

РЕЦЕНЗИЯ

от ПРОФ. ДН МАНЧО ХРИСТОВ МАНЕВ

Факултет по математика и информатика

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

относно дисертация за придобиване

на образователна и научна степен „ДОКТОР“

по област на висше образование: 4. Природни науки,

математика и информатика,

професионално направление: 4.5. Математика,

докторска програма: „Геометрия“

Автор: МАРИНА ПАВЛОВА ЧОМАКОВА

Тема: **ГЕОМЕТРИЯ НА ПАРАКВАТЕРНИОННО
КОНТАКТНИ МНОГООБРАЗИЯ**

Научни ръководители: АКАД. ПРОФ. ДМН СТЕФАН ИВАНОВ

(СУ, ИМИ-БАН),

доц. дн ИВАН МИНЧЕВ (СУ)

Чрез Заповед №РД-38-281/9.06.2025 г. на Ректора на СУ „Св. Климент Охридски“ (съкр. СУ), издадена на основание решение на Факултетния съвет на Факултета по математика и информатика (съкр. ФМИ) (Протокол №5/2.06.2025 г.) и в съответствие с чл. 4 от Закона за развитие на академичния състав в Република България (съкр. Закона за РАСРБ), съм определен за член на Научното жури в процедурата за защита на споменатия дисертационен труд.

Съгласно решение на това жури (Протокол №1/12.06.2025) съм определен да напиша рецензия по дисертацията и документите за процедурата.

В ролята си на член на научното жури съм получил електронен достъп до всички документи, подадени за участие в процедурата.

1. Данни и лични впечатления за дисертанта

Дисертантката Марина Павлова Чомакова е родена през 1992 г. и завършва бакалавърската специалност „Приложна математика“ във ФМИ на СУ през 2015 г. Две години след това се дипломира по магистърска специалност „Математика“ с професионална квалификация „Математика – алгебра, геометрия и топология“ отново във ФМИ на СУ. На 5.07.2018 г. е започнала редовна докторантура (трансформирана след 5 дни в задочна докторантура) във ФМИ на СУ по докторска програма „Геометрия“ с научни ръководители проф. д-мн Стефан Иванов и доц. д-р Симеон Замковой. От 21.07.2022 г. за втори научен ръководител е определен доц. д-н Иван Минчев на мястото на починалия доц. Замковой. Докторантката Марина Чомакова е прекъсвала обучението си в периода 2019–2021 г. за около 1 г. и 5 месеца поради майчинство и е отчислена с право на защита на 10.12.2024 г.

Тя е започнала като хоноруван асистент в катедра „Геометрия“ на ФМИ при СУ от 1.10.2014 г., а вероятно след дипломирането си като магистър е назначена за редовен асистент в същата катедра, където преподава и досега.

Нямам лични впечатление от ас. Марина Чомакова.

2. Характеристика на дисертационния труд и материалите по процедурата

Запознах се с документите, представени от дисертантката Марина Чомакова в процедурата за защита на нейния дисертационен труд. Считаю, че те са в съответствие с изискванията на нормативната уредба, а именно Закона за РАСРБ, Правилника за прилагане на Закона за РАСРБ, и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в СУ „Св. Климент Охридски“ (съкр. Правилника за УРПНСЗД в СУ).

Дисертацията ѝ съдържа 123 страници и е представена на английски език. Авторефератът към нея е написан на български и английски език, оформен е съответно на 43 и 41 страници и е изработен според изискванията, като коректно отразява резултатите и научните приноси в дисертационния труд.

Не съм забелязал каквато и да е форма на плагиатство в дисертацията и публикацията, представени за оценяване от дисертантката.

Темата на дисертацията е върху изследването на субримановата геометрия на паракватернионно контактни многообразия (съкр. пкк многообразия). Такова многообразие се означава с $(M, [g], \mathbb{PQ})$, има размерност $4n + 3$, снабдено е с хоризонтално разпределение H с коразмерност 3, имащо неутрална метрика g и конформна $Sp(n, \mathbb{R})Sp(1, \mathbb{R})$ -структура. По-подробно, налични са подразслоение \mathbb{PQ} от ранг 3, фиксиран конформен клас $[g]$ от неутрални метрики върху H и тройка антикомутиращи структури (двете I_1 и I_2 са почти паракомплексни, а третата I_3 е почти комплексна), които са паракватернионно съвместими със всяка метрика от $[g]$.

Представеният дисертационен труд на Марина Чомакова е написан на английски език и е изложен на 123 страници. Започва с въведение и описание на темата и структурата на дисертацията (общо 7 страници). Основната част се състои от три глави с общо 13 раздела (97 страници). Накрая на дисертационния труд са поместени заключителни бележки и библиография от 32 заглавия. Тематиката и съдържанието на дисертацията съответстват напълно на докторската програма и научната специалност.

Въведението информира накратко читателя за същността на изучаваните структури, за тяхната връзка с други теории и проблеми и дава препратки към публикации по темата. Този обзор на свързаните с темата проблеми и известните резултати за тях показва добро познаване на проблематиката от страна на дисертантката.

