СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ “СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО НАУКИ ЗА ОБРАЗОВАНИЕТО И ИЗКУСТВАТА

КАТЕДРА НАЧАЛНА УЧИЛИЩНА ПЕДАГОГИКА

Лилия Стилиянова Стоилова

Педагогически модел за развитие уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд за присъждане на научна и образователна степен “доктор” по професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по… докторска програма “Методика на обучението в детската градина и началното училище по математика и информационни технологии

Научен ръководител:
доц. д-р Любка Алексиева

София, 2025

Дисертационният труд е оформен в увод, четири глави и заключение. В увода е направена обосновка на актуалността на темата. Първа глава поставя теоретичните основи на проблема, втора представя методиката на изследването, трета разглежда анализа на резултатите от експерименталната дейност, а в четвъртата е изведен авторският педагогически модел за развитие уменията на учениците да решават комплексни проблеми по математика. В заключението са изведени изводите, препоръките и приносите на научния труд.

Дисертационният труд е с обем от 315 страници, от които 231 страници изложение, 66 страници приложения и 17 страници библиография. Библиографията включва 188 заглавия, от които 89 източници са на кирилица, а 98 – на латиница. От посочения общ брой заглавия, 73 са достъпни чрез Интернет. В дисертационния труд са включени общо 198 таблици, от които 75 в текста и 132 в приложение. Общият брой графики е 29, от които всички в изложението. В текста има и 44 фигури.

Списък на често използваните съкращения:

PBL - проблемно-базирано обучение
ZPD - Zone of Proximal Development, зона на близко развитие
ИУЧ/ФУЧ - Избираеми учебни часове/ Факултативни учебни часове
ИБЕ - Институт за български език, БАН
МОН - Министерство на образованието и науката, България
ОПУ 1 - Основно прогресивно училище 1
ОПУ 2 - Основно прогресивно училище 2
ОПУ 3 - Основно прогресивно училище 3
41 ОУ - 41 ОУ “Св. Патриарх Евтимий”
PYP - Primary years Programme, програма за начален етап на International Baccalaureate

СЪДЪРЖАНИЕ

Увод **5**

Глава I. Теоретични аспекти на решаването на комплексни проблеми по математика в началните класове **7**

1.1. Характеристики на решаването на проблеми като подход за преподаване на математика 7

1.1.1. Същност на решаването на проблеми в контекста на преподаване на математика в началното училище 7

1.1.2. Категоризация на видове проблеми по математика 8

1.1.3. Теоретични модели на процеса на решаване на проблеми 8

1.1.4. Стратегии и техники за решаване на проблеми по математика 9

1.1.5. Предизвикателства и предимства на подхода решаване на проблеми в педагогическата практика 9

1.2. Математическа компетентност, математическо мислене и връзката им с решаване на проблеми като умение и подход за преподаване на математика 10

1.2.1. Компетентност, компетенция и компетентностен подход в образованието 10

1.2.2. Математическата компетентност като цел на образователния процес 10

1.2.3. Математическото мислене като част от математическата компетентност 10

Същност на математическото мислене 10

Индукция и дедукция в процеса на обучение по математика в началното училище 11

Концептуално разбиране и мисловни схеми в процеса на решаване на проблеми по математика 11

Метакогниция и метакогнитивен процес в решаването на проблеми по математика 11

Нагласи към математиката 12

Математическата метакогниция като социокултурен процес. Енкултурация и съвместно учене за решаване на проблеми 12

1.3. Подходи за преподаване на математика в началните класове. Възрастови характеристики на учениците на 9-10 години 13

1.3.1. Традиционен подход за преподаване на математика в началното училище – характеристики 13

1.3.2. Сравнителен анализ на традиционния подход и решаването на проблеми 13

1.3.3. Възможности за реализиране на подхода за решаване на проблеми в обучението по математика в началните класове 13

Анализ на учебни програми по математика за установяване на възможности за реализиране на подхода за решаване на проблеми 13

Анализ на учебници по математика за началното училище 14

Роля на учителите в прилагането на подхода решаване на проблеми по математика в началното училище 14

Образователна практика с възможности за съвместяване на традиционното и иновативното образование в България 15

Учебната програма “Jump Math” като възможност за концептуално учене и решаване на проблеми по математика в началните класове 15

Евристична рамка – възможност за педагогическо планиране на учебното съдържание за преподаване на и чрез решаване на проблеми 16

1.3.4. Възрастови и невропсихологични аспекти на развитието на 9-10 годишните ученици във връзка с уменията им да решават комплексни проблеми по математика 16

Периодизация в развитието на когнитивните функции в начална училищна възраст 16

Развитие на мозъка и психичните функции на ученици на 9-10 години в начална училищна възраст 16

Заключение 17

Глава II. Методика на емпиричното изследване **17**

2.1. Цел: **17**
Задачи: 17
2.2. Обект на педагогическия експеримент: 18
2.3. Предмет на педагогическия експеримент: 18
2.4. Хипотеза 18
2.5. Методи на педагогическото изследване 18
2.6. Инструментариум на педагогическото изследване 20
2.7. Организация на педагогическото изследване 21
Етапи на педагогическото изследване 21
2.7.1. Предварителен експеримент: 21
2.7.2. Качествено изследване на готовността на начални учители да преподават чрез решаване на проблеми: 21
2.7.3. Апробация на инструмент за измерване уменията на учениците: 21
2.7.4. Първи етап на педагогически експеримент: 21
2.7.5. Превод и адаптиране на евристична рамка: 21
2.7.6. Втори етап на експериментална работа: 22
2.8. Участници в педагогическото изследване 22
2.9. Структура на авторския педагогически модел за развитие уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика 23

Глава III. Анализ на получените резултати и дискусии **26**
3.1. Резултати от проведените емпирични изследвания 26
3.1.1. Резултати от предварителен експеримент 26
3.1.2. Резултати от проведена фокус група с начални учители 26
3.1.3. Резултати от апробация на инструмент за измерване уменията на учениците да решават комплексни проблеми по математика 27
3.1.4. Резултати от педагогически експеримент през 2022-2023 година 27
3.1.5. Резултати от превод и адаптиране на евристична рамка за решаване на проблеми по математика за приложение на български език 32
3.1.6. Резултати от педагогически експеримент през 2023-2024 година 33
3.2. Анализ и дискусии след проведените емпирични изследвания 38
3.2.1. Дискусия на резултатите от предварителен експеримент за структуриране на педагогически модел за развитие уменията на ученици в начален етап да решават проблеми по математика 38
3.2.2. Дискусия на резултатите от проведената фокус група с начални учители за установяване на разбирането и готовността им да прилагат решаване на проблеми като подход за преподаване на математика 39
3.2.3. Дискусия на резултатите от апробация на инструмент за измерване уменията на учениците да решават комплексни проблеми по математика 39
3.2.4. Дискусия на резултатите от педагогическия експеримент през 2022-2023 година 39
3.2.5. Дискусии за превода и адаптацията на евристичната рамка за решаване на проблеми по математика 40
3.2.6 Дискусии след педагогическия експеримент през 2023-2024 година 40
Сравнителен анализ на двете последователни години на експериментиране на педагогическия модел за развитие на уменията на 9-10-годишни ученици решават комплексни проблеми по математика. Изводи и заключения. 41

Глава IV. Авторски педагогически модел за развитие уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика **42**
4.1. Цел и очаквани резултати на педагогическия модел: 42
4.2. Описание на педагогическия модел: 42
4.3. Входяща и изходяща диагностика: 42
4.4. Подбор на учебно съдържание: 42

4.5. Учебни ресурси: 43
4.6. Дизайн на учебните модули: 43
4.7. Методически насоки при работа с отделните модули 43

Заключение **45**

Приноси на изследването **46**

Публикации **48**

Библиография **49**

Увод

В условията на съвременното общество, характеризиращо се с динамично технологично развитие, нарастващ обем от информация и необходимост от комплексни решения, образованието се изправя пред предизвикателството да формира личности, които не само притежават знания, но набор от компетентности като критично мислене, анализ и решаване на проблеми. Един от основните инструменти за постигане на тези цели е математическото образование, което се разглежда не просто като изучаване на формули и процедури, а като процес на изграждане на математическо мислене и стратегически подход към задачите. Резултатите от международни изследвания като TIMSS[1] показват, че под 10% от българските четвъртокласници се справят със сложни математически задачи, а разликата между най-добре и най-слабо представилите се е голяма и нараства. Традиционните методи на преподаване не достигат за развитие на пълноценни математически компетентности. Нуждата от нови стратегии и подходи за обучение е ясно видима с цел подобрение на базовите знания и метамислене, което ще помогне на учениците да се справят успешно в по-нататъшното си образование и да изпитват удовлетворение от ученето по математика.

Настоящият дисертационен труд е посветен на теоретичните и практическите аспекти на решаването на комплексни проблеми по математика в началните класове, като поставя акцент върху формирането на умения за решаване на задачи тип проблем с различна степен на сложност и структурираност. Изследването се основава на съвременни педагогически концепции и подходи, които интегрират изследователското учене и развитието на метакогнитивни умения за качествено преподаване на математика с цел развитие на пълноценни математически компетентности.

Актуалността на темата се обуславя от нарастващата нужда от развиване на комплексни умения за учене, критично и творческо мислене, които стоят в основата на модерното образование. Предложеният дисертационен труд има за цел да допринесе както за теоретичните изследвания в областта на образованието по математика, така и за практическото приложение на ефективни педагогически решения за обучението в началните класове.

В този контекст целта на дисертацията е да се предложи педагогически модел за развитие на уменията на учениците в началния етап на образование да решават математически проблеми, като се обосноват подходящи стратегии, методи и форми на обучение. В този контекст се

[1] Trends In International Mathematics And Science Study, https://timssandpirls.bc.edu/timss-landing.html

анализират ключови теоретични постановки, свързани с когнитивните и метакогнитивни процеси при решаване на проблеми, както и практическите измерения на тяхното приложение в учебната среда.

Изследването е структурирано в няколко основни глави, като в първата се разглеждат същността и характеристиките на процеса на решаване на проблеми, релевантни теоретични модели и евристични стратегии. Специално внимание е отделено на съдържанието на математическата компетентност, математическото мислене и метакогнитивното развитие, както и приложението им в процеса на обучение. Представен е и сравнителен анализ на традиционния подход и решаването на проблеми, за да се открият опорни моменти и да се постигне лесно надграждане. Допълнително са разгледани възрастовите и невропсихологични особености на учениците от начална училищна възраст, за да се дефинира подходящият период за въвеждане на целенасочена работа по решаване на проблеми.

Методологията на дисертационния труд комбинира теоретични и емпирични подходи, насочени към разработването и тестването на педагогически модел за развитие на умения за решаване на комплексни математически проблеми при 9-10-годишни ученици. **Теоретичният анализ** обхваща литературни източници и сравнителни анализи на съществуващите модели и стратегии за решаване на математически задачи, както и систематизация на ключови характеристики на успешните подходи.

Целта на изследването е да анализира и оцени ефективността на различни подходи и стратегии за решаване на проблеми и да предложи образователна структура за тяхното развитие. **Хипотезата** предполага, че интегрирането на разнообразни подходи и евристични стратегии в обучението значително подобрява способността на учениците да избират съзнателно стратегии за справяне, което подпомага уменията им да решават комплексни проблеми по математика и води до по-дълбоко разбиране на математическите концепции.

Емпиричната част включва предварителен експеримент с ученици, фокус група с учители за установяване разбирането и готовността да прилагат решаване на проблеми като подход за преподаване, апробиране на инструменти за измерване на уменията, адаптиране на евристична рамка за решаване на проблеми за приложение на български език и експериментиране на педагогическия модел в различни училища в две последователни учебни години. Използвани **методи** са педагогическо наблюдение, тестове, анкетно проучване, интервюта и педагогически експеримент, като се анализират резултати преди и след интервенцията.

Изследването е разделено на три етапа: подготовка, провеждане на експеримент в училищна среда и анализ на резултатите. Комбинираният подход с количествени и качествени методи осигурява обективност и достоверност, като потвърдиха ефективността на педагогическия модел.

Глава I. Теоретични аспекти на решаването на комплексни проблеми по математика в началните класове

1.1. Характеристики на решаването на проблеми като подход за преподаване на математика

1.1.1. Същност на решаването на проблеми в контекста на преподаване на математика в началното училище

Изследването акцентира върху значението на решаването на проблеми като основополагащ компонент на математическото обучение, насочено към концептуално разбиране и прилагане на знания в разнообразни ситуации. Според Националния съвет на учителите по математика на САЩ, разбирането и решаването на проблеми са основни цели, които се развиват най-ефективно в единство (Lester & Charles, 2003).

Решаването на проблеми се дефинира като „индивидуална способност за когнитивна преработка“ с цел разбиране и разрешаване на проблемна ситуация, при която решението не е очевидно (Numprasertchai et al., 2024; Rowe, 2024; Barmby, Bolden, Thompson, 2014; Cummins, 2012; PISA, 2012: 32, Rott, 2012).

Разликата между задача и проблем е от съществено значение в образователния контекст. Проблемните задачи изискват учениците да създадат собствено символно описание, което е смислено за тях (Barmby et al., 2014; Lesh & Harel, 2003). Подходът е част от изследователското учене и стимулира прилагането на съществуващи знания в нови, непознати ситуации и насърчава критично и творческо мислене (Кирилова, 2023; Алексиева, 2022; Stoyanova & Hristova, 2017; Gurat, Medula, 2016). Решаването на проблеми се разглежда в различни форми, като проблемно ориентирано обучение, проблемно базирано обучение, проблемно-продуктивни стратегии и др. (Кирилова, 2023; Atanasova, 2014; Десев, 2018).

Националният съвет на учителите по математика определя три равнища на понятието: като контекст за учене, като умение и като изкуство, което изисква педагогическо майсторство за мотивация и стимулиране на учениците (Lester & Charles, 2003; Jacinto & Carreira, 2012).

Различните автори поставят фокус върху различни второстепенни характеристики, като най-често това са съвместното решаване и/или реалистичната проблемна ситуация, като не се обхваща пълнотата на съдържанието му. По тази причина на база на всички посочени литературни източници и анализи е направен опит за обобщаване на дефиницията за решаване на проблеми като умение в образователен контекст.

Решаването на проблеми е метакогнитивно умение, отразяващо способността на индивидите да разработват собствено символно или практическо значение/решение в ситуация на относителна неопределеност, което предполага неочевиден или нерутинен начин на постигане. Това умение е естествена част от изследователското учене и представлява основата за развитие на задълбочено разбиране на (математическите) концепции. При решаване на проблеми учениците имат възможност чрез (само)управление да координират предишния си опит, знания, мисловни представи, изводи и интуиция, в опит да създават нови мисловни

представи и изводи. Този процес на учене предполага активност, проектиране и структуриране, развиване на евристични умения, подход на досещане, стратегическо мислене и ниска степен на структурираност. Ученето е индуктивно (чрез откриване), стимулира продуктивното, критичното и творческото мислене, може да се извършва самостоятелно или в сътрудничество и се постига чрез подражание и практика. За качествения процес на учене в решаване на проблеми е от съществена важност предлаганите проблеми да кореспондират с миналия опит и когнитивни умения на учениците, но и да ги надхвърлят достатъчно, за да предизвикват учене. Тази дефиниция ще се използва в рамките на дисертационното изследване в следващите глави.

