ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ “СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд

за присъждане на образователна и научна степен
“Доктор”

Геометрия на паракватернионно контактни многообразия

Автор:
Марина Павлова Чомакова

Научни ръководители:
Симеон Замковой
Стефан Иванов
Иван Минчев

Професионално направление: 4.5. Математика
Докторска програма: Геометрия

София, 2025

Дисертационният труд е на английски език и съдържа 122 страници, като основният текст е разделен на 3 глави, а библиографията съдържа 32 заглавия.

Дисертантът работи като асистент към катедра Геометрия на Факултета по Математика и Информатика при СУ “Св. Кл. Охридски”.

Съдържание

Въведение

Настоящата дисертация е посветена на изследването на субримановата геометрия на паракватернионно контактни многообразия. Това са многообразия с размерност $(4n+3)$, снабдени с 3-контактни структури, които са свързани с алгебрата на паракватернионите pQ, известни още като сплит кватерниони [9], кватерниони от втори род [29] и комплексни продуктни структури [5]. Паракватернионно контактните структури представляват интересна област на диференциалната геометрия, която обобщава понятията на контактната и кватернионната геометрия. Те се характеризират със специфичен вид почти паракватернионна структура в съчетание с контактна 1-форма. Тези структури предоставят рамка за изследване на геометрични обекти, които съчетават паракватернионни свойства с контактно поведение, което води до връзки с различни области, включително конформна геометрия, интегрируеми системи и математическа физика.

Изследването на почти паракватернионни структури върху $(4n)$-мерни многообразия е от съществено значение в теоретичната физика и струнната теория, поради съществената им връзка с геометрията на Борн — концепция, която възниква естествено от динамиката на струните (вж. [13, 14, 12] и цитираните там източници).

При преминаване към случая с нечетна размерност $(4n+3)$, алгебрата на паракватернионите води до концепцията за паракватернионно контактни структури, която представлява съществено обобщение на пара-3-Сасакиевата геометрия, разгледана в [1, 9]. Тези структури също така обобщават кватернионно контактните структури и позволяват изследване на аналогични геометрични феномени в контекста на метрики със сплит-сигнатура. Макар паракватернионно контактната геометрия да притежава известни паралели с кватернионно контактната геометрия, развита от О. Бикар [7] през 2000 г. и по-късно разширена в контекста на екстремали и оптимални константи за неравенството на Фоланд-Щайн за L^2 върху кватернионната група на Хайзенберг, както и върху кватернионния контактен проблем на Ямабе [17, 18, 21, 19, 24], се проявяват съществени разлики. В частност, паракватернионната контактна геометрия води до изследване на субхиперболични частни диференциални уравнения, за разлика от субелиптичните уравнения, възникващи в кватернионно контактния случай.

Както е показано от Бикар [7], изследването на кватернионни контактни структури естествено води до разглеждане на специфичен клас интегрируеми CR-многообразия, които не са псевдо-конвексни. Тези многообразия, наречени твисторни пространства, се реализират като специфични сферични разслоения над базовото кватернионно контактно многообразие (вж. също [10]). Това представлява обобщение на концепцията за твисторно пространство, асоциирана с кватернионно келерови многообразия [30].

В паракватернионно контактен контекст се разглеждат два различни типа разслоения: твисторното пространство $\mathcal{Z}$ и рефлекторното пространство $\mathcal{R}$. Слоевете на $\mathcal{Z}$ са дифеоморфни на двойния хиперболоид, дефиниран чрез $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ в $\mathbb{R}^3$, докато слоевете на $\mathcal{R}$ са дифеоморфни на простия хиперболоид, зададен чрез $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

В целия текст ще използваме следните означения:

а) С X, Y, Z, U ще означаваме хоризонтални векторни полета, т.е. $X, Y, Z, U \in H$;

б) $\{e_1, \dots, e_n, I_1e_1, \dots, I_1e_n, I_2e_1, \dots, I_2e_n, I_3e_1, \dots, I_3e_n\}$ ще означава адаптиран ортонормален базис на хоризонталното пространство H;

в) Ще използваме съкратено означение за сумиране по повтарящи се вектори от базиса $\{e_1, \dots, e_{4n}\}$. Например, за тензор P от тип $(0, 2)$ върху H е в сила:

$$\begin{aligned} P(e_b, e_b) &= \sum_{b=1}^{4n} g(e_b, e_b) P(e_b, e_b) \\ &= \sum_{b=1}^{n} \left[P(e_b, e_b) - P(I_1e_b, I_1e_b) - P(I_2e_b, I_2e_b) + P(I_3e_b, I_3e_b) \right]; \end{aligned}$$

г) s и t ще бъдат произволни елементи на множеството $\{1, 2, 3\}$, т.е. $s, t \in \{1, 2, 3\}$;

д) Индексите (i, j, k) ще представляват циклична пермутация на $(1, 2, 3)$;

Основни резултати

Преглед на Глава 1: Канонична свързаност

1 Паракватернионно контактна структура

Алгебрата pQ на паракватернионите (понякога наричани още сплит кватерниони [9]) представлява четиримерно реално векторно пространство с базис $\{1, r_1, r_2, r_3\}$, удовлетворяващо следните тъждества:

$$r_1^2 = r_2^2 = 1, \quad r_3^2 = -1, \quad r_1 r_2 = -r_2 r_1 = r_3. \tag{1}$$

Всеки елемент $a \in pQ$ може да бъде представен във вида

$$a = a_0 + a_1\, r_1 + a_2\, r_2 + a_3\, r_3,$$

където коефициентите a_l, $l = 0, 1, 2, 3$, са реални числа.

Два елемента $a, b \in pQ$ се събират по правилото

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, r_1 + (a_2 + b_2)\, r_2 + (a_3 + b_3)\, r_3,$$

а умножението с реално число λ се извършва по правилото

$$\lambda a = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)\, r_1 + (\lambda a_2)\, r_2 + (\lambda a_3)\, r_3.$$

Спрегнатият елемент на a е дефиниран чрез

$$\overline{a} = a_0 - a_1\, r_1 - a_2\, r_2 - a_3\, r_3,$$

като е в сила $\overline{a\, b} = \overline{b}\, \overline{a}$.

Реалната и имагинерната част на паракватернион a се дефинират съответно като

$$Re(a) = a_0, \qquad Im(a) = a_1\, r_1 + a_2\, r_2 + a_3\, r_3.$$

Естествено се дефинира индефинитно скаларното произведение:

$$\langle a, b \rangle = Re(\overline{a} b).$$

Съответната норма се определя чрез израза

$$||a||^2 = a_0^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_2^2,$$

която представлява метрика със сигнатура $(2,2)$. Тази норма е мултипликативна, т.е. за всеки два елемента $a, b \in pQ$ е в сила равенството

$$||ab||^2 = ||a||^2\,||b||^2.$$

Поради наличието на елементи с нулева дължина, алгебрата pQ съдържа делители на нула.

С въвеждането на числата

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3 = 1, \quad \epsilon_i\epsilon_j = -\epsilon_k, \tag{2}$$

можем да запишем тъждествата от (1) във вида:

$$r_i^2 = \epsilon_i, \quad r_ir_j = -r_jr_i = -\epsilon_k r_k.$$

Дефиниция 1.1. *Паракватернионно контактно (пкк) многообразие $(M, [g], \mathbb{PQ})$ наричаме $(4n+3)$-мерно многообразие M, върху което е фиксирано разпределение H с коразмерност 3, за което са изпълнени:*

i) Разпределението H носи конформна $Sp(n,\mathbb{R})Sp(1,\mathbb{R})$-структура, т.е. е снабдено с конформен клас от неутрални метрики $[g]$ със сигнатура $(2n,2n)$ и с разслоение $\mathbb{PQ}$ с ранг 3, съставено от $(1,1)$-тензори върху H, което локално се задава от две почти паракомплексни структури I_1, I_2 и една почти комплексна структура I_3 върху H, удовлетворяващи тъждествата на паракватернионите:

$$I_s^2 = \epsilon_s\,\mathrm{id}_H, \quad I_iI_j = -I_jI_i = -\epsilon_k I_k, \tag{3}$$

където $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, $\epsilon_3 = -1$, които са съгласувани с метриката $g \in [g]$ върху H:

$$g(I_s\cdot, I_s\cdot) = -\epsilon_s g(\cdot,\cdot), \quad g \in [g]. \tag{4}$$

ii) Разпределението H се задава локално като ядрото на 1-форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ със стойности в $\mathbb{R}^3$, т.е.

$$H = \bigcap_{s=1}^{3} \ker\,\eta_s,$$

и е изпълнено следното условие за съгласуваност:

$$-2\epsilon_s g(I_sX, Y) = d\eta_s(X,Y), \quad X, Y \in H. \tag{5}$$

Забелязваме, че при дадена контактна форма, паракватернионната структура и хоризонталната метрика върху H са еднозначно определени, ако съществуват. Доказана е следната Лема:

Лема 1.2. *Нека* $(M, [g], \mathbb{PQ})$ *е паракватернионно контактно многообразие. Тогава:*

a) *Ако* (η, I_s, g) *и* (η, I'_s, g') *са две паракватернионно контактни структури върху* M*, то* $I_s = I'_s$ *и* $g = g'$*;*

b) *Ако* (η, g) *и* (η', g) *са две пкк структури върху* M *с* $\ker(\eta) = \ker(\eta') = H$*, то съществува матрица* $\Phi \in SO(1,2)$ *с елементи гладки функции, такава че* $\eta' = \Phi\eta$*.*

Важно следствие от горната лема е, че на всяко пкк многообразие M може да се съпостави канонично линейно разслоение $\mathcal{G}(M) \to M$, така че ако (η_s, I_s, g) е локална пкк структура за H, тогава g е локално сечение на $\mathcal{G}(M)$. Освен това, векторното разслоение $\pi : \mathbb{PQ}(M) \to M$ със слой (над точка p)

$$\mathbb{PQ}_p = \mathrm{span}\{I_1, I_2, I_3\}, \tag{6}$$

също е глобално дефинирано.

Всеки ендоморфизъм $\Psi \in \mathrm{End}(H_p)$, за $p \in M$, може да бъде еднозначно разложен спрямо паракватернионно контактната структура на четири $Sp(n, \mathbb{R})$-инвариантни компоненти:

$$\Psi = \Psi^{+++} + \Psi^{+--} + \Psi^{-+-} + \Psi^{--+},$$

където Ψ^{+++} комутрира с всички три оператора I_s, Ψ^{+--} комутрира с I_1 и антикомутира с I_2 и I_3 и т.н.

$$\begin{aligned}
4\Psi^{+++} &= \Psi + I_1\Psi I_1 + I_2\Psi I_2 - I_3\Psi I_3;\\
4\Psi^{+--} &= \Psi + I_1\Psi I_1 - I_2\Psi I_2 + I_3\Psi I_3;\\
4\Psi^{-+-} &= \Psi - I_1\Psi I_1 + I_2\Psi I_2 + I_3\Psi I_3;\\
4\Psi^{--+} &= \Psi - I_1\Psi I_1 - I_2\Psi I_2 - I_3\Psi I_3.
\end{aligned}$$

Спрямо действието на $Sp(n, \mathbb{R})Sp(1, \mathbb{R})$, Ψ се разлага инвариантно като сума на две компоненти:

$$\begin{aligned}
\Psi_{[3]} &= \Psi^{+++} = \frac{1}{4}\left[\Psi + I_1\Psi I_1 + I_2\Psi I_2 - I_3\Psi I_3\right];\\
\Psi_{[-1]} &= \Psi^{+--} + \Psi^{-+-} + \Psi^{--+} = \frac{1}{4}\left[3\Psi - I_1\Psi I_1 - I_2\Psi I_2 + I_3\Psi I_3\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Тези две $Sp(n,\mathbb{R})Sp(1,\mathbb{R})$-инвариантни компоненти представляват ортогоналните проекции на Ψ върху собствените подпространства на оператора на Казимир:

$$C = -I_1 \otimes I_1 - I_2 \otimes I_2 + I_3 \otimes I_3,$$

чийто собствени стойности са точно 3 и -1.

