ограничения и показваме, че при определени условия за непрекъснатост, целевите функции могат да бъдат пертурбирани с една и съща функция (с произволно малка супремум норма), така че новите пертурбирани задачи да бъдат коректно поставени.

Теорема 1.5.1. Нека (X, d) е пълно метрично пространство и $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ е пертурбационно пространство върху X. Разглеждаме оптимизационните задачи

$$(P^n) \quad \min_{x\in A_n} h_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Да допуснем, че редицата $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ от множества на ограниченията в X клони към множество $A_\infty \subset X$ в смисъл на Пенлеве–Куратовски и че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, такова че за всички $n > N$, множеството A_∞ е ε-мрежа за A_n.

Нека също така функциите $h_n : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, са собствени, полунепрекъснати отдолу и равномерно клонят към равномерно непрекъсната функция $h_\infty : X \to \mathbb{R}$.

Тогава съществува гъсто G_δ множество $G \subset \mathcal{P}$, такова че за всяко $g \in G$ пертурбираните задачи

$$(P^n_g) \quad \min_{x\in A_n} (h_n + g)(x), \quad n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

са коректно поставени и ако $x_n = x_n(g)$ е решение на (P^n_g), то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty, \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x_n) = h_\infty(x_\infty).$$

Глава 2

Пертурбационен метод за равномерно епи-непрекъсната фамилия от функции

В Глава 2 разширяваме и обобщаваме метода, въведен в Глава 1. Докато в предходната глава разглеждахме редици от функции и тяхната сходимост, тук работим с параметризирана фамилия от функции, дефинирани върху пълно метрично пространство.

Разглежданата задача е следната:

$$\text{да се минимизира } f_p(x) \text{ върху } x \in X \text{ за } p \in P,$$

където (X, d) и (P, μ) са пълни метрични пространства, p е параметър и за всяко $p \in P$ функцията $f_p : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу.

В тази връзка се налага да се изследва свойството непрекъснатост на многозначното изображение

$$p \mapsto \Omega_{f_p}(\varepsilon),$$

където

$$\Omega_{f_p}(\varepsilon) := \{x \in X : \ f_p(x) \leq \inf f_p + \varepsilon\}.$$

Разбира се, за да може изобщо да се очаква някаква форма на непрекъснатост, трябва да съществува връзка между функциите f_p за различни стойности на параметъра p.

За нашите разглеждания въвеждаме свойство, което наричаме равномерна епи-непрекъснатост. Ако (X, d) и (P, μ) са пълни метрични пространства, казваме, че фамилията от функции $(f_p)_{p \in P}$ е равномерно епи-непрекъсната по $p \in P$, ако са изпълнени следните две условия:

$$\begin{aligned} &\forall p \in P,\ \forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \text{ т.ч.} \\ &\forall q \in B_\delta(p)\ \exists x_q \in B_\varepsilon(x), \text{ т.ч.} \\ &f_q(x_q) \le f_p(x) + \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &\forall p \in P,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \text{ т.ч.} \\ &f_q(x) \ge (f_p)_\varepsilon(x) - \varepsilon, \quad \forall x \in X,\ \forall q \in B_\delta(p), \end{aligned} \tag{2.2}$$

където регуляризацията $(v)_\varepsilon$ на ограничена отдолу функция $v : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ се дефинира като

$$(v)_\varepsilon(x) := \inf\{v(y) : y \in B_\varepsilon(x)\}.$$

Когато $P = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, т.е. едноточковата компактификация на множеството на естествените числа, тогава очевидно параметризираната фамилия $(f_p)_{p \in P}$ съвпада с редицата $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$. В този случай свойствата (2.1) и (2.2) съвпадат точно със свойствата (1.4) и (1.5) съответно.

За функция $g : P \times X \to \mathbb{R}$ при фиксирано $p \in P$ дефинираме функцията

$$g_p(x) := g(p, x), \quad \forall x \in X,$$

което ни позволява да разглеждаме функцията на две променливи $g(p, x)$ като параметризирана фамилия от функции $(g_p)_{p \in P}$ върху X. Обратно, ако е дадена фамилия от функции $(g_p)_{p \in P}$ върху X, можем да дефинираме функцията $g : P \times X \to \mathbb{R}$, като

$$g(p, x) := g_p(x), \quad \forall (p, x) \in P \times X.$$

Нека с $BUC(X)$ означим пространството от всички ограничени и равномерно непрекъснати реалнозначни функции върху X. Снабдено с нормата

$$\|v\|_\infty := \sup_{x \in X} |v(x)|, \quad \forall v \in BUC(X),$$

пространството $(BUC(X), \|\cdot\|_\infty)$ е банахово пространство.

Дефиниция 2.1.1. Нека (X, d) и (P, μ) са пълни метрични пространства. Нека $(f_p)_{p \in P}$ е фамилия от собствени, полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу функции от X в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Нека $f : P \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е дефинирана като $f(p, x) := f_p(x)$.

Пълно метрично пространство $(\mathcal{G}, \rho)$ от функции $g : P \times X \to \mathbb{R}$ наричаме пертурбационно пространство върху $P \times X$ за функцията f, ако метриката ρ е транслационно инвариантна, т.е. $\rho(g_1 + h, g_2 + h) = \rho(g_1, g_2), \forall h, g_1, g_2 \in \mathcal{G}$; $\mathcal{G}$ е изпъкнал конус (т.е. е затворено относно операциите събиране и умножение със скалар) и са изпълнени следните условия:

(i) $g_p \in BUC(X)$, $\forall p \in P$;

(ii) изображението

$$p \mapsto g_p$$

от P в $BUC(X)$ е непрекъснато;

(iii) $\forall p \in P$ съществува константа $c(p) > 0$, такава че

$$\|g_p\|_\infty \leq c(p)\, \rho(g,0), \quad \forall g \in \mathcal{G};$$

(iv) $\forall p \in P$, $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall g \in \mathcal{G}$ съществуват $\delta > 0$ и $g' \in \mathcal{G}$, такива че

$$\rho(g,g') < \varepsilon \quad \text{и} \quad \operatorname{diam}(\Omega_{f_p+g'_p}(\delta)) < \varepsilon.$$

Нека отбележим, че така въведеното пертурбационно пространство $\mathcal{G}$, е пространство от функции, дефинирани в $P \times X$, докато пертурбационното пространство, използвано в предходната глава, е от функции, дефинирани в X.