1.1.2. Категоризация на видове проблеми по математика

Изследването разглежда разнообразието от подходи към решаването на проблеми в математическото образование, като подчертава различните стратегии, които педагозите могат да използват за ангажиране на учениците. Според Baker, Dias et al. (2012), три основни метода за проблемно обучение включват: използването на зоната на близко развитие (ZPD) за изграждане на задачи върху съществуващите знания на учениците, стратегически избор на разнообразни методи за решаване на проблеми, и траектория на преподаване-учене, която използва последователности от проблеми за осмисляне на нови концепции (Лалчев, Върбанова, 2007). Бургов (2013) класифицира проблемите в три категории: подреждане, въвеждане на структура и трансформация. Barmby, Bolden, Thompson (2014), цитирайки Orton and Frobisher (1996), разграничават три вида проблеми: рутинни, контекстуални и процесуални. Освен това те представят пет типа проблеми по DfES (2004): текстови задачи, търсене на всички възможности, логически пъзели, търсене и описване на закономерности, и визуални пъзели. Тези категории подчертават взаимодействието между различните типове проблеми и подходите за тяхното решаване. Poblete и Díaz (2012) допълват анализа, като разграничават четири контекста на проблеми: реални, реалистични, фантастични и математически.

В литературата често се прави разграничение между рутинни и нерутинни задачи, като последните изискват по-сложен, творчески подход (Kolovou, 2011; Lester & Charles, 2003). Barmby, Bolden, Thompson (2014) разграничават и „добре структурирани“ и „не добре структурирани“ проблеми, които акцентират върху степента на определеност на задачата, но понятията звучат двусмислено на български език, като могат да бъдат отнесени до качеството на проблема.

Качеството на проблемите, използвани в учебния процес, е критично за успеха на учениците. Добре структурираните проблеми се характеризират с разбираемост, интересност, полезност и възможност за проверка на решенията.

1.1.3. Теоретични модели на процеса на решаване на проблеми

В тази част са разгледани 11 модела, представящи процеса по решаване на проблем. Методът на четири стъпки за решаване на проблеми, предложен от Пойа (1972) и използван в съвременните учебници, осигурява основен инструментариум в началното образование за решаване на текстови задачи. Schoenfeld (Leuders и Philip, 2012) предлага разновидност според която, методът включва първоначален опит за решение с използване на интуитивни знания, обсъждане на стратегии, рефлексия върху процеса и приложение на наученото в нови ситуации.

Други изследователи като Foong (Ng, 2012) и Burgov (2013) разработват модели с фази на представяне на проблема, опит за намиране на решение и обсъждане, подчертавайки важността на груповата работа и учителя като фасилитатор.

Моделът на Брансфорд и Стей (Ванева, 2003) обогатява методологията с подробен план за действие и разглеждане на различни стратегии, докато Стърнбърг (2012) предлага

седемстъпков подход, който включва организиране на информацията и ресурсите, както и наблюдение и оценка на решенията.

Научният метод, използван при въвеждането на ново математическо знание, позволява на учениците да тестват и проверяват хипотези, докато моделът на International Baccalaureate PYP акцентира на изследователския подход в образованието, стимулирайки учениците да изграждат и прилагат своите знания динамично (Гълъбова, 2022; Алексиева, 2021).

1.1.4. Стратегии и техники за решаване на проблеми по математика

В началото на тази част се разглежда понятието "стратегия" като програма за дейност, насочена към постигане на определени цели, и стратегиите за учене като подходи за усвояване на опит и ценности (Десев, 2008: 502). Основната цел на обучението в стратегии е развитието на стратегическо мислене, което е ключово за ефективното решаване на проблеми (Yazgan & Arslan, 2012). Стратегиите за решаване на проблеми се делят на частнонаучни (математически) и евристични. Частнонаучните стратегии използват математически техники и алгоритми, докато евристичните се фокусират върху творческо и аналитично мислене, което стимулира гъвкаво мислене и прилагане на знания в нови ситуации (Posamentier & Krulik, 2008; Burgov, 2013).

Особено внимание е обърнато на евристиката, по дефиниция на Пойа, като метод за откриване и изобретяване, съчетан с досещане и правдоподобни разсъждения, важни за научните открития, включително в математиката (Polya, 1972). Евристичните беседи, при които учениците се насърчават да разглеждат знанията в нова светлина, водят до по-дълбоко концептуално разбиране. Представени са различни евристични стратегии за преподаване в начално училище, като анализ на средства и цели, работа в обратен ред, използване на аналогия, разпознаване на закономерности, предположение и проверка и други (NZMaths, 2023; Hyde, 2015; Ng, 2012; Voskoglou, 2008; Posamentier, Krulik, 2008; Ванева, 2003; Lester, 1987). Четири от тези стратегии – визуално моделиране, систематично мислене, търсене и прилагане на закономерности и опростяване – са фокус в педагогическия модел. Тези стратегии са част от учебни комплекти и методически структури по целия свят и в България, макар и в по-малък мащаб и с препоръки за ограничено използване.

Теоретичната рамка за решаване на проблеми като педагогически и методически конструкт разкрива разнообразието от модели и стратегии, които учениците могат да прилагат за развитие на математическата си компетентност.

1.1.5. Предизвикателства и предимства на подхода решаване на проблеми в педагогическата практика

Въвеждането на решаването на проблеми в математическото образование е предизвикателство, свързано с различни пречки и трудности, които включват недостатъчни начални умения на учениците, трудности в създаването на подходящи учебни задачи и липса на достатъчно време за подготовка на учителите. Традиционният подход в обучението често изолира решаването на проблеми, което създава изкуствени бариери, докато новите подходи изискват интегриране на различни стратегии и подходи към проблемите (Lester, 2013; Barmby et al., 2014).

Решаването на проблеми не само че развива математическо мислене, но и има значение за развитието на метакогнитивни умения, които са важни за успеха в ученето. Педагогическите методи, които акцентират на проблемното обучение, подобряват успеваемостта и поведенческите умения на учениците (Ajai et al., 2013). Въпреки това, решаването на проблеми изисква различни подходи за оценяване, които не винаги се съвпадат с традиционната стандартизация на оценките (Ng, 2012).

Процесът на решаване на проблеми е свързан с активното участие на учениците, което води до повишаване на тяхната мотивация и познавателна активност (Dewey, 1997; Цанев, 2020). Изследвания показват, че моделът на Пойа и евристичните стратегии за решаване на проблеми повишават математическата компетентност и успеха на учениците (Lessani et al., 2017).

1.2. Математическа компетентност, математическо мислене и връзката им с решаване на проблеми като умение и подход за преподаване на математика

1.2.1. Компетентност, компетенция и компетентностен подход в образованието

В първата част е анализирано понятието "компетентност" като способността на индивида да интегрира знания, умения и нагласи за ефективно справяне с предизвикателства в реални ситуации (Десев, 2008; Чавдарова-Костова, 2022). Образователните политики, включително в България, насочват усилия към развитие на ключови компетентности като критично мислене, комуникационни умения и решаване на проблеми (МОН, 2019; Янева, 2024). Традиционната образователна система се преориентира към компетентностна парадигма, която изисква междудисциплинарни подходи и насърчаване на преподаване и учене за усвояване на метакогнитивни стратегии (Мандева, 2015). Това включва обучение, фокусирано върху това как да се учи и как да се подхожда към решаването на проблеми, което е ключово за успешна социална и професионална реализация на учениците.

1.2.2. Математическата компетентност като цел на образователния процес

В европейските и национални образователни документи се подчертава значението на уменията за решаване на проблеми като основен метод за развиване на математическата компетентност у учениците. Според Министерството на образованието в България математическата компетентност е способността за развиване и прилагане на математическо мислене в различни житейски ситуации (МОН, 2019). Европейската комисия я дефинира като възможността да се развиват и прилагат математически прозрения и репрезентации за решаване на ежедневни проблеми, акцентирайки върху активния процес на учене и познание (Чавдарова-Костова, 2022; ЕК, 2019).

Развитието на математическата компетентност изисква:

- **Знания**: добро разбиране на числата, основните математически операции и математическо моделиране.
- **Умения**: математическо мислене, прилагане на математически принципи в ежедневието, анализ и оценка на математически аргументи и доказателства.
- **Нагласи**: уважение към истината, стремеж за разбиране и оценка на причинно-следствените връзки в математически и цифрови контексти.

1.2.3. Математическото мислене като част от математическата компетентност

Същност на математическото мислене

В учебния процес участват различни видове мислене, включително образно, дискурсивно, емпирично, теоретично, творческо и интуитивно (Nikolov et al., 2007). **Математическото мислене** се разглежда като динамичен процес, който разширява сложността на идеите и увеличава възможностите на индивида да се справя с тях. То включва концептуално разбиране, решаване на проблеми, обобщаване и моделиране (Гълъбова, 2022; Mason, Burton,

Stacey, 2010; Pien, 2024). Сериозният акцент върху математическото съдържание може да затрудни развитието на математическото мислене, което изисква баланс между изучаването на съдържание и развитието на умения за мислене (Pien, 2024). Това подчертава значението на решаването на проблеми, което едновременно развива мисленето на учениците и обогатява разбирането на математическите концепции.

Индукция и дедукция в процеса на обучение по математика в началното училище

Разсъжденията се делят на дедуктивни и индуктивни. Дедукцията води от общи към частни заключения и се базира на ясно дефинирани логически стъпки, докато индукцията започва от частни наблюдения и преминава към общи заключения, като често се използва в емпиричните науки (Стърнбърг, 2012; Десев, 2008). Индуктивният подход, описан от Пойа (1972), включва откриване на общи закони чрез наблюдение на частни случаи, формиране на хипотези и експериментиране. Този метод помага на учениците да събират данни, да търсят закономерности и да формулират хипотези, което структурира знанията им (Leuders, Philip, 2012). Анализиран е индуктивният сократов метод, който се базира на диалог и диалектичен подход за достигане на истина чрез въпроси и размисъл (Stanoeva, 2019; Doychinov, 2021; Benson, Morison, 2009). Подобно на възможностите, които дава математиката за развитие на критично и абстрактно мислене, решаването на проблеми като ключово умение изисква индуктивно и дедуктивно мислене. Може да се прилага в различни житейски ситуации, като осигурява дълбоко и смислено обучение (Lester, Charles, 2003; Firmanti, 2014).

Концептуално разбиране и мисловни схеми в процеса на решаване на проблеми по математика

Конструктивистката теория подчертава, че ученето е активен процес, при който хората изграждат нови знания въз основа на своя предишен опит и разбиране (Мирчева, 2022). Процедурните знания, въпреки че са важни за математическите умения, често се прилагат без пълно разбиране за техните основи, което ограничава способността на учениците да ги адаптират в нови контексти (Hussein, Csíkos, 2023).

Пиаже (1937) твърди, че разбирането включва асимилация на новата информация в съществуващите когнитивни структури, наречени **схеми**. Тези мисловни схеми се развиват динамично и се адаптират в отговор на нов опит, функционират като умствени модели, които организират знанията и улесняват новото учене. Те включват както концептуални, така и процедурни аспекти на знанието (Enser, 2020).

Създаването на концептуално разбиране е ключово за формирането на дълготрайни и преносими умения, които учениците могат да прилагат в различни ситуации. Такова обучение акцентира върху осмислянето на информацията, развитието на критично мислене и решаване на проблеми. В този контекст, обучението не се ограничава само до придобиване на факти или процедури, а включва и развитието на способността да се правят връзки и да се разбират основните принципи и концепции (Enser, 2020).

Метакогниция и метакогнитивен процес в решаването на проблеми по математика

Voskoglou (2008) идентифицира четири основни компонента, които са необходими за успешно решаване на математически проблеми от учениците - познаването на евристики или стратегии за решаване на проблеми; базово знание; метапознание (контрол, мониторинг и саморегулация) и убеждения и практики, които ги пораждат.

Метапознанието се разглежда като критично за управлението на собствения учебен процес. Определя се като съзнание за собствените когнитивни процеси, включително планиране, мониторинг и саморегулиране (Кирилова, 2023; Gurat, Medula, 2016). Flavell (1979) различава

три аспекта на метакогницията: знания, опит и умения, които помагат на индивидите да се ориентират и контролират своето познавателно поведение.

Метакогнитивните умения включват владеене на техники и методи за ефективно учене и решаване на проблеми. Тези умения се насърчават чрез различни образователни стратегии, като се акцентира на самооценка и рефлексия върху собственото учене (Кожухарова, 2016).

Образователният модел, който включва метакогнитивни и когнитивни стратегии, спомага за развитието на учениците като активни участници в собственото си обучение, което е съществено за постигането на успех в математиката и други учебни дисциплини. Въвеждането на метапознанието в обучението може значително да подобри способността на учениците за анализ, критично мислене и прилагане на наученото в различни контексти (Gurat, Medula, 2016).

Нагласи към математиката

Изследването подчертава влиянието на нагласите на учениците към математиката върху техните академични постижения. Положителната нагласа е свързана с по-добри резултати, докато отрицателната, включително математическата тревожност, може да затрудни успеха в ученето. Hidayatullah и Csíkos (2023) отбелязват, че нагласите формират възприятията за математиката и влияят на мотивацията и успеха в ученето. Развитието на самоефикасността, вярата в собствените способности за решаване на задачи, също играе ключова роля, и може да бъде подобрено чрез реалистични и постижими цели (Akin и Kurbanoglu, 2011). Позитивната нагласа и увереност в способностите на учениците са основополагащи за развитието на математическо мислене и компетентност.

В литературата се подчертава значението на квалифицираните учители, които създават подкрепяща учебна среда, намалявайки нивата на тревожност и подобрявайки успеха на учениците в математиката (Zanabazar, Deleg и Ravdan, 2023). За постигане на устойчиво подобрение в математическите умения е необходимо системно усъвършенстване на педагогическите подходи, стратегии за намаляване на тревожността и насърчаване на самостоятелността.

Математическата метакогниция като социокултурен процес. Енкултурация и съвместно учене за решаване на проблеми

Изследването акцентира върху значението на когнитивните практики и ученето като резултат от социалната и културна еволюция, в която знанието се изгражда социално чрез взаимодействия в групи, като основен процес за формиране на културни и когнитивни умения. Според Цанев (2020) и Menary (2015), процесът на културно наследяване, известен като енкултурация, е ключов за развитието на когнитивни практики и се реализира както чрез формално, така и чрез неформално обучение, особено в контекста на математиката.