Ако $n = 1$, то пространството на симетричните ендоморфизми, комутриращи с всички I_s, е едномерно. В този случай [3]-компонентата на всеки симетричен ендоморфизъм Ψ върху H е пропорционална на идентитета:

$$\Psi_{[3]} = \frac{\mathrm{Tr}(\Psi)}{4}\,\mathrm{Id}_{|H}.$$

Забелязваме, че всяка от трите 2-форми ω_s принадлежи на своята $[-1]$-компонента, $\omega_s = (\omega_s)_{[-1]}$, и образува базис на Ли алгебрата $sp(1,\mathbb{R})$.

Разглеждаме ортогоналното допълнение $(sp(n,\mathbb{R}) + sp(1,\mathbb{R}))^{\perp} \subset so(2n,2n)$ на Ли алгебрата $(sp(n,\mathbb{R}) + sp(1,\mathbb{R})) \subset so(2n,2n)$ спрямо стандартното индефинитно скаларно произведение $<,>$ върху $so(2n,2n)$, индуцирано от стандартното неутрално скаларно произведение върху $gl(4n)$, дефинирано чрез формулата

$$< A, B >= \mathrm{Tr}(GAGB^t) =< e_a, e_a >< A(e_a), B(e_a) >, \quad \text{за} \quad A, B \in gl(4n).$$

Известно е, че антисиметричния ендоморфизъм $A \in so(2n,2n)$, разглеждан като елемент на ортогоналната Ли алгебра $so(2n,2n)$, принадлежи на ортогоналното допълнение $(sp(n,\mathbb{R}) + sp(1,\mathbb{R}))^{\perp}$ тогава и само тогава, когато A съвпада с безследната част на своята $[-1]$-компонента. По-точно:

$$A \in (sp(n,\mathbb{R}) + sp(1,\mathbb{R}))^{\perp} \subset so(2n,2n) \quad \Longleftrightarrow \quad A = A_{[-1]} - A_{sp(1,\mathbb{R})}, \quad (8)$$

където $A_{sp(1,\mathbb{R})}$ е ортогоналната проекция върху $sp(1,\mathbb{R})$, дадена чрез равенството:

$$4nA_{sp(1,\mathbb{R})} = \sum_{s=1}^{3} A(e_a, I_s e_a)\,\omega_s.$$

2 Канонична свързаност

Нека $H \in TM$ е произволно разпределение върху M и g е метрика върху H. Тогава (вж. [7, Лема II.1.1]) за всяко допълнение V на H в TM

съществува еднозначно определена частична свързаност ∇ върху H по направление на H, такава че: $\nabla_X g = 0, \quad X \in H$, и за всеки две сечения X, Y на H, торзията $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ удовлетворява тъждеството

$$T(X,Y) = -[X,Y]_V,$$

където долният индекс V означава „компонентата по V“.

Разглеждаме единственото допълващо на H подпространство V в TM, удовлетворяващо разлагането $TM = H \oplus V$, което е породено от векторните полета $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, за които е изпълнено

$$\eta_s(\xi_t) = \delta_{st}, \qquad (\xi_s \lrcorner d\eta_s)_{|H} = 0, \tag{9}$$

където със символа $\lrcorner$ е означено вътрешното произведение.

Нека (M, H, g) е пкк многообразие с фиксирана метрика и нека (η_s, I_s) е съгласувано множество с $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. С V означаваме линейната обвивка на $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Всеки ендоморфизъм f на H се продължава естествено до ендоморфизъм на TM, полагайки $f(\xi) = 0$, $\xi \in V$. С тази уговорка, ще разглеждаме и $\{I_1, I_2, I_3\}$ като ендоморфизми на тангенциалното разслоение TM. Дефинираме фундаменталните 2-форми $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ с формулата

$$\omega_s(A,B) = g(I_s A, B), \quad A, B \in TM, \quad s = 1,2,3. \tag{10}$$

От Дефиниция 1.1 следва, че

$$\omega_s(A,B) = \begin{cases} -\epsilon_s \frac{1}{2} d\eta_s(A,B), & A, B \in H, \\ 0, & A \in V,\ B \in TM \end{cases} \qquad \text{за } s = 1,2,3. \tag{11}$$

Нека ∇ е частична свързаност върху H по направлението на H, която съответства на фиксираното допълнение V. Тогава тази частична свързаност запазва $\mathbb{PQ} \subset End(H)$, т.е. имаме, че $\nabla_X \mathbb{PQ} \subset \mathbb{PQ}, \quad X \in H$.

С други думи, за всяка циклична пермутация (i,j,k) на $(1,2,3)$ и за всяко $X \in H$ са в сила равенствата

$$\nabla_X \omega_i = \alpha_j(X)\omega_k + \epsilon_k \alpha_k(X)\omega_j, \qquad \nabla_X I_i = \alpha_j(X) I_k + \epsilon_k \alpha_k(X) I_j, \tag{12}$$

където

$$\alpha_k(X) = d\eta_i(\xi_j, X) = \epsilon_k d\eta_j(\xi_i, X). \tag{13}$$

Върху вертикалното разпределение V въвеждаме метрика със сигнатура $(1, 2)$, зададена чрез:

$$g_{|V} = (\eta_3)^2 - (\eta_1)^2 - (\eta_2)^2, \quad g(\xi_s, \xi_t) = -\epsilon_s \delta_{st},$$

което определя метрика $g = g_{|H} + g_{|V}$ със сигнатура $(2n+1, 2n+2)$ върху M, при условие че $\mathrm{span}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = V \perp H$.

Частичната H-свързаност ∇ се разширява естествено до частична H-$Sp(n, \mathbb{R})Sp(1, \mathbb{R})$-свързаност върху V, както следва:

Частичната H-свързаност върху V, дефинирана чрез

$$\nabla_X \xi = [X, \xi]_{|V}, \quad \xi \in \Gamma(V),$$

запазва вертикалната метрика $g_{|V}$ и се идентифицира с връзка върху Ли алгебрата $sp(1, \mathbb{R}) \cong \mathrm{span}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ чрез съответствието $\xi_i \to \omega_i$.

Действително, дефиницията на свързаността, заедно с (9) и (13), дава

$$\nabla_X \xi_i = \epsilon_s \sum_{s=1}^{3} d\eta_s(X, \xi_i)\, \xi_s = \alpha_j(X)\, \xi_k + \epsilon_k \alpha_k(X)\, \xi_j.$$

Матрицата на свързаността принадлежи на $so(1, 2)$ и следователно запазва вертикалната метрика $g_{|V}$.

Частичната H-свързаност може да бъде разширена до пълна свързаност, като използваме общия резултат (вж. [7, Лема II.2.1] и нейното доказателство), че ако V е допълнение към разпределението H, снабдено с $\mathfrak{K}$-структура за група $\mathfrak{K} \subset GL(n)$ с Ли алгебра $\mathfrak{k}$. Тогава съществува единствена V-частична $\mathfrak{K}$-свързаност върху H, чиято торзия

$$T_\xi X = T(\xi, X) = \nabla_\xi X - [\xi, X]_{|_H}, \qquad \xi \in \Gamma(V) \tag{14}$$

удовлетворява

$$T_\xi \colon H \longrightarrow H \in \mathfrak{k}^\perp,$$

където $\mathfrak{k}^\perp$ е ортогоналното допълнение на подпространството $\mathfrak{k} \subset \mathrm{End}(H)$.

Прилагането на този резултат към групата $Sp(n, \mathbb{R})Sp(1, \mathbb{R})$ води до съществуването на единствена V-частична $Sp(n, \mathbb{R})Sp(1, \mathbb{R})$-свързаност ∇ върху H, с торзия, удовлетворяваща

$$T_\xi \in (sp(n, \mathbb{R}) \oplus sp(1, \mathbb{R}))^\perp.$$

Тази частична свързаност се разширява до истинска свързаност върху M, като ∇ се дефинира върху V по следния начин:

$$\nabla\xi_i = \alpha_j\xi_k + \epsilon_k\alpha_k\xi_j, \tag{15}$$

където 1-формите на свързаност $\alpha_s(X)$ са дадени чрез (13), а стойностите $\alpha_s(\xi_t)$ са изчислени експлицитно в дисертацията, така че получената свързаност да има торзия, удовлетворяваща условията на теоремата.

Комбинирайки дефинираните дотук частични свързаности, получаваме свързаност ∇ върху TM, със следните свойства:

Теорема 2.1. *Нека $(M,[g],\mathbb{PQ})$ е паракватернионно контактно многообразие с размерност $(4n+3) > 7$, снабдено с фиксирана метрика $g \in [g]$. Тогава съществуват единствена свързаност ∇ с торзия T върху $M^{(4n+3)}$ и единствено допълващо на H подпространство V в TM, такива че са изпълнени следните условия:*

i) Свързаността ∇ запазва разлагането $H \oplus V$ и $Sp(n,\mathbb{R})Sp(1,\mathbb{R})$-структурата върху H, т.е.

$$\nabla g = 0, \quad \nabla\sigma \in \Gamma(\mathbb{PQ})$$

за всяко сечение $\sigma \in \Gamma(\mathbb{PQ})$;

ii) За $X, Y \in H$, торзията удовлетворява $T(X,Y) = -[X,Y]_{|V}$;

iii) За всяко $\xi \in V$, ендоморфизмът $T(\xi,\cdot)_{|H}$ на H принадлежи на

$$(sp(n,\mathbb{R}) \oplus sp(1,\mathbb{R}))^{\perp} \subset gl(4n);$$

iv) Свързаността върху V се индуцира чрез естествена идентификация φ на V с подпространството $sp(1,\mathbb{R})$ от ендоморфизмите на H, т.е. $\nabla\varphi = 0$.

В (iii) индефинитното скаларно произведение $\langle , \rangle$ върху $\mathrm{End}(H)$ е дадено чрез

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(GAGB^t) = g(e_a,e_a)g(A(e_a),B(e_a)), \quad \text{за} \quad A, B \in \mathrm{End}(H).$$

Свързаността ∇, построена в Теорема 2.1 върху pqc-многообразие с фиксирана метрика g върху H, се нарича *канонична параикватерниoнна контактна свързаност (канонична пкк свързаност)*. Вертикалните векторни полета ξ_s се наричат Рийб векторни полета.

За $\dim M = 7$ $(n = 1)$, условията

$$\begin{aligned} \eta_s(\xi_t) = \delta_{st}, \qquad (\xi_s \lrcorner d\eta_s)_{|H} = 0, \\ (\xi_j \lrcorner d\eta_i)_{|H} = \epsilon_k (\xi_i \lrcorner d\eta_j)_{|H} \end{aligned} \tag{16}$$

не са непременно изпълнени. В размерност 7 съществуването на каноничната pqc-свързаност изисква допълнително наличието на вертикално подразнообразие V, допълнително на H, такова че

$$TM = H \oplus V$$

и V удовлетворява свойствата (16). Оттук нататък, под pqc-структура в размерност 7 ще се разбира pqc-структура, удовлетворяваща условията (16).