Пертурбационен метод

Следният вариационен принцип е адаптация на Теорема 1.3.1.

Теорема 2.2.1 (**Вариационен принцип**)**.** Нека (P,μ) и (X,d) са пълни метрични пространства.

Нека функциите $f_p : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ за $p \in P$ са собствени, полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу. Нека $(\mathcal{G},\rho)$ е пертурбационно пространство за функцията $f : P \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, дефинирана като $f(p,x) := f_p(x)$.

Нека $p \in P$ е фиксирано. Тогава съществува гъсто G_δ множество $U \subset \mathcal{G}$, такова че за всяко $g \in U$ функцията $f_p + g_p$ достига строг минимум върху X.

Свойства на равномерната епи-непрекъснатост

От Теорема 2.2.1 е ясно как може да се получи гъсто множество от параметри, при които да бъде достигнат строг минимум. Тук показваме, че равномерната епи-непрекъснатост гарантира, че това множество е G_δ.

Твърдение 2.3.1. Нека (P,μ) и (X,d) са пълни метрични пространства. Нека функциите $f_p : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ за $p \in P$ са собствени, полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу. Предполагаме още, че фамилията от функции $(h_p)_{p\in P}$ е равномерно епи-непрекъсната по $p \in P$, т.е. удовлетворява условията (2.1) и (2.2).

Нека $Q \subset P$ е множество от тези $p \in P$, за които функцията h_p достига строг минимум и нека този минимум е $x_p \in X$.

Тогава Q е G_δ множество и освен това е изпълнено, че

$$\forall p \in Q,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ :\ \Omega_{h_q}(\delta) \subset B_\varepsilon(x_p), \quad \forall q \in B_\delta(p). \tag{2.5}$$

Генерична непрекъснатост на минимумите

Твърдение 2.4.1. Нека (X, d) и (P, μ) са пълни метрични пространства. Нека фамилията от собствени и ограничени отдолу функции $(f_p)_{p \in P}$ е равномерно епи-непрекъсната по параметъра $p \in P$. Тогава функцията

$$V(p) := \inf_{x \in X} f_p(x), \quad \forall p \in P,$$

е непрекъсната.

Еквивалентността на дефинициите на Хайне и на Коши (за сходимост, непрекъснатост и т.н.) важи и при равномерната епи-непрекъснатост.

Нека (X, d) и (P, μ) са пълни метрични пространства. Тогава фамилията от функции $(f_p)_{p \in P}$ е равномерно епи-непрекъсната върху P — т.е. удовлетворява условията (2.1) и (2.2) — тогава и само тогава, когато за всяко $p \in P$ и всяка редица $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сходяща към p (т.е. $\mu(p_n, p) \to 0$), редицата от функции $\phi_n := f_{p_n}$ е равномерно епи-сходяща към функцията $\phi_\infty := f_p$ в смисъл, че редицата $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ удовлетворява условията (1.4) и (1.5).

Следващото твърдение дава достатъчни условия, при които равномерната епи-непрекъснатост се запазва при събиране.

Твърдение 2.4.2. Нека (X, d) и (P, μ) са пълни метрични пространства. Нека фамилията от собствени и ограничени отдолу функции $(f_p)_{p \in P}$ е равномерно епи-непрекъсната по $p \in P$.

Нека фамилията $(g_p)_{p \in P} \subset BUC(X)$ е такава, че изображението

$$p \mapsto g_p$$

е непрекъснато от P в $BUC(X)$ (с други думи, фамилията $(g_p)_{p \in P}$ удовлетворява условия (i) и (ii) от Дефиниция 2.1.1).

Тогава фамилията от функции $(f_p + g_p)_{p \in P}$ също е равномерно епи-непрекъсната по параметъра $p \in P$.

Теорема 2.4.3. Нека (P, μ) и (X, d) са пълни метрични пространства и нека P е сепарабелно.

Нека $(f_p)_{p \in P}$ е фамилия от собствени, полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу функции от X в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, която удовлетворява условията (2.1) и (2.2).

Нека $(\mathcal{G}, \rho)$ е пертурбационно пространство върху $P \times X$ за функцията $f : P \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, дефинирана като $f(p, x) := f_p(x)$.

Нека W е изброимо гъсто подмножество на P.

Тогава съществува гъсто G_δ множество $G \subset \mathcal{G}$, такова че за всяко $g \in G$ съществува гъсто G_δ множество $P_g \subset P$, такова че $W \subset P_g$ и е изпълнено следното свойство: за всяко фиксирано $p \in P_g$ функцията $f_p + g_p$ достига строг минимум в точка $x_{p,g} \in X$ и освен това:

$$\forall p \in P_g,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,:\, \Omega_{f_q + g_q}(\delta) \subset B_\varepsilon(x_{p,g}), \quad \forall q \in B_\delta(p). \tag{2.9}$$

Също така, функциите

$$p \mapsto f_p(x_{p,g}) \quad \text{и} \quad p \mapsto g_p(x_{p,g})$$

са непрекъснати върху P_g.

Използвайки $BUC(X)$ като пертурбационно пространство, получаваме следния резултат.

Следствие 2.4.4. Нека (P, μ) и (X, d) са пълни метрични пространства, като P е сепарабелно.

Нека $(f_p)_{p \in P}$ е фамилия от собствени, полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу функции от X в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, която удовлетворява условията (2.1) и (2.2).

Нека W е изброимо гъсто подмножество на P.

