

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ГЕОЛОГО-ГЕОГРАФСКИ ФАКУЛТЕТ

Книга 2 – ГЕОГРАФИЯ

Том 115–116

ANNUAL OF SOFIA UNIVERSITY “ST. KLIMENT OHRIDSKI”

FACULTY OF GEOLOGY AND GEOGRAPHY

Book 2 – GEOGRAPHY

Volume 115–116

ПРИБЛИЖЕНИЕТО НА КИНЕМАТИЧНА ВЪЛНА КАТО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА ФОРМИРАНЕТО НА ОТТОКА ОТ ВОДОСБОРНИТЕ БАСЕЙНИ

ИЛИЯ ПОПСТОЯНОВ

*Катедра по климатология, хидрология и геоморфология
e-mail: iliapopstoyanov@abv.bg*

Iliia Popstoyanov. KINEMATIC WAVE APPROXIMATION AS A PHYSICS-BASED MATHEMATICAL MODEL OF WATERSHED RUNOFF FORMATION

This paper presents the kinematic wave approximation of the watershed runoff formation and its application using a simple example. A simple, nonrigorous derivation of the continuity equation for stream flow and overland flow is included. The Manning’s formula for the flow velocity and discharge is shown. Kinematic wave approximation is then obtained for stream flow and overland flow using both the continuity equation and the Manning’s formula. A simple numerical method is presented for the solution of the mathematical model, namely an implicit linear finite difference scheme. Simulations based on the open-book catchment approach and the available data for Shoal Creek, Austin, Texas, USA, are carried out and some results are shown.

Keywords: Kinematic wave approximation, Finite difference method, Watershed runoff, Overland flow, Streamflow

УВОД

Физико-математическите модели са абстракции, приближения на реалните процеси и явления в природата. Те описват онези свойства на реалността, които се възприемат като най-съществени и/или са най-добре изучени. Често тези модели са представени чрез математически уравнения или системи от уравнения, придружени с допълнителна информация, чрез която могат да

се решават. С помощта на физико-математическите модели изследването на процесите и явленията може да включи различни условия, при които те могат да протичат. По този начин могат да се получат различни решения на моделите, които отразяват различните обстановки, при които биха протекли разглежданите процеси. Тези резултати могат да се използват при подготовката и провеждането на реални експерименти, при организацията и управлението на реални системи, при оценка на промените в природната среда и т.н. Решаването на физико-математическите модели при конкретни условия и входни данни позволява да се състави прогноза за бъдещото състояние и развитие на изследваните системи и бъдещата посока на протичане на наблюдаваните процеси, макар и с известна условност, неточност, вероятност и неопределеност. Метеорологичната прогноза на времето по Земята или в различни нейни райони е един от най-ярките примери за приложението на физико-математическите модели и тяхната полза за обществото. Самият процес по решаване на физико-математическите модели на реални процеси изисква прилагането на различни числени методи и подходи, използването на компютри или суперкомпютри, включването на голямо количество входни данни от реални наблюдения и физични експерименти, провеждането на числени симулации, познания от различни области на науката и техниката, оценка и интерпретация на получените резултати и др. Решаването на тези модели е процес, познат и като числен (изчислителен) експеримент. Повече информация за различни числени методи и подходи за решаване на реални задачи може да се намери например при Holmes, 2007; LeVeque, 2007; Боянов, 2008; Димова и др., 2010; Kiusalaas, 2010; Lindfield & Penny, 2012; Larson & Bengzon, 2013; Langtangen & Pedersen, 2015; Linge & Langtangen, 2016; Langtangen & Linge, 2017; Langtangen & Mardal, 2019 и др.

Процесите и явленията, изследвани от хидрологията – например формирането на речния отток и неговото разпределение в пространството и времето, формирането, разпределението и движението на повърхностните и подземните води и др., са част от географската обвивка на Земята. Те са свързани с цялата система от геофизични процеси, които протичат на нашата планета. Поради това физичните принципи и закони също могат да се използват за описание, изследване и прогнозиране на разнообразните хидроложки процеси. Физичните закони често са изведени на езика на математиката във вид на уравнения с допълнителна информация към тях. За тяхното решаване обикновено е необходимо провеждането на числени експерименти. Следователно прилагането на физичните закони в хидрологията също води до възможността и необходимостта от провеждането на числени симулации и изготвянето на прогнози. По този начин могат да се получат резултати за състоянието и развитието на различните компоненти на хидросферата в даден район в зависимост от условията на средата. Повече информация за приложението на физико-математически модели и числени методи в хидрологията и свързаните

с нея области може да се намери например при Pinder & Gray, 1977; Wang & Anderson, 1982; Кучмент и др., 1983; Huyakorn & Pinder, 1983; Stephenson & Meadows, 1986; Chow et al., 1988; Istok, 1989; Sun, 1996; Hornberger & Wiberg, 2005; Szymkiewicz, 2010; Desai et al., 2011; Beven, 2012; Vieux, 2016; Simpson, 2017; Chaudhry, 2022; Kuiry & Sen, 2022 и др.

Настоящата статия си поставя за цел да представи, чрез примерно приложение, един от широко използваните физико-математически модели в хидрологията и водните ресурси – приближението на кинематична вълна. На основата на това приближение са разработени различни компютърни модели, като HEC-HMS, SHE, TOPMODEL, KINEROS, MIKE-SHE, TOPKAPI и др. (Singh & Woolhiser, 2002). За пример е използвана синоптичната обстановка на 24 и 25 май 1981 година във водосбора на река Shoal Creek при гр. Остин в щата Тексас, САЩ. Необходимите входни данни са взети от Massey et al., 1982; Chow et al., 1988; Half Associates, Inc., 2019.