След това в специален раздел се описва темата и структурата на дисертацията. Накратко се формулира съдържанието на отделните раздели на дисертацията и получените резултати в тях. Отбелязани са основните цели на Глави 1 и 2, като за първата това е дефинирането на канонична свързаност на всяко пкк многообразие с размерност поне 11, а за втората – намирането на тензорен инвариант, характеризираща локално пкк структурите, които са паракватернионно

контактно конформно еквивалентни на плоската пкк структура.

Накрая на този уводен раздел, освен използваните означения, е отбелязано, че резултатите са формулирани в 3 научни статии, едната от които е публикувана в списание *Mathematics* от първи квартал на Web of Science, а другите две са качени като препринти на arXiv.org.

Глава 1: *Канонична свързаност* (49 страници) започва с раздел 1, където се въвеждат понятията, свързани с алгебрата на паракватернионите pQ , познати също като сплит кватерниони или кокватерниони. Дава се дефиниция на пкк многообразие. Обръща се внимание, че при дадена контактна форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, паракватернионната структура и хоризонталната метрика върху H са единствени, ако съществуват. Дефинират се и пкк-конформни трансформации като трансформациите, запазващи дадена пкк структура, използвайки неанулираща се диференцируема функция и матрица от $SO(1, 2)$, които се изучават по-подробно в Глава 2. След това се разглежда инвариантно тензорно разлагане на всеки ендоморфизъм във векторното пространство $H_p \subset T_pM$, $p \in M$ и се намират двете $Sp(n, \mathbb{R})Sp(1, \mathbb{R})$ -инварианти.

Раздел 2 е насочен към конструиране на основния инструмент за изследване на геометрията на пкк многообразието. Първо се доказва, че за размерност поне 11 съществува единствена свързаност ∇ (наречена канонична пкк свързаност) с торзия T и единствено допълнително подпространство V на H в TM , удовлетворяваща определени свойства. Частичната H -свързаност ∇ се продължава по естествен начин до частична H - $Sp(n, \mathbb{R})Sp(1, \mathbb{R})$ -свързаност върху V . След това частичната H -свързаност се продължава до пълна свързаност чрез използване на известен резултат. Следва определяне на торзията и вертикалната форма на свързаността, както и описание на торзионния ендоморфизъм чрез τ и μ , инвариантни при естественото действие на $SO(1, 2)$ и дефинирани съответно чрез симетричната и антисиметричната част на T . В края на раздела се дават зависимости между каноничната пкк свързаност и свързаността на Леви-Чивита на продължената метрика.

В раздел 3 се коментират някои примери за пкк многообразие, като породеното от паракватернионната група на Хайзенберг $G(pH)$, притежаваща единствената пкк структура с плоска канонична свързаност, и пара-3-сасакиевото многообразие и в частност пара-3-сасакиевата псевдосфера pS^{4n+3} .

В раздел 4 се показва как кривината на каноничната пкк свързаност е напълно определена от нейната рестрикция върху H и тензорите τ и μ . Първо, хоризонталните тензори на Ричи (т.е. ограничените върху H) са изразени чрез торзионния ендоморфизъм на каноничната пкк свързаност и пкк-скаларната кривина, използвайки Първото твърдение на Бианки. След това, чрез Второто твърдение на Бианки е показано, че цялата кривина на пкк свързаността се определя от хоризонталната ѝ част.

В раздел 5 се въвежда глобална хоризонтална 4-форма Ω , която е инвариантна относно $Sp(n, \mathbb{R})Sp(1, \mathbb{R})$, използвайки локално дефинираните хоризонтални фундаментални 2-форми ω_s , $s = 1, 2, 3$. Първо се извеждат локалните структурни уравнения на пкк структурата чрез $sp(1, \mathbb{R})$ -свързващите форми α_s на каноничната пкк свързаност и пкк-скаларната кривина. След това се изразяват тензорите τ и μ чрез външната производна на Ω за размерност поне 11.

В раздел 6 е показано, че анулирането на хоризонталната кривина води до анулиране на цялата кривина и че паракватернионната група на Хайзенберг $G(pH)$ служи като плосък модел на пкк многообразие.

В раздел 7 е доказано, че необходимо и достатъчно условие едно пкк многообразие да бъде айнщайново е $\tau = \mu = 0$, т.е. торзионният ендоморфизъм $\xi \lrcorner T$ се анулира. Такова условие при $n > 1$ е също фундаменталната 4-форма Ω да бъде затворена. Като пример за това е приведен случая на пара-3-сасакиево многообразие. Констатирано е, че пара-3-сасакиевите пространства са локално единствените айнщайнови пкк многообразия с ненулева пкк-скаларна кривина.

Глава 2: *Паракватернионна контактна конформна кривина* (38 страници) започва с раздел 8, където се доказва, че паракватернионната група на Хайзенберг $G(pH)$ и пара-3-сасакиевата псевдосферата pS^{4n+3} са локално пкк-конформно ек-

вивалентно чрез паракватернионното преобразование на Кейли.