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват гъсто G_δ множество $V \subset P$, такова че $W \subset V$ и непрекъснато изображение

$$\varphi : V \to X,$$

такова че

$$\varphi(p) \in \Omega_{f_p}(\varepsilon), \quad \forall p \in V.$$

Пример 2.4.5 по-долу илюстрира, че дори в случая, когато P е интервал, заключението на Следствие 2.4.4, а следователно и на Теорема 2.4.3, може да не бъде валидно за всички $p \in P$. Макар че подобно заключение може да се окаже вярно при допълнителни предположения относно фамилията от функции $(f_p)_{p \in P}$ - например изпъкналост (виж напр. [17, 38, 9, 18]), то този случай излиза извън обхвата на настоящото изследване.

Пример 2.4.5. Нека $P = X = [0, 1]$ и нека $f_p(x) := (1-p)(3x-1)$ за $x \in [0, 1/3]$, $f_p(x) := 0$ за $x \in [1/3, 2/3]$ и $f_p(x) := p(2 - 3x)$ за $x \in [2/3, 1]$. Тогава за всяко $\varepsilon \in (0, 1/2)$ е изпълнено, че $\Omega_{f_0}(\varepsilon) \subset [0, 1/3]$, $\Omega_{f_1}(\varepsilon) \subset [2/3, 1]$ и $\Omega_{f_p}(\varepsilon) \cap (1/3, 2/3) = \varnothing$ за всяко $p \in [0, 1]$. Следователно не съществува непрекъснато изображение $p \to \Omega_{f_p}(\varepsilon)$.

Приложение в теорията на Стечкин

Нека е дадено банахово пространство $(E, \|\cdot\|)$ и нека $C \subset E$ е непразно, затворено, изпъкнало и ограничено подмножество. Очевидно, снабдени с каноничната метрика

$$\mu(x, y) := \|x - y\|,$$

както пространството от параметрите $P = (E, \|\cdot\|)$, така и $X = (C, \|\cdot\|)$, са пълни метрични пространства.

Нека $\mathcal{N}$ означава множеството на всички ограничени полунорми върху E, т.е. функциите $\nu : E \to \mathbb{R}$, които удовлетворяват:

(j) $\nu(tx) = |t|\,\nu(x)$, за всяко $x \in E$, $t \in \mathbb{R}$;

(jj) $\nu(x+y) \le \nu(x) + \nu(y)$, за всяко $x, y \in E$;

(jjj) $k_\nu := \sup_{x \in B_E} |\nu(x)| < \infty$, така че $\nu(x) \le k_\nu \|x\|$ за всяко $x \in E$.

Снабдено с метриката

$$\rho(\nu_1, \nu_2) := \sup_{x \in B_E} |\nu_1(x) - \nu_2(x)|, \tag{2.10}$$

$(\mathcal{N}, \rho)$ е пълно метрично пространство. Очевидно е, че $\mathcal{N}$ е изпъкнал конус, тъй като за произволни $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{N}$ и $\alpha, \beta \ge 0$ е изпълнено, че $\alpha\nu_1 + \beta\nu_2 \in \mathcal{N}$.

Множеството $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$, съставено от всички еквивалентни норми върху E, е отворено и гъсто в $\mathcal{N}$, виж Лема 2.5.1.

Строгата дефиниция на изпъкналия конус $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$ е:

$$\nu \in \mathcal{N}_0 \iff \exists\, a, b > 0, \text{ такива че } a\|x\| \le \nu(x) \le b\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

За всяка $\nu \in \mathcal{N}$ от самата дефиниция следва, че

$$\nu(x) \le \rho(\nu, 0)\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Оттук получаваме

$$\nu \in \mathcal{N}_0 \iff a_\nu := \inf \nu(S_E) > 0, \tag{2.11}$$

където S_E е единичната сфера в E. Това показва, че $\mathcal{N}_0$ се състои точно от онези полунорми, които са строго положителни върху S_E. Оттук става ясно, че

$$\mathcal{N} + \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0,$$

и по-специално, за всяко $\nu \in \mathcal{N}$ и всяко $\varepsilon > 0$ имаме, че

$$\nu + \varepsilon\|\cdot\| \in \mathcal{N}_0.$$

Следователно, $\mathcal{N}_0$ е гъсто множество в $\mathcal{N}$. Освен това, $\mathcal{N}_0$ е отворено (виж Лема 2.5.1). Оттук следва, че

$$\mathcal{N} = \overline{\mathcal{N}_0} \quad \text{и} \quad \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}^\circ,$$

където с $\mathcal{N}^\circ$ е обозначена вътрешността на $\mathcal{N}$.

Тези свойства на множеството $\mathcal{N}_0$ са основен инструмент за приложението на Теорема 2.5.4.

Лема 2.5.1. Ако $\nu \in \mathcal{N}_0$, тогава $B^\circ_{a_\nu}(\nu) \subset \mathcal{N}_0$.

Лема 2.5.2. Нека $C \subset E$ е непразно, затворено, изпъкнало и ограничено множество. Нека $\nu \in \mathcal{N}$ е такова, че

$$\inf_C \nu > 0.$$

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu' \in B_\varepsilon(\nu)$ и $\delta > 0$, такива че

$$\operatorname{diam}\{x \in C : \ \nu'(x) \leq \inf_C \nu' + \delta\} < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Твърдение 2.5.3. Нека E е банахово пространство и $C \subset E$ е непразно, затворено, изпъкнало и ограничено множество. Конусът $(\mathcal{G}, \rho)$ от функции

$$\mathcal{G} := \{g : E \times E \to \mathbb{R} \text{ s.t. } g(p,x) = \nu(p-x), \ \nu \in \mathcal{N}\},$$

снабден с метриката

$$\rho(g_1, g_2) := \rho(\nu_1, \nu_2), \text{ където } g_i(p,x) = \nu_i(p-x), \ i = 1,2,$$

е пертурбационно пространство върху $P \times X$ (където $P = (E, \|\cdot\|)$, а $X = (C, \|\cdot\|)$) за функцията $f(p,x) \equiv 0$ за всяко $p \in E$ и $x \in C$.

