

## РЕЦЕНЗИЯ

от доц. д-р Александър Владимиров Петков  
Факултет по Математика и Информатика  
Софийски университет "Св. Климент Охридски"  
Професионално направление: 4.5. Математика  
Научна специалност: "Геометрия и Топология" (Диференциална Геометрия),  
в качеството му на член на научното жури по процедурата, съгласно  
Заповед №РД-38-281/09.06.2025 г. на Ректора на СУ "Св. Климент Охридски",  
по защитата на дисертационен труд  
за присъждане на образователна и научна степен "доктор" на тема  
**"Геометрия на паракватернионно контактни многообразия"**  
изготвена от Марина Павлова Чомакова  
в професионално направление: 4.5. Математика  
докторска програма „Геометрия“

### 1. Кратки биографични данни за дисертантката

Ас. Марина Чомакова е родена в София през 1992 г. Завършва средното си образование в СМГ "Паисий Хилендарски" през 2011 г. От 2011 г. до 2015 г. е студентка във ФМИ на СУ, като се дипломира през 2015 г. като бакалавър по Приложна математика с отлична диплома, с допълнителна квалификация "Учител по математика". Между 2015 г. и 2017 г. е магистрантка в магистърската програма "Алгебра, Геометрия и Топология" на ФМИ при СУ, като се дипломира през 2017 г. като магистър по Математика, също с отлична диплома. През 2018 г. тя е зачислена в редовна докторантура в докторската програма "Геометрия" към катедра "Геометрия" на ФМИ. От 2014 г. до момента Марина Чомакова е асистент към катедра Геометрия на ФМИ при СУ.

Според приложената справка от платформата "Авторите", ас. Чомакова е участвала в 5 научни проекта и в две конференции.

### 2. Общ преглед, анализ и оценка на дисертационния труд

Представеният дисертационен труд е написан на английски език и съдържа 122 страници. Съдържанието е разпределено в три глави, и са цитирани 32 заглавия. Авторефератът към дисертацията е написан изчерпателно и ясно отразява научните приноси. Дисертацията се основава на една публикувана статия и два препринта в платформата arXiv.

Тезисът е посветен на геометрията на паракватернионно–контактните (пкк) многообразия, които са интересен пример за суб–Риманова геометрия. Тази геометрия, която се нарича паракватернионно–контактна (пкк) геометрия, представлява обобщение на пара–3–Сасакиевата геометрия, разглеждана в работи на Alekseevsky, Kamishima, Dancer, Jorgensen и Swann от началото на настоящето столетие.

Ще направим кратък преглед и анализ на съдържанието на отделните глави, като се спрем на основните моменти.

(А) В глава първа е дефинирано понятието паракватернионно–контактно (пкк) многообразие  $(M, [g], \mathbb{P}\mathbb{Q})$  като  $(4n + 3)$ –мерно гладко многообразие  $M$ , снабдено с пак структура. Именно, определено е разпределение  $H$  с коразмерност 3, носещо конформна  $Sp(n, \mathbb{R})Sp(1, \mathbb{R})$ –структура, и задаващо се локално като ядрото на 1–форма (контактна форма)  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  със стойности в  $\mathbb{R}^3$ , и освен това са изпълнени определени условия за съгласуваност между метриката, почти паракомплексните и почти комплексната структури, и външния диференциал на формата  $\eta$ . Показано е, наред с други важни свойства, че при дадена контактна форма, паракватернионната структура и хоризонталната метрика са еднозначно определени, при условие, че съществуват.

Основен резултат на глава първа е доказване на съществуването на единствена линейна свързаност, с определени "хубави" свойства, наречена канонична пак свързаност, и играеща в пак геометрията аналогична роля, каквато е ролята на свързаността на Tanaka–Webster в CR геометрията и тази на свързаността на Biquard в кватернионно–контактната геометрия.

Дадени са примери на пак многообразия като паракватернионната група на Хайзенберг и пара–3–Сасакиевите многообразия.

Изследвани са свойствата на тензора на кривината на каноничната пак свързаност, като са изведени редица твърдения, свързващи различни тензори, естествено произлизащи от него и от тензора на торзията на тази свързаност.

Показано е, че паракватернионната група на Хайзенберг служи като плосък модел в пак геометрията, именно, че едно пак многообразие е локално изоморфно на паракватернионната група на Хайзенберг точно когато хоризонталната рестрикция на тензора на кривината на каноничната пак свързаност се анулира твърдествено.