В раздел 9 се дефинира пкк конформна кривина и се доказва, че този тензор е инвариантен спрямо пкк конформните трансформации, което е съдържанието на първата основна теорема тук. Накрая на раздела е получено суб-хиперболичното уравнение на Ямабе.

В раздел 10 се доказва втората основна теорема в тази глава, която се отнася до това, че анулирането на пкк-конформната кривина е необходимо и достатъчно условие една пкк структура върху гладко пкк многообразие да е локално пкк-конформно еквивалентно на стандартната плоска пкк структура върху $G(pH)$. В хода на доказателството са разгледани 6 основни случая в зависимост от разположението на аргументите в условието за интегрируемост на една система от ЧДУ за конформен множител, удовлетворяващ условието на теоремата.

Последна е Глава 3: *Туисторни и рефлекторни пространства за паракватернионни контактни многообразия* (19 страници), започваща с раздел 11, където се припомнят понятията за CR и пара-CR структури върху многообразия. В раздел 12 се дефинират горните две пространства \mathcal{Z} и \mathcal{R} като подразслоения на каноничното векторно разслоение $\mathbb{P}\mathbb{Q}(M) \rightarrow M$ и се доказват 2 основни твърдения за тях. Те са за съществуване на почти CR структура и почти пара-CR структура съответно върху \mathcal{Z} и \mathcal{R} и се определят сигнатурите на техните форми на Леви. Главата завършва с раздел 13, където се доказва, че последните две структури са интегрируеми.

В раздела Заключение, дисертантката е направила „Авторска справка за приносите на дисертационния труд“, която напълно справедливо описва основните научни приноси в дисертацията към развиване на геометрията на пкк многообразията. Основно това са въвеждането и изучаването на каноничната пкк свързаност, изследването на пкк конформната кривина и накрая изясняване на геометрията на пкк многообразията чрез резултати за съответните туисторни и рефлекторни пространства. Най-важното е, че резултатите в този дисертационен труд могат да бъдат използвани за бъдещи изследвания в пкк геометрията с

евентуални приложения и в други области на диференциалната геометрия, както и в математическата физика.

3. Аprobация на резултатите от дисертационния труд

Съгласно Минимални национални изисквания от Правилника за прилагане на Закона за РАСРБ за придобиване на образователна и научна степен „доктор“, кандидатът, освен дисертацията по Показател 1, трябва да има поне 30 точки от група Г (Показатели от 5 до 10). Дисертантката Чомакова е представила 1 статия в списание *Mathematics* от Q1 за 75 точки по Показател 7, в която публикува резултатите от Глава 3. В Правилника за УРПНСЗАД в СУ няма допълнителни изисквания за ПН 4.5. Освен представената статия, резултати от дисертационния труд се съдържат и в два препринта също в съавторство с научните ѝ ръководители. Единият препринт по Глава 2 е вече публикуван в *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* отново в Q1. Марина Чомакова е докладвала резултатите от Глава 1 на международната конференция *Week of Mathematics and Informatics* в Дюни през септември 2024 г. Няма данни за цитирания на публикациите.

4. Критични бележки и препоръки

Съдържанието на дисертационния труд показва, че авторката е навлязла в съществени проблеми на диференциалната геометрия, владее съответния изчислителен апарат и е показала умения да реализира научни изследвания в тази област под ръководството на научните си ръководители.

Прави впечатление, че изложението и оформлението на дисертацията на английски език е на много добро ниво. Въпреки това с цел подобряване на изложението, мога да препоръчам стилът на дисертационния труд да се придържа към този на учебниците. Не е добре да има изречения без сказуемо, дори почти без думи, напр. първото изречение на подраздел 10.1. Добре е да се използват подходящи означения, напр. това не е така за тензора $PW R$. Трябва да се използват уточнени термини, напр. „ pqc conformal transformations“ или „conformal

ррс transformations“. Логическата последователност в раздел 10 е объркваща читателя, по-подробни обяснения там биха били полезни. Дисертантката трябва да бъде по-прецизна в текстовете на български език, представени в автореферата на български език и документите.

5. Заключение

Дисертационният труд на Марина Чомакова съдържа актуални научни резултати, които представляват оригинален принос в диференциалната геометрия.

Представените документи отговарят напълно на всички изисквания на Закона за РАСРБ, Правилника за прилагане на Закона за РАСРБ и Правилника за УРПНСЗАД в СУ.

Поради горното давам своята **положителна оценка** за научните изследвания, представени от дисертационния труд, автореферата, постигнатите резултати и приноси, представени по-горе, и предлагам на почитаемото научно жури да вземе решение **МАРИНА ПАВЛОВА ЧОМАКОВА** да придобие образователната и научна степен „Доктор“ по област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление: 4.5. Математика; докторска програма: „Геометрия“.

2 септември 2025 г.

Пловдив

Подпис:

(проф. дн Манчо Манев)