Полученият резултат от тип Стечкин е следният.

Теорема 2.5.4. Нека $(E, \|\cdot\|)$ е сепарабелно банахово пространство и нека $C \subset E$ е непразно, затворено, изпъкнало и ограничено множество. За всяко изброимо гъсто множество $W \subset E$ и всяка еквивалентна норма $|\cdot|$ върху E съществуват еквивалентна норма $|||\cdot|||$, произволно близка до $|\cdot|$, и гъсто G_δ множество $V \supset W$, такива че задачата

$$\min_{x \in C} |||p - x|||$$

е коректно поставена за всяко $p \in V$. В частност, метричната проекция върху множеството C, относно нормата $|||\cdot|||$, е еднозначна и непрекъсната върху множеството V.

Глава 3

Пертурбационен метод в редични пространства на Орлич

В Глава 3 доказваме вариационен принцип, който прилагаме в редични пространства на Орлич.

Редичните пространства на Орлич ℓ_M, въведени от полския математик Владислав Орлич през 1932 г., обобщават класическите ℓ_p пространства. Пространствата ℓ_p за $p \in [1, \infty)$ се състоят от всички безкрайни редици $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, за които $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

Срещат се обаче редици, които не удовлетворяват това изискване за p-сумируемост (напр. редици с експоненциален или логаритмичен растеж), което налага използването на по-обща рамка. Такава рамка предоставят редичните пространства на Орлич, при които вместо функцията t^p се използва функция $M(t)$, наречена функция на Орлич.

Функция $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ се нарича функция на Орлич, ако е ненамаляваща, изпъкнала и непрекъсната функция, такава че $M(0) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = +\infty$. Ако $M(t) > 0$ за всяко $t > 0$, M се нарича *неизродена* и се нарича *изродена* в противен случай.

Елементите на пространството ℓ_∞, т.е. ограничените редици, означаваме с $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

където $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е каноничният базис на c_0.

За дадена функция на Орлич M се дефинира четната изпъкнала функция

$\sigma_M : \ell_\infty \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, като

$$\sigma_M(x) := \sum_{n=1}^{\infty} M(|x_n|). \tag{3.1}$$

Редичното пространство на Орлич ℓ_M е линейно подпространство на ℓ_∞, състоящо се от всички $x \in \ell_\infty$, които за някое $\rho > 0$ удовлетворяват

$$\sigma_M(x/\rho) < \infty.$$

Снабдено с нормата

$$\|x\| := \inf \left\{ \rho > 0 : \sigma_M \left(\frac{x}{\rho} \right) \leq 1 \right\},$$

ℓ_M е банахово пространство. Ако M е изродена, тогава $\ell_M \equiv \ell_\infty$ и този случай не представлява интерес в изследванията ни. От изпъкналостта на функцията σ_M следва, че

$$\sigma_M(x) \leq \|x\|, \text{ ако } \|x\| \leq 1; \quad \sigma_M(x) > \|x\|, \text{ ако } \|x\| > 1. \tag{3.2}$$

Неизродена функция на Орлич M удовлетворява Δ_2 условието в нулата, ако

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{M(t)}{M(2t)} > 0. \tag{3.3}$$

Когато M е неизродена и удовлетворява Δ_2 условието в нулата, σ_M е изпъкнала и ограничена върху ограничените множества функция и следователно е непрекъсната. В този случай от (3.2) следва, че

$$\|x\| = 1 \iff \sigma_M(x) = 1.$$

В Глава 3 показваме, че ако M е неизродена функция на Орлич, която удовлетворява Δ_2 условието в нулата, тогава за всяка собствена полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция $f : \ell_M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим пертурбираща функция

$$g_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n M(|x_n|)$$

на дефиниращата функция σ_M, където $0 \leq a_n < \varepsilon$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и е такава, че $f + g_a$ достига минимума си върху ℓ_M, виж Теорема 3.3.3.

Резултатът е получен чрез адаптиране на техники, използвани в [21, 22].

Основното предимство на пертурбация, която запазва формата на σ_M, е че позволява да доразвием както доказателството на [8, Лема II.5.4], така и подхода в [30]. Прилагайки горния резултат към функцията $f - \sigma_M$, където f е собствена полунепрекъсната и ограничена отдолу (което гарантира, че $f - \sigma_M$ остава ограничена отдолу), получаваме твърдението на Теорема 3.3.4: ако f е собствена полунепрекъсната и ограничена отдолу функция с ограничена дефиниционна област, то съществуват коефициенти $a_n \in [1, 2]$, такива че функцията

$$x \mapsto f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n M(|x_n|)$$

достига минимума си. С други думи, можем да апроксимираме f отдолу чрез функция, която се държи подобно на σ_M. Прилагайки тази идея към $f = b^{-2}$, където b е нетривиална камбановидна функция върху ℓ_M, може да се докаже, че не съществува такава камбановидна функция с определени свойства на гладкост, виж Твърдение 3.4.1. Друг начин да се докаже, че не съществува нетривиална липшицова камбановидна функция, която е диференцируема по Фреше върху ℓ_1, е да се разгледа банаховото пространство от всички ограничени липшицови непрекъснати и диференцируеми по Фреше функции като пертурбационно пространство и да се приложи [8, Лема I.2.5]. Но този подход изисква глобална липшицова непрекъснатост на камбановидната функция. Затова е по-ефективно – както тук, така и в по-широк контекст – да се пертурбира σ_M, която в този случай съвпада с нормата. (Доказателството работи за всяка функция на Орлич M, удовлетворяваща $\limsup_{t\to 0} M(t)/t > 0$, но от изпъкналостта следва, че такава функция е еквивалентна на $|\cdot|$ в нулата, така че пространството ℓ_M е изоморфно на ℓ_1).