В първа глава са въведени и пак–Айнщайновите многообразия като пак многообразия, за които пак–Ричи тензорът е пропорционален на

метриката. Основен резултат тук е, че за пкк многообразие от размерност по-голяма или равна на единадесет и с ненулева пкк-скаларна кривина, условието за пкк-Айнщайновост е еквивалентно на условието многообразието да е локално пкк-хомотетично на пара-3-Сасакиево многообразие, т.е., че пара-3-Сасакиевите многообразия са локално единствените пкк-Айнщайнови многообразия с ненулева пкк-скаларна кривина.

- (B) В глава втора е дефинирано едно специално изображение между пара-3-Сасакиевата структура върху псевдосферата и паракватернионната група на Хайзенберг, наречено паракватернионно преобразуване на Кейли, като е установен резултатът, че споменатите две пространства са локално пкк конформно еквивалентни чрез тази трансформация. В тази глава е дефинирано тензорно поле, наречено паракватернионно-контактна конформна кривина, за което е показано, че е инвариантно при пкк конформни трансформации, и което играе аналогична роля в пкк геометрията, както конформният тензор на Вайл в Римановата геометрия. Именно, доказан е забележителният резултат, че пкк конформната кривина се анулира тъждествено тогава и само тогава, когато пкк многообразието е локално пкк конформно еквивалентно на паракватернионната група на Хайзенберг.
- (C) В глава трета са изследвани специални разслоения над пкк многообразия, наречени твисторни и рефлекторни пространства. Тези пространства, означени съответно чрез  $\mathcal{Z}$  и  $\mathcal{R}$ , се дефинират като подразслоения на каноничното векторно разслоение  $\pi : \mathbb{PQ} \rightarrow M$  над едно пкк многообразие  $(M, g, \mathbb{PQ})$ , като слоевете над точка  $p \in M$  се дават чрез

$$\mathcal{Z}_p = \{I \in \mathbb{PQ}_p : I^2 = -\text{id}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_p = \{I \in \mathbb{PQ}_p : I^2 = \text{id}\}.$$

Един от основните резултати в тази глава е, че върху твисторно пространство  $\mathcal{Z}$  съществува почти CR структура, именно, това е двойката  $(\mathcal{K}, J)$ , където  $\mathcal{K}$  е естествено разпределение върху  $\mathcal{Z}$  с коразмерност 1, а  $J$  е гладко поле от ендоморфизми на  $\mathcal{K}$ , удовлетворяващи  $J^2 = -\text{id}$ .

Друг основен резултат на тази глава е, че върху рефлекторно пространство  $\mathcal{R}$  съществува почти пара-CR структура, именно, това е двойката  $(\mathcal{K}, J)$ , където  $\mathcal{K}$  е естествено разпределение върху  $\mathcal{R}$  с коразмерност 1, а  $J$  е гладко поле от ендоморфизми на  $\mathcal{K}$ , удовлетворяващи  $J^2 = \text{id}$ .

Доказано е също, че тези структури са интегрируеми.

Без съмнение, резултатите, получени в настоящата дисертация, са дълбоко нетривиални, и са плод на преодоляване на значителни трудности от идейно и техническо естество от страна на дисертантката.

### 3. Критични бележки и препоръки

Нямам критични бележки по същество.

### 4. Лични впечатления за дисертантката

Познавам ас. Марина Чомакова от около преди 10 години, когато започна да води упражнения по различни геометрични дисциплини към катедра Геометрия. Прави впечатление на съвестен и отговорен преподавател и ерудиран млад математик. Личните ми впечатления за нея са силно положителни.

### 5. Заключение

Въз основа на направения преглед, анализ и оценка на предоставения ми за рецензиране дисертационен труд и съдържащите се в него научни и научно-приложни резултати, **потвърждавам**, че научните постижения отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на ФМИ при СУ за присъждане на асистент Марина Чомакова на образователната и научна степен "доктор" в професионалното направление и научната област на настоящата процедура. Дисертантката не само удовлетворява, но и надхвърля минималните национални изисквания и специфичните изисквания на ФМИ при СУ в професионалното направление и не е установено плагиатство под каквато и да било форма в представените за процедурата материали.

Въз основа на гореизложеното, давам своята **положителна оценка** на дисертационния труд на ас. Марина Чомакова и **убедено препоръчвам** на Научното жури да присъди образователната и научна степен "доктор" на ас. Марина Павлова Чомакова в професионално направление 4.5. Математика, докторска програма "Геометрия".

07.09.2025 г.

Изготвил рецензията:.....

/доц. д-р Александър Петков/