Съвместното обучение се представя като ефективен метод за развитие на когнитивни и метакогнитивни умения чрез активно сътрудничество и рефлексивна комуникация между учениците (Lahann и Lambdin, 2020; Костова и Владимирова, 2011).

1.3. Подходи за преподаване на математика в началните класове. Възрастови характеристики на учениците на 9-10 години

1.3.1. Традиционен подход за преподаване на математика в началното училище – характеристики

Училищната програма по математика акцентира на решаването на структурирани задачи, които използват конкретни алгоритми и процедури, като целта е учениците да усвоят определени методи за решение. Демонстрационният метод на преподаване, при който учителят моделира стъпките за решаване на задачи, подчертава подражанието и постепенното увеличаване на самостоятелността на учениците. В този подход се използват и практическо манипулиране с предмети и обекти за илюстрация на математически концепции (Върбанова, 2013).

Процесът на обучение включва стъпки като актуализиране на личния опит, мотивация, обяснение на новото съдържание, самостоятелна работа и систематизиране на наученото (Новакова, 2004). Например, процесът за решаване на текстова задача е добре структуриран, с ясни стъпки от актуализиране на знанията до проверка на решението, което отразява традиционния метод на преподаване. Въпреки че този метод е ефективен за усвояване на математическите знания, той може да ограничи възможностите за самостоятелни открития и изследвания от страна на учениците (Manouchehri, Zhang, Liu, 2012).

1.3.2. Сравнителен анализ на традиционния подход и решаването на проблеми

Обучението по математика в началните класове изисква баланс между традиционните методи и съвременни стратегии, които насърчават активно учене и решаване на проблеми. Традиционният подход често се фокусира върху структурирани задачи, при които учениците следват стриктни указания, но не се насърчава самостоятелното разсъждение (МОН, 2019а). Включването на решаване на проблеми обогатява процеса, като стимулира учениците да мислят критично и да изследват математическите понятия по-самостоятелно (Кирова, 2021; Новакова, 2004).

Въпреки че традиционното обучение акцентира върху индивидуално запаметяване и прилагане на процедури, този подход често ограничава креативността и гъвкавостта на учениците (Miller, Banes, 2012). За да се подобри обучението по математика, е необходимо интегриране на активни образователни стратегии, които стимулират критично мислене и самостоятелно изследване на математическите идеи. Това ще доведе до по-добро разбиране и отношение към математиката, като същевременно се развиват метакогнитивни умения и творчество в процеса на учене (Manouchehri, Zhang, Liu, 2012).

1.3.3. Възможности за реализиране на подхода за решаване на проблеми в обучението по математика в началните класове

Анализ на учебни програми по математика за установяване на възможности за реализиране на подхода за решаване на проблеми

В книгата "За прехода от знания към умения", МОН, се разглежда преходът към компетентностния подход в учебните програми от 2015 г. насам, който акцентира върху развитието на практически умения и стимулиране на мисленето на учениците (Витанов, 2020; Алексиева, 2019). Новите учебни програми поставят акцент върху универсални умения за учене, решаване на проблеми и събиране на информация. Въпреки че основният фокус остава върху

математическите знания, има опити за интегриране на умения за мислене чрез задачи, които изискват умения за анализ (Кирова, 2021).

Независимо от усилията за обновление на учебните програми, Кирова (2021) критикува текущите програми за това, че все още са ориентирани предимно към усвояване на фактически знания, а не към истинско интелектуално развитие, което изисква критично мислене и решаване на проблеми. Наличието на решаване на проблеми в учебните програми предоставя рамка за интегриране на този подход в учебната практика, но непоследователното му интерпретиране в различните класове може да ограничи ефективността на обучението.

Анализ на учебници по математика за началното училище[2]

В изследването се анализира учебното съдържание по математика за 3. клас. Особено внимание е обърнато на раздела за деление, който представлява значително предизвикателство за учениците, тъй като включва многостъпков алгоритъм, различен от техните предишни навици в математическите операции. В контекста на анализа са разгледани пет учебника, които са използвани в училищата, участващи в педагогическите изследвания, част от този дисертационен труд.

Задачите в раздела за деление се категоризират в два основни типа: рутинни и нерутинни, като нерутинните са допълнително разделени на контекстуални и абстрактни.

Резултатите от анализа показват, че въпреки наличието на задачи, които могат да стимулират учениците да развиват своите стратегии за решаване на проблеми, те са относително малък процент от общия брой задачи. Това подчертава проблема, че по-голямата част от задачите са концентрирани върху рутинното прилагане на усвоени знания, което възпрепятства развитието на уменията на учениците за решаване на проблеми. В контекста на образователните реформи и акцента върху компетентностния подход, който насърчава активното учене и прилагането на знания в различни ситуации, текущата ситуация изисква реформи както в педагогическите практики, така и в структурата на учебните програми и учебниците, използвани за обучението по математика.

Роля на учителите в прилагането на подхода решаване на проблеми по математика в началното училище

Математическата грамотност на учениците е тясно свързана с ефективността на педагогическата подготовка и уменията на учителите да създават подходяща образователна среда. Съвременните методи изискват учителите да бъдат ментори, които насърчават учениците да развиват умения за решаване на проблеми и критично мислене, като същевременно наблюдават и адаптират задачите според нуждите на учениците (Lester, 2013). Активното участие на учителите в професионални общности е също важно за усъвършенстване на техните умения и увереност в преподаването на математика (Манева, 2021).

Ефективността на преподаването зависи от интеграцията на различни компоненти на учебния процес, включително подходящи задачи, социална култура в класната стая и използване на математически инструменти и образователни ресурси (Lester, 2013). Променената роля на учителите в процеса на обучение изисква адаптиране към новите изисквания за активно и интерактивно обучение (Василева, 2004; Мирчева, 2022а). Създаването на учебна среда, която насърчава сътрудничеството и развива математическо мислене, е съществено за успешната подготовка на учениците.

---

2 Този анализ е публикуван в статията: Стоилова, Л., Алексиева, Л. (2024). Решаване на проблеми по математика – същност, модели, стратегии и възможности за реализиране в обучението на 9-10 годишни ученици. Pedagogika-Pedagogy, Volume 96, Number 1

Образователна практика с възможности за съвместяване на традиционното и иновативното образование в България

В тази част се представя практиката на системата на Български прогресивни училища, които успешно съчетават традиционни методи с иновативни подходи. Те използват компетентностни модели, базирани на българските учебни програми и международни стандарти. Тези модели са съобразени с обновената таксономия на Блум и включват както предметни компетентности, така и метаумения, които способстват за общото развитие на учениците (Armstrong, 2010).

В основата на моделите за преподаване по математика за начален етап стоят утвърдени системи като Jump Math[3], Victoria curriculum[4] и Math Scope and Sequences[5] на International Baccalaureate. Те подкрепят развитието на математическите умения съобразно глобалните образователни стандарти. Учебните програми акцентират на развитието на персонални и социални умения, изследователски способности, критично и творческо мислене, което осигурява холистичен подход към обучението.

Педагогическият процес в тези училища интегрира фронтално обучение с изследователски методи, обогатени с образователната рамка на International Baccalaureate, която поставя акцент върху използването на математиката за решаване на реални проблеми (IBO, 2013). Така се създава образователна среда, която не само отговаря на националните изисквания, но и осигурява възможности за развитие на комплексни умения у учениците, като същевременно прилага различни методи и подходи, съответстващи на визията за качествено образование.

Учебната програма “Jump Math” като възможност за концептуално учене и решаване на проблеми по математика в началните класове

Канадската система Jump Math, адаптирана за нуждите на българските училища от 2010 г. от Институт за прогресивно образование, е създадена от д-р Джон Майтън[6] и представя концептуално преподаване на математика. Абревиатурата означава "млади неоткрити математически таланти". Системата е структурирана в отделни математически концепции като аритметика и геометрия. Това позволява на учениците да се съсредоточат върху всяка идея индивидуално, преди да я съчетаят с други концепции, в контекста на новия подход към математиката, който отличава Jump Math от традиционните български учебници.

Методът на преподаване, наречен "насочвано откривателство", включва постепенно и задълбочено разглеждане на концепции чрез множество упражнения, което позволява на учениците да открият решения и да развиват критично мислене. Jump Math е проектирана да бъде интегрирана в традиционната класно-урочна система, като същевременно включва и изследователско обучение и насърчаване на критичното мислене.

В България, освен основните учебни материали, се предлагат допълнителни ресурси, които фокусират върху развитието на уменията на учениците за решаване на проблеми по математика. Именно тези ресурси са използвани като основа за изграждането на педагогическия модел за развитие на умения за решаване на комплексни проблеми сред 9-10-годишни ученици.

[3] USA common core, retrieved on 03.11.24: https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf
[4] Victoria curriculum, retrieved on 03.11.24: https://www.vcaa.vic.edu.au/curriculum/foundation-10/Pages/default.aspx
[5] International Baccalaureate Organization. Primary Years Programme. Mathematics scope and sequence, 2009
[6] Майтън, Дж. (2013) Краят на невежеството, Изток-запад

Евристична рамка – възможност за педагогическо планиране на учебното съдържание за преподаване на и чрез решаване на проблеми

Евристичната рамка за решаване на проблеми, разработена от Keong през 2004 година, представлява документ, който систематизира теоретични проучвания и предлага конкретни стратегии за тяхното приложение в педагогическата практика. В рамката се включват 35 научни твърдения, които са организирани в няколко категории - планиране на процеса на решение, прилагани стратегии и евристики, личностни нагласи, оценяване, и социален контекст. Тези твърдения са подкрепени с доказателства и актуализирани с нови източници през последните 10 години. Основната цел на рамката е да подпомогне развитието на уменията на учениците за решаване на проблеми (Keong, 2004).

В контекста на евристичната рамка, Keong (2004) идентифицира необходимостта от внимателно и осъзнато планиране на образователния процес, където се смесват когнитивни, метакогнитивни и социо-емоционални образователни цели, и насочва вниманието към детерминантите на когнитивното развитие на учениците, особено в начална училищна възраст. Инструментът ще бъде заложен в педагогическия модел за развитие уменията на учениците да решават комплексни проблеми по математика.

1.3.4. Възрастови и невропсихологични аспекти на развитието на 9-10 годишните ученици във връзка с уменията им да решават комплексни проблеми по математика

Периодизация в развитието на когнитивните функции в начална училищна възраст

Началната училищна възраст (6-12 години) е ключов период за когнитивното и социално развитие на децата, като учебният процес играе важна роля във формирането на основни мисловни умения. Този етап се характеризира с интензивно развитие на логическо и абстрактно мислене, като децата преминават от нагледно-образно мислене към словесно-логическо. Според Пиаже, периодът между 7 и 9 години е стадий на конкретни операции, докато от 9 до 12 години децата започват да развиват формални операции.

През този период е важно обучението да включва визуални модели и манипулации с предмети, за да се подпомогне развитието на логико-аритметични умения и критично мислене. В допълнение, груповата работа е съществена за развиването на социални умения и умения за самооценка и саморегулация. Образователният процес трябва да осигурява плавен преход от конкретни примери към по-абстрактни и теоретични концепции, като използва разнообразни подходи и методи, които подпомагат учениците да усвоят научни понятия и да ги прилагат в реални ситуации.

Тази възраст е особено важна за развитието на умения за решаване на проблеми, което включва както личностно, така и социално развитие, като активното участие в учебния процес е ключово за успеха на децата.

Развитие на мозъка и психичните функции на ученици на 9-10 години в начална училищна възраст

В тази част е обърнато внимание на особеностите в развитието на мозъка на 9-10-годишните ученици, паметта, възприятието и вниманието. Василева (2018) описва различни етапи на съзряване, които корелират с различни психични функции. Префронталните отдели на челния дял, отговорни за сложни мозъчни функции като планиране и социална активност, съзряват най-късно.

Физиологичните основи на уменията за решаване на проблеми продължават да се развиват и след 9-10-годишна възраст, като този процес трябва да бъде подкрепен с подходящи образователни стратегии. Обучението трябва да включва задачи, които са релевантни за реалния живот на учениците, за да се стимулира тяхното интелектуално развитие и да се изградят трайни когнитивни възможности.

Така периодът 9-10 годишна възраст представлява важна възможност за педагозите да въведат учебни дейности, които активно развиват критично мислене, планиране и решаване на проблеми, подходящи за учениците в тази възрастова група, с цел подобряване на тяхната учебна готовност и общо когнитивно развитие.

Заключение

Решаването на проблеми е критичен аспект от развитието на математическа компетентност на учениците в начална училищна възраст и включва прилагането на стратегии, които укрепват както индуктивното, така и дедуктивното мислене. Това процесуално умение е тясно свързано с концептуалното разбиране, основополагащо за развитието на устойчиво математическо мислене. Метакогнитивната инструкция на учителите играе важна роля в осъзнаването на собствените учебни процеси и нагласите към математиката, което може значително да повлияе на отношението на учениците към математиката в дългосрочен план. Съвместното учене и процесите на енкултурация подкрепят социалното взаимодействие и културната интеграция в учебната среда, което стимулира споделянето на идеи и методи. Всички тези аспекти на компетентността и мисленето, както отбелязва и Voskoglou (2008), следва да намерят място в образователния процес, съобразен с възрастовите характеристики на малките ученици, тъй като паметта, възприятията и вниманието се развиват и променят през различните етапи и влияят на способността за решаване на проблеми и успеваемостта по математика като цяло. На тази теоретична основа ще бъде изграден и апробиран педагогически модел за развитие уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика. Неговото съдържание, апробиране и резултатите от проведените изследвания ще бъдат представени в следващите глави.

Глава II. Методика на емпиричното изследване

2.1. Цел:

Да се проектира и апробира педагогически модел от 30 урочни единици за развитие на уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика.

Задачи:

За реализиране целите на педагогическото емпирично изследване са определени шест глобални задачи със съответните подзадачи за всяка от тях.

- Провеждане на **предварителен експеримент** за установяване на нивото на подготовка на учениците за решаването на проблеми: наблюдение на учениците, за да се установи тяхното

ниво на подготовка в решаването на проблеми по математика. Това включва формулиране на критерии за педагогическо наблюдение и последващ анализ на резултатите.

- **Изследване на готовността на учителите**: Провеждане на фокус група за оценка на готовността на учителите да прилагат методите за решаване на проблеми по математиката. След това се организира обучение за учителите, които ще участват в експерименталната работа.
- **Планиране на основния експеримент**: Формулиране на хипотези, създаване на инструменти за измерване на резултатите, подбор на подходящи стратегии за решаване на проблеми и разработване на педагогическия модел.
- **Провеждане на първи етап на експериментална работа**: Прилагане на базовия модел, като се измерват резултатите в началото и края на експеримента. Събиране на емпирични данни и оценка на успеха чрез анкети и анализи.
- Превод и адаптация на евристична рамка за решаване на проблеми, оценка от експерти, апробация на разбирането с педагогически специалисти и имплементиране в уроците от педагогическия модел.
- **Провеждане на втори етап на експериментална работа**: Редизайн на педагогическия модел след първия етап, въз основа на събраните данни и евристичната рамка. Провеждане на втори етап на експериментиране, оценка от педагогически специалисти и интервюта с учители за събиране на обратна информация.