По подобен начин, Твърдение 3.4.2 установява, че ако M удовлетворява Δ_2 условие в нулата и $\limsup\limits_{t\to 0} M(t)/t^p = \infty$ за някое $p \in (1, 2]$, тогава няма нетривиална камбановидна функция b върху ℓ_M, която да удовлетворява

$$b(x + h) = b(x) + \langle b'(x), h\rangle + O(\|h\|^p)$$

за всяка точка $x \in \ell_M$.

Следващият пример, виж Твърдение 3.4.3, е по-различен. От предходното твърдение следва, че няма двукратно диференцируема по Фреше камбановидна функция върху ℓ_p за $p \in (1, 2)$, тъй като двукратната диференцируемост по Фреше би дала следната оценка във всяка точка x

$$b(x + h) = b(x) + \langle b'(x), h\rangle + O(\|h\|^2).$$

Известно е (виж [20]), макар и не лесно за доказване, че в тези пространства няма дори двукратно диференцируема по Гато камбановидна функция. Показваме, че ако M удовлетворява Δ_2 условието в нулата и $\lim_{t\to 0} M''(t) = \infty$, тогава няма двукратно диференцируема по Гато камбановидна функция върху ℓ_M. В частност, последното важи за ℓ_p при $p \in (1,2)$. Тези резултати могат да се докажат и с вариационен принцип на Стегал, като например в [14], но нашият подход е по-директен.

Свойства на редичните пространства на Орлич

Добре известни са следните резултати за функцията на Орлич, виж напр. [25, 19].

Лема 3.1.1. Ако M е неизродена функция на Орлич, удовлетворяваща Δ_2 условието в нулата, тогава

$$\sup_{KB_{\ell_M}} \sigma_M < \infty, \quad \forall K > 0, \tag{3.4}$$

където $B_{\ell_M} = \{x : \ \sigma_M(x) \le 1\}$.

Лема 3.1.2. Неизродена функция на Орлич M удовлетворява Δ_2 условието в нулата тогава и само тогава, когато функцията σ_M има строг минимум в началото, т.е. задачата

$$\sigma_M(x) \to \min, \quad x \in \ell_M$$

е коректна по Тихонов.

Абстрактна пертурбационна техника

Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство и S е непразно подмножество на X. С $\alpha(S)$ означаваме индекса на некомпактност на Куратовски на S, т.е. инфимумът на тези $\varepsilon > 0$, за които S има крайна ε мрежа.

За функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $\varepsilon \ge 0$ множеството на подниво на f в S е

$$\Omega_f^S(\varepsilon) = \left\{ x \in S : f(x) \le \inf_S f + \varepsilon \right\}.$$

Казваме, че минимизационната задача

$$(f, S) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \to \min \\ x \in S \end{array} \right.$$

е *коректна по модул компакт* (кмк), ако $\inf_S f \in \mathbb{R}$ и $\Omega_f^S(0)$ е непразно и компактно множество, такова че ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е минимизираща редица (т.е. $f(x_n) \to \inf_S f$), то

$$\operatorname{dist}(x_n, \Omega_f^S(0)) \to 0.$$

Ако $\Omega_f^S(0)$ е едноточково множество, тогава получаваме коректност в смисъл на Тихонов (виж напр. [11, Глава I]). От лемата на Куратовски, [22, Твърдение 4.2], следва, че за затворено множество $S \subset X$ и собствена полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция $f : S \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е изпълнено, че

$$(f, S) \text{ е кмк} \iff \lim_{t \downarrow 0} \alpha(\Omega_f^S(t)) = 0. \tag{3.5}$$

Очевидно, ако X е крайномерно и S е затворено множество, тогава за всяка собствена полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция $f : S \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, задачата (f, S) е кмк. Идеята за безкрайномерно пространство X е да се пертурбира функцията f чрез подходяща функция, така че пертурбираната задача да бъде кмк. Тук има разлика с обичайните вариационни принципи, като тези в [8], при които задачата се пертурбира, така че да бъде коректна в смисъл на Тихонов.

Адаптираме дефиницията на пертурбационно пространство, така че да е съобразена със спецификата на задачата, която разглеждаме - минимизационна задача с ограничения.

Дефиниция 3.2.1. Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство и $S \subseteq X$ е непразно множество. Пространство $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ от непрекъснати и ограничени върху S функции се нарича пертурбационно пространство за S, ако

(i) $\mathcal{P}$ е изпъкнал конус;

(ii) $\mathcal{P}$ е пълно по отношение на нормата $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$, която доминира равномерната сходимост върху S, т.е. за някое $c > 0$

$$\sup_{x \in S} |g(x)| \le c\|g\|_{\mathcal{P}}, \quad \forall g \in \operatorname{span} \mathcal{P}.$$

С други думи, $(\operatorname{span} \mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ е банахово пространство от ограничени върху S непрекъснати функции, като $\mathcal{P}$ е неговият положителен конус.

(iii) За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такава че за всяко $x \in S$ съществува функция $g \in \mathcal{P}$ (зависеща от x), такава че

$$\|g\|_{\mathcal{P}} \le \varepsilon, \quad x \in \Omega_g^S(\delta) \ \text{ и } \ \alpha(\Omega_g^S(3\delta)) \le \varepsilon. \tag{3.6}$$

Аксиомите в Дефиниция 3.2.1 са формулирани така, че да позволяват лесна проверка. Въпреки това е важно да се подчертае връзката между нашия подход и по-широката топологична рамка, използвана в [24], в която вариационни принципи се извеждат от свойствата на изображението $g \mapsto \Omega_{f+g}(\varepsilon)$. В контекста на тази по-обща рамка нашият подход е изложен в [35, Теорема 2].

Нека да отбележим, че в аксиомите, използвани в [21], се изисква $x \in \Omega_g^S(0)$, което се оказва твърде силно предположение, а тук ние отслабваме това изискване.