Дефинираме тензора $\tau(X, Y)$ върху H чрез

$$\tau(X,Y) = -\epsilon_i T^{sym}(\xi_i, I_i X, Y) - \epsilon_j T^{sym}(\xi_j, I_j X, Y) - \epsilon_k T^{sym}(\xi_k, I_k X, Y). \tag{17}$$

Той не зависи от конкретния избор на векторни полета на Рийб и е $SO(1, 2)$-инвариантен, безследен, принадлежи на $[-1]$-компонентата и за него е в сила уравнението

$$\tau(X,Y) - \epsilon_i \tau(I_i X, I_i Y) - \epsilon_j \tau(I_j X, I_j Y) - \epsilon_k \tau(I_k X, I_k Y) = 0. \tag{18}$$

Тензорът τ определя симетричната част на торзионния ендоморфизъм чрез равенството

$$T^{sym}(\xi_s, X, Y) = -\frac{1}{4}\Big[\tau(I_s X, Y) + \tau(X, I_s Y)\Big]. \tag{19}$$

За да характеризираме антисиметричната част на торзионния ендоморфизъм дефинираме тензорите μ_s по следния начин:

$$\mu_s(X,Y) = \epsilon_s T^{alt}(\xi_s, I_s X, Y). \tag{20}$$

Тензорите μ_s са безследни, симетрични и съвпадат. Означаваме $\mu := \mu_i$. В сила е равенството

$$\mu(I_sX, I_sY) = -\epsilon_s\mu(X, Y), \tag{21}$$

и следователно μ е $SO(1,2)$-инвариантен. В размерност седем $\mu = 0$ и торзионният ендоморфизъм $T(\xi, X, Y)$ е симетричен. Тензорът μ определя антисиметричната част на торзията чрез равенството

$$T^{alt}(\xi_s, X, Y) = \mu(I_sX, Y). \tag{22}$$

Така получаваме, че върху пкк многообразие с фиксирана метрика върху H тензорът на торзията удовлетворява

$$T(\xi_s, X, Y) = -\frac{1}{4}\Big[\tau(I_sX, Y) + \tau(X, I_sY)\Big] + \mu(I_sX, Y). \tag{23}$$

3 Основни примери

Базов пример на пкк многообразие се дава от паракватернионната група на Хайзенберг $G(pH)$, която може да бъде дефинирана като

$$G(pH) = pQ^n \times \mathrm{Im}(pQ),$$

където груповото умножение се задава с правилото

$$(q', \omega') = (q_o, \omega_o)(q, \omega) = (q_o + q, \omega_o + \omega + 2\,\mathrm{Im}(q_o\bar{q})),$$

където $q, q_o \in pQ^n$ и $\omega, \omega_o \in \mathrm{Im}(pQ)$.

В локални координати задаваме хоризонтално разпределение H върху $G(pH)$ като линейна обвивка на следните лявоинвариантни векторни полета T_a, X_a, Y_a, Z_a, дефинирани с уравненията:

$$\begin{aligned}
T_a &= \partial_{t^a} + 2x^a\partial_{x^a} + 2y^a\partial_{y^a} + 2z^a\partial_{z^a};\\
X_a &= \partial_{x^a} - 2t^a\partial_{x^a} - 2z^a\partial_{y^a} + 2y^a\partial_{z^a};\\
Y_a &= \partial_{y^a} + 2z^a\partial_{x^a} - 2t^a\partial_{y^a} - 2x^a\partial_{z^a};\\
Z_a &= \partial_{z^a} - 2y^a\partial_{x^a} + 2x^a\partial_{y^a} - 2t^a\partial_{z^a}.
\end{aligned}$$

Хоризонталната метрика със сигнатура $(2n, 2n)$ се задава чрез уравненията

$$g(T_a, T_a) = g(X_a, X_a) = -g(Y_a, Y_a) = -g(Z_a, Z_a).$$

Централните (вертикални) ляво-инвариантни векторни полета ξ_3, ξ_1, ξ_2 се определят с равенствата:

$$\xi_3 = 2\partial_{x^a}, \quad \xi_1 = 2\partial_{y^a}, \quad \xi_2 = 2\partial_{z^a}.$$

В сила са следните формули за комутаторите:

$$[J_i T_a, T_a] = 2\xi_i, \quad [J_i T_a, J_j T_a] = -2\xi_k.$$

Контактната форма върху $G(pH)$ се дефинира в локални координати като

$$\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}_3, \tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2) = \frac{1}{2}\big(d\omega - q d\bar{q} + dq\bar{q}\big). \tag{24}$$

Чрез директно пресмятане може да с установи, че ляво-инвариантната плоска свързаност върху $G(pH)$ съвпада с каноничната пкк свързаност на пкк многообразието $(G(pH), \tilde{\Theta})$. Тази плоска пкк структура върху паракватернионната група на Хайзенберг $G(pH)$ се оказва (локално) единствената пкк структура с плоска канонична свързаност, както се установява по-долу в Теорема 6.2. Прилагането на хиперболична ротация върху 1-формите, определящи хоризонталното разпределение на $G(pH)$, води до еквивалентна пкк структура със същата канонична връзка.

Като втори пример са разгледани пара-3-Сасакиевите многообразия, като първо е припомнена тяхната дефиниция от [9, 2, 3, 1].

Дефиниция 3.1. *Нека (PS, g) е псевдо-Риманово многообразие с размерност $(4n+3)$ и метрика със сигнатура $(2n+1, 2n+2)$. Казваме, че PS е пара-3-Сасакиево многообразие, ако съществуват три ортогонални Килингови векторни полета ξ_1, ξ_2, ξ_3 с дължина $g(\xi_s, \xi_s) = -\epsilon_s$, чиито комутатори удовлетворяват уравненията*

$$[\xi_i, \xi_j] = 2\epsilon_k \xi_k. \tag{25}$$

Освен това, ендоморфизмите Φ_i, дефинирани чрез $\Phi_i B = \nabla^g_B \xi_i$, удовлетворяват:

$$(\nabla^g_A \Phi_i)B = g(\xi_i, B)A - g(A, B)\xi_i. \tag{26}$$

След като е доказано съществуването на каноничната пкк свързаност ∇ върху всяко пара-3-Сасакиево многообразие е получен и следния резултат, който характеризира пара-3-Сасакиевите многообразия:

Твърдение 3.2. *Торзията на всяка пара-3-Сасакиева структура тъждествено се анулира, т.е. $\tau = \mu = 0$.*

4 Кривината на каноничната свързаност

Целта на този раздел е да се покаже как кривината на каноничната пкк свързаност се определя напълно чрез нейното ограничение върху H и торзионните ендоморфизми τ и μ.

Нека кривината на ∇ е дефинирана чрез

$$R(A,B)C = [\nabla_A, \nabla_B]C - \nabla_{[A,B]}C.$$

Съответният тензор на кривината от тип (0,4) се задава чрез

$$R(A,B,C,D) = g(R(A,B)C,D), \quad A,B,C,D \in \Gamma(TM).$$

Дефиниция 4.1. *Въвеждат се следните тензори от тип Ричи:*

$$\begin{aligned}
\rho_s(B,C) &= \frac{1}{4n}R(B,C,e_a,I_se_a), && \text{– пкк-Ричи 2-форми,}\\
Ric(B,C) &= R(e_a,B,C,e_a), && \text{– пкк-Ричи тензор,}\\
Scal &= Ric(e_a,e_a), && \text{– пкк-скаларна кривина,}\\
\zeta_s(B,C) &= \frac{1}{4n}R(e_a,B,C,I_se_a),\\
\varrho_s(B,C) &= \frac{1}{4n}R(e_a,I_se_a,B,C), && \text{като } \varrho_s(C,B) = -\varrho_s(B,C).
\end{aligned}$$

Тензорите на Ричи, ограничени върху $H \times H$ (т.нар. хоризонтални тензори на Ричи), се изразяват чрез торзионния ендоморфизъм на каноничната пкк свързаност и пкк-скаларната кривина.

Теорема 4.2. *Върху пкк многообразие с размерност* $(4n+3)$*, хоризонталните тензори на Ричи* Ric *и* $\zeta_s(X,I_sY)$ *са симетрични. Хоризонталните тензори* $\rho_s(X,I_sY)$ *и* $\varrho_s(X,I_sY)$ *са симетрични спрямо* I_s *(тензори от тип* $(1,1)$*). В сила са следните формули:*

$$Ric(X,Y) = \frac{Scal}{4n}g(X,Y) + (2n+2)\tau(X,Y) + (4n+10)\mu(X,Y); \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\rho_s(X,I_sY) &= \epsilon_s\frac{Scal}{8n(n+2)}g(X,Y)\\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[\epsilon_s\tau(X,Y) - \tau(I_sX,I_sY)\Big] + 2\epsilon_s\mu(X,Y);
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\varrho_s(X, I_sY) = \epsilon_s \frac{Scal}{8n(n+2)} g(X,Y) \tag{29}$$
$$+ \frac{n+2}{2n}\Big[\epsilon_s \tau(X,Y) - \tau(I_sX, I_sY)\Big];$$

$$\zeta_s(X, I_sY) = \frac{1}{4n}\tau(I_sX, I_sY) \tag{30}$$
$$- \epsilon_s \frac{2n+1}{4n}\Big[\tau(X,Y) + 2\mu(X,Y)\Big] - \frac{\epsilon_s Scal}{16n(n+2)} g(X,Y);$$

$$Scal = -8n(n+2) g(T(\xi_1, \xi_2), \xi_3) = 8n(n+2)\lambda; \tag{31}$$

$$T(\xi_i, \xi_j) = \epsilon_k \frac{Scal}{8n(n+2)} \xi_k - [\xi_i, \xi_j]_H; \tag{32}$$

$$T(\xi_i, \xi_j, I_kX) = \rho_k(I_jX, \xi_i) = -\rho_k(I_iX, \xi_j) = \omega_k([\xi_i, \xi_j]_H, X); \tag{33}$$

$$-\epsilon_i \rho_i(X, \xi_i) = -\frac{X(Scal)}{32n(n+2)} \tag{34}$$
$$+ \frac{1}{2}\Big[-\rho_i(\xi_j, I_kX) + \rho_j(\xi_k, I_iX) + \rho_k(\xi_i, I_jX)\Big];$$

$$-\epsilon_i \rho_i(\xi_i, \xi_j) - \epsilon_k \rho_k(\xi_k, \xi_j) = \frac{1}{16n(n+2)} \xi_j(Scal). \tag{35}$$

При $n = 1$ горните формули са валидни с $\mu = 0$.

5 Локални структурни уравнения на пкк многообразията

Фундаменталните 2-форми ω_s на пкк структурата са локално дефинирани хоризонтални 2-форми. В този параграф се въвежда глобална хоризонтална 4-форма Ω, чийто външен диференциал съдържа съществена информация за торзионния ендоморфизъм на каноничната пкк свързаност, при условие че размерността на многообразието е по-голяма от 7. $Sp(n,\mathbb{R})Sp(1,\mathbb{R})$-инвариантната фундаментална 4-форма на дадено пкк многообразие е глобално дефинирана върху хоризонталното разпределение H чрез

$$\Omega = -\omega_1 \wedge \omega_1 - \omega_2 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_3. \tag{36}$$

Най-напред се извеждат локалните структурни уравнения на пкк структурата чрез $sp(1,\mathbb{R})$-свързващите форми на каноничната пкк свързаност и пкк-скаларната кривина:

$$
\begin{aligned}
d\eta_i &= -\epsilon_i 2\omega_i + \eta_j \wedge \alpha_k + \epsilon_j \eta_k \wedge \alpha_j + \epsilon_i \lambda \eta_j \wedge \eta_k, && (37)\\
d\omega_i &= \omega_j \wedge [\epsilon_k \alpha_k - \epsilon_j \lambda \eta_k] && (38)\\
&+\omega_k \wedge [\alpha_j + \epsilon_k \lambda \eta_j] + \epsilon_k \rho_k \wedge \eta_j - \epsilon_j \rho_j \wedge \eta_k + \frac{1}{2} d\lambda \wedge \eta_j \wedge \eta_k,\\
d\Omega &= \sum_{(ijk)} -\epsilon_i \Big[2\eta_i \wedge (\rho_k^0 \wedge \omega_j - \rho_j^0 \wedge \omega_k) + d\lambda \wedge \omega_i \wedge \eta_j \wedge \eta_k \Big], && (39)
\end{aligned}
$$

където α_s са $sp(1,\mathbb{R})$-свързващите 1-форми на каноничната пкк свързаност, $\sum_{(ijk)}$ означава цикличната сума по четните пермутации на $\{1,2,3\}$, а

$$\rho_s^0(X,Y) = \frac{1}{2}\Big[\tau(X, I_sY) - \tau(I_sX, Y)\Big] + 2\mu(X, I_sY) \qquad (40)$$

представлява безследната част на 2-формите на Ричи.