2.2. Обект на педагогическия експеримент:

Ученици на 9-10 години в България.

2.3. Предмет на педагогическия експеримент:

Уменията на 9-10-годишни ученици за решаване на комплексни проблеми по математика чрез осъзнато прилагане на евристични стратегии.

2.4. Хипотеза

Чрез обучението по разработения авторски педагогически модел ще се подпомогне развитието на уменията на учениците на 9-10-годишна възраст да решават комплексни проблеми по математика като проследяват процеса си на мислене. Това ще доведе до развитие на уменията им за справяне със задачи по математика, които съдържат непознат елемент, работейки индивидуално или в малка група. По този начин ще се подобри успеваемостта им по математика, най-вече при решаване на задачи, които изискват разсъждение, анализ и математическо моделиране.

2.5. Методи на педагогическото изследване

За реализиране на емпиричното изследване бяха приложени разнообразни качествени и количествени методи, сред които:

- анализ на теоретична литература;
- анализ на методическата литература;

- предварителен експеримент;
- педагогическо наблюдение по време на предварителен експеримент, както и по време на основната експериментална работа през 2022-2023 и 2023-2024 учебни години;
- фокус група с начални учители;
- триангулация на получените резултати и данни от наблюдаващите експерти по време на предварителен експеримент, както и при обработка на експертните контент анализи на данните от фокус групата;
- сравнителен анализ на получените резултати от учениците по време на предварителен експеримент и по време на основната експериментална работа през 2022-2023 и 2023-2024 учебни години;
- контент анализ на данните, събрани чрез фокус група с начални учители, както и на мнението на учителите, провеждали апробацията на инструмента за измерване уменията на учениците да решават проблеми по математика;
- апробация на авторски инструмент за измерване уменията на учениците да решават проблеми по математика, както и на разбирането на евристичната рамка за решаване на проблеми от педагогически специалисти;
- статистически анализ - Cronbach`s Alpha с приети стойности за надеждност от 0.70 до 0.90 (Tavakol, Dennick, 2011) при апробацията на инструмента и при всяко следващо използване за измерване уменията на учениците в началото и края на експерименталните 2022-2023 и 2023-2024 учебни години;
- факторен анализ по метода на главните компоненти за потвърждение на всяка скала в авторския инструмент за измерване уменията на учениците да решават проблеми;
- статистически анализ чрез корелационния коефициент на Pearson с допустими стойности от -1 до 1 (Ганева, 2016) при апробацията на инструмента и при всяко следващо използване за измерване уменията на учениците в началото и края на експерименталните 2022-2023 и 2023-2024 учебни години;
- разработване и структуриране на уроци (методически разработки и материали за учениците) за преподаване на стратегии за решаване на проблеми по математика;
- педагогически експеримент в рамките на един час седмично през цялата учебна 2022-2023 и 2023-2024 учебна година;
- **редизайн на уроците и дейностите** с оглед данните от първи етап на педагогически експеримент и препоръките в евристичната рамка за решаване на проблеми по математика;
- пре-тест и пост-тест на уменията на учениците да решават проблеми по математика;
- Т-тест за независими извадки (Independent-Samples T Test) на Стюдънт;
- Т-тест за свързани (корелирани) извадки (paired-samples t-test) на Стюдънт;
- Т-тест за независими извадки (independent-samples t-test) на Стюдънт;

- експертна оценка от трима независими експерти при провеждането на контент анализа на фокус групата с начални учители, както и за оценка качеството на превода от английски на български език на евристичната рамка за решаване на проблеми по математика;
- оценка чрез SOLO таксономия (Biggs, Collis, 1982) на отговорите на респондентите относно разбирането им за съдържанието на евристичната рамка за решаване на проблеми по математика;
- изчисляване на средноаритметична стойност на оценките на педагогическите специалисти относно разбирането им за всяко научно твърдение и съответните му насоки за евристичен дизайн в евристичната рамка;
- анкетни изследвания по време на основната експериментална работа през 2022-2023 и 2023-2024 учебни години;
- нестандартизирано интервю по предварително подготвени въпроси.

Тези методи осигуряват възможност да бъдат постигнати целите и задачите на научното изследване.

2.6. Инструментариум на педагогическото изследване

За реализирането на педагогическия модел в неговите етапи бяха използвани следните инструменти:

Предварителен експеримент:
- Структуриран урок, адаптирана математическа задача и критерии за успешно представяне.
- Бланка за наблюдение по формулираните критерии.

Изследване на готовността на начални учители да преподават чрез решаване на проблеми:
- Провеждане на фокус група с въпросник и контент анализ.
- Бланка за триангулация на резултатите от експертните оценки и анализи.

Основна експериментална част:
- Създаване на..уроци
- Бланки за оценка на инструмента за измерване на уменията на учениците.
- Преструктуриран математически тест и критериална матрица за оценка.

Първи етап на експерименталната работа:
- Рамка на педагогическия модел и разработени 30 авторски урока.
- Апробация на инструмента и анкетни карти за оценка на преподаваните стратегии.

Евристична рамка за решаване на проблеми:
- Превод на евристичната рамка и бланка за експертна оценка на превода.
- Бланка за апробация и оценка на разбирането на рамката от педагогически специалисти.

Втори етап на експерименталната работа:

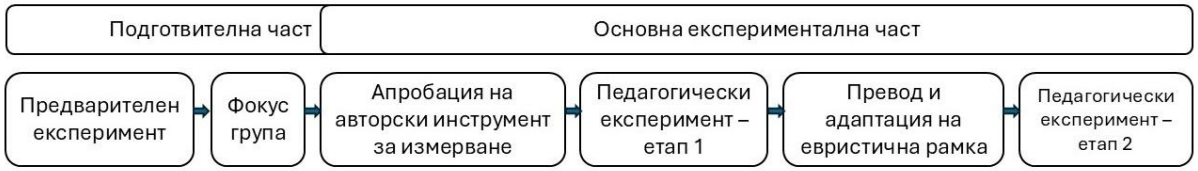
- Преработени 30 авторски урока и инструменти за измерване на уменията.
- Анкетни карти за оценка и интервюта за получаване на обратна връзка.

Използвани са разнообразни методи и инструменти, включително педагогически наблюдения, анкетни изследвания и статистически анализи чрез програми като SPSS, за осигуряване на обективност и достоверност на резултатите.

2.7. Организация на педагогическото изследване

Етапи на педагогическото изследване

За реализиране целите на научното педагогическо изследване бяха формулирани шест етапа на емпирично проучване според шестте глобални задачи на изследването. Тяхната последователност е представена на Фиг. 2.1.



Фиг. 2.1. Етапи на организация на емпиричното педагогическо изследване.

2.7.1. Предварителен експеримент:

- Проведен през май 2021 г. за сравнение между традиционни ученици и ученици от иновативни паралелки.
- Участници - 42 ученици от Прогресивно училище 1 и 41 ОУ „Св. Патриарх Евтимий“.

2.7.2. Качествено изследване на готовността на начални учители да преподават чрез решаване на проблеми:

- Проведена онлайн през януари 2022 г. с 11 учители.
- Въпросите обхващат разбиране на решаването на проблеми и различни стратегии.

2.7.3. Апробация на инструмент за измерване уменията на учениците:

- Проведена през май 2022 г. с 61 ученици от 4 училища в София.

2.7.4. Първи етап на педагогически експеримент:

- През учебната 2022-2023 г. участваха 5 паралелки (експериментални и контролни групи) - общо 82 ученици
- Учителите провеждаха уроци веднъж седмично, като бе осигурена методическа подкрепа и обратна връзка.

2.7.5. Превод и адаптиране на евристична рамка:

- Преведена и адаптирана за българския контекст с помощта на трима експерти преведена в месеците март-май 2023 г

- Рамката е интегрирана в педагогическите уроци за подобряване на уменията на учениците за решаване на проблеми през лятото на 2023 г.

2.7.6. Втори етап на експериментална работа:

- През учебната 2023-2024 г. участват 9 паралелки (5 експериментални и 4 контролни) - общо 152 ученици;
- Учителите са преминали през обучение за решаване на проблеми по математика и евристичната рамка;
- След края на експерименталната работа е проведено интервю с учителите за оценка на качеството на модела.

2.8. Участници в педагогическото изследване

В изследването участваха общо 377 участници, сред които ученици, учители и университетски преподаватели, разпределени както следва:

Изследвания	Ученици	Учители	Студенти	Университетски преподаватели
Предварителен експеримент	42	2	-	1
Фокус група	-	13	-	-
Апробация на инструмент за оценка	61	4	-	-
Първи етап на педагогически експеримент	82	4	-	-
Евристична рамка	-	3	1	3
Втори етап на педагогически експеримент	152	9	-	-
общо	337	35	1	4

Използваната т.нар. "удобна извадка" е тенденциозно избрана по отношение на Прогресивни училища като представител на иновативните форми на преподаване с изразен фокус върху трансдисциплинарно, изследователското учене и решаване на проблеми. Участващите учители се включват в експерименталната работа на доброволен принцип, но участват в изследването с всички деца от съответните паралелки.

2.9. Структура на авторския педагогически модел за развитие уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика

Структурата на авторския педагогически модел е представена на Фиг. 2.2. и съдържа четири основни области:

- математическа компетентност (сини полета);
- преподаване и учене (зелено поле);
- оценяване (розови полета);
- методически ресурси (бледооранжеви полета).

Представени са основните компоненти на математическата компетентност в по-малки сини полета - математическо мислене, метакогнитивни умения, решаване на проблеми, нагласи и енкултурацията. Изведени са основните посоки на разсъждение – дедукция и индукция, чрез които се цели задълбочено концептуално разбиране. Концептуалното разбиране подобрява математическото мислене и изследователското учене и в същото време зависи от тях. Представена е връзката между изследователското учене и решаването на проблеми като съществен негов компонент, упражнявани както самостоятелно, така и в сътрудничество. От друга страна евристичната рамка обхваща значителна част от концепцията за решаване на проблеми и изследователското учене. Това подчертава тесните връзки на рамката с елементите на математическата компетентност, процесите на решаване на проблеми и евристичните стратегии. С бледорозови стрелки е демонстрирана връзката между елементите на математическата компетентност и изследователското учене. В структурата на решаването на проблеми са заложени два основни елемента - процесите на решаване и евристичните стратегии, заложени за преподаване - визуално моделиране, систематично мислене, търсене и прилагане на закономерности и опростяване. Моделът включва процеса на научния метод, метода на Пойа и по-новата версия на Schoenfeld, както и структурата на японската система за решаване на проблеми по математика в начален етап. Всеки от тези елементи е част от методическите разработки в ръководството за учителите.

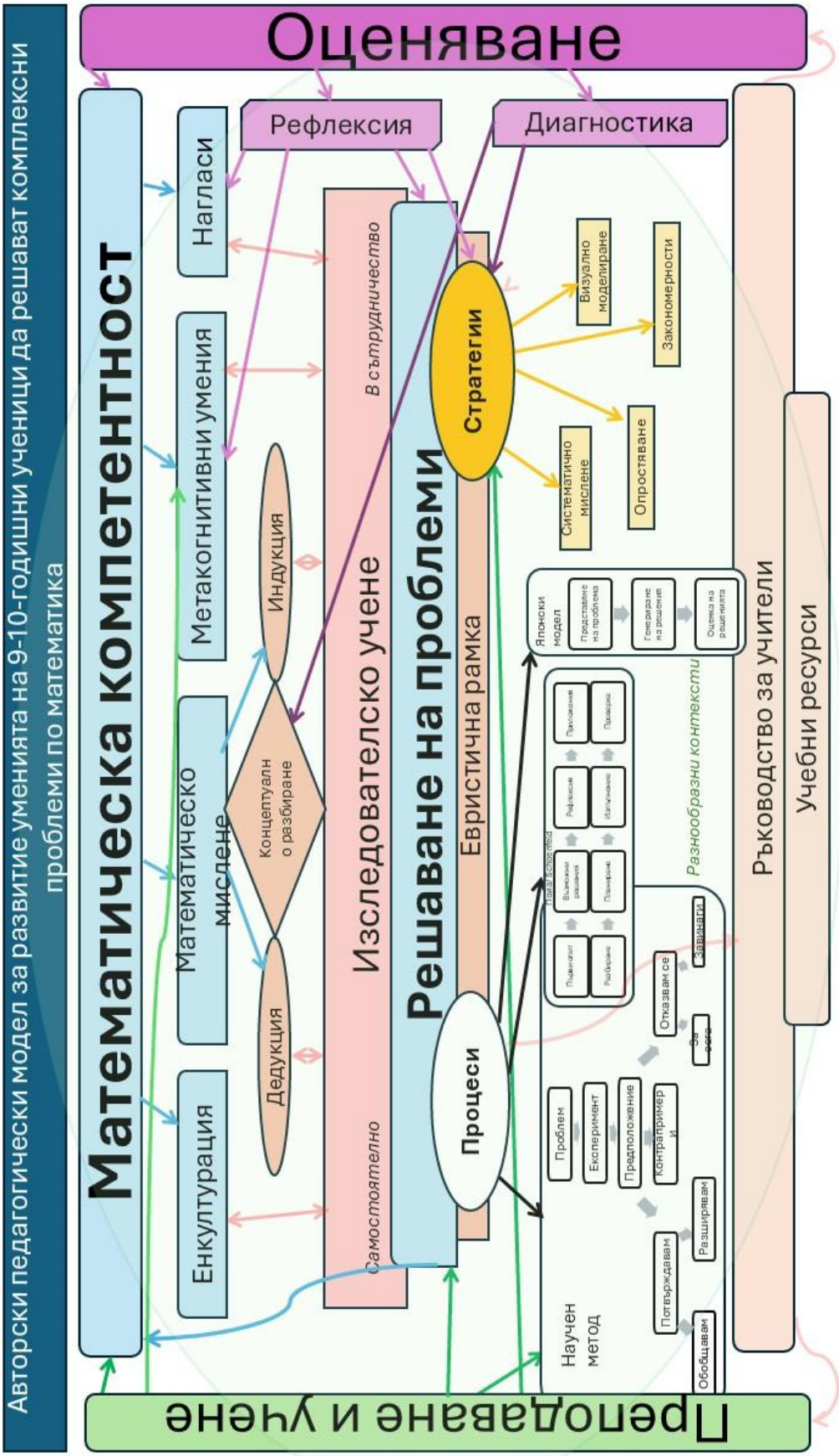
Зелените стрелки показват елементите, които са обект на директно преподаване - решаване на проблеми, конкретни стратегии, научният метод и метакогнитивни умения. Връзките между преподаването и ученето и останалите компоненти на математическата компетентност са имплицитни. Те са част от процеса, но не подлежат на директно преподаване.