Теорема 3.2.2. Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство и $S \subset X$ е непразно затворено множество в X. Нека $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ е пертурбационно пространство за S. Нека $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу върху S функция. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $g \in \mathcal{P}$, такава че $\|g\|_{\mathcal{P}} < \varepsilon$ и задачата $(f+g, S)$ е коректна по модул компакт. В частност, $f+g$ достига минимума си върху S.

Пертурбационно пространство върху ℓ_M

Тук представяме основните си резултати върху пертурбационен метод в редични пространства на Орлич ℓ_M, където функцията M удовлетворява Δ_2 условието в нулата.

Нека фиксираме неизродена функция на Орлич M, която удовлетворява Δ_2 условието в нулата. Означаваме $X := \ell_M$, $\sigma(\cdot) := \sigma_M(\cdot)$ и

$$\nu(t) := \sup\{\sigma(x) : \ \|x\| \leq t\} \tag{3.17}$$

и дефинираме

$$\varphi(t) := \operatorname{diam} \Omega_\sigma(t). \tag{3.18}$$

При предположенията в Лема 3.1.2 имаме, че $\varphi(t) \to 0$, когато $t \to 0$.

За $a \in \ell_\infty$ дефинираме функция g_a върху X, като

$$g_a(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n M(|x_n|).$$

С направеното означение, $\sigma = g_a$ за редицата $a = (a_n)$, където $a_n = 1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Припомняме, че за $a \in \ell_\infty$ имаме $\|a\|_\infty = \sup_n |a_n|$.

Взимаме

$$\mathcal{P} := \left\{ g_a \ : \ a \in \ell_\infty^+ \right\}$$

и разглеждаме $\operatorname{span} \mathcal{P}$, т.е. множеството от всички функции от вида g_a и нека $\|g\|_{\mathcal{P}} = \|a\|_\infty$.

Теорема 3.3.3. Нека M е неизродена функция на Орлич, която удовлетворява Δ_2 условието в нулата. Нека $f : \ell_M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $a \in \ell_\infty$, такова че $\|a\|_\infty < \varepsilon$ и функцията $f + g_a$ достига минимума си върху ℓ_M.

Теорема 3.3.4. Нека M е неизродена функция на Орлич, която удовлетворява Δ_2 условието в нулата. Нека $f : \ell_M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция с ограничено дефиниционно множество.

Тогава за всеки $0 < \delta < \varepsilon$ съществува $a \in \ell_\infty$, такова че

$$\delta \leq a_n \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.24}$$

и функцията $f - g_a$ достига минимума си върху ℓ_M.

Приложения

Следващите твърдения илюстрират приложимостта на Теорема 3.3.4 за общ подход при доказване на резултати за несъществуване на камбановидна функция с определени свойства.

Твърдение 3.4.1. [8, Теорема II.5.3] В ℓ_1 няма диференцируема по Фреше камбановидна функция.

Твърдение 3.4.2. [8, Глава V] Нека M е неизродена функция на Орлич, която удовлетворява Δ_2 условието в нулата и за някое $p \in (1, 2]$

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{M(t)}{t^p} = \infty. \tag{3.29}$$

Тогава в ℓ_M не съществува нетривиална камбановидна функция, такава че

$$b(x + h) = b(x) + \langle b'(x), h \rangle + O(\|h\|^p) \tag{3.30}$$

за всяко $x \in \ell_M$.

Твърдение 3.4.3. Ако M е неизродена двукратно диференцируема функция на Орлич, удовлетворяваща Δ_2 условието в 0 и $\lim\limits_{t \searrow 0} M''(t) = \infty$, то в ℓ_M не съществува двукратно диференцируема по Гато камбановидна функция.

Резюме

Основни приноси

В първа глава въвеждаме понятието равномерна епи-сходимост на редица от функции – усилена версия на добре познатата епи-сходимост. Използвайки свойствата на равномерната епи-сходимост разработваме метод за едновременна пертурбация на равномерно епи-сходяща редица от собствени, полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу функции, дефинирани върху пълно метрично пространство. Доказваме, че редицата от строги минимуми на пертурбираните функции клони към строгия минимум на пертурбираната гранична функция.

Във втора глава разширяваме дефиницията за равномерна епи-сходимост до равномерно епи-непрекъсната фамилия от функции, зависещи от параметър. Доказахме, че за дадена фамилия от собствени, полунепрекъснати отдолу и ограничени отдолу функции, дефинирани върху пълно метрично пространство и равномерно епи-непрекъснати по параметъра, както и за изброимо гъсто подмножество W на параметричното пространство (което е сепарабелно и пълно метрично пространство), съществува гъсто G_δ множество от функции в пертурбационното пространство, така че за всяка функция от него съществува гъсто G_δ подмножество на параметричното пространство, съдържащо W, за което пертурбираните функции достигат строг минимум, който зависи непрекъснато от параметъра.

Като приложение доказваме, че ако в сепарабелно банахово пространство са дадени непразно, затворено, изпъкнало и ограничено множество C, гъсто изброимо множество $W \subset E$ и еквивалентна норма, то съществуват произволно близка еквивалентна норма и гъсто G_δ множество, съдържащо W, такива че метричната проекция върху C, спрямо новата норма, е еднозначна и непрекъсната върху това множество.

В трета глава въвеждаме пертурбационно пространство, адаптирано за случая на минимизационни задачи с ограничения. Доказваме, че за дадено множество S в банахово пространство и функция f, която е собствена, полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу върху S, съществува функция g от пертурбационното пространство с малка норма, такава че минимизационната задача $(f+g, S)$ е коректно поставена по модул компакт. В частност, функцията $f+g$ достига минимума си върху S.

В редичните пространства на Орлич ℓ_M, където функцията на Орлич M удовлетворява Δ_2 условието в нулата, този резултат позволява подпиране на функцията f отдолу чрез пертурбация на функция σ_M. Това води до унифициран подход за доказване на това, че не съществува камбановидна функция в ℓ_M с определени свойства на гладкост.