В таблица 1 са представени хидроложки физични величини, включени в изложението, техните означения и размерности, както и мерните единици, в които обикновено се измерват. Основните размерности са маса (M), дължина (L), време (T), от които се получават производните размерности на величините.

Таблица 1
Table 1

Използвани физични величини и мерни единици
Used physics quantities and measure units

Физична величина	Означение	Размерност	SI единици	Английски ед.
Дължина на потока	L	L	m	ft
Ширина на потока	W	L	m	ft
Площ на напречното сечение	A	L ²	m ²	ft ²
Намокрен периметър	P	L	m	ft
Хидравличен радиус	R	L	m	ft
Скорост на потока	V	LT ⁻¹	$\frac{m}{s}$	$\frac{ft}{s}$
Наклон	S	-	-	-
Коефициент на грапавост по Manning	n_M	TL ^{-1/3}	$\frac{s}{m^{1/3}}$	$\frac{s}{ft^{1/3}}$
Водно количество (секунден отток, дебит)	Q	L ³ T ⁻¹	$\frac{m^3}{s}$	$\frac{ft^3}{s}, cfs$
Латерален поток (стрианчен поток)	q_L	L ² T ⁻¹	$\frac{m^2}{s}$	$\frac{ft^2}{s}$
Интензивност на валежа	i_p	LT ⁻¹	$\frac{m}{s}$	$\frac{in}{s}$
Плътност на водата	ρ_w	ML ⁻³	$\frac{kg}{m^3}$	$\frac{lb}{ft^3}$

МЕТОДОЛОГИЯ

Уравнение на непрекъснатостта

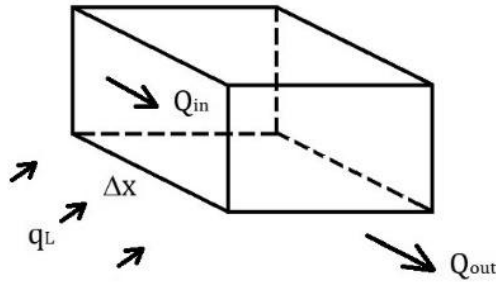
Приближението на кинематична вълна (Kinematic wave approximation) е физико-математически модел, който се получава след опростяването на уравненията на Saint-Venant (на плитка вода) и уравненията на Navier-Stokes (Stephenson & Meadows, 1986; Chow et al., 1988). Той може да бъде изведен и чрез непосредственото прилагане на закона за запазване на масата в контролен обем запълнен с флуид за даден период от време (Dingman, 2009; Beven, 2012). Допуска се, че флуидът не се образува или преобразува чрез химични реакции, т.е. изпълнено е условието за консервативност на флуида. Тогава от физичния закон за запазване на масата следва, че разликата между масата на флуида, който е влязъл в контролния обем, и масата на флуида, който е излязъл от контролния обем, е равна на промяната на масата на флуида вътре в този обем за даден период от време. Следователно:

$$(1) \quad M_{in} - M_{out} = \Delta M,$$

където:

M_{in} – масата на флуида, влязъл в контролния обем за даден период от време;
 M_{out} – масата на флуида, излязъл от контролния обем за същия период от време;
 ΔM – промяната на масата на флуида в дадения обем за дадения период от време.

Прилагането на описания физичен принцип по отношение на формирането и движението на водния поток в произволно речно корито, склон от земната повърхност или водосборен басейн може да се представи по следния начин, където извеждането е направено нестрого. По протежение на речното корито или на склона се въвежда една независима пространствена променлива x , която има смисъл на измината дължина надолу по течението, а за времето се въвежда втора независима променлива t . По този начин процесът се опростява като едномерен по пространството. Разглежда се контролен обем (част от речното корито или от склона) с дължина Δx и площ на напречното сечение A , в който протича воден поток (фиг. 1).



Фиг. 1. Контролен обем в речното корито или по склона от земната повърхност.
 Fig. 1. Control volume in the river bed or on the earth surface side.

Плътноста на водата ρ_w в дадения случай може да се приеме за константа. Процесът се разглежда в рамките на кратък период от време Δt . През горното напречно сечение на контролния обем преминава водно количество (дебит) Q_{in} , през долното напречно сечение на обема преминава водно количество Q_{out} , а от страни има латерален (страничен) поток q_L , който има смисъл на водно количество протекло за единица дължина, $\left[\frac{m^3}{m}\right] = \left[\frac{m^2}{s}\right]$. Когато се разглежда контролен обем в речното корито, латералният приток описва нетния приход на вода в реката от подземните водоносни хоризонти и от склоновия отток (разликата между втичащата се вода вътре в коритото и инфилтриращата вода от реката към земната вътрешност). Когато се разглежда контролен обем по склона на водосбора, латералният приток може да се разглежда като нетния приход на вода от валежите и снеготопенето (разликата между валежите и водата от снеготопенето, от една страна, и инфилтрацията, изпарението и други загуби на вода, от друга). В зависимост от това какви процеси протичат и съотношението между тях, латералният приток може да е положителен, отрицателен или нулев. Тогава по аналогия с израза (1) може да се построи подобен израз и за случая с водния поток в речното корито или по склона. Тук масата, която влиза в контролния обем, се образува от водната маса, преминала през горното напречно сечение за време Δt , която е $\Delta t \rho_w Q_{in}$ и масата от латералния приток за същото време Δt , която е $\Delta t \Delta x \rho_w q_L$ (тук се приема, че $q_L > 0$). Масата, която излиза от контролния обем, се образува от водната маса, преминала през долното напречно сечение за време Δt и тя е $\Delta t \rho_w Q_{out}$. Промяната на масата за същия период Δt е $\rho_w \Delta A \Delta x$. Следователно:

$$(2) \quad M_{in} = \Delta t \rho_w Q_{in} + \Delta t \Delta x \rho_w q_L$$

$$(3) \quad M_{out} = \Delta t \rho_w Q_{out}$$

$$(4) \quad \Delta M = \rho_w \Delta A \Delta x$$

Тук ΔA е промяната на площта на напречното сечение на контролния обем, която е следствие от промяната на съдържанието на водна маса вътре в този обем за време Δt . Промяната на площта на напречното сечение е видимото следствие от промяната на водните запаси в разглеждания обем за разглежданото време.

От равенствата в (2), (3) и (4) може да се състави израз на закона за запазване на масата за разглеждания контролен обем от речното корито или по склона от земната повърхност:

$$(5) \quad \Delta t \rho_w Q_{in} + \Delta t \Delta x \rho_w q_L - \Delta t \rho_w Q_{out} = \rho_w \Delta A \Delta x.$$

Полученото уравнение (5) може да се преобразува, като двете му страни се разделят на $\Delta t \Delta x \rho_w$ и се групират членовете, съдържащи ΔA , Q_{in} и Q_{out} от едната страна, а q_L остава от другата страна на знака за равенство. Получават се следните изрази:

$$(6) \quad \frac{\Delta A}{\Delta t} + \frac{Q_{out} - Q_{in}}{\Delta x} = q_L, \text{ или}$$

$$(7) \quad \frac{\Delta A}{\Delta t} + \frac{\Delta Q}{\Delta x} = q_L.$$

Уравненията (6) или (7) са законът за запазване на масата в разглеждания контролен обем с определена крайна дължина Δx и за крайно време Δt . Когато дължината на обема стане безкрайно малка, т.е. когато процесът се разглежда локално в много малка област около някоя точка по дължината на реката или склона, и заедно с това краткият период от време стане също безкрайно малък, се получава частното диференциално уравнение на непрекъснатостта:

$$(8) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L.$$

Полученото частно диференциално уравнение свързва промените на неизвестните величини Q и A спрямо измененията на независимите променливи x и t , както и интензивността на източниците q_L . Уравнението на непрекъснатостта (8) е в най-прост вид, когато дясната му страна е нула, т.е. няма латерален поток. Тогава изменението на площта на напречното сечение по времето е пряко свързано с изменението на водното количество (на дебита) на потока по посока на дължината (надолу по течението). Ако в дадена точка площта на напречното сечение с времето се увеличава и $\frac{\partial A}{\partial t} > 0$, то това означава, че през горната страна на сечението навлиза поток с по-голямо водно количество от това на потока, който излиза през долната страна на сечението в дадената точка

от коритото или склона и $\frac{\partial Q}{\partial x} < 0$ (в уравнението (6) това означава, че $Q_{in} > Q_{out}$, като се отчита, че в най-простия случай $q_L = 0$). В този случай запасът от водна маса в обема се увеличава. Аналогично, при $q_L = 0$ и $\frac{\partial A}{\partial t} < 0$, то $\frac{\partial Q}{\partial x} > 0$ ($Q_{in} < Q_{out}$), и запасът от водна маса в обема намалява.

Уравнението на непрекъснатостта (8), което е израз на закона за запазване на масата на даден контролен обем с флуид, заедно с още едно уравнение, което изразява закона за запазване на импулса (което тук няма да се извежда), образуват системата от уравнения на Saint-Venant или модела на плитка вода (Shallow water model) (Chow et al., 1988; Tan, 1992; Vreugdenhil, 1994; Chaudhry, 2022). Тази система е по-сложна и е допълнена с включването на различните физични сили, които влияят върху движението на потока. В приближението на кинематична вълна участва само уравнението на непрекъснатостта (8), като се приема условно, че силата на тежестта е равна на силата на триене.

Решението на едно частно диференциално уравнение, каквото е (8), представяват стойностите на търсената величина, в случая водното количество Q (или площта на напречното сечение A), спрямо стойностите на независимите променливи, тук дължината на потока x и времето t . Уравнението на непрекъснатостта (8) може да се реши, ако е налична допълнителна информация за: началните условия (началното състояние на потока), граничните условия (какво се случва по границите на речното корито или склона), геометрията на потока (формата на напречното сечение, дължината и ширината на коритото или склона), състоянието на земната повърхност (наклон и грапавина), латералния поток, периода от време, за който се изследва процесът, а също и за това каква е връзката между водното количество (дебита) и площта на напречното сечение на потока. Решението на уравнението показва какво е поведението на потока с течение на времето и по дължината на дадено речно корито или склон от земната повърхност. Решението на уравнението на непрекъснатостта (8) са стойностите на водното количество (или на площта на напречното сечение) за различни точки по дължината на коритото или склона и за различни моменти от времето.