Преподаването и оценяването са двете страни на един и същи процес, така че са разположени в двата противоположни края на схемата. Текущото и сумативното оценяване са представени чрез по-малки розови фигури, съответно „рефлексия“ и „диагностициране“. Със светлорозови стрелки са представени елементите, които са предмет на директна рефлексия в хода на учебната работа на учениците. Те разсъждават, самооценяват се и набелязват стъпки за развитие относно уменията си за решаване на проблеми, процеса на решаване, стратегиите, които прилагат, метакогнитивните си умения и нагласи си спрямо математиката и ученето. Тъмнорозовите стрелки показват структурите, заложени в инструмента за измерване на

уменията на учениците да решават проблеми, а именно да ги решават в пълнота и с разбиране, както и да избират, аргументират и прилагат стратегия за решение.

Пълноценното развитие на тези умения изисква прилагането им в разнообразни контексти, които са представени на схематична структура като блед овал, обхващащ всички елементи на процеса.

Качественото преподаване и образователните дейности, свързани с него, изискват съответните учебни ресурси. В модела е включено ръководство за учителите, което съдържа обща концептуална рамка, годишно разпределение, подробни урочни планове и учебни ресурси за учениците, както и диагностичен инструмент. В урочните планове директно или индиректно са заложени описаните по-горе елементи на математическа компетентност с фокус развитие на умения за решаване на проблеми по математика у 9-10-годишните ученици.



Фиг. 2.2. Визуален модел на авторския педагогически модел за развитие уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика

Глава III. Анализ на получените резултати и дискусии

В тази глава се представят резултатите от проведените емпирични проучвания, които се анализират и дискутират в контекста на теоретичния обзор. Проучванията са структурирани в две основни части: първата част съдържа резултатите от различните изследвания, а втората част представя дискусиите, изведени на тяхна база.

3.1. Резултати от проведените емпирични изследвания

3.1.1. Резултати от предварителен експеримент

Данните от педагогическото наблюдение показват значителни различия в начина, по който учениците се справят с анализа и интерпретацията на информация в различните училища. Учениците от ОПУ 1 показват по-добри умения за извличане на информация от текст и прилагане на математически операции за дълбок анализ на данни, като демонстрират способност за намиране на взаимовръзки между различни категории. Въпреки това, някои групи се ограничават само до повърхностния анализ. В 41 ОУ повечето групи се опитват да анализират информацията, но в една от групите липсва задълбочен анализ, а в останалите четири групи се използва опростен подход без активно тълкуване.

По отношение на груповата работа, учениците от ОПУ 1 показват по-добра динамика и по-активно участие, докато в 41 ОУ учениците срещат трудности в комуникацията и споделянето на идеи. Това подчертава влиянието на различните педагогически подходи върху социалните умения на учениците. Сравнението на следването на процедури показва, че учениците в ОПУ 1 са по-добре подготвени да изпълняват задачи и да следват стъпки в образователния процес, докато учениците от 41 ОУ имат затруднения в планирането и изпълнението на задачи. Тези различия отразяват различията в обучението и подготовката, което води до различия в уменията за решаване на проблеми в традиционните и иновативни паралелки.

3.1.2. Резултати от проведена фокус група с начални учители

Изследването на разбирането на учителите относно решаването на проблеми по математика показва, че те разглеждат процеса като активно търсене на нови знания и стратегии и избягване предлагането на готови алгоритми. Те ценят разнообразието от подходи и прилагането на уменията за решаване на проблеми на различни нива, като се стремят към свързване с реалния живот и интересите на учениците. Въпреки това, някои учители ограничават решаването на проблеми до текстови задачи и се фокусират върху намирането на правилния отговор, което ограничава по-дълбокото разбиране на процеса.

Учителите използват различни стратегии за решаване на проблеми, като предположение и проверка, опростяване на задачи, визуализация и категоризация. Въпреки това, тези методи често се бъркат с рутинно решаване на задачи и не винаги се възприемат като част от систематичен подход. Мнозина от учителите признават, че използват тези стратегии интуитивно, без ясен и структуриран подход.

Предизвикателствата, с които се сблъскват учителите, включват лични нагласи, сложността на процеса, необходимостта от допълнителни усилия и ограниченията на традиционната структура на уроците. Тези фактори възпрепятстват по-широкото внедряване на подхода в образованието. Учителите изразяват нужда от допълнителни ресурси, подкрепа и методически материали, които да им помогнат да интегрират ефективно стратегии за решаване на проблеми в своята практика, особено в ранната възраст.

3.1.3. Резултати от апробация на инструмент за измерване уменията на учениците да решават комплексни проблеми по математика

След структуриране на инструмента за измерване на уменията за решаване на проблеми по математика сред 9-10-годишни ученици, той беше представен на двама независими експерти за оценка. Резултатът от тази оценка доведе до корекции в някои от задачите за по-лесно разбиране от страна на учениците. Въпреки това, обратната връзка от учителите, които провеждаха тестирането, показа, че включената таблица за мислене е затруднила учениците, но се реши да остане непроменена заради ползата от нея в процеса на решаване на задачите.

Началният анализ на надеждността на инструмента показа висока стойност на Cronbach's Alpha (0,919), което предполага отлична вътрешна консистентност. Допълнителните анализи на различни скали доведоха до препоръката за отстраняване на някои айтеми, които не корелират достатъчно добре с другите, за подобряване на надеждността. След направените корекции и отстраняване на една цяла скала поради ниска надеждност, повторната оценка показа оптимално подобрение на общата надеждност, както е видно от Таблица 3.1.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.890	.889	18

Таблица 3.1. Cronbach`s Alpha – Надеждност на целия тест без отпадналите айтеми: Скала 1 – 4 и 6; Скала 2 – 4; Скала 3 – 1 и 6; Скала 4 – цялата; Задача 3 – цялата.

Корелационният анализ показа силна положителна зависимост между пълнотата на решението и разбирането на елементите на задачата, както и между разбирането на елементите и прилагането на стратегии за решаване, което доведе до обединяване на първите двата фактора.

3.1.4. Резултати от педагогически експеримент през 2022-2023 година

- *Потвърждение на надеждност*

Надеждността на скалата е 0,780 за цялата извадка N = 165 и това показва отлична надеждност.

- **Устойчивост на резултатите чрез повторно измерване**

Корелацията между средните резултати е средна (0,543), положителна и статистически значима ($p < 0,00$).

- *Сравнителен анализ на контролна и експериментална групи*

За всеки от следващите анализи са формулирани по две алтернативни хипотези, както следва:
*H*0 - няма значимо различие в средните резултати на … на входяща/изходяща диагностика; двете стойности са равни.
*H*1 - има значимо различие в средните резултати на … на входяща/изходяща диагностика; двете стойности са различни.

- Резултати на експерименталната и контролната групи на входяща диагностика:

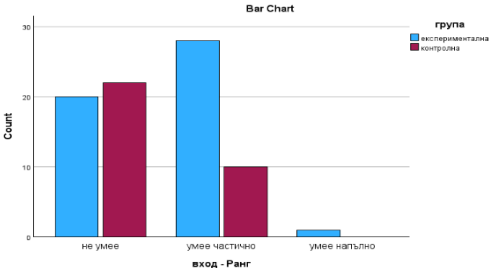
Данните, представени в Приложение № 3.12, дават основание да се приеме *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на входяща диагностика $t (79) = 2,59$, $p=0,01$ с типична големина на ефекта $d = 0,59$.

вход - Ранг * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
вход - Ранг	не умее	20	22	42
	умее частично	28	10	38
	умее напълно	1	0	1
Total		49	32	81

Таблица 3.2. Резултати на експериментална и контролна групи на входяща диагностика през 22-23 година.



Графика 3.1. Резултати на експериментална и контролна групи на входяща диагностика през 22-23 година.

- Резултати на експерименталната и контролната групи на изходяща диагностика:

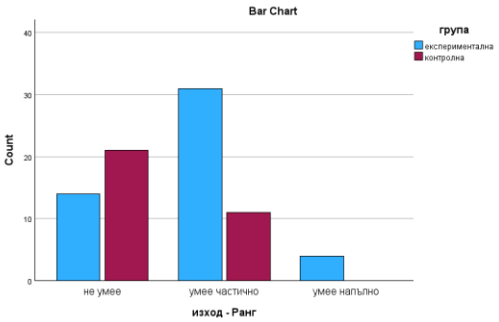
Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на изходяща диагностика t (79) = 3,67, p = 0,00 с по-голяма от типичната големина на ефекта d = 0,84. Данните са представени в Приложение № 3.13.

изход - Ранг * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
изход - Ранг	не умее	14	21	35
	умее частично	31	11	42
	умее напълно	4	0	4
Total		49	32	81

Таблица 3.3. Резултати на експериментална и контролна групи на изходяща диагностика през 22-23 година.



Графика 3.2. Резултати на експериментална и контролна групи на изходяща диагностика през 22-23 година.

- Резултати на експерименталната група на входяща и изходяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната група на входяща и изходяща диагностика t (48) = -2,27, p = 0,03 с отрицателна големина на ефекта d = -0,33. Статистическата разлика е несъществена за практиката. Корелационната връзка е умерена и положителна (R = 0,483), а данните са представени в Приложение № 3.14.

- Резултати на контролната група на входяща и изходяща диагностика:

Приема се *H*0 – няма статистически значимо различие в средните резултати на контролната група на входяща и изходяща диагностика t (31) = -1,33, p = 0,75. Данните са представени в Приложение № 3.15. Корелационната връзка е умерена и положителна (R = 0,364), но по-слаба от тази при експерименталната група.

- Резултати на момчетата и момичетата в експерименталната група на входяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на момчетата и момичетата в експерименталната група на входяща диагностика t (47) = -2,19, p = 0,03 с отрицателна големина на ефекта d = -0,63. Статистическата разлика няма практическа значимост, а данните са представени в Приложение № 3.16.

- Резултати на момчетата и момичетата в експерименталната група на изходяща диагностика:

Приема се *H*0 - няма значима разлика в средноаритметичните резултати на момчетата и момичетата на изходяща диагностика t (47) = -1,35, p = 0,18. Данните са представени в Приложение № 3.17.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училището с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на входяща диагностика:

Данните, представени в Приложение № 3.18, показват, че се приема *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища и училището с традиционен подход на преподаване на входяща диагностика t (47) = 2,34, p = 0,02 със средна големина на ефекта d = 0,69.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училището с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на изходяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища и училището с традиционен подход на преподаване на изходяща диагностика t (47) = 2,95, p = 0,00. Големината на ефекта е по-голяма от типичната за извадката (d = 0,87) и се е задълбочила с 0,18 спрямо входяща диагностика. Данните са представени в Приложение № 3.19.

- *Сравнения на резултатите на отделните паралелки за целия тест през учебната 2022-2023 година*

Средните постижения на експерименталните паралелки в Прогресивни училища 1 и 3 в началото, както и в края на годината, попадат в категория 2 – справят се, но с известни трудности. Всички останали паралелки започват педагогическия експеримент със средни постижения, които отговарят на категория 1 - нямат умения да се справят с математически проблем. В края на учебната година всички паралелки с изключение на контролната в 41 ОУ имат средни постижения в категория 2. От таблицата става ясно, че развитието на учениците от ОПУ 1 е с 0,04 по-малко от това на контролната паралелка в ОПУ 2, докато ръстът в постиженията на другата експериментална паралелка в ОПУ 3 е с 0,11 повече от контролната. Сравнението между експерименталната и контролната паралелка в 41 ОУ показва съответно развитие от 0,11 и -0,05, което задълбочава разликата между двете групи до 0,16.

Сравнения по критерий „решава задачите в пълнота и с разбиране“

- Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на входяща диагностика:

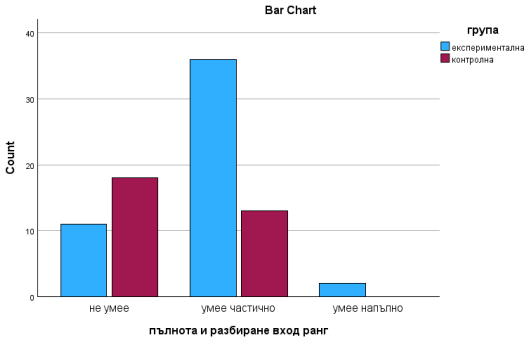
Приема се *H*1 – има статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на входяща диагностика по отношение решаване на задачите в пълнота и с разбиране; t (79) = 3,51, p < 0,00 със силна големина на ефекта d = 0,81. Данните са представени в Приложение № 3.20.

пълнота и разбиране вход ранг * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
пълнота и разбиране вход ранг	не умее	11	18	29
	умее частично	36	13	49
	умее напълно	2	0	80
Total		49	31	80

Таблица 3.4. Резултати на експериментална и контролна групи по критерий „Решава задачи в пълнота и с разбиране“ на входяща диагностика през 22-23 година.



Графика 3.3. Резултати на експериментална и контролна групи по критерий „Решава задачи в пълнота и с разбиране“ на входяща диагностика през 22-23 година.

- Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на изходяща диагностика:

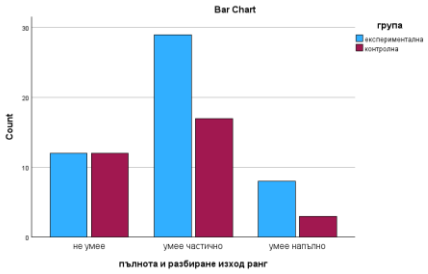
Приема се *Н*0 - няма статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на изходяща диагностика по отношение решаване на задачите в пълнота и с разбиране; t (79) = 1,38, p = 0,17. Данните са представени в Приложение № 3.21. Средните резултати на експерименталната група (1,92) са с 0,20 по-високи от тези на контролната (1,72).

пълнота и разбиране изход ранг * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
пълнота и разбиране изход ранг	не умее	12	12	24
	умее частично	29	17	46
	умее напълно	8	3	11
Total		49	32	81

Таблица 3.5. Резултати на експериментална и контролна групи по критерий „Решава задачи в пълнота и с разбиране“ на изходяща диагностика през 22-23 година.



Графика 3.4. Резултати на експериментална и контролна групи по критерий „Решава задачи в пълнота и с разбиране“ на изходяща диагностика през 22-23 година.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училището с традиционен подход на преподаване в експерименталната група по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на входяща диагностика:

Приема се *Н*0 - няма статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища спрямо училището с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на входяща диагностика по отношение решаване на задачите в пълнота и с разбиране; t (49) = 1,67, p = 0,10. Данните са представени в Приложение № 3.22.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училището с традиционен подход на преподаване в експерименталната група по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на изходяща диагностика:

Приема се *Н*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища спрямо училището с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на изходяща диагностика по отношение решаване на задачите в

пълнота и с разбиране; t (49) = 3,24, p = 0,00 с много по-голяма от типичната големина на ефекта d = 0,99. Данните са представени в Приложение № 3.23.