Следващият резултат изразява тензорите τ и μ чрез външния диференциал на фундаменталната 4-форма.

В сила са следните равенства:

$$\mu(X,Y) = -\frac{1}{32n}\Big[d\Omega(\xi_i, X, I_kY, e_a, I_je_a) - \epsilon_k d\Omega(\xi_i, I_iX, I_jY, e_a, I_je_a) \Big]; \qquad (41)$$

$$\tau(X,Y) = \frac{1}{16(1-n)} \sum_{(ijk)} \Big\{ d\Omega(\xi_i, X, I_kY, e_a, I_je_a) + \epsilon_k d\Omega(\xi_i, I_iX, I_jY, e_a, I_je_a) \Big\}. \qquad (42)$$

6 Плоският модел

Анулирането на хоризонталната кривина води до анулиране на цялата кривина, т.е.

Твърдение 6.1. *Нека кривината на каноничната пкк свързаност се анулира върху H, т.е. $R_{|H} = 0$. Тогава ∇ е плоска, $R = 0$, ненулевата част на торзията се задава чрез*

$$T(X,Y) = -[X,Y]_{|V} = \sum_{s=1}^{3} d\eta_s(X,Y)\xi_s = -2\sum_{s=1}^{3} \epsilon_s\omega_s(X,Y)\xi_s, \qquad (43)$$

а вертикалното разпределение V е инволютивно.

Така можем да формулираме следната теорема, показваща че паракватернионната група на Хайзенберг служи като плосък модел на пкк многообразие.

Теорема 6.2. *Нека $(M,\eta,\mathbb{PQ},g)$ е паракватернионно контактно многообразие с размерност $4n+3$. Тогава $(M,\eta,\mathbb{PQ},g)$ е локално изоморфно на паракватернионната група на Хайзенберг точно тогава, когато хоризонталната кривина на каноничната пкк свързаност е нулева, т.е.*

$$R(X,Y,Z,V) = 0.$$

7 Пкк-Айнщайнови паракватернионно контактни структури

Пкк-Айнщайновите многообразия са тези многообразия, за които пкк-Ричи тензорът е пропорционален на метриката, т.е. безследната част на пкк-Ричи тензора се анулира. Следният резултат описва структурата на пкк-Айнщайновите многообразия.

Теорема 7.1. *Нека $(M,g,\mathbb{PQ})$ е пкк многообразие с размерност $(4n+3)$. Тогава:*

a) $(M,g,\mathbb{PQ})$ е пкк-Айнщайново тогава и само тогава, когато тензорите $\tau = \mu = 0$, т.е. торзионният ендоморфизъм се анулира тъждествено, $T(\xi,X) = 0$.

b) Всяко пкк-Айнщайново многообразие с размерност по-голяма от 7 има постоянна пкк-скаларна кривина и вертикалното разпределение, породено от Риӥб векторните полета, е интегруемо, $[\xi_s,\xi_t] \in V$.

c) Ако $n > 1$, тогава $(M,g,\mathbb{PQ})$ е пкк-Айнщайново тогава и само тогава, когато фундаменталната 4-форма е затворена, $d\Omega = 0$.

Основни примери на пкк-Айнщайнови многообразия се дават от пара-3-Сасакиевите многообразия. Действително, с оглед на (27), пкк-Айнщайновото условие е еквивалентно на анулирането на торзионния ендоморфизъм, т.е. $\tau = \mu = 0$, а Твърдение 3.2 дава, че всяко пара-3-Сасакиево многообразие е пкк-Айнщайново. По-точно, в сила е следното:

Твърдение 7.2. *Всяко пара-3-Сасакиево многообразие е пкк-Айнщайново с пкк-скаларна кривина*

$$Scal = 16n(n+2). \tag{44}$$

Структурните уравнения на пара-3-Сасакиевите многообразия се дават от

$$\begin{aligned} d\eta_s(\xi_t, X) &= d\eta_s(\xi_t, \xi_s) = 0, \\ d\eta_i(\xi_j, \xi_k) &= -2\epsilon_i, \quad d\eta_i = -2\epsilon_i\omega_i - 2\epsilon_i\eta_j \wedge \eta_k, \\ d\omega_i &= 2\epsilon_j\omega_j \wedge \eta_k - 2\epsilon_k\omega_k \wedge \eta_j. \end{aligned} \tag{45}$$

Тензорите на Ричи от пкк тип за пара-3-Сасакиевите многообразия удовлетворяват

$$\begin{aligned} \rho_s(X,Y) = \varrho_s(X,Y) = -2\zeta_s(X,Y) = -2\omega_s(X,Y); \\ Ric(\xi_s, X) = \rho_s(\xi_t, X) = \zeta_s(\xi_t, X) = \rho_s(\xi_t, \xi_r) = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Оказва се, че пара-3-Сасакиевите многообразия са локално единствените пкк-Айнщайнови многообразия с ненулева пкк-скаларна кривина.

Теорема 7.3. *Нека $(M^{4n+3}, \eta, \mathbb{PQ})$ е $(4n+3)$-мерно пкк многообразие с ненулева пкк-скаларна кривина $Scal$. За $n > 1$ следните условия са еквивалентни:*

a) $(M^{4n+3}, g, \mathbb{PQ})$ е пкк-Айнщайново многообразие;

b) M^{4n+3} е локално пкк-хомотетично на пара-3-Сасакиево многообразие, т.е. локално съществува $SO(1,2)$-матрица Ψ с гладки елементи, зависещи от параметър, така че локалната пкк структура

$$\left(\frac{16n(n+2)}{Scal}\Psi \cdot \eta, \mathbb{PQ}\right)$$

е пара-3-Сасакиева.

Преглед на Глава 2: Паракватернионно контактна конформна кривина

8 Паракватернионна група на Хайзенберг и паракватернионно преобразуване на Кейли

,

Разглеждаме изображението

$$\Sigma_0 = \{(q,p) \in pS^{4n+3} \mid |p-1|^2 = (t-1)^2 + x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$$

$$\mathbb{C} : \left(pS^{4n+3} - \Sigma_0\right) \to \Sigma, \quad (q', p') = \mathbb{C}(q,p),$$

където

$$q' = (p-1)^{-1} q, \quad p' = (p-1)^{-1}(p+1).$$

Това изображение е добре дефинирано, тъй като

$$\mathrm{Re}(p') = \mathrm{Re}\left(\frac{(\bar{p}-1)(p+1)}{|p-1|^2}\right) = \frac{|p|^2-1}{|p-1|^2} = -\frac{|q|^2}{|p-1|^2} = -|q'|^2.$$

Обратното изображение се задава чрез

$$q = 2(p'-1)^{-1}q', \quad p = (p'-1)^{-1}(p'+1).$$

Чрез директно пресмятане получаваме

$$dp' = -2(p-1)^{-1}dp(p-1)^{-1}, \quad dq' = (p-1)^{-1}\Big[dq - dp(p-1)^{-1}q\Big]. \quad (47)$$

Тази трансформация се нарича *паракватернионно преобразуване на Кейли.* То е локален пкк автоморфизъм между пара-3-Сасакиевата структура върху псевдосферата и паракватернионната група на Хайзенберг.

От горните равенства получаваме:

$$\begin{aligned}
2\mathbb{C}^*\tilde{\Theta} = &-(p-1)^{-1}dp(p-1)^{-1} + (\bar{p}-1)^{-1}d\bar{p}(\bar{p}-1)^{-1} \\
&+ (p-1)^{-1}\Big[dq - dp(p-1)^{-1}q\Big]\bar{q}(\bar{p}-1)^{-1} \\
&- (p-1)^{-1}q\Big[d\bar{q} - \bar{q}(\bar{p}-1)^{-1}d\bar{p}\Big](\bar{p}-1)^{-1} \\
&= (p-1)^{-1}\Big[dq\bar{q} - qd\bar{q}\Big](\bar{p}-1)^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (p-1)^{-1}\Big[dp(p-1)^{-1}(\bar{p}-\bar{p}p)\Big](\bar{p}-1)^{-1}\\
&+ (p-1)^{-1}\Big[(p-p\bar{p})(\bar{p}-1)^{-1}d\bar{p}\Big](\bar{p}-1)^{-1}\\
&= (p-1)^{-1}\Big[dq\bar{q}-qd\bar{q}+dp\bar{p}-pd\bar{p}\Big](\bar{p}-1)^{-1}\\
&= \frac{1}{|p-1|^2}\lambda\tilde{\eta}\bar{\lambda}, \qquad (48)
\end{aligned}
$$

където $\lambda = \frac{|p-1|}{p-1}$ е единичен паракватернион, а $\bar{\eta}$ е стандартната паракватернионно контактна форма върху псевдосферата pS^{4n+3}.

Понеже $p-1 = 2(p'-1)^{-1}$ и $\lambda = \frac{1}{|p'-1|}(p'-1)$, уравнението (48) се записва като:

$$
\lambda(\mathbb{C}^*)^{-1}\bar{\lambda} = \frac{8}{|p'-1|^2}\tilde{\Theta}. \qquad (49)
$$

Така доказахме следното Твърдение:

Твърдение 8.1. *Паракватернионната група на Хайзенберг $G(pH)$ и пара-3-Сасакиевата псевдосфера pS^{4n+3} са локално пкк-конформно еквивалентни чрез паракватернионното преобразуване на Кейли.*

9 Паракватернионно контактна конформна кривина. Доказателство на Теорема 9.3

Паракватернионно контактна конформна трансформация между две паракватернионно контактни многообразия наричаме дифеоморфизъм Φ, който удовлетворява

$$
\Phi^*\eta = \mu\,\Psi\cdot\eta \qquad (50)
$$

за някаква положителна гладка функция μ и някаква матрица $\Psi \in SO(1,2)$, чиито елементи са гладки функции.

Каноничната паракватернионна свързаност остава непроменена под действието на групата $SO(1,2)$, т.е. каноничната свързаност на $\Psi\cdot\eta$ и η съвпада.