Формула на Manning

В уравнението на непрекъснатостта (8) участват площта на напречното сечение A , водното количество (дебитът) Q и латералният поток q_L . За латералния поток е необходимо да има осигурени входни данни. Площта и водното количество обаче са взаимосвързани. Промяната на едната величина е свързана с промяната на другата. Поради това е необходимо да се знае каква е връзката между двете величини и тя да се използва при решаването на уравнението.

Физически водното количество, което преминава през дадено напречно на движението сечение в потока, е произведението от скоростта на потока през това сечение и площта на сечението, $Q = VA$, където Q е водното количество, V е скоростта на потока, A е площта на сечението. Скоростта на потока е още една неизвестна величина, която се променя във времето и по пространството. Това налага да се използва формула за скоростта, която да я замести и в която да се включат известни свойства на потока. Един от експериментално изведените изрази за скоростта е формулата на Manning, която определя скоростта като зависи от няколко физични величини (Chow et al., 1988):

$$(9) \quad V = \frac{c_U}{n_M} S^{1/2} R^{2/3}, \text{ където } R = \frac{A}{P}$$

$$(10) \quad V = \frac{c_U}{n_M} S^{1/2} \frac{A^{2/3}}{P^{2/3}},$$

където използваните символи са посочени в табл. 1, с изключение на c_U , който е коефициент на мерните единици, като $c = 1$ при използване на SI единици (метри, m) и $c = 1,49$ при използване на английски единици (футове, ft).

С помощта на формулата на Manning за скоростта на потока (9) или (10) се получава зависимост между водното количество и площта на напречното сечение:

$$(11) \quad Q = \frac{c_U}{n_M} S^{1/2} R^{2/3} A,$$

$$(12) \quad Q = \frac{c_U}{n_M} S^{1/2} \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}},$$

където използваните символи са вече посочени. Тази зависимост се използва за решаването на уравнението на непрекъснатостта (8) в приближението на кинематична вълна.

Ако се търси решение по отношение на водното количество на потока, то от зависимостите (11) или (12) може да се представят изрази за площта на напречното сечение като зависи от водното количество, съответно:

$$(13) \quad A = \left(\frac{n_M}{c_U S^{1/2} R^{2/3}} \right) Q,$$

$$(14) \quad A = \left(\frac{n_M P^{2/3}}{c_U S^{1/2}} \right)^{3/5} Q^{3/5}.$$

За улеснение на записа се въвеждат коефициентите:

$$(15) \quad \alpha = \left(\frac{n_M P^{2/3}}{c_U S^{1/2}} \right)^{3/5} \quad \text{и}$$

$$(16) \quad \beta = \frac{3}{5}.$$

Приближение на кинематична вълна

С помощта на коефициентите (15) и (16), формула (14) и правилото за диференциране на сложна функция (вж. напр. Митев, 1995; Димитрова и Паскалев, 2012) уравнението на непрекъснатостта (8) може да се представи в следния вид (Chow et al., 1998), което е и приближението на кинематична вълна по отношение на водното количество в произволно речно корито:

$$(17) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha \beta Q^{\beta-1} \frac{\partial Q}{\partial t} = q_L$$

В уравнението (17) участва само водното количество Q като неизвестна физична величина и в най-простия случай се приема, че коефициентът α е константа.

Подобно уравнение може да се получи и за водното количество по склона от земната повърхност или за произволен водосбор. Разликата се появява в дясната страна и в това, че тук Q означава водното количество по склона:

$$(18) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha \beta Q^{\beta-1} \frac{\partial Q}{\partial t} = W_o i_P.$$

В (18) производението $W_o i_P$ е източниковият член, в който се включва интензивността (нетната интензивност) на валежа и/или снеготопенето i_P , умножена по ширината на склона или водосбора W_o . Размерността на $W_o i_P$ е като на латералния поток, $\left[\frac{m^2}{s} \right]$. Решенията на уравненията (17) и (18) са стойностите на водното количество по пространството и във времето, т.е. $Q = Q(x, t)$, съответно за реката или склона.

Получените зависимости в приближението на кинематична вълна не са единствените възможни. Могат да се получат и уравнения за площта на напречното сечение на потока, може да се намери и височината на потока и т.н. в зависимост от конкретните условия и задачата, която се решава (Кучмент и др., 1983; Stephenson & Meadows, 1986; Chow et al., 1988; Szymkiewicz, 2010; Chaudhry, 2022; Kuiry & Sen, 2022 и др.).

Числено решение – неявна линейна диференчна схема

Уравненията (17) и (18), приложени за реални задачи, обикновено се решават с помощта на числени методи, като начините са различни. Тук се представя неявна линейна диференчна схема (Кучмент и др., 1983; Chow et al., 1988; Kuiry & Sen, 2022) за уравненията (17) и (18) с постоянен коефициент α за всяко уравнение.

Диференчните схеми с разлика назад за производните по пространството и по времето на дадена величина $u = u(x, t)$ в изчислителния възел с координати x_{i+1} и t_{j+1} са (Holmes, 2007; LeVeque, 2007; Боянов, 2008; Димова и др., 2010; Langtangen & Linge, 2017):

$$(19) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1}^{j+1} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{\Delta x},$$

$$(20) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i+1}^{j+1} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{\Delta t}.$$

Двете схеми са с грешки $O(\Delta x)$ и $O(\Delta t)$, съответно. Диференчната схема с разлика назад, когато се използва за производната по времето, се нарича още и неявна диференчна схема (implicit). Диференчната схема с разлика назад по пространството се нарича още и диференчна схема с разлика срещу потока (upwind, upstream).