- *Сравнения на резултатите на отделните паралелки по критерий „решава задачите пълнота и с разбиране“*

Данните показват, че всички експериментални паралелки в началото на учебната година постигат средни резултати в категория 2 - справят се, но с известни трудности, докато контролните паралелки не достигат със съвсем малко прага ѝ (1,50). Прави впечатление, че двете експериментални паралелки в ОПУ 1 и ОПУ 3 имат приблизително еднакъв ръст на средните постижения (съответно 0,21 и 0,24). В третата експериментална паралелка в 41 ОУ практически няма ръст в средните постижения, както и в контролната група в същото училище. Учениците от контролната паралелка в ОПУ 2 са показали най-голямо развитие (0,55) на уменията си да решават математически проблеми в пълнота и с разбиране от всички изследвани паралелки.

Сравнения по критерий „разпознава, прилага и аргументира стратегии за решаване на проблеми“

- Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на входяща диагностика:

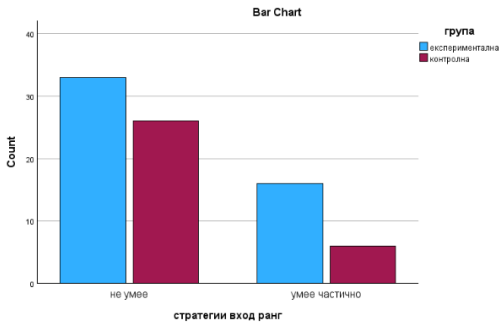
Приема се *H*0 - няма статистически значимо различие в средните постижения на експерименталната и контролната групи на входяща диагностика по отношение на разпознаване, прилагане и аргументиране на стратегия за решение на проблем; t (79) = 1,37, p = 0,17. Данните са представени в Приложение № 3.24.

стратегии вход ранг * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
стратегии вход ранг	не умее	33	26	59
	умее частично	16	6	22
Total		49	32	81

Таблица 3.6. Резултати на експериментална и контролна групи по критерий „Разпознава, прилага и аргументира стратегия за решение“ на входяща диагностика през 22-23 година.



Графика 3.5. Резултати на експериментална и контролна групи по критерий „Разпознава, прилага и аргументира стратегия за решение“ на входяща диагностика през 22-23 година.

- Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на изходяща диагностика бяха формулирани следните хипотези за статистически анализ:

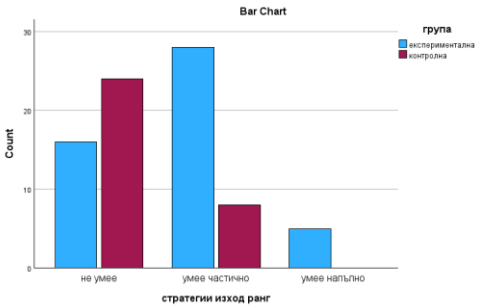
Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на изходяща диагностика по отношение на разпознаване, прилагане и аргументиране на стратегия за решение на проблем; t (79) = 4,15, p < 0,00 с по-голяма от типичната големина на ефекта d = 0,94. Данните са представени в Приложение № 3.25.

стратегии изход ранг * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
стратегии изход ранг	не умее	16	24	40
	умее частично	28	8	36
	умее напълно	5	0	5
Total		49	32	81

Таблица 3.7. Резултати на експериментална и контролна групи по критерий „Разпознава, прилага и аргументира стратегия за решение“ на изходяща диагностика през 22-23 година.



Графика 3.6. Резултати на експериментална и контролна групи по критерий „Разпознава, прилага и аргументира стратегия за решение“ на изходяща диагностика през 22-23 година.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училището с традиционен подход на преподаване в експерименталната група по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на входяща диагностика:

Приема се *H*0 - няма статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища спрямо училището с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на входяща диагностика по отношение на прилагане и аргументиране на стратегия за решение на проблем; t (79) = 1,84, p = 0,07. Данните са представени в Приложение № 3.26.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училището с традиционен подход на преподаване в експерименталната група по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на изходяща диагностика:

Приема се *H*0 - няма статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища спрямо държавното училище в експерименталната група на изходяща диагностика по отношение на прилагане и аргументиране на стратегия за решение на проблем; t (79) = 1,43, p = 0,18. Данните са представени в Приложение № 3.27.

Сравнения на резултатите на отделните паралелки по критерий „разпознава, прилага и аргументира стратегия за решение“

Данните показват, че началното ниво на трите експериментални паралелки са сравними, както и началното ниво на двете контролни паралелки. В края на учебната година двете експериментални паралелки в ОПУ 1 и ОПУ 3 имат сравнимо повишаване на резултатите (съответно 0,42 и 0,47), докато развитието на експерименталната паралелка в 41 ОУ е почти наполовина по-малко (0,25). Прави впечатление, че развитието на контролната паралелка в ОПУ 2 е с 0,02 по-голямо от това на експерименталната паралелка в училището, прилагащо традиционен подход на преподаване. Поради липсата на развитие по този критерии в контролната група на 41 ОУ, разликата в растежа на двете групи е значително по-голям (0,26) от тези на паралелките в Прогресивни училища (съответно 0,15 и 0,17 за ОПУ 1 и ОПУ 3).

3.1.5. Резултати от превод и адаптиране на евристична рамка за решаване на проблеми по математика за приложение на български език

Резултатите от превода и адаптацията на евристичната рамка за решаване на проблеми по математика на българския език показват висока оценка на превода, въпреки някои препоръки за точността на изказа и специфични термини. Експертите предложили допълнителни разяснения на основни понятия като "зона на близко развитие" и "мисловна схема", както и примери за работа с учениците. Преводът е оценен с високи точки от всички респонденти, а

адаптирането на документа продължи с изследване на разбирането на направените корекции. Оценките показват, че педагогическите специалисти имат общо разбиране за концепциите, но не винаги успяват да свържат примери с основните твърдения. По-добро разбиране на метакогнитивните насоки е наблюдавано при студентът и началният учител, докато прогимназиалният учител показва по-ниско ниво на разбиране по три от петте категории.

3.1.6. Резултати от педагогически експеримент през 2023-2024 година

- Потвърждение на резултатите за надеждност на инструмента за измерване уменията на учениците да решават проблеми по математика

Коефициентът Cronbach`s Alpha е 0,780 за цялата извадка N = 314 и показва отлична надеждност на инструмента.

- **Устойчивост на резултатите чрез повторно измерване**

Корелацията между средните резултати на входяща и изходяща диагностика е средна (0,413), положителна и статистически значима ($p < 0,00$).

- *Сравнителен анализ на контролна и експериментална групи*

За всеки от следващите анализи са формулирани по две алтернативни хипотези, както следва:
*H*0 - няма значимо различие в средните резултати на … на входяща/изходяща диагностика; двете стойности са равни.
*H*1 - има значимо различие в средните резултати на … на входяща/изходяща диагностика; двете стойности са различни.

- Резултати на експерименталната и контролната групи на входяща диагностика:

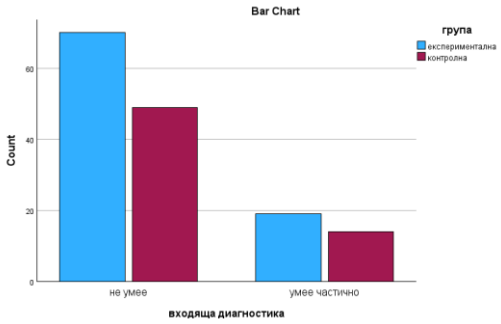
Приема се *H*0 - няма статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на входяща диагностика t (150) = -0,13, p = 0,90. Данните са представени в Приложение № 3.32.

входяща диагностика * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
входяща диагностика	не умее	70	49	119
	умее частично	19	14	33
Total		89	63	152

Таблица 3.8. Резултати на експериментална и контролна групи на входяща диагностика през 23-24 година.



Графика 3.7. Резултати на експериментална и контролна групи на входяща диагностика през 23-24 година.

- Резултати на експерименталната и контролната групи на изходяща диагностика:

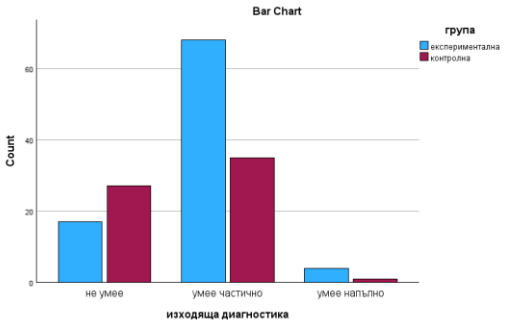
Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на изходяща диагностика t (150) = 3,29, p = 0,00 с типична големина на ефекта d = 0,54. Данните са представени в Приложение № 3.33.

изходяща диагностика * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
изходяща диагностика	не умее	17	27	44
	умее частично	68	35	103
	умее напълно	4	1	5
Total		89	63	152

Таблица 3.9. Резултати на експериментална и контролна групи на изходяща диагностика през 23-24 година.



Графика 3.8. Резултати на експериментална и контролна групи на изходяща диагностика през 23-24 година.

- Резултати на експерименталната група на входяща и изходяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната група на входяща и изходяща диагностика t (88) = -9,94, p < 0,00 с отрицателна големина на ефекта d = -1,05. Разликата е статистически, но не и фактически значима, а данните са представени в Приложение № 3.34. Корелационната връзка е слаба и положителна (R = 0,046).

- Резултати на контролната група на входяща и изходяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на контролната на входяща и изходяща диагностика t (62) = -5,29, p < 0,00 с отрицателна големина на ефекта d = -0,67. Разликата е статистически значима, но не и фактическа, а данните са представени в Приложение № 3.35. Корелационната връзка е умерена и положителна (R = 0,348).

- Резултати на момчетата и момичетата в експерименталната група на входяща диагностика:

Приема се *H*0 - няма значима разлика в средните резултати на момчетата и момичетата на входяща диагностика t (87) = -0,83, p = 0,41. Данните са представени в Приложение № 3.36.

- Резултати на момчетата и момичетата в експерименталната група на изходяща диагностика:

Приема се *H*0 - няма значима разлика в средните резултати на момчетата и момичетата в експерименталната група на изходяща диагностика t (87) = 0,71, p = 0,48. Данните са представени в приложение № 3.36.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на входяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища и училищата с традиционен подход на преподаване на входяща диагностика t (87) = 2,77, p = 0,01 със средна големина на ефекта d = 0,65. Данните са представени в Приложение № 3.37.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на изходяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища и училищата с традиционен подход на преподаване на изходяща диагностика t (87) = 2,99, p = 0,01 със средна големина на ефекта d = 0,70. Данните са представени в Приложение № 3.38.

- *Сравнения на резултатите на отделните паралелки за целия тест през учебната 2023-2024 година*

В началото на учебната година всички паралелки имат средни постижения в категория 1. В края на годината, с изключение на контролните паралелки в 101 СУ и ОУ „Г. Кирков“, всички експериментални паралелки постигат средни постижения в категория 2. Три експериментални паралелки имат средни постижения над 0,70, докато една достига резултат 0,60, а друга постига само 0,38. Данните на експерименталните и контролните групи показват различия в ръста на уменията, като най-голямо развитие се наблюдава в паралелката на ОУ „Г. Кирков“.

Сравнения по критерий „решава задачите в пълнота и с разбиране“

- Сравнителен анализ на контролна и експериментална групи
  - Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на входяща диагностика:

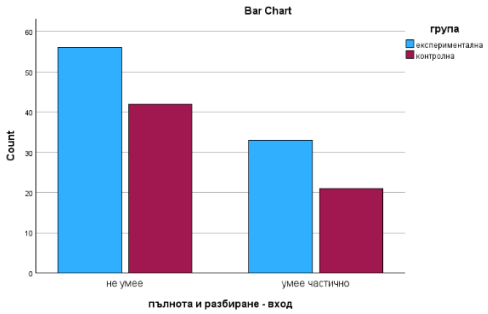
Приема се *Н*0 - няма статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на входяща диагностика по отношение решаване на задачите в пълнота и с разбиране; t (150) = 0,47, p = 0,64. Средното постижение на експерименталната група е 1,37, а на контролната – 1,33, както е видно в Приложение № 3.39.

пълнота и разбиране - вход * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
пълнота и разбиране - вход	не умее	56	42	98
	умее частично	33	21	54
Total		89	63	152

Таблица 3.10. Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на входяща диагностика през 23-24 година.



Графика 3.9. Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на входяща диагностика през 23-24 година.

- Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на изходяща диагностика:

Приема се *Н*1 – има статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на изходяща диагностика по отношение решаване на задачите в пълнота и с разбиране; t (150) = 2,19, p = 0,03 със средна големина на ефекта d = 0,36. Според данните, представени в Приложение № 3.40.

пълнота и разбиране - изход * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
пълнота и разбиране - изход	не умее	12	16	28
	умее частично	65	43	108
	умее напълно	12	4	16
Total		89	63	152

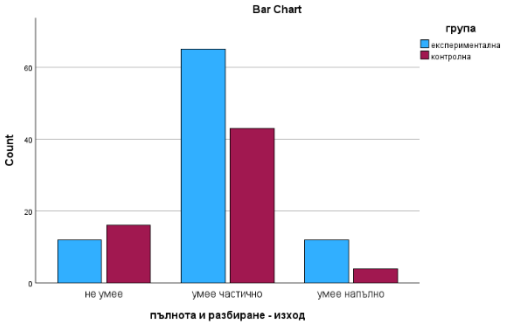


Таблица 3.11. Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на изходяща диагностика през 23-24 година.

Графика 3.10. Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на изходяща диагностика през 23-24 година.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на входяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на входяща диагностика по отношение решаване на задачите в пълнота и с разбиране; t (87) = 3,47, p < 0,00 с по-голяма от типичната големина на ефекта d = 0,82. Данните са в Приложение № 3.41.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група по отношение решаването на задачите в пълнота и с разбиране на изходяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на изходяща диагностика по отношение решаване на задачите в пълнота и с разбиране; t (87) = 3,34, p = 0,00 със силна големина на ефекта d = 0,79. Данните са в Приложение № 3.42.

- *Сравнения на резултатите на отделните паралелки според критерий „Решават задачите в пълнота и с разбиране“ през учебната 2023-2024 година*

Сравненията на паралелките по отделно показват, че почти всички експериментални групи с изключение на тази в ОУ „П. Славейков“ (0,47) са регистрирали ръст на постиженията около и над 0,60. В две от експерименталните паралелки се забелязва разлика в развитието спрямо контролната група около 0,20, а в други две е приблизително 0,30. В ОУ „П. Славейков“ контролната група (0,57) е показала малко по-висок ръст на уменията за решаване на задачите в пълната и с разбиране, отколкото учениците в експерименталната (0,47). Единствено двете експериментални паралелки в Прогресивни училища надхвърлят прага от 2,00 в средните постижения на учениците в края на годината. Най-голямо развитие в рамките на експерименталната работа регистрира паралелката в ОУ „Г. Кирков“ (0,70).