Следователно, при изследване на пкк-конформни трансформации, е достатъчно да се разглеждат само трансформации от вида

$$
\Phi^*\eta = \mu\,\eta. \qquad (51)
$$

Нека h е положителна гладка функция върху пкк многообразие (M, η). Разглеждаме конформната трансформация на пкк структурата η, зададена чрез:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2h}\eta. \tag{52}$$

За удобство ще означаваме всички обекти, свързани с $\bar{\eta}$, като добавяме черта отгоре към съответните обекти, свързани с η. Следователно, за диференциала на $\bar{\eta}$ и за новата метрика $\bar{g}$ имаме:

$$d\bar{\eta} = -\frac{1}{2h^2}dh \wedge \eta + \frac{1}{2h}d\eta, \qquad \bar{g} = \frac{1}{2h}g. \tag{53}$$

Новата тройка $\{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3\}$, определена от условията (16), задаващи Рийб-векторните полета, е:

$$\bar{\xi}_s = 2h\, \xi_s + I_s \nabla h, \tag{54}$$

където ∇h е хоризонталния градиент, дефиниран чрез:

$$\nabla h = dh(e_a)e_a, \quad g(\nabla h, X) = dh(X). \tag{55}$$

Хоризонталният хиперболичен суб-Лапласиан и нормата на хоризонталния градиент се дефинират съответно като:

$$\Delta_h h = \mathrm{tr}^g_H(\nabla^2 h) = g(e_a, e_a)\nabla^2 h(e_a, e_a), \tag{56}$$

$$|\nabla h|^2 = g(e_a, e_a)dh(e_a)\, dh(e_a). \tag{57}$$

Каноничните пкк свързаности ∇ и $\bar{\nabla}$ са свързани чрез $(1,2)$-тензор S:

$$\bar{\nabla}_A B = \nabla_A B + S_A B, \qquad A, B \in \Gamma(TM). \tag{58}$$

Получаваме, че тензорите, характеризиращи торзията се променят по следното правило:

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \tau + h^{-1}[\nabla^2 h]_{[sym][-1]}, \\ \bar{\mu} &= \mu + (2h)^{-1}[\nabla^2 h - 2h^{-1}dh \otimes dh]_{[3][0]}, \end{aligned} \tag{59}$$

където $[\nabla^2 h]_{[sym][-1]}$ означава $[-1]$-компонентата на симетричната част на хоризонталния хесиан, а $[\nabla^2 h - 2h^{-1}dh \otimes dh]_{[3][0]}$ е безследната част на $[3]$-компонентата.

Нека сега $(M, g, \mathbb{PQ})$ е $(4n+3)$-мерно пкк многообразиеи да разгледаме симетричния $(0,2)$-тензор L, дефиниран върху H чрез равенството:

$$L(X,Y) = \left(\frac{1}{4(n+1)}Ric_{[-1]} + \frac{1}{2(2n+5)}Ric_{[3][0]} + \frac{1}{32n(n+2)}Scal\, g\right)(X,Y)$$
$$= \frac{1}{2}\tau(X,Y) + \mu(X,Y) + \frac{Scal}{32n(n+2)}g(X,Y), \quad (60)$$

където $Ric_{[-1]}$ е $[-1]$-компонентата на тензора на Ричи, а $Ric_{[3][0]}$ е безследната $[3]$-компонента на Ric.

Ако означим безследната част на L с L_0, в сила следното представяне:

$$L_0 = \frac{1}{4(n+1)}Ric_{[-1]} + \frac{1}{2(2n+5)}Ric_{[3][0]} = \frac{1}{2}\tau + \mu. \quad (61)$$

Кулкарни-Номизу произведението на два (не непременно симетрични) тензора се дефинира чрез:

$$(A \owedge B)(X,Y,Z,V) := A(X,Z)B(Y,V) + A(Y,V)B(X,Z)$$
$$- A(Y,Z)B(X,V) - A(X,V)B(Y,Z).$$

Използвайки обичайната конвенция:

$$I_sL(X,Y) = g(I_sLX,Y) = -L(X,I_sY), \quad (62)$$

дефинираме $(0,4)$-тензора PWR върху H по следния начин:

$$PWR(X,Y,Z,V) = R(X,Y,Z,V) + (g \owedge L)(X,Y,Z,V)$$
$$- \sum_{s=1}^{3}\epsilon_s(\omega_s \owedge I_sL)(X,Y,Z,V) + \frac{1}{2}\sum_{(i,j,k)}\epsilon_i\omega_i(X,Y)\Big[L(Z,I_iV) - L(I_iZ,V)$$
$$- \epsilon_iL(I_jZ,I_kV) + \epsilon_iL(I_kZ,I_jV)\Big] + \sum_{s=1}^{3}\epsilon_s\omega_s(Z,V)\Big[L(X,I_sY) - L(I_sX,Y)\Big]$$
$$- \frac{1}{2n}(trL)\sum_{s=1}^{3}\epsilon_s\omega_s(X,Y)\omega_s(Z,V). \quad (63)$$

Тензорът PWR е напълно безследен, т.е.

$$Ric(PWR) = \rho_s(PWR) = \varrho_s(PWR) = \zeta_s(PWR) = 0$$

и неговата $[-1]$-компонента спрямо първите два аргумента се анулира тъждествено:

$$PWR_{[-1]}(X,Y,Z,V) = \frac{1}{4}\Big[3PWR(X,Y,Z,V) + \sum_{s=1}^{3}\epsilon_s PWR(I_sX, I_sY, Z, V)\Big] = 0 \quad (64)$$

а неговата $[3]$-компонента спрямо първите два аргумента се определя изцяло от торзията и пкк-скаларната кривина, както следва:

$$\begin{aligned}PWR_{[3]}(X,Y,Z,V) &= \frac{1}{4}\Big[PWR(X,Y,Z,V) - \sum_{s=1}^{3}\epsilon_s PWR(I_sX, I_sY, Z, V)\Big]\\
&= \frac{1}{4}\Big[R(X,Y,Z,V) - \sum_{s=1}^{3}\epsilon_s R(I_sX, I_sY, Z, V)\Big]\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}\epsilon_s\omega_s(Z,V)\big[\tau(X,I_sY) - \tau(I_sX,Y)\big]\\
&+ \frac{Scal}{32n(n+2)}\Big[(g \owedge g)(X,Y,Z,V) - \sum_{s=1}^{3}\epsilon_s(\omega_s \owedge \omega_s)(X,Y,Z,V)\Big]\\
&+ (g \owedge \mu)(X,Y,Z,V) - \sum_{s=1}^{3}\epsilon_s(\omega_s \owedge I_s\mu)(X,Y,Z,V). \quad (65)\end{aligned}$$

Дефиниция 9.1. *Означаваме* $[3]$*-компонентата на тензора* PWR*, описана в* (65)*, с* W^{pqc}*, т.е.*

$$W^{pqc} := PWR_{[3]},$$

и я наричаме параквaтернионно контактна конформна кривина.

За тензора PWR е в сила следната теорема:

Теорема 9.2. *Тензорът* PWR *е инвариантен при пкк-конформни трансформации, т.е. ако*

$$\bar{\eta} = (2h)^{-1}\Psi\eta, \quad \text{то} \quad 2h\,PWR_{\bar{\eta}} = PWR_{\eta}$$

за всяка гладка положителна функция h *и всяка матрица* $\Psi \in SO(1,2)$*.*

Комбинирайки Теорема 9.2 и уравнение (64), получаваме следната теорема:

Теорема 9.3. *Пкк-конформната кривина W^{pqc} е инвариантна при пкк-конформни трансформации.*

Следствие 9.4. *Върху пкк-многообразие пкк-скаларната кривина се трансформира при пкк-конформната трансформация*

$$\bar{\eta} = (2h)^{-1}\Psi\eta$$

съгласно уравнението:

$$\overline{Scal} = 2h\,Scal - 8(n+2)^2 h^{-1}|\nabla h|^2 + 8(n+2)\Delta_h h. \tag{66}$$

Уравнението (66) представлява суб-хиперболичното уравнение на Ямабе.

10 Обратният проблем. Доказателство на Теорема 10.1

За да докажем Теорема 10.1, търсим конформен множител, такъв че след пкк-конформна трансформация с този множител новата пкк структура да има плоска пкк-канонична свързаност, когато е ограничена върху хоризонталното пространство H.

След като постигнем тази цел, можем да приложим Теорема 6.2 и да заключим, че дадената структура е локално пкк-конформно еквивалентна на плоската пкк структура върху паракватернионната група на Хайзенберг $G(pH)$.

С оглед на тези съображения, достатъчно е (локално) да намерим решение u на системата от частни диференциални уравнения:

$$\nabla^2 u(X,Y) = -du(X)du(Y) - \sum_{s=1}^{3}\epsilon_s\Big[du(I_sX)du(I_sY) - du(\xi_s)\omega_s(X,Y)\Big] + \frac{1}{2}g(X,Y)|\nabla u|^2 - L(X,Y), \tag{67}$$

$$\nabla^2 u(X,\xi_i) = \mathbb{B}(X,\xi_i) - L(X,I_i du) + \frac{1}{2}du(I_iX)|\nabla u|^2$$

$$- du(X)du(\xi_i) + \epsilon_i du(I_jX)du(\xi_k) - \epsilon_i du(I_kX)du(\xi_j), \quad (68)$$

$$\nabla^2 u(\xi_i, \xi_i) = -\mathbb{B}(\xi_i, \xi_i) + \mathbb{B}(I_i du, \xi_i)$$
$$- \epsilon_i \frac{1}{4}|\nabla u|^4 - (du(\xi_i))^2 - \epsilon_k (du(\xi_j))^2 - \epsilon_j (du(\xi_k))^2, \quad (69)$$

$$\nabla^2 u(\xi_j, \xi_i) = -\mathbb{B}(\xi_j, \xi_i) + \mathbb{B}(I_i du, \xi_j)$$
$$- 2du(\xi_i)du(\xi_j) + \epsilon_k \frac{Scal}{16n(n+2)} du(\xi_k), \quad (70)$$

$$\nabla^2 u(\xi_k, \xi_i) = -\mathbb{B}(\xi_k, \xi_i) + \mathbb{B}(I_i du, \xi_k)$$
$$- 2du(\xi_i)du(\xi_k) - \epsilon_j \frac{Scal}{16n(n+2)} du(\xi_j), \quad (71)$$

като в сила е следното равенство

$$2u = \ln h.$$

Тук тензорът L се задава чрез (60), докато тензорите $\mathbb{B}(X, \xi_i)$ и $\mathbb{B}(\xi_i, \xi_j)$ не зависят от неизвестната функция u и се определят по следния начин:

$$\mathbb{B}(X, \xi_i) = \frac{1}{2(2n+1)} \Bigg[(\nabla_{e_a} L)(I_i e_a, X) \quad (72)$$
$$+ \frac{1}{3} \Big((\nabla_{e_a} L)(e_a, I_i X) - \nabla_{I_i X} \operatorname{tr} L \Big) \Bigg].$$

$$\mathbb{B}(\xi_s, \xi_t) = \frac{1}{4n} \Big[(\nabla_{e_a} \mathbb{B})(I_s e_a, \xi_t) + L(e_a, e_b) L(I_t e_a, I_s e_b) \Big]. \quad (73)$$

Условията за интегруемост на преопределената система (67)-(71) се дават от тъждеството на Ричи:

$$\nabla^3 u(A, B, C) - \nabla^3 u(B, A, C) = -R(A, B, C, du) - \nabla^2 u(T(A, B), C), \quad (74)$$

където $A, B, C \in \Gamma(TM)$.

Разгледани са всички възможни случаи на (74) според вида на A, B и C.