Публикации, свързани с дисертацията

- Hristina Topalova, Nadia Zlateva, Perturbation Method in Orlicz Sequence Spaces, Set-Valued and Variational Analysis, vol:32, issue:2, 2024, ISSN (print):1877-0533, ISSN (online):1877-0541, doi:https://doi.org/10.1007/s11228-024-00715-5, Ref, Web of Science, IF (1.1 - 2024), Web of Science Quartile: Q2 (162/343 Mathematics Applied), SCOPUS, SJR (0.89 - 2024), SCOPUS Quartile: Q1 (Analysis; Applied Mathematics)

- Hristina Topalova, Nadia Zlateva, Simultaneous perturbed minimization of a convergent sequence of functions, Optimization, 2024, pages:1-11, ISSN (print):0233-1934, ISSN (online):1029-4945, doi:https://doi.org/10.1080/02331934.2024.2386112, Ref, Web of Science, IF (1.8 - 2024), Web of Science Quartile: Q1 (Mathematics Applied 78/343), SCOPUS, SJR (0.705 - 2024), SCOPUS Quartile: Q2 (Applied mathematics)

- H. Topalova, N. Zlateva, Generic continuity of perturbed minima of certain parametric optimization problems, Positivity, vol:29, issue:3, 2025, pages:1-17, ISSN (print):1385-1292, ISSN (online):1572-9281, doi: https://doi.org/10.1007/s11117-025-01133-z, Ref, Web of Science, IF (0.9 - 2024), Web of Science Quartile: Q2 (Mathematics (159/483), SCOPUS, SJR (0.694 - 2024), SCOPUS Quartile: Q1 (Mathematics Miscellaneous)

Докладвани резултати от дисертацията на научни форуми

- Perturbation Method in Orlicz Sequence Spaces, FMI Spring Science Session, 25.03.2023, Sofia, Bulgaria

  https://fmi.uni-sofia.bg/bg/proletna-nauchna-sesiya-na-fmi-2023

- Perturbation Method in Orlicz Sequence Spaces, 16-th International Workshop on Well-Posedness of Optimization Problems and Related Topics, 3 - 7 July, 2023, Borovets, Bulgaria http://www.math.bas.bg/ bio/krast/WP23/

- Simultaneous perturbed minimization of a convergent sequence of functions, FMI Spring Science Session, 25.03.2024, Sofia, Bulgaria

  https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/proletna-nauchna-sesiya-na-fmi-2024

- Simultaneous perturbed minimization of a convergent sequence of functions, International Conference on Optimization: Challenges and Applications, 27-29 May, 2024, Alicante, Spain

  https://sites.google.com/gcloud.ua.es/icoca75boris/home

- Simultaneous perturbed minimization of a convergent sequence of functions, Week of Mathematics and Informatics, September 23-27, 2024, Duni Royal Resort, Bulgaria

  https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/week-mathematics-and-informatics

- Generic continuity of the perturbed minima of certain parametric optimization problems, 4th International Conference on Variational Analysis and Optimization, 14-17 January, 2025, Santaigo, Chile

  https://eventos.cmm.uchile.cl/lopezcerda2025/

- Generic continuity of the perturbed minima of certain parametric optimization problems, FMI Spring Science Session, 22.03.2025, Sofia, Bulgaria

  https://www.fmi.uni-sofia.bg/en/fmi-spring-science-session-2025

- Continuity of minima of a sequence of functions, Joint Doctoral School SU-UoA part 1, 24-30 August, 2025, Sofia Bulgaria

  https://doctoral-school.fmi.uni-sofia.bg/en

- Continuity of minima of a parametrized family of functions, Joint Doctoral School SU-UoA part 1, 24-30 August, 2025, Sofia Bulgaria

  https://doctoral-school.fmi.uni-sofia.bg/en

- Continuity of minima of a sequence of functions. Applications, Joint Doctoral School SU-UoA part 2, 21-27 September, 2025, Aizuwakamatsu, Japan

  https://doctoral-school.fmi.uni-sofia.bg/en

Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че резултатите, представени в дисертацията, са оригинални и са получени от него или в сътрудничество с неговия съавтор. Използването на резултати на други учени е ясно посочено и придружено със съответно цитиране.

Считано от 27 октомври 2024 г., имената на автора са променени от *Христина Йорданова Топалова* на *Христина Йорданова Белчева*, в резултат на официална промяна на фамилното име.

Благодарности

Изказвам своята искрена благодарност към моя научен ръководител – проф. Надя Златева. Благодаря за всеотдайността, търпението и неуморната работа, които вложи в моето обучение и развитие. Благодарна съм, че не само ми даде ценни знания и ме насочи в сложния, но изключително интересен свят на оптимизацията, но и ми показа какво означава истинската научна работа. Благодаря ѝ, че повярва в мен още от самото начало и ми даде шанс да работя под нейно ръководство. За мен беше чест и удоволствие да черпя от нейните знания и опит и да се уча от професионализма ѝ. Благодаря за подкрепата, която беше безценна във всеки един етап, а съветите и насоките не само ми помогнаха, но и ми дадоха увереност да продължавам напред.

Изказвам искрената си благодарност към доц. Милен Иванов за безценните и вдъхновяващи събеседвания и ценните идеи, които допринесоха значително за развитието на моята работа. Неговата професионална отдаденост, дълбоки познания и споделен опит бяха изключително полезни и мотивиращи във всеки един момент.

Благодаря на Факултета по математика и информатика на СУ и най-вече на колегите от катедра „Вероятности, операционни изследвания и статистика“ за приятелската академична среда, която допринесе за развитието на моето изследване. Специални благодарности на проф. Михаил Кръстанов и проф. Надежда Рибарска за вдъхновяващите градивни критики, за създаването на подкрепяща и стимулираща работна среда, както и за ценните съвети, които обогатиха процеса на моята работа.