Сравнения по критерий „разпознава, прилага и аргументира стратегии за решаване на проблеми“

- Сравнение между експериментална и контролна групи
- Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на входяща диагностика:

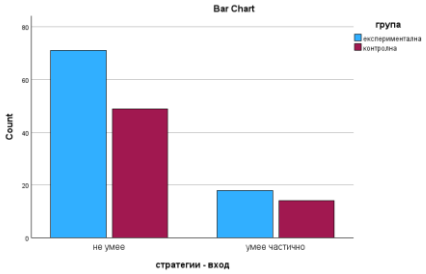
Приема се *H*0 - няма статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на входяща диагностика по отношение на прилагане и аргументиране на стратегия за решение на проблем; t (150) = -0,30, p = 0,77. Данните са представени в Приложение № 3.43.

стратегии - вход * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
стратегии - вход	не умее	71	49	120
	умее частично	18	14	32
Total		89	63	152

Таблица 3.12. Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на входяща диагностика през 23-24 година.



Графика 3.11. Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на входяща диагностика през 23-24 година.

- Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на изходяща диагностика:

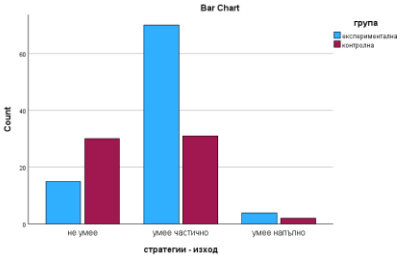
Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на експерименталната и контролната групи на изходяща диагностика по отношение на прилагане и аргументиране на стратегия за решение на проблем; t (150) = 3,91, p < 0,00 със средна големина на ефекта d = 0,64. Данните са представени в Приложение № 3.44.

стратегии - изход * група Crosstabulation

Count

		група		
		експериментална	контролна	Total
стратегии - изход	не умее	15	30	45
	умее частично	70	31	101
	умее напълно	4	2	6
Total		89	63	152

Таблица 3.13. Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на изходяща диагностика през 23-24 година.



Графика 3.12. Резултати на експерименталната и контролната групи по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на изходяща диагностика през 23-24 година.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на входяща диагностика:

Приема се *H*0 - няма статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на входяща диагностика по отношение на прилагане и аргументиране на стратегия за решение на проблем; t (87) = 1,14, p = 0,26. Данните са представени в Приложение № 3.45.

- Резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група по отношение разпознаването, прилагането и аргументирането на стратегии за решаване на проблеми на изходяща диагностика:

Приема се *H*1 - има статистически значимо различие в средните резултати на Прогресивни училища спрямо училищата с традиционен подход на преподаване в експерименталната група на изходяща диагностика по отношение на прилагане и аргументиране

на стратегия за решение на проблем; t (87) = 2,78, p = 0,01 със средна големина на ефекта d = 0,66. Данните са представени в Приложение № 3.46.

- *Сравнения на резултатите на отделните паралелки по критерий „разпознава, прилага и аргументира стратегия за решение“*

Повечето експериментални паралелки показват значителен ръст в постиженията си спрямо началното измерване, с резултати между 0.71 и 0.86. Изключение прави паралелката в П. Славейков, Варна, чийто резултат е 0.42. Резултатите на контролните групи са различни в отделните училища. В 101 СУ контролната група не показва развитие, което води до отчитане на ръст в експерименталната група спрямо нея от 100%. В училището във Варна с традиционен подход, развитието на двете паралелки е почти еднакво (разлика от 0.07). В Прогресивните училища експерименталните групи имат по-голям ръст в сравнение с контролните, а най-голям ръст показва паралелката в Казанлък, която надвишава два пъти развитието на контролната група.

- *Оценка на групите уроци по всяка от четирите преподадени стратегии от начални учители, провеждащи експерименталната работа през 2023-2024 година*

Учителите оценяват позитивно уроците за развитие на уменията на учениците да решават математически проблеми, като дадените оценки са високи (5). Те отбелязват, че уроците са полезни за повишаване на мотивацията, интереса и творческото решаване на задачи, както и за развитие на умения за работа в екип. Препоръките включват увеличаване на практическите упражнения и уточняване на някои инструкции. Наблюденията подчертават трудностите на учениците в началото на курса, както и умората от активната мисловна дейност.

Учителите също така оценяват уроците за развитие на метакогнитивни умения като много полезни, но изразяват необходимост от допълнителни упражнения и примерни решения. Въпреки това, те намират уроците полезни за осмисляне на математическите операции като деление и за развиване на мисленето на учениците. Най-високо оценена е групата уроци за опростяване на математическите задачи, която е определена за полезна не само за математика, но и за други учебни предмети.

3.2. Анализ и дискусии след проведените емпирични изследвания

3.2.1. Дискусия на резултатите от предварителен експеримент за структуриране на педагогически модел за развитие уменията на ученици в начален етап да решават проблеми по математика

Сравнението между учениците, обучавани в традиционен и трансдисциплинарен контекст, показва различия в подхода към комплексни проблеми. Учениците, обучавани по традиционен начин, се нуждаят от педагогически модел, който включва активности за развитие на умения за групова работа и активно участие в дискусии. Това би подобрило техните умения за решаване на проблеми чрез планиране, поемане на отговорности и целеполагане.

От друга страна, учениците в трансдисциплинарен контекст вече притежават развити умения за групова работа, което им позволява да се фокусират директно върху стратегии и методи за решаване на проблеми. Те са по-активни в генерирането на идеи и участието в дискусии и показват по-добра способност за извличане и интерпретация на информация.

И двете групи се нуждаят от дейности, които да развиват уменията им за описване на решенията и процесите, като това ще им помогне да комуникират своите мисли по-ясно и ефективно. Учениците в трансдисциплинарна среда показват по-добри резултати в решаването

на комплексни математически проблеми, което подчертава значението на този подход за развитието на критично мислене и колаборативни умения.

3.2.2. Дискусия на резултатите от проведената фокус група с начални учители за установяване на разбирането и готовността им да прилагат решаване на проблеми като подход за преподаване на математика

Учителите, участващи във фокус групата, разглеждат решаването на проблеми като когнитивен процес и педагогическа практика. Мненията им се делят на четири категории: засягащи основни и второстепенни характеристики, несъществени аспекти и изкривявания в разбирането. Основната им представа е, че решаването на проблеми е умение и начин на мислене, който позволява на учениците да се справят със ситуации, които са нови или частично познати. Те също така свързват решаването на проблеми с учебните предмети и реалния живот.

Въпреки това, има изкривявания в представите им, като неправилното свързване на решаването на проблеми само с текстови задачи и фокусирането върху намирането на правилния отговор, а не върху процеса на мислене. Някои учители вярват, че всеки проблем има решение, което не винаги е вярно в реалния живот.

Различията в представите на учителите показват, че имат основни и повърхностни разбирания за решаването на проблеми, което подкрепя тезата, че имат нужда от допълнителен опит и обучение в контекста на математическата компетентност и мислене. Това изисква преосмисляне на ролята на учителя като фасилитатор и задълбочено обучение за развитието на математическо мислене като основна цел на образованието.

3.2.3. Дискусия на резултатите от апробация на инструмент за измерване уменията на учениците да решават комплексни проблеми по математика

Резултатите от изследването показват, че приложената методология е надеждна и валидна за извадката след извършените корекции, което позволи по-нататъшен статистически анализ. Факторният анализ показа високи факторни тегла на айтемите в съответната скала, въпреки някои по-ниски корелации между отделни айтеми, което означава, че задачите могат да бъдат запазени за бъдещи измервания. Корелационният анализ установи силна зависимост между пълнотата на решението на задачата и разбирането на нейните елементи. Освен това, установена беше положителна корелация между пълнотата на решението и разпознаването и аргументирането на стратегия за решение, както и между разбирането на елементите на задачата и избор и прилагане на стратегия за решение.

Хипотезата, че избраните задачи и въпроси ще измерват уменията на 9-10-годишни ученици за решаване на комплексни математически проблеми, беше потвърдена. За измерване на резултатите от работата с педагогическия модел ще се използват 6 от 7-те задачи в първия вариант на теста. Тези задачи ще бъдат оценявани на база един или два критерия, като задачите включват решаване в пълнота и разбиране, както и посочване и аргументиране на използвана стратегия.

3.2.4. Дискусия на резултатите от педагогическия експеримент през 2022-2023 година

Резултатите от изследването показват, че методологията за измерване на уменията на 9-10-годишни ученици за решаване на математически проблеми е надеждна и валидна, потвърдена чрез теста Cronbach’s Alpha и статистически значимата корелация между входящата и изходящата диагностика. В началото на изследването се наблюдават значителни разлики между

контролната и експерименталната група, като експерименталната група показва подобрение в резултатите, докато контролната почти не показва напредък.

Учениците в Прогресивни училища решават задачите по-пълно и с повече разбиране в сравнение с контролната група, което показва, че иновативният подход в преподаването има положително въздействие върху развитието на уменията за решаване на проблеми. Въпреки това, педагогическият модел трябва да бъде коригиран, за да се обърне по-сериозно внимание на уменията за решаване на проблеми в пълнота и с разбиране.

Резултатите показват също, че педагогическият модел помага на учениците да разпознават, прилагат и аргументират стратегии за решаване на проблеми, независимо от образователния контекст. Учениците от Прогресивни училища демонстрират по-добри резултати и в тази категория в сравнение с учениците, обучавани по традиционен метод.

Оценките на учителите показват висока удовлетвореност от работата с педагогическия модел, като отбелязват ползите за учениците в развитието на аналитични умения и умения за работа в група. Препоръките на учителите включват съкращаване на времето за дейности и подобряване на баланса в учебния процес, за да се осигури по-добра работа на учениците.

3.2.5. Дискусии за превода и адаптацията на евристичната рамка за решаване на проблеми по математика

Анализът показва, че разбирането на педагогическите специалисти за научните твърдения и приложни насоки е частично, което кореспондира с твърденията на авторите, цитирани в литературния обзор (Манева, 2021; Lester, 2013; Miller, Banes, 2012). Началният учител показва по-задълбочено разбиране в сравнение с учителя от прогимназиална степен и студента, като е възможно това да се дължи на различия в езиковата подготовка (единият учител е от украински произход) и мотивация. Повече от половината от заявените метакогнитивни твърдения са били неразбрани от специалистите, което подчертава нуждата от по-детайлни обяснения и практически примери в обучението на учителите. Идеите за измерване на упоритостта чрез скали за оценка и самооценка не са в съответствие с нуждите за поставяне на учениците в предизвикателни ситуации, които насърчават упоритостта и рефлексията (Темникова, 2020; Десев, 2008; Новакова, 2004). Това показва, че недостатъчното разбиране се дължи на липсата на задълбочени познания относно концепциите, което също подкрепя необходимостта от по-нататъшно обучение и усъвършенстване на педагогическите квалификации.

3.2.6 Дискусии след педагогическия експеримент през 2023-2024 година

Анализът на теста за оценка на уменията на учениците да решават комплексни математически проблеми потвърди високата надеждност с отлична стойност на Cronbach's Alpha. Корелационният коефициент на Пиърсън показа средна степен на корелация между началните и крайните резултати на учениците, което потвърждава, че тестът е подходящ за сравнение на данните от двата етапа на оценяване.

Началните и крайните резултати показват, че учениците от експерименталната група значително са подобрили своите умения в сравнение с контролната, като надхвърлят средното подобрение с 0,26 точки, което подчертава ефективността на педагогическия модел. Това съответства на данните от други изследвания, които също докладват за положително въздействие на подобни образователни интервенции (Ajai, Imoko, O'kwu, 2013; Ali, Hukamdad, et al., 2010; Schoenfeld, 1982).

При анализа на резултатите става видно, че в началото на учебната година учениците имат ниски умения за решаване на задачи и в двете групи. В края на учебната година обаче

повече ученици от експерименталната група показват средни постижения, докато контролната група остава с ниски резултати, подчертавайки значимата разлика в постиженията и ефикасността на модела.

Средните резултати по полов признак са сравнително равни в началото и в края на годината, което показва, че педагогическият модел е достатъчно универсален и поддържа равни условия за развитие на уменията на момчета и момичета.

Сравнението между Прогресивни училища и тези с традиционен подход показва, че иновативните училища започват с по-добра основа, което им помага да поддържат високи резултати до края на учебната година, демонстрирайки ефективността на трансдисциплинарния педагогически подход.

Накрая, оценките на учителите, участвали в изследването, подчертават ползите от включените стратегии и подходи в педагогическия модел, но също така изтъкват необходимостта от допълнителни упражнения и по-добро балансиране на натоварването на учениците.

Сравнителен анализ на двете последователни години на експериментиране на педагогическия модел за развитие на уменията на 9-10-годишни ученици решават комплексни проблеми по математика. Изводи и заключения.

През първата експериментална година, учениците от експерименталната група показват умерен ръст в постиженията си, със значителен напредък в стратегическото мислене. През втората година, след въвеждането на евристичната рамка, се наблюдава значително подобрение в резултатите на учениците, особено в способността им да решават задачи в пълнота и с разбиране, както и в стратегическото мислене. Това подчертава ефективността на евристичната рамка за решаване на проблеми в образователния процес.

Въпреки тези подобрения, малък брой ученици достигат най-високото ниво на постижения, което показва, че настоящата критериална матрица може да бъде ограничаваща. Препоръчва се експериментиране с ученици от по-високи възрастови групи и реформиране на матрицата за по-добро отразяване на различията в успеваемостта на учениците.

Учителите изразяват висока удовлетвореност от модела, но предлагат намаляване на обема на дейностите, за да се осигури повече фокус върху мисловните процеси и сътрудничеството между учениците. Продължава да има предизвикателства с научния метод в часовете, което насочва към необходимостта от по-балансиран подход в подаването на учебното съдържание, за да се избегне когнитивно натоварване на учениците.

Глава IV. Авторски педагогически модел за развитие уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика

Тази глава представя апробирания и усъвършенстван авторски модел за развитие на метакогнитивното умение за решаване на проблеми, който цели да подпомогне учениците в създаването на собствени решения на математически задачи, съдържащи елементи на неопределеност. Тази неопределеност възниква от използването на задачи, които са частично или напълно непознати за учениците. Моделът е разработен, за да запълни липсата на систематизирани методически разработки в България по тази тема и да отговори на образователните цели за развитие на математическа компетентност и мислене в началните етапи на образованието. Той може да бъде директно приложен от учителите в клас или използван като основа за подобряване на учебниците и създаване на други модели, насърчаващи метакогнитивното развитие на учениците.