За да се използва методът на крайните разлики (т.е. диференчните схеми), е необходимо да се въведе изчислителна мрежа, в която да се търси решението на задачата. По дължината на речното корито се въвеждат N_{x_s} на брой точки, а по дължината на склона – N_{x_o} на брой точки. За целия период по времето се въвеждат N_t на брой точки (слоеве по времето). Така се образува изчислителна мрежа за речното корито с възли (x_{s_i}, t_j) , където i се изменя от 1 до N_{x_s} , и такава за склона по земната повърхност с възли (x_{o_i}, t_j) , където i се изменя от 1 до N_{x_o} . Между две съседни точки от коритото стъпката по пространството е Δx_s , а по склона – Δx_o . Стъпката по времето е Δt . Изборът на стъпките може да се съобрази и с условието за устойчивост на числената схема – условието на Courant-Friedrichs-Levy (Chow et al., 1988; LeVeque, 1992), което е особено важно за явните (explicit) схеми.

За получаване на неявната линейна схема в израза $\alpha\beta Q^{\beta-1}$ водното количество Q не се пресмята във възела (x_{i+1}, t_{j+1}) , а се осреднява по следния начин:

$$(21) \quad Q \approx \frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2}.$$

За подобряване на точността на изчисленията членовете в десните страни на (17) и (18) с латералния поток или валежа също могат да се осреднят.

Като се използват изразите (19), (20) и (21), както и осредняването в десните страни, за уравненията (17) и (18) се получават следните приближения във възела $(x_{s_{i+1}}, t_{j+1})$ или $(x_{o_{i+1}}, t_{j+1})$, съответно в речното корито или по склона:

$$(22) \quad \frac{Q_{s_{i+1}}^{j+1} - Q_{s_i}^{j+1}}{\Delta x_s} + \alpha_s \beta \left(\frac{Q_{s_{i+1}}^j + Q_{s_i}^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \left(\frac{Q_{s_{i+1}}^{j+1} - Q_{s_{i+1}}^j}{\Delta t} \right) = \frac{q_{L_{i+1}}^{j+1} + q_{L_{i+1}}^j}{2},$$

където Q_s е водното количество в речното корито, а i се изменя от 1 до $N_{x_s} - 1$, и

$$(23) \quad \frac{Q_{o_{i+1}}^{j+1} - Q_{o_i}^{j+1}}{\Delta x_o} + \alpha_o \beta \left(\frac{Q_{o_{i+1}}^j + Q_{o_i}^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \left(\frac{Q_{o_{i+1}}^{j+1} - Q_{o_{i+1}}^j}{\Delta t} \right) = \frac{W_o i_{P_{i+1}}^{j+1} + W_o i_{P_{i+1}}^j}{2},$$

където Q_o е водното количество по склона от земната повърхност, а i се изменя от 1 до $N_{x_o} - 1$. Коефициентът α е различен за речното корито и за склона, като вместо намокрения периметър P се използва като приближение ширината на речното корито W_s или на склона W_o . Броячът по времето j се изменя от 1 до $N_t = 1$.

След преобразуване се получават следните изрази:

$$(24) \quad Q_{s_{i+1}}^{j+1} = \frac{\left[\frac{\Delta t}{\Delta x_s} Q_{s_i}^{j+1} + \alpha_s \beta Q_{s_{i+1}}^j \left(\frac{Q_{s_{i+1}}^j + Q_{s_i}^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} + \Delta t \left(\frac{q_{L_{i+1}}^{j+1} + q_{L_{i+1}}^j}{2} \right) \right]}{\left[\frac{\Delta t}{\Delta x_s} + \alpha_s \beta \left(\frac{Q_{s_{i+1}}^j + Q_{s_i}^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \right]},$$

$$(25) \quad Q_{o_{i+1}}^{j+1} = \frac{\left[\frac{\Delta t}{\Delta x_o} Q_{o_i}^{j+1} + \alpha_o \beta Q_{o_{i+1}}^j \left(\frac{Q_{o_{i+1}}^j + Q_{o_i}^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} + \Delta t \left(\frac{W_o i_{P_{i+1}}^{j+1} + W_o i_{P_{i+1}}^j}{2} \right) \right]}{\left[\frac{\Delta t}{\Delta x_o} + \alpha_o \beta \left(\frac{Q_{o_{i+1}}^j + Q_{o_i}^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \right]}.$$

Поставят се и необходимите начални условия – стойностите на водните количества в началния момент t_1 във всичките точки по дължината на реката

$(x_{s_i})_{i=1}^{N_{x_s}}$ или на склона $(x_{o_i})_{i=1}^{N_{x_o}}$. Поставят се също и необходимите гранични условия – стойностите в първата, най-горната, точка по дължината на реката x_{s_1} или по склона x_{o_1} за всички слоеве по времето $(t_j)_{j=1}^{N_t}$. За източниците на вода се използват входни данни – например за интензивността на валежите, на снеготопенето и т.н. С помощта на изразите (24), (25) и необходимите допълнителни условия се намират стойностите на водните количества във възлите от изчислителните мрежи в речното корито или по склона.