Доказано е, че анулирането на пкк-конформния тензор W^{pqc} води до изпълнението на (74), което гарантира съществуването на локално гладко решение на системата (67)-(71). С това се изчерпва доказателстото на основната теорема:

Теорема 10.1. *Пкк структура върху $(4n+3)$-мерно гладко пкк многообразие е локално пкк-конформна на стандартната плоска структура върху параквaтернионната група на Хайзенберг $G(pH)$ тогава и само тогава, когато пкк-конформната кривина се анулира, т.е. $W^{pqc} = 0$.*

Преглед на Глава 3: Твисторни и рефлекторни пространства за параквaтернионно контактни многообразия

Важно следствие от Лема 1.2 е, че на всяко пкк многообразие M може да се съпостави канонично линейно разслоение $\mathcal{G}(M) \to M$, така че ако (η_s, I_s, g) е локална пкк структура за H, тогава g е локално сечение на $\mathcal{G}(M)$. Освен това, векторното разслоение $\pi : \mathbb{PQ}(M) \to M$ със слой (над p)

$$\mathbb{PQ}_p = \mathrm{span}\{I_1, I_2, I_3\}, \tag{75}$$

също е глобално дефинирано. То е снабдено с канонично скаларно произведение,

$$\langle I_s, I_t \rangle = \begin{cases} -\epsilon_s, & \text{ако } s = t \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}, \qquad \epsilon_1 = \epsilon_2 = -\epsilon_3 = 1 \tag{76}$$

със сигнатура $(-,-,+)$ и ориентация, дефинирана чрез подреждането на I_1, I_2 и I_3.

Върху V имаме също естествена ориентация и векторно произведение $''\times''$,

$$\xi_1 \times \xi_2 = \xi_3, \qquad \xi_2 \times \xi_3 = -\xi_1, \qquad \xi_3 \times \xi_1 = -\xi_2. \tag{77}$$

11 CR и пара-CR структури върху многообразия

CR структура (или структура на Коши–Риман) върху диференцируемо многообразие е вид геометрична структура, която моделира геометрията на реална хиперповърхнина в комплексно многообразие. Формално, CR многообразие е диференцируемо многообразие N с нечетна размерност, например $(2n+1)$, снабдено с комплексна подразслоение K на комплексифицираното допирателно разслоение $\mathbb{C}TN = TN \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, така че слоевете на K са с комплексна размерност n; $[K, K] \subset K$ (т.е. K е формално интегруемо), и $K \cap \overline{K} = \{0\}$.

Ако означим с D реалната компонента на $K \oplus \overline{K}$, то D е реално разпределение с размерност $2n$ върху N. Съществува естествено поле от ендоморфизми J на разпределението D със следните свойства: $J^2 = -\mathrm{Id}_D$; слоевете на K и $\overline{K}$ са собствени подпространства на J със собствени стойности $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$, съответно. Леви-формата на CR структурата (D, J) е векторно-значна ермитова 2-форма L, дефинирана върху D със стойности в линейното разслоение TN/D. Формулата за L е:

$$L(x,y) = [x, Jy] \mod D, \qquad x, y \in D. \tag{78}$$

Аналогично, пара-CR структура върху диференцируемо многообразие с размерност $(2n+1)$ се дефинира като двойка (D, J), състояща се от разпределение с ко-размерност 1 и поле от ендоморфизми J на D, удовлетворяващи: $J^2 = \mathrm{Id}_D$ и $J \neq \pm \mathrm{Id}_D$; $[K, K] \subset K$ и $[\tilde{K}, \tilde{K}] \subset \tilde{K}$, където K и $\tilde{K}$ са съответно собствените подпространства на J със собствени стойности 1 и -1. В този случай Леви-формата е векторна симетрична 2-форма L, дефинирана върху D със стойности в линейното разслоение TN/D, отново дадена чрез формулата (78).

12 Твисторно и рефлекторно пространство

Твисторното пространство $\mathcal{Z}$ и рефлекторното пространство $\mathcal{R}$ на пкк многообразие $(M, g, \mathbb{PQ})$ се дефинират като подразслоения на каноничното векторно разслоение $\pi : \mathbb{PQ}(M) \to M$ (вж. (75)). Съответните слоеве над точка $p \in M$ са:

$$\mathcal{Z}_p = \left\{ I \in \mathbb{PQ}_p(M) \ : \ I^2 = -\mathrm{id} \right\}, \quad \mathcal{R}_p = \left\{ I \in \mathbb{PQ}_p(M) \ : \ I^2 = \mathrm{id} \right\}.$$

Целта на този раздел е да докажем следните две твърдения:

Твърдение 12.1. *Върху твисторното пространство $\mathcal{Z}$ съществува естествено разпределение с ко-размерност 1, $\mathcal{K} \subset T\mathcal{Z}$, и гладко поле J от ендоморфизми на $\mathcal{K}$, удовлетворяващо $J^2 = -id$ (такава двойка $(\mathcal{K}, J)$ се нарича почти CR структура).*

Освен това, ако η е произволна локална 1-форма върху $\mathcal{Z}$ с $\mathcal{K} = \ker(\eta)$, тогава за всяка точка $I \in \mathcal{Z}$, $d\eta(J\cdot, \cdot)$ е неизроден симетричен 2-тензор върху $\mathcal{K}_I$ със сигнатура $(2n+2, 2n+2)$, т.е. Леви-формата на почти CR структурата върху $\mathcal{Z}$ е със сигнатура $(2n+2, 2n+2)$.

Твърдение 12.2. *Върху рефлекторното пространство $\mathcal{R}$ съществува естествено разпределение с ко-размерност 1, $\mathcal{K} \subset T\mathcal{R}$, и гладко поле J от ендоморфизми на $\mathcal{K}$, удовлетворяващо $J^2 = id$ (такава двойка $(\mathcal{K}, J)$ се нарича почти пара-CR структура).*

Освен това, ако η е произволна локална 1-форма върху $\mathcal{R}$ с $\mathcal{K} = \ker(\eta)$, тогава за всяка точка $I \in \mathcal{R}$, $d\eta(J\cdot, \cdot)$ е неизроден симетричен 2-тензор върху $\mathcal{K}_I$ със сигнатура $(2n+2, 2n+2)$, т.е. Леви-формата на почти пара-CR структурата върху $\mathcal{R}$ е със сигнатура $(2n+2, 2n+2)$.

12.1 Индуцирана структура върху $\mathbb{PQ}$

Фиксираме произволно неанулиращо се сечение g на линейното разслоение $\mathcal{G}(M) \to M$ и разглеждаме съответната канонична свързаност ∇ върху допирателното разслоение TM. Ще използваме ∇, за да индуцираме определена структура върху допирателното пространство на векторното разслоение $\mathbb{PQ} = \mathbb{PQ}(M)$. Действително, тъй като ∇ запазва векторното разслоение $\mathbb{PQ} \subset End(TM)$, тя определя хоризонтално разпределение $\mathcal{D} \subset T\mathbb{PQ}$ така, че хоризонталният лифт A^h (относно ∇) на произволно векторно поле A върху M е векторно поле върху $\mathbb{PQ}$, тангенциално на $\mathcal{D}$. От друга страна, има разпределение $\mathcal{F} = \ker(\pi_*) \subset T\mathbb{PQ}$, което се състои от всички вектори, които са тангенциални на слоевете на разслоението $\pi : \mathbb{PQ} \to M$. Имаме следното разлагане на директна сума:

$$T\mathbb{PQ} \;=\; \mathcal{D} \;\oplus\; \mathcal{F}.$$

Диференциалът π_* на проекционното изображение $\pi : \mathbb{PQ} \to M$ във всяка точка $I \in \mathbb{PQ}$ е изоморфизъм от $\mathcal{D}_I$ в T_pM, където $p = \pi(I)$. Освен това съществува естествен изоморфизъм $\mathcal{F}_I \cong \mathbb{PQ}_p$, който отъждествява допирателния вектор към крива $t \mapsto I(t) \in \mathbb{PQ}_p$ в точката $I(0) = I$ (тоест всеки елемент на $\mathcal{F}_I$) със съответната производна $\frac{dI(t)}{dt}_{|t=0}$ (която се разглежда като елемент от слоя $\mathbb{PQ}_p$).

Разглеждаме сега (достатъчно малка) област U с локални координати u_α, $1 \leq \alpha \leq 4n+3$ върху M. За всяко $I \in \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{PQ}$ имаме, че $I = x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_3$. По този начин може да разглеждаме функциите

$$u_\alpha \circ \pi,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \qquad 1 \leq \alpha \leq 4n+3, \tag{79}$$

като локални координати върху $\mathbb{PQ}$ (за краткост ще записваме $u_\alpha \circ \pi$ като u_α). В тази координатна карта, изоморфизмът от $\mathcal{F}_I$ в $\mathbb{PQ}_p$ отъждествява $\frac{\partial}{\partial x_s}$ с I_s за $s = 1, 2, 3$.

Хоризонталният лифт A^h на векторно поле A се определя еднозначно чрез свързаността и описва начина, по който A се повдига в разслоението $\mathbb{PQ}$ над M. Формулата за A^h включва корекции, зависещи от 1-формите α_s на свързаността ∇, които определят паракватернионно контактната структура върху M.

Спрямо координатната карта (79), хоризонталният лифт A^h на произволно векторното поле

$$A \;=\; \sum_{a=1}^{4n+3} A_s \frac{\partial}{\partial u_a}$$

върху M в точката $I = \sum_s x_s I_s \in \mathbb{PQ}$ се дава от формулата

$$A^h_I \;=\; \sum_{\alpha=1}^{4n+3} A_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} \;-\; \sum_{(ijk)} \Big(x_j\, \alpha_k(A) + \epsilon_j x_k \alpha_j(A) \Big) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{80}$$

където с A^h_I означаваме стойността на A^h в точката I, а α_s са 1-формите, определящи свързаността ∇.

За всеки две векторни полета A и B върху M, спрямо координатна карта (79), комутаторът на техните съответни хоризонтални лифтове A^h и B^h в произволна точка $I = \sum_s x_s I_s \in \mathbb{PQ}$, се дава от формулата:

$$\big[A^h, B^h\big]_I \;=\; \big[A, B\big]^h_I \;+\; \sum_{(ijk)} 2\Big(- \epsilon_j x_j \rho_k(A,B) + \epsilon_k x_k \rho_j(A,B) \Big) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

където ρ_s са съответните 2-форми на Ричи.

Дефиниция 12.3. *Разглеждаме две естествено дефинирани (глобални) векторни полета χ и $\mathcal{N}$ върху $\mathbb{PQ}$. Във всяка точка $I = \sum_s x_s I_s \in \mathbb{PQ}$, спрямо координатната карта* (79), *задаваме*

$$\chi \;=\; \sum_s x_s \xi^h_s \qquad \text{и} \qquad \mathcal{N} \;=\; \sum_s x_s \frac{\partial}{\partial x_s}. \tag{81}$$

$\mathcal{N}$ е сечение на вертикалното разпределение $\mathcal{F} \subset T\mathbb{PQ}$. От друга страна, разлагането $TM = H \oplus V$ дефинира разлагане на хоризонталното разпределение $\mathcal{D} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$, като векторното поле χ е навсякъде допирателно към $\mathcal{V}$.