Искам да изкажа своята благодарност на моите приятели, които търпеливо слушаха идеите ми във всеки един момент. Всеки разговор, всяка споделена мисъл бяха изключително ценни за мен. Също така, искам да изразя своята признателност към моето семейство. Моят съпруг, Георги Белчев, както и моите родители, винаги са били не само моя подкрепа, но и източник на безкрайна сила.

Библиография

[1] H. Attouch, Variational Convergence for Functions and Operators, Pitman, 1984.

[2] G. Beer, Topologies on closed and closed convex sets, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[3] J. Borwein, D. Preiss, A smooth variational principle with applications to subdifferentiability of convex functions, Trans. Amer. Math. Soc., 303, 1987, 517–527

[4] S. Cobzaş, Geometric properties of Banach spaces and the existence of nearest and farthest points, Abstract and Applied Analysis, 3, 2005, 259-285.

[5] G. Dantzig, J. Folkman, N. Shapiro, On the continuity of the minimum set of a continuous function, J. Math. Anal. Appl, 17, 1967, 519–548.

[6] F. De Blasi, On a property of the unit sphere in a Banach space, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie, 21, 1977, 259–262.

[7] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, J. Funct. Anal., 111, 1993, No 1, 197–212.

[8] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, Smoothness and renormings in Banach spaces, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., 64, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[9] R. Deville, A. Prohάzka, A parametric variational principle and residuality, Journal of Functional Analysis, 256, 2009, No 11, 3568–3587.

[10] R. Deville, J. Revalski, Porosity of Ill-posed problems, Proc. Amer. Math. Soc., 128, 2000, 1117–1124.

[11] A. Dontchev, T. Zolezzi, Well-posed optimization problems, Lecture Notes in Mathematics 1543, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[12] N. Efimov and S. Stečkin, Some properties of Čebyšev sets, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 118, 1958, No 1, 17–19 (in Russian).

[13] I. Ekeland, On the variational principle., J. Math. Anal. Appl., 47, 1974, No 2, 324–353.

[14] M. Fabian, C. Finet, On Stegall's smooth variational principle, Nonlin. Anal., 66, 2007, 565–570.

[15] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, Banach space theory, The basis for linear and nonlinear analysis, Canadian Math. Soc., Books Math., Springer Science, New York, 2010.

[16] P. Georgiev, The strong Ekeland variational principle, the strong drop theorem and applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 131, 1988, 1–21.

[17] P. Georgiev, Parametric Ekeland's variational principle, Appl. Math. Lett., 14, 2001, No 6, 691–696.

[18] P. Georgiev, Parametric Borwein-Preiss variational principle and applications, Proceedings of the American Mathematical Society, 133, 2005, No 11, 3211–3225.

[19] P. Hájek, M. Johanis, Smooth analysis in Banach spaces, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Appl., 19, De Gruyter, Berlin/Boston, 2014.

[20] F. Hernandez, S. Troyanski, On Gâteaux differentiable bump functions, Studia Math., 118, 1996, No 2, 135–143.

[21] M. Ivanov, N. Zlateva, Perturbation method for variational problems, J. Conv. Anal., 19, 2012, No 4, 1033–1042.

[22] M. Ivanov, N. Zlateva, Perturbation method for non-convex integral functional., J. Optim. Theory Appl., 157, 2013, No 3, 737–748.

[23] C. Kuratowski, Sur les espaces complets, Fund. Math., 15, 1930, 301–309.

[24] M. Lassonde, J. Revalski, Fragmentability of sequences of set-valued mappings with applications to variational principles, Proc. Amer. Math. Soc., 133, 2005, No 9, 2637–2646.

[25] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces. I. Sequence spaces, Springer, Berlin, 1977.

[26] P. D. Loewen, X. Wang, A generalized variational principle, Canad. J. Math., 53, 2001, No 6, 1174–1193.

[27] R. Maleev, G. Nedev, B. Zlatanov, Gâteaux differentiability of bump functions in Banach spaces, Journ. Math. Analysis Appl., 240, 1999, 311–323.

[28] R. Phelps, Convex functions, monotone operators, and differentiability, 2nd edition, Lecture Notes in Math., 1364, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[29] R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets, Variational analysis, Grundlehrender mathematischen Wissenschaften, vol. 317., Springer, New York, 1998.

[30] S. Stankov, Smoothness of bump functions on $l_p(\Gamma)$ spaces, MSci thesis, Sofia University, 2016.

[31] S. B. Stečhkin, Approximative properties of sets in normed linear spaces, Revue Math. Pures Appl., 8, 1963, 5–18 (in Russian).

[32] Ch. Stegall, Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces, Math. Annal., 236, 1978, 171–176.

[33] Ch. Stegall, Optimization and differentiation in Banach spaces, J. Linear Algebr. Appl., 84, 1986, 191–211.

[34] L. Thibault, Unilateral Variational Analysis in Banach Spaces. Part I: General Theory. Part II: Special Classes of Functions and Sets, World Scientific, 2023, ISBN: 978-981-125-816-9.

[35] H. Topalova, N. Zlateva, Perturbation Method in Orlicz Sequence Spaces, Set-Valued and Variational Analysis, 32, 2024, No 2, art. 12.

[36] H. Topalova, N. Zlateva, Simultaneous perturbed minimization of a convergent sequence of functions, Optimization, 2024, 1-11.

[37] H. Topalova, N. Zlateva, Generic continuity of the perturbed minima of certain parametric optimization problems, Positivity, 29, 2025, 3, 1-17.

[38] L. Veselý, A parametric smooth variational principle and support properties of convex sets and functions, J. Math. Anal. Appl, 350, 2009, No 2, 550–561.

[39] D.Zagrodny, Minimizers of the limit of Mosco converging functions. Arch. Math., 85, 2005, 440–445.

[40] D.Zagrodny, Convergences of subgradients of sequences of convex functions. Nonlinear Anal., 84, 2013, 84–90.