Водосборът като отворена книга

В работите на Wooding, 1965a, 1965b, 1966 водосборният басейн е представен като отворена книга – в центъра е речното корито, което събира водите си от склоновете на водосбора. Речното корито е представено като опростен изправен геометричен обект с правилна геометрична форма на напречното сечение. Водосборният басейн е представен като две наклонени равнини от двете страни на речното корито. И речното корито, и склоновете от двете му страни имат характерни дължини и ширини, наклони и коефициенти на грапавост. Едномерното приближение на кинематична вълна е приложено както за речния отток, така и за склоновия отток. Източниците на вода са валежите, които падат върху двата склона на водосбора, и се оттичат към речното корито. В речното корито източникът на вода, т.е. латералният поток, е склоновият отток от двете части на водосбора, разделен на ширината на склона:

$$(26) \quad q_L = \frac{Q_o}{W_o}.$$

В устието на реката, т.е. на изхода на водосбора, се изтича водосборният отток, образуван от склоновия и речния. Идеята е използвана и развивана в различни други изследвания (вж. напр. Кучмент и др., 1983; Stephenson & Meadows, 1986). Представата за водосбора като система от линии и повърхнини се развива и използва в различни компютърни модели (напр. KINEROS).

Примерна имплементация на идеята за водосбора като отворена книга е представена в Kuiry & Sen, 2022, където е използвана неявната линейна диферентна схема. Там за речния отток е използвано приближението на кинематична вълна с неизвестна величина, площта на напречното сечение на оттока, а за склоновия отток – приближението на кинематична вълна с неизвестна величина водното количество на оттока. Чрез формулата на Manning площта на напречното сечение на речния отток се превръща във водно количество на изхода на водосбора.

РЕЗУЛТАТИ

В настоящата статия идеята за водосбора като отворена книга е приложена за река Shoal Creek при гр. Остин, щата Тексас, САЩ. Използвани са изразите (24) – за водното количество в реката и (25) – за водното количество по всеки от двата склона от двете страни на речното корито, които съставят водосбора. Връзката (26) преобразува склоновия отток от всеки от склоновете в латерален приход за речния отток в реката. Входните данни осигуряват необходимите начални и гранични условия, както и стойности за интензивността на валежа по време на разглежданата синоптичната обстановка на 24 и 25 май 1981 г. В табл. 2 са представени ориентировъчни данни за водосбора и речното корито на река Shoal Creek до измервателната станция в Northwest Park, Austin, Texas от Massey et al., 1982; Chow et al., 1988; Half Associates, Inc., 2019.

Таблица 2
Table 2

Данни за водосбора и речното корито на Shoal Creek до станция Northwest Park
Data for the watershed and the river bed of Shoal Creek at Northwest Park gaging station

Величина	Стойност
Площ на водосбора	18,2 km ²
Дължина на водосбора	5,2 km
Ширина на водосбора	3,5 km
Наклон на водосбора	0,02
Коефициент на грапавост по Manning за водосбора	$0.1 \frac{s}{m^{1/3}}$
Дължина на реката	5,2 km
Ширина на реката	10 m
Наклон на речното корито	0,005
Коефициент на грапавост по Manning за речното корито	$0.05 \frac{s}{m^{1/3}}$
Водно количество в реката в началния момент на симулацията*	$5,748 \frac{m^3}{s}$
Максимално измерено водно количество по време на синоптичната обстановка**	$413,426 \frac{m^3}{s}$ в 23:15 на 24 май 1981 г

*По данни от Chow et al., 1988.

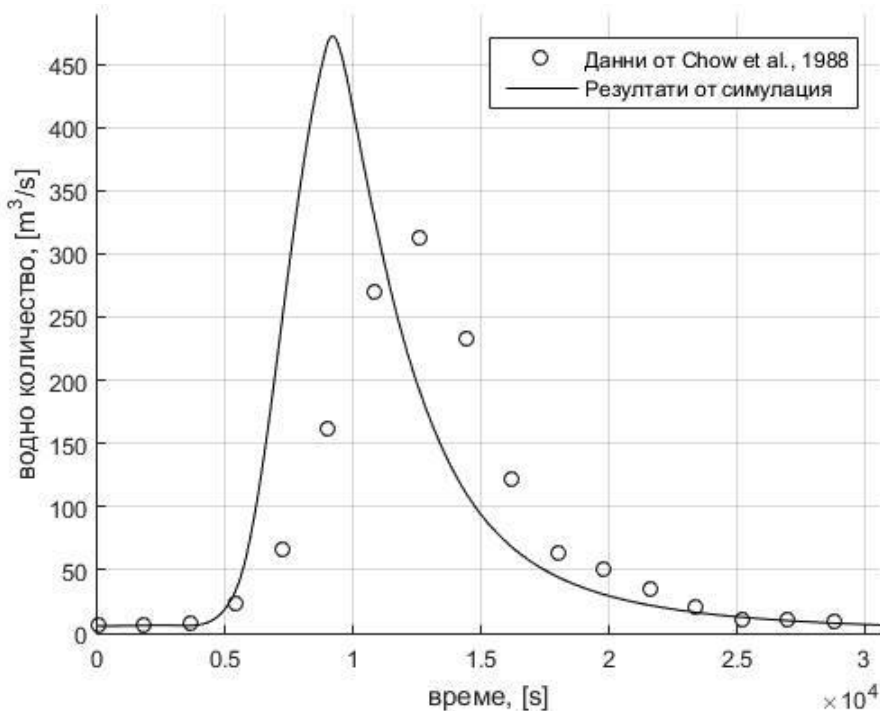
** По данни от Massey et al., 1982.