Ако $I \in \mathbb{PQ}$, разглеждан като ендоморфизъм на векторното пространство $H_p \subset T_pM$, удовлетворява $I^2 \neq 0$, тогава, като обозначим с $\mathcal{W}_I$ ортогоналното допълнение на $\mathcal{N}$ в $\mathcal{F}_I$ и с $\mathcal{U}_I$ ортогоналното допълнение на χ във $\mathcal{V}_I$, получаваме разлагането

$$T_I\mathbb{PQ} \;=\; \overbrace{\mathcal{H}_I \oplus \underbrace{\mathcal{U}_I \oplus \mathbb{R}\cdot\chi_I}_{\mathcal{V}_I}}^{\mathcal{D}_I} \oplus \underbrace{\mathcal{W}_I \oplus \mathbb{R}\cdot\mathcal{N}_I}_{\mathcal{F}_I}. \tag{82}$$

Разглеждаме канонична 1-форма η върху $\mathbb{PQ}$, дефинирана във всяка точка $I \in \mathbb{PQ}$ чрез:

$$\eta \;=\; \sum_s -\epsilon_s x_s\, \pi^*(\eta_s), \tag{83}$$

където $\pi^*(\eta_s)$ е изтеглената (pullback) чрез $\pi : \mathbb{PQ} \to M$ 1-форма η. За да изчислим външния диференциал на η, въвеждаме три локални 1-форми ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 върху $\mathbb{PQ}$, дефинирани чрез:

$$\phi_i = -\epsilon_i\, dx_i - \epsilon_i x_j\, \pi^*(\alpha_k) - \epsilon_k x_k\, \pi^*(\alpha_j). \tag{84}$$

Формите ϕ_s са дефинирани само в координатната карта (79). Всяка ϕ_s се анулира върху хоризонталното разпределение $\mathcal{D}$ и имаме:

$$\phi_s\Big(\frac{\partial}{\partial x_t}\Big) \;=\delta_{st}. \tag{85}$$

За всеко $A \in T_I\mathbb{PQ}$, получаваме [1]:

$$A = \Big(\big(\pi_* A\big)_H\Big)^h \;+\; \sum_s \Big(\eta_s(A)\,\xi_s^h \;-\; \epsilon_s\phi_s(A)\,\frac{\partial}{\partial x_s}\Big). \tag{86}$$

Външният диференциал на каноничната 1-форма η върху $\mathbb{PQ}$, в координатната карта (79), е даден от:

$$d\eta \;=\; \sum_{(ijk)}\Big(2x_i\,\pi^*(\omega_i) \;+\; \phi_i\wedge\pi^*(\eta_i) \;-\; \frac{Scal}{8n(n+2)}\,x_i\,\pi^*(\eta_j\wedge\eta_k)\Big).$$

[1] Долният индекс H означава проекция върху H спрямо разлагането.

Като следствие получаваме, че за всяко $I = \sum_s x_s I_s \in \mathbb{PQ}$, каноничната 1-форма η и векторното поле χ (вж. (81)) удовлетворяват:

$$\eta(\chi) \;=\; -\sum_s \epsilon_s\, x_s^2 \qquad \text{и} \qquad \chi \lrcorner d\eta \;=\; \sum_s \epsilon_s\, x_s\, dx_s.$$

Нека $\mathbb{PQ}^o \subset \mathbb{PQ}$ е отвореното подмножество, състоящо се от всички $I \in \mathbb{PQ}$, за които $I^2 \neq 0$. Твисторното пространство $\mathcal{Z}$ и рефлекторното пространство $\mathcal{R}$ са подмногообразия на $\mathbb{PQ}^o$. Върху многообразието $\mathbb{PQ}^o$ имаме разпределението

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} \subset T\mathbb{PQ}^o. \tag{87}$$

Ако използваме локалните координати (79) и 1-формите ϕ_s (вж. (85)), разпределението $\mathcal{K}$ може да се опише чрез уравненията:

$$\sum_s -\epsilon_s x_s\, \pi^*(\eta_s) \;=\; 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_s x_s\, \phi_s \;=\; 0.$$

Въвеждаме естествено поле от ендоморфизми J върху разпределението $\mathcal{K}$, което удовлетворява $J^2 = -\langle I, I\rangle\, \mathrm{id}$, по следния начин:

$$J(X+U+W) \;=\; \Big(I\big(\pi_* X\big)\Big)^h_I \;+\; \chi_I \times U \;+\; \mathcal{N}_I \times W, \tag{88}$$

където $X \in \mathcal{H}_I$, $U \in \mathcal{U}_I$ и $W \in \mathcal{W}_I$.

За произволно $A \in \mathcal{K}_I$, спрямо локалната карта (79), имаме (вж. (86))

$$\begin{aligned} J(A) \;=\; &\sum_s x_s \Big(I_s \pi_*(A)_H\Big)^h \;+ \sum_{(ijk)} \Big(-\epsilon_i\, x_j\, \eta_k(\pi_* A) + \epsilon_i\, x_k\, \eta_j(\pi_* A)\Big)\xi_i^h \\ &+ \sum_{(ijk)} \Big(-\epsilon_j\, x_j\, \phi_k(A) + \epsilon_k\, x_k\, \phi_j(A)\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{89}$$

Нека означим с G билинейната форма

$$G(A,B) = -\frac{1}{2\,\langle I, I\rangle} d\eta(JA, B), \qquad A, B \in \mathcal{K}_I.$$

Тъй като $J^2 = -\langle I, I\rangle\, \mathrm{id}$, имаме

$$d\eta(A,B) \;=\; 2G(JA,B), \qquad A, B \in \mathcal{K}_I.$$

Лема 12.4. *За всяко $I \in \mathbb{PQ}^o$, 2-формата G, дефинирана върху $\mathcal{K}_I \subset T_I\mathbb{PQ}^o$ $\big($вж. (87)$\big)$, е симетрична и със сигнатура $(2n+2, 2n+2)$. За произволни $A, B \in \mathcal{K}_I$ тя има свойството*

$$G(JA, B) = -G(A, JB).$$

Експлицитно, в координатната карта (79), тя е дадена чрез уравнението:

$$\begin{aligned} G(A,B) \ &= g\Big(\big(\pi_* A\big)_H, \big(\pi_* B\big)_H\Big) \\ &+ \ \frac{Scal}{16n(n+2)} \sum_s \epsilon_s \, \eta_s(\pi_* A) \, \eta_s(\pi_* B) \\ &- \ \frac{1}{2\,\langle I, I\rangle} \sum_{(ijk)} \ x_i \Big(- \epsilon_j \phi_j(A) \, \eta_k(\pi_* B) \ - \ \epsilon_j \eta_k(\pi_* A) \, \phi_j(B) \\ &\qquad\qquad + \ \epsilon_k \phi_k(A) \, \eta_j(\pi_* B) \ + \ \epsilon_k \eta_j(\pi_* A) \, \phi_k(B) \Big). \end{aligned} \tag{90}$$

12.2 Инвариантност

За дефинирането на разпределението $\mathcal{K} \subset T\mathbb{PQ}^o$ и съответното поле J $\big($вж. (88)$\big)$, използвахме като основен инструмент концепцията за хоризонтален лифт на векторни полета спрямо свързаността ∇. Тъй като ∇ е каноничната свързаност, определена от избора на сечение g на каноничното линейно разслоение $\mathcal{G} \to M$, цялата конструкция зависи от този избор. Целта в този раздел е да покажем, че тази зависимост е само формална и че, при пкк-конформна трансформация, както $\mathcal{K}$, така и J остават непроменени.

Ако A е векторно поле върху M с хоризонтален лифт A^h към $\mathbb{PQ}$, дефиниран спрямо g и ∇, ще означаваме с $A^{\bar{h}}$ съответния хоризонтален лифт на A към $\mathbb{PQ}$, дефиниран спрямо $\bar{g}$ и неговата канонична свързаност $\overline{\nabla}$. Очевидно, ако (η_s, I_s, g) е локална пкк-структура за H, то и $(\overline{\eta}_s, I_s, \bar{g})$ е пкк-структура, като $\overline{\eta}_s = \frac{1}{2f}\eta_s$.

За 1-формите н$\overline{\alpha}_s$ на свързаността $\overline{\nabla}$, имаме:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_i(X) &= \epsilon_j \alpha_i(X) - \frac{\epsilon_i}{f} df(I_i X), \\
\overline{\alpha}_i(\overline{\xi}_i) &= 2f\,\epsilon_j \alpha_i(\xi_i) - \frac{\Delta f}{2n} + \frac{g(\nabla f, \nabla f)}{n\,f}, \\
\overline{\alpha}_j(\overline{\xi}_i) &= 2f\,\epsilon_k \alpha_j(\xi_i) + \epsilon_k \alpha_j(I_i \nabla f) + 2\epsilon_i\, df(\xi_k), \\
\overline{\alpha}_k(\overline{\xi}_i) &= 2f\,\epsilon_i \alpha_k(\xi_i) + \epsilon_i \alpha_k(I_i \nabla f) - 2\epsilon_i\, df(\xi_j),
\end{aligned} \tag{91}$$

където Δf е хоризонталния хиперболичен суб-Лапласиан.

Спрямо координатната карта (79) върху $\mathbb{PQ}$, хоризонталният лифт на векторни полета от M към $\mathbb{PQ}$ е даден чрез следните формулите:

$$\begin{aligned}
\overline{X}^{\bar{h}} &= X^h + \sum_{(ijk)} x_i \big(\epsilon_j\, df(I_j X) \frac{\partial}{\partial x_k} - \epsilon_k\, df(I_k X) \frac{\partial}{\partial x_j} \big), \\
\overline{\xi}_i^{\,\bar{h}} &= 2\,f\,\xi_i^h + \big(I_i \nabla f\big)^h + 2\,df\big(\pi_* \chi\big) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&\quad - 2\epsilon_i\, x_i \sum_t \epsilon_t\, df(\xi_t) \frac{\partial}{\partial x_t} \\
&\quad + \epsilon_j x_i \Big(- \frac{\Delta f}{2n} + \frac{g(\nabla f, \nabla f)}{n\,f} \Big) \big(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_j} \big),
\end{aligned} \tag{92}$$

където $X \in \Gamma(H)$.

Векторното поле $\mathcal{N}$ върху $\mathbb{PQ}$ (вж. (81)) не зависи от избора на g и ∇, докато полето χ се променя по следния начин:

$$\begin{aligned}
\overline{\chi} &= \sum_s x_s\, \overline{\xi}_s^{\,\bar{h}} \\
&= \chi + 2\,df(\pi_* \chi)\, \mathcal{N} + J\big(\nabla f\big)^h + 2\,\langle I, I \rangle \sum_t \epsilon_t\, df(\xi_t) \frac{\partial}{\partial x_t}.
\end{aligned}$$

Твърдение 12.5. *Разпределението $\mathcal{K}$ върху $\mathbb{PQ}^o$ (дефинирано чрез* (87)*) и полето J от ендоморфизми на $\mathcal{K}$ (дефинирано чрез* (88)*) не зависят от избора на g и ∇.*

13 Интегруемост

В този раздел разглеждаме въпроса за интегруемостта на въведената в Раздел 12 почти CR структура $(\mathcal{K}, J)$ върху твисторното пространство

$\mathcal{Z}$ и съответната почти пара-CR структура върху рефлекторното пространство $\mathcal{R}$.

От Лема 12.4 следва, че ако A и B са произволни сечения на $\mathcal{K}$, то

$$\big[JA, B\big] + \big[A, JB\big]$$

също е сечение на $\mathcal{K}$. Следователно, интегруемостта на почти CR структурата $(\mathcal{K}, J)$ върху $\mathcal{Z}$ е еквивалентна на $N^{\mathcal{Z}}(A, B) = 0$, където $N^{\mathcal{Z}}$ е тензорът на Нойнхойз, дефиниран като:

$$N^{\mathcal{Z}}(A, B) \ = \ -\big[A, B\big] \ + \ \big[JA, JB\big] \ - \ J\Big(\big[JA, B\big] + \big[A, JB\big]\Big) \qquad (93)$$

за произволни две векторни полета A и B върху $\mathcal{Z}$, които са допирателни към разпределението $\mathcal{K} \subset T\mathcal{Z}$.

Комплексифицираното разпределение $\mathcal{K}^c = \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ върху $\mathcal{Z}$ се разлага като

$$\mathcal{K}^c = \mathcal{K}_{\sqrt{-1}} \ \oplus \ \mathcal{K}_{-\sqrt{-1}},$$

където $\mathcal{K}_{\sqrt{-1}}$ и $\mathcal{K}_{-\sqrt{-1}}$ са собствените подпространства на J, съответстващи на собствените стойности $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$. Анулирането на тензора на Нойнхойз $N^{\mathcal{Z}}$ е еквивалентно на формалната интегруемост на комплексните разпределения $\mathcal{K}_{\sqrt{-1}}$ и $\mathcal{K}_{-\sqrt{-1}}$, което означава, че трябва да бъдат изпълнени едновременно следните две условия:

$$\Big[\mathcal{K}_{\sqrt{-1}}, \ \mathcal{K}_{\sqrt{-1}}\Big] \subset \mathcal{K}_{\sqrt{-1}} \qquad \text{и} \qquad \Big[\mathcal{K}_{-\sqrt{-1}}, \ \mathcal{K}_{-\sqrt{-1}}\Big] \subset \mathcal{K}_{-\sqrt{-1}}.$$

По аналогия, почти пара-CR структурата $(\mathcal{K}, J)$ върху рефлекторното пространство $\mathcal{R}$ е интегруема, ако $N^{\mathcal{R}}(A, B) = 0$ за произволни две сечения A и B на разпределението $\mathcal{K} \subset T\mathcal{R}$, където тензорът на Нойнхойз $N^{\mathcal{R}}$ е дефиниран като

$$N^{\mathcal{R}}(A, B) \ = \ \big[A, B\big] \ + \ \big[JA, JB\big] \ - \ J\Big(\big[JA, B\big] + \big[A, JB\big]\Big). \qquad (94)$$

В този случай комплексифицираното разпределение $\mathcal{K}^c = \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ се разлага като $\mathcal{K}^c = \mathcal{K}_{+1} \oplus \mathcal{K}_{-1}$, където $\mathcal{K}_{+1}$ и $\mathcal{K}_{-1}$ са собствените подпространства на J, съответстващи на собствените стойности $+1$ и -1. Анулирането на тензора на Нойнхойз $N^{\mathcal{R}}$ е еквивалентно на формалната интегруемост на разпределенията $\mathcal{K}_{+1}$ и $\mathcal{K}_{-1}$, което означава, че трябва да бъдат изпълнени едновременно следните две условия:

$$\Big[\mathcal{K}_{+1}, \ \mathcal{K}_{+1}\Big] \subset \mathcal{K}_{+1} \qquad \text{и} \qquad \Big[\mathcal{K}_{-1}, \ \mathcal{K}_{-1}\Big] \subset \mathcal{K}_{-1}.$$

Получаваме следния резултат:

Твърдение 13.1. *Почти CR структурата* $(\mathcal{K}, J)$ *върху твисторното пространство* $\mathcal{Z}$ *и съответната почти пара-CR структура върху рефлекторното пространство* $\mathcal{R}$ *са интегруеми.*

Заключение

Авторска справка за приносите на дисертационния труд

- Доказана е теорема за съществуване и единственост на канонична свързаност върху пкк многообразие с фиксирана метрика.

- Доказано е, че условието за Айнщановост на пкк многообразие е еквивалентно на условието това многообразие да е локално изоморфно пара-3-Сасакиево многообразие.

- Доказано е, че всяко плоско пкк многообразие е локално еквивалентно на паракватернионната група на Хайзенберг.

- За пкк многообразие е дефинирано тензорно инвариантно поле чрез кривината и торзията на каноничната пкк свързаност, като се включват производни до трети ред на контактната форма. Този тензор е наречен паракватернионно контактна конформна кривина.

- Доказано е, че анулирато на пкк конформната кривина е еквивалентно на това многообразието да е локално пкк конформно еквивалентно на паракватернионната група на Хайзенберг.

- Доказано е съществуването на инвариантна 4-форма Ω и е показано, че тя е затворена тогава и само тогава, когато торзията се анулира.

- Разгледани са специални разслоения над паракватернионно контактни многообразия, наречени твисторно и рефлекторно пространство, Показано е, че върху твисторното пространство съществува почти CR структура, а върху рефлекторното пространство съществува почти пара-CR структура и е доказано, че тези структури са интегруеми. Също така, Леви-формата за всяка от тях е със сигнатура $(2n+2, 2n+2)$.

Статии по дисертацията

- Ivanov, S., Tchomakova M. & Zamkovoy, S.: *Geometry of paraquaternionic contact structures*, arXiv:2404.16713.
- Ivanov, S., Tchomakova M. & Zamkovoy, S.: *Conformal paraquaternionic contact curvature and the local flatness theorem*, arXiv:2404.16703.
- Ivanov, S., Minchev, I. & Tchomakova, M. *Twistor and Reflector spaces for paraquaternionic contact manifolds*, MATHEMATICS, Vol. 12 Iss. 21, 2024, DOI: 10.3390/math12213355

Декларация за оригиналност

Аз, Марина Чомакова, заявявам, че настоящата дисертация, озаглавена *"Геометрия на параквaтернионно контактни многообразия"*, е резултат от самостоятелно проведено научно изследване под ръководството и с подкрепата на моите научни ръководители. Потвърждавам, че представеното съдържание е оригинално и не включва неправомерно използвани външни материали без съответното цитиране.

Освен това удостоверявам, че всички източници са надлежно цитирани и че не е извършено никакво плагиатство или друго нарушение на академичната етика.

Благодарности

Изразявам най-дълбока благодарност към моите научни ръководители за тяхното безценно ръководство, подкрепа и съвети през целия процес на изследването. Техният професионализъм и търпение бяха от съществено значение за развитието на тази дисертация.

Също така изказвам искрена благодарност на моите колеги за тяхната подкрепа, както и на всички, които по някакъв начин допринесоха за успешното завършване на тази дисертация.

Библиография

[1] Alekseevsky, D. & Kamishima, Y.: *Quaternionic and para-quaternionic CR structure on (4n+3)-dimensional manifolds*, CEJM 2(5) 2004 732-753. 3, 14

[2] Alekseevsky, D., Cortes, V., Galaev, A. & Leistner, T.: *Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy*, J. Reine Angew. Math. 635 (2009), 23-69 . 14

[3] Alekseevsky, D. & Kamishima, Y.: *Pseudo-conformal quaternionic CR structure on* $(4n+3)$*-dimensional manifold*, Ann. Mat. Pura Appl. **187** (2008), 487–529; 14

[4] Alekseevsky, D., Medori, C. & Tomassini, A.: *Maximally homogeneous para-CR manifolds.*, Ann. Glob. Anal Geom., 2006, 30, 1–27.

[5] Andrada, A. & Salamon, S.: *Complex product structures on Lie algebras*, Forum Math. 17 (2) (2005) 261-295. 3

[6] Atiyah, M. F. & Hitchin, N. J.: *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*, M. B. Porter Lectures, Rice University, Princeton University Press, Princeton, New York, 1988.

[7] Biquard, O.: *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques*, Astérisque 265 (2000). 3, 8, 10

[8] Chern, S. S. & Moser, J.: *Real hypersurfaces in complex manifolds.*, Acta Math. 133 (1974), 219-271.

[9] Dancer, A. S., Jorgensen, H. R. & Swann, A. F.: *Metric geometries over the split quaternions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 63 (2005), no. 2, 119-139. 3, 5, 14

[10] Davidov, J., Ivanov, S. & Minchev, I.: *The twistor space of a quaternionic contact manifold*, Quarterly Journal of Mathematics, 63, 873-890. 4

[11] Eisenhart, L.P.: *Riemannian geometry*, Princeton University Press, 1966.

[12] Freidel, L., Rudolph, F. J, & Svoboda, D.: *A Unique Connection for Born Geometry*, Communications in Mathematical Physics, (2019) DOI: 10.1007/s00220-019-03379-7. 3

[13] Freidel, L., Leigh, R. G. & Minic, D.: *Born Reciprocity in String Theory and the Nature of Spacetime*, Phys. Lett. B730 (2014) 302-306. 3

[14] Freidel, L., Leigh, R. G. & Minic, D.: *Metastring Theory and Modular Space-time*, JHEP 06 (2015) 006. 3

[15] Hill, C. & Nurowski, P.: *Differential equations and para-CR structures.*, Boll. Dell'Unione Mat. Ital., 2010, 3, 25–91.

[16] Ivanov, S., Minchev, I. & Tchomakova, M. *Twistor and Reflector spaces for paraquaternionic contact manifolds*, MATHEMATICS, Vol. 12 Iss. 21, 2024, DOI: 10.3390/math12213355

[17] Ivanov, S., Minchev, I. & Vassilev, D.: *Quaternionic Contact Einstein Structures and the Quaternionic Contact Yamabe Problem*, in: Mem. of AMS, vol. 231, 2014, Number 1086. 3

[18] Ivanov, S., Minchev, I. & Vassilev, D.: *Extremals for the Sobolev inequality on the seven dimensional quaternionic Heisenberg group and the quaternionic contact Yamabe problem*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 12 (4) (2010) 1041-1067. 3

[19] Ivanov, S., Minchev, I. & Vassilev, D.: *Solution of the qc Yamabe equation on a 3-Sasakian manifold and the quaternionic Heisenberg group*, Analysis & PDE 16:3 (2023), 839-860 https://msp.org/apde/2023/16-3/p07.xhtml/pc, DOI:10.2140/apde.2023..101 3

[20] Ivanov, S., Minchev, I. & Zamkovoy, S.: *Twistor and reflector spaces of almost para-quaternionic manifolds*, Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 16, 477-496 (2010).

[21] Ivanov, S. & Petkov, A.: *The qc Yamabe problem on non-spherical quaternionic contact manifolds*, J. Math. Pures Appl., vol. 118, (2018), 44-81. DOI: 10.1016/j.matpur.2018.06.011 3

[22] Ivanov, S., Tchomakova M. & Zamkovoy, S.: *Geometry of paraquaternionic contact structures*, arXiv:2404.16713.

[23] Ivanov, S., Tchomakova M. & Zamkovoy, S.: *Conformal paraquaternionic contact curvature and the local flatness theorem*, arXiv:2404.16703.

[24] Ivanov, S. & Vassilev, D.: *Extremals for the Sobolev Inequality and the Quaternionic Contact Yamabe Problem*, World Scientific Publishing Co. Pvt. Ltd., Hackensack, NJ, 2011. 3

[25] Ivanov, S. & Vassilev, D.: *Conformal quaternionic contact curvature and the local sphere theorem*, J. Math. Pures Appl., 93 (2010), pp. 277-307.

[26] Ivanov, S. & Vassilev, D., Zamkovoy, S.: *Conformal Paracontact curvature and the local flatness theorem*, Geom. Dedicata 144 (2010), 79-100.

[27] Kobayashi, S.: *Principal fibre bundles with 1-dimensional toroidal group*, Tohoku Math. J. (56) 8 (1956), 29-45.

[28] Lempert, L.: *Spaces of Cauchy-Riemann Manifolds.* , Adv. Stud. Pure Math. Geom. Overdetermined Syst., 1997, 25, 221–236.

[29] Libermann, P.: *Sur le problème d'équivalence de certains structures infinitésimales*, Ann. Mat. Pura Appl. 36 (1954) 27-120. 3

[30] Salamon, S. M.: *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. 67 (1982), 143–171. 4

[31] Webster, S. M.: *Real hypersurfaces in complex space*, Thesis, University of California, 1975.

[32] Wu, H.-H.: *The Bochner technique in differential geometry*, Math. Rep., 3 (1988), no. 2, i–xii and 289–538.