В таблица 3 са представени данни от Chow et al., 1988, за измерените валежи и отчетените водни количества по време на синоптичната обстановка на 24 и 25 май 1981 г. Данните за валежите представят сумарните количества за предходния половин час. Данните за интензивността на валежите се използват в симулацията. Данните за водните количества е възможно да са непълни, защото се различават от графичните данни, представени в Massey et al., 1982.

Данни за наблюдаваните валежи и водни количества
Data for the observed rainfall and streamflow

Ден	Час	Валеж, [mm]	Интензивност, [$\frac{mm}{min}$]	Водно количество, [$\frac{m^3}{s}$]
24-05-1981	20:30	0	0	5,748
	21:00	3,81	0,127	6,966
	21:30	6,60	0,220	8,014
	22:00	33,78	1,126	23,446
	22:30	55,88	1,863	65,780
	23:00	52,83	1,761	161,321
	23:30	5,08	0,169	269,888
	25-05-1981	00:00	2,29	0,076
00:30		0	0	233,161
01:00		0	0	122,357
01:30		0	0	63,600
02:00		0	0	51,027
02:30		0	0	34,830
03:00		0	0	20,190
03:30		0	0	11,157
04:00		0	0	10,024
04:30		0	0	8,58

Началото на симулацията съответства на 20:30 ч. на 24 май 1981 г, краят съответства на 05:00 ч. на 25 май 1981 г. Общото време на разглеждания процес е 30600 s (8,5 часа). Стъпката по времето е $\Delta t = 60$ s, стъпката по пространството за склоновете на водосбора е $\Delta x_0 = 187,5$ m, стъпката по пространството за речното корито е $\Delta x_s = 100$ m. Изчисленият максимум е $472,211 \frac{m^3}{s}$ в 23:03 на 24 май. На фиг. 2. е показан резултат от проведената числена симулация. За провеждането на числения експеримент са използвани данните от таблица 2 и 3. Изчислените водни количества на изхода на водосбора на Shoal Creek при Northwest Park са сравнени с данните от Chow et al., 1988 (фиг. 2).



Фиг. 2. Резултати от симулация за Shoal Creek при Northwest Park, 24 и 25 май 1981 г.
 Fig. 2. Simulation results for Shoal Creek at Northwest Park, 24-25 May, 1981.

Представените резултати, сравнени с данните от Chow et al., 1988, са сравнително добри, въпреки че има значима разлика между отчетеното и изчисленото максимално водно количество. Същевременно има и изместване по времето на момента на настъпване на максимума. От друга страна, според данните в Massey et al., 1982, изчисленото и измереното максимално водно количество са близки по стойност и момент на настъпване.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приближението на кинематична вълна може да се използва за симулиране на оттока от водосборните басейни. Подходите за построяване на числени модели са различни. Една от най-ранните идеи е разглеждането на водосбора като отворена книга и този модел е удобен със своята простота. Същевременно колкото по-голям и по-сложен е водосборният басейн, толкова по-трудно е прилагането на опростени модели, без това да доведе до значими грешки. При използването на физико-математически модели на формирането и движението на оттока от водосборните басейни освен повърхностното движение на водата по склона и в реките (склонов отток и речен отток) могат да се

разглеждат и други процеси, които са важни за образуването на оттока, като например инфилтрацията и движението на вода в подземните водоносни хоризонти, изпарението, снегонатрупването и снеготопенето и др. По този начин моделирането ще бъде по-пълно и по-добре ще отразява реалността. Заедно с това обаче възникват и редица трудности по набирането на достатъчно представителни данни (Beven, 2012) за различните процеси, които протичат във водосборните басейни, но които са необходими за прилагането на физико-математическите модели.

ЛИТЕРАТУРА

- Боянов, Б. 2008. Лекции по числени методи. София, Дарба, 219 с.
- Димитрова, К., П. Паскалев. 2012. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика. II част. София, Архимед, 368 с.
- Димова, С., Т. Черногорова, А. Йотова. 2010. Числени методи за диференциални уравнения. София, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, 155 с.
- Кучмент, Л. С., В. Н. Демидов, Ю. Г. Мотовилов. 1983. Формирование речного стока. Физико-математические модели. Москва, издательство „Наука“, 216 с.
- Митев, Й. 1995. Математика за географи. София, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, 178 с.
- Beven, K. 2012. Rainfall-Runoff Modelling. The Primer (Second Edition). Chichester, Wiley-Blackwell, p. 457.
- Chaudhry, M. H. 2022. Open-Channel Flow (Third Edition). Cham, Springer, p. 563.
- Chow, V. T., D. R. Maidment, L. W. Mays. 1988. Applied Hydrology. New York, McGraw-Hill, p. 588.
- Desai, Y. M., T. I. Eldho, A. H. Shah. 2011. Finite Element Method with Applications in Engineering. Delhi, Pearson, p. 470.
- Dingman, S. L. 2009. Fluvial Hydraulics. Oxford, Oxford University Press, p. 559.
- Half Associates, Inc. 2019. Lower Shoal Creek Flood Hazard Mitigation Project. Flood Risk Reduction Report. Austin, City of Austin, Texas, p. 146.
- Holmes, M. H. 2007. Introduction to Numerical Methods in Differential Equations. New York, Springer, p. 238.
- Hornberger, G., P. Wiberg. 2005. Numerical Methods in the Hydrological Sciences. Washington, American Geophysical Union.
- Huyakorn, P. S., G. F. Pinder. 1983. Computational Methods in Subsurface Flow. New York, Academic Press, p. 473.
- Istok, J. 1989. Groundwater Modeling by the Finite Element Method. Washington, American Geophysical Union, p. 495.
- Kiusalaas, J. 2010. Numerical Methods in Engineering with Matlab (Second Edition). Cambridge, Cambridge University Press, p. 431.
- Kuiry, S. N., D. Sen. 2022. Modeling Hydrology, Hydraulics, and Contaminant Transport Systems in Python. Boca Raton, CRC Press, p. 178.
- Langtangen, H. P., S. Linge. 2017. Finite Difference Computing with PDEs. A Modern Software Approach. Springer Open, p. 499.

- Langtangen, H. P., K. A. Mardal. 2019. Introduction to Numerical Methods for Variational Problems. Cham, Springer, p. 386.
- Langtangen, H. P., G. K. Pedersen. 2016. Scaling of Differential Equations. Simula and Springer Open, p. 138.
- Larson, M. G., F. Bengzon. 2013. The Finite Element Method. Theory, Implementation, and Applications. Heidelberg, Springer, p. 385.
- LeVeque, R. J. 1992. Numerical Methods for Conservation Laws (Second Edition). Basel, Birkhäuser Verlag, p. 214,
- LeVeque, R. J. 2007. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Steady-State and Time-Dependent Problems. Philadelphia, SIAM, p. 341.
- Lindfield, G. R., J. E. T. Penny. 2012. Numerical Methods Using Matlab (Third Edition). Amstredam, Elsevier, p. 534.
- Linge, S., H. P. Langtangen. 2016. Programming for Computations – MATLAB/Octave. Springer Open, p. 208.
- Massey, B. C., W. E. Reeves, W. A. Lear. 1982. Flood of May 24–25, 1981, in the Austin, Texas, Metropolitan Area. – In: Hydrologic Investigations Atlas HA-656, 1–2.
- Pinder, G. F., W. G. Gray. 1977. Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology. New York, Academic Press, p. 295.
- Simpson, G. 2017. Practical Finite Element Modeling in Earth Science Using Matlab. Wiley-Blackwell, p. 248.
- Singh, V. P., D. A. Woolhiser. 2002. Mathematical Modeling of Watershed Hydrology. – *Journal of Hydrologic Engineering*, 7, 4, 270–292.
- Stephenson, D., M. E. Meadows. 1986. Kinematic Hydrology and Modelling. Amsterdam, Elsevier, p. 250.
- Sun, N.-Z. 1996. Mathematical Modelling of Groundwater Pollution. New York, Springer-Verlag, p. 377.
- Szymkiewicz, R. 2010. Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics. Dordrecht, Springer, p. 419.
- Tan, W. Y. 1992. Shallow Water Hydrodynamics. Mathematical Theory and Numerical Solution for a Two-dimensional System of Shallow Water Equations. Beijing and Amsterdam, Water & Power Press and Elsevier, p. 434.
- Vieux, B. E. 2016. Distributed Hydrologic Modeling Using GIS (Third Edition). Dordrecht, Springer, p. 262.
- Vreugdenhil, C. B. 1994. Numerical Methods for Shallow-Water Flow. Dordrecht, Springer, p. 261.
- Wang, H. F., M. P. Anderson. 1982. Introduction to Groundwater Modeling. Finite Difference and Finite Element Methods. San Diego, Academic Press, p. 237.
- Wooding, R. A. 1965a. A Hydraulic Model for the Catchment-Stream problem: I. Kinematic-Wave Theory. – *Journal of Hydrology*, 3, 3–4, 254–267.
- Wooding, R. A. 1965b. A Hydraulic Model for the Catchment-Stream Problem: II. Numerical Solutions. – *Journal of Hydrology*, 3, 3–4, 268–282.
- Wooding, R. A. 1966. A Hydraulic Model for the Catchment-Stream Problem: III. Comparison with Runoff Observations. – *Journal of Hydrology*, 4, 21–37.

SUMMARY

KINEMATIC WAVE APPROXIMATION AS A PHYSICS-BASED MATHEMATICAL MODEL OF WATERSHED RUNOFF FORMATION

Mathematical models are abstractions of real-world processes and phenomena and it follows that they are incomplete. There are some errors and uncertainties in the process of modeling. At the same time, mathematical models are very useful and can help people make predictions and forecasts and assess the changes in natural conditions. This paper presents kinematic wave approximation as a physics-based mathematical model of watershed runoff formation. First, the continuity equation for stream flow and overland flow is derived and it is done in a simple, nonrigorous way. Second, Manning's formula for flow velocity and discharge is included. Using this formula, a relation between flow discharge and cross-sectional area is shown. After that, the kinematic wave approximation is obtained for stream flow and overland flow discharge, based on the continuity equation and Manning's formula. To present a simple example of the application of the model, an implicit linear finite difference numerical scheme is presented, and the open-book approach to catchment is used. Using available data for Shoal Creek in Austin, Texas, USA, a simulation is run and relatively good results are shown. By including other processes in the watershed and using additional data for the components of the geosystem better results could be obtained.