4.1. Цел и очаквани резултати на педагогическия модел:

Целта на педагогическия модел е да развие уменията на учениците за решаване на математически проблеми и метакогнитивни умения, като част от тяхната математическа компетентност. Моделът акцентира върху използването на евристични стратегии, визуални репрезентации и систематизиране на информация, както и върху развитието на способности за рефлексия и самоанализ. Той е свързан с образователните цели за трети клас и включва междупредметни връзки с други дисциплини.

4.2. Описание на педагогическия модел:

Моделът е създаден да помогне на учителите при организиране на учебното съдържание за развитие на умения за решаване на проблеми, метакогнитивно и стратегическо мислене, както и умения за индивидуална и групова работа. Той включва четири евристични стратегии (визуално моделиране, систематично мислене, търсене и прилагане на закономерности, опростяване) и използва научния метод за решаване на проблеми, с цел дълбоко разбиране и приложение на наученото.

4.3. Входяща и изходяща диагностика:

Моделът включва инструмент за измерване уменията на учениците за решаване на комплексни математически проблеми. Тестът съдържа шест задачи, оценяващи решаване на задачи и прилагане на стратегии, и се използва за измерване на уменията в началото и края на учебната година.

4.4. Подбор на учебно съдържание:

Педагогическият модел се фокусира върху прилагането на стратегии и развитието на мисленето на учениците, като започва с основни задачи и операции до 1000 и постепенно преминава към по-сложни концепции като деление и прогресии.

4.5. Учебни ресурси:

Моделът включва ръководство с подробни урочни планове, работни листове, въпроси и допълнителни ресурси, базирани на утвърдени български и международни източници.

4.6. Дизайн на учебните модули:

Моделът включва 27 урока, разпределени циклично, с начална и крайна диагностика, уроци за комбиниране на стратегии и урок за самоанализ. Уроците са структурирани по научния метод и предлагат различни форми на работа — фронтална, индивидуална и групова.

4.7. Методически насоки при работа с отделните модули

Урок № 1. „Как се решават проблеми?”

Урокът е организиран по научния метод за решаване на проблеми, като учениците първо практикуват методите и след това ги анализират. Използват се манипулативи за визуализиране на задачите. В края на урока учениците пишат рефлексия за усвоеното.

Урок № 2. „Как мислят хората, които успешно решават проблеми?“

Урокът развива научния метод и включва анализ на закономерности и експерименти. Учениците провеждат тестове на своите предположения и обсъждат мисловните процеси чрез „мислене на глас“.

Стратегия 1. Визуално моделиране

Въведение в моделирането на задачи чрез схеми и диаграми, като учениците създават модели и разсъждават върху тях. Използват се лентови диаграми и числови оси за визуализиране на задачи.

Урок № 3. „Схеми за сравняване и умножение“

Учениците използват визуално моделиране за разбиране на математическите концепции, като решават текстови задачи и прилагат метакогнитивни въпроси.

Урок № 4. „Схеми за сравняване и умножение (2)“

Учениците работят с правоъгълници в лентови диаграми за визуализиране на задачи, като адаптират моделите за различни задачи.

Урок № 5. „Числова ос“

Учениците използват числовата ос за решаване на задачи и обсъждат ограниченията на подхода.

Урок № 6. „Числова ос (2)“

Приложение на числовата ос в създаването на времеви линии и базови математически операции.

Урок № 7. “Сравнение на задачи и подходящите за тях схеми”

Учениците анализират задачи и избират подходящи визуални модели за тяхното решаване.

Урок № 8. “Визуален модел - пространствено ориентиране и оразмеряване”

Учениците създават табла за визуално моделиране, като развиват пространственото си мислене.

Стратегия 2. Систематично мислене

Систематичното мислене включва подреденост и логическо мислене при решаване на задачи, като се представя подреждането на числа и други форми на подреденост.

Урок № 9. „Подреждане на числа“

Учениците подреждат числови данни и анализират ефективността на различни методи за подреждане.

Урок № 10. „Пътешествие из България“

Учениците изследват маршрути на картата на България и систематично подреждат дължината на маршрутите.

Урок № 11. „Градове и забележителности“

Учениците изберат най-подходящ маршрут за екскурзия, като комбинират дължина на маршрута и наличието на забележителности.

Урок № 12. „Маршрути и критерии“

Учениците съставят маршрути, като използват научния метод и стратегии за организиране на информация.

Урок № 13. „Текстови задачи за числа - проблеми с формулирането“

Учениците решават текстови задачи и анализират методите си за решаване чрез работа в партньорства.

Урок № 14. „Комбиниране на стратегиите за визуално моделиране и систематично мислене“

Учениците комбинират стратегиите при решаване на комбинаторни задачи, като развиват гъвкавостта на мисленето си.

Стратегия 3. Търсене и прилагане на закономерности

Учениците изследват закономерности при деление и числови редици, като прилагат алгоритми и стратегическо мислене.

Урок № 15. „Деление с остатък“

Учениците изучават остатъка при деление и се учат да го тълкуват в различни контексти.

Урок № 16. „Изследване на закономерности“

Учениците откриват закономерности чрез различни стратегии, като използват деление за решаване на задачи.

Урок № 17. „Закономерности в числови редици“

Учениците изучават числови редици и се учат да определят членство на числа в редици чрез деление.

Урок № 18. „Номер на член на числова редица“

Учениците използват научния метод за идентифициране на членове в числови редици и определяне на тяхното местоположение.

Урок № 19. „Закономерности в реалния свят“

Учениците прилагат наученото в практически задачи, свързани с реални ситуации, като визуализират решения.

Урок № 20. „Учене за себе си като учащ“

Учениците анализират своите стратегии за учене и решаване на проблеми чрез създаване на мисловни карти и решаване на задачи.

Урок 21. „Комбиниране на стратегии за решаване на проблеми“

Учениците комбинират различни подходи за решаване на задачи и оценяват своето развитие.

Стратегия 4. Опростяване

Четирите урока се фокусират върху техники за опростяване на задачи като съкратен запис, замяна с малки числа, раздробяване на части и преформулиране.

Урок № 22. „Опростяване чрез заместване с малки числа“

Учениците работят с по-малки числа за опростяване на задачи и практикуват различни техники.

Урок № 23. „Опростяване чрез раздробяване на части“

Учениците анализират геометрични задачи и използват раздробяване за опростяване на решението.

Урок № 24. „Опростяване чрез преформулиране“

Учениците опростяват задачи чрез преформулиране и използват научния метод за анализ.

Урок № 25. „Избор на техника за опростяване“

Обобщаване на стратегиите за опростяване, с практическо приложение и анализ на ефективността.

Урок № 26. „Избор на стратегия за решаване на математически проблем“

Учениците избират стратегии и работят върху задачи, като развиват самостоятелност и критично мислене.

Урок № 27. „Рефлексия на процеса на учене“

Учениците рефлектират върху напредъка си в решаването на математически проблеми и идентифицират подобрения.

Заключение

Дисертационният труд изследва развитието на умения за решаване на комплексни проблеми по математика в начален етап чрез евристични стратегии и метакогнитивно учене. Теоретичният анализ обосновава значението на подобен подход за когнитивното и математическото развитие на учениците, като се основава на концепции като конструктивистката теория на Пиаже и идеите на Виготски за скафолдинга. Изследването подчертава важността на нерутинните задачи за стимулиране на математическото мислене и способността за генериране на нови решения.

Емпирично доказателство за ефективността на разработения педагогически модел е предоставено чрез експерименти в реална училищна среда. Моделът интегрира стратегии като визуално моделиране, систематично мислене, търсене на закономерности и опростяване, подкрепени от научния метод и рефлексия. Данните показват статистически значимо подобрение на уменията за анализ, планиране и решаване на проблеми сред учениците в експерименталната група. Моделът е особено успешен за ученици в иновативни образователни среди, подчертавайки ограниченията на традиционното преподаване.

Сред предизвикателствата са приложената скала за оценка, която се препоръчва да бъде заменена с таксономията SOLO за измерване на концептуално разбиране, както и възможността за адаптиране на модела за по-големи ученици. Подчертава се значението на интегративен подход, който да обхваща както часовете за решаване на проблеми, така и редовните учебни дейности.

Приноси на изследването

Настоящият дисертационен труд има значими теоретични и практически приноси в областта на началното образование по математика, като се фокусира върху развитието на уменията за решаване на комплексни проблеми, част от математическата компетентност. Разработеният педагогически модел и изводите от изследването обогатяват теорията и практиката, като предлагат конкретни методи и стратегии за обучение, които могат да бъдат интегрирани в училищната среда.

Теоретичните приноси:

- обогатяване на теорията за решаването на проблеми в началното образование.

В рамките на дисертацията беше направен задълбочен анализ на съществуващите теоретични модели и подходи за решаване на проблеми (моделът на Пойа, научният метод, японският модел за решаване на проблеми и др.);

- предложена е цялостна дефиниция на решаването на проблеми като метакогнитивно умение и концепция за преподаването на математическо съдържание чрез решаване на проблеми, което се основава на активното участие на учениците и стратегическо мислене;
- изведени са теоретични зависимости между евристичните стратегии и когнитивното развитие на учениците, които могат да послужат като база за бъдещи изследвания и практики в образованието;
- изследването предлага структурирана класификация на евристичните стратегии (визуално моделиране, систематично мислене, търсене и прилагане на закономерности и опростяване на проблема), които са доказано приложими и ефективни в началния етап на обучение по математика;
- изведени са условията, при които тези стратегии могат да бъдат успешно преподавани и усвоени от учениците, включително ролята на учителя, използването на подходящи примери и предоставянето на подкрепяща среда;
- очертана е същността на математическата компетентност и математическото мислене с неговите най-съществени характеристики - значимостта на базовите математически знания, индуктивно и дедуктивно мислене, ролята на (вътрешния) сократовия диалог за ефективно мислене, концептуално разбиране, позитивни нагласи и въвличане в математическа култура на поведение;
- представена е връзката между метакогнитивното развитие на учениците, математиката и решаването на проблеми като свързващо звено;
- сравнителният анализ на традиционният подход за преподаване на математика и решаването на проблеми позволи да се очертаят приликите, разликите и възможностите за съчетаване в търсене на най-добрите стратегии за образование в начален етап.

Приноси на дисертационния труд, свързани с педагогическата практика:

- Създаден е авторски педагогически модел за развитие уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика.

Разработеният модел обединява теоретични концепции от конструктивизма, изследователското учене и проблемно-базираното обучение и включва:

- конкретни уроци с методически насоки и примери за математически проблеми с различна степен на сложност, които стимулират развитието на съответните умения;
- описание на стъпките за въвеждане на евристични стратегии в учебния процес;

- указания за създаване на подкрепяща среда, която мотивира учениците да търсят решения самостоятелно и в група;
- инструмент за измерване уменията на учениците в началото и края на учебната година, както и възможности за формиращо оценяване.

- **Преведена и адаптирана за приложение на български език евристична рамка за решаване на проблеми.**

Тя представлява инструмент, който позволява на педагогически специалисти и експерти да създават образователно съдържание и учебни дейности, които обогатяват математическата компетентност на учениците в начален етап. Може да се прилага при съставяне и оценка на образователни програми, учебници и помагала, както и за структуриране на годишни планове за учебна работа от учителите.

- Педагогическият модел осигурява **подкрепа за учителите** в търсенето на възможности за метакогнитивно развитие на учениците в контекста на обучението по математика.
- Дисертационният труд предоставя **готови инструменти за внедряване на изследователски и проблемно-базирани методи в практиката**.

Това допринася за повишаване на качеството на преподаването и създава предпоставки за иновативни педагогически решения.

- **Съставено е авторско ръководство за учители за развитие уменията на учениците на 9-10 години да решават проблеми по математика.**

Ръководството предлага концептуална рамка на решаването на проблеми като метакогнитивно умение, годишно тематично разпределение, инструмент за измерване уменията на учениците в началото и края на учебната година, евристична рамка за решаване на проблеми като инструмент за годишно планиране на учебното съдържание по математика както и подробно разписани урочни планове, подходящи за директна употреба в учебна среда.

Развитието на уменията за решаване на проблеми е сърцевина на качественото образование, насочено към подготовката на личности, способни да мислят критично и да се справят с предизвикателствата на бъдещето. Предложеният в дисертационния труд модел доказва, че чрез целенасочени и добре структурирани педагогически подходи учениците могат не само да усвоят математически знания, но и да развият ключови умения за живота.

Този труд е стъпка в посока към осъвременяване на методиката на обучението по математика, като същевременно отговаря на нуждите на съвременното общество за подготвени, иновативни и адаптивни личности.

Публикации

1. Стоилова, Л. (2021). Решаване на проблеми по математика в началното училище - експеримент в две класни стаи. Педагогически и социални изследвания, том 2 (2021), ISSN 2738-8298
2. Стоилова, Л. (2022). Решаване на проблеми в STEM обучението. STEM/STEAM обучение в началното училище. София. Научноизследователски проект № 80-10-97 от 13 май 2022, финансиран от ФНИ към СУ "Св. Кл. Охридски"
3. Стоилова, Л., Алексиева, Л. (2023). Решаване на проблеми в обучението по математика в началните класове: какво мислят учителите?. Т. 116 (2023): Годишник, книга Педагогически науки, том 116, година 4, 2023
4. Стоилова, Л., Алексиева, Л. (2024). Решаване на проблеми по математика – същност, модели, стратегии и възможности за реализиране в обучението на 9-10 годишни ученици. Pedagogika-Pedagogy, Volume 96, Number 1
5. Стоилова, Л. (2024). Измерване уменията на 9-10-годишни ученици за решаване на комплексни проблеми по математика. ВТУ, Педагогически колеж - Плевен. ISBN 978-619-91255-9-5, retrieved on 15.12.2024: https://univt-my.sharepoint.com/personal/college_ts_uni-vt_bg/_layouts/15/onedrive.aspx?id=%2Fpersonal%2Fcollege%5Fts%5Funi%2Dvt%5Fbg%2FDocuments%2F%D0%A1%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%B4%D0%BE%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%B8%20%2D%20%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%8F%202024%2Epdf&parent=%2Fpersonal%2Fcollege%5Fts%5Funi%2Dvt%5Fbg%2FDocuments&ga=1
6. Stoilova, L. (2024) Система от уроци за развитие уменията на 9-10-годишни ученици да решават комплексни проблеми по математика. Scientific Institute of Management and Knowledge, retrieved on 12.12.2023: https://www.ceeol.com/search/article-detail?id=1238208

Библиография

Бележки:

1. International Baccalaureate Organization. Primary Years Programme. Mathematics scope and sequence, 2009
2. Trends In International Mathematics And Science Study, https://timssandpirls.bc.edu/timss-landing.html
3. Victoria curriculum, retrieved on 03.11.24: https://www.vcaa.vic.edu.au/curriculum/foundation-10/Pages/default.aspx
4. USA common core, retrieved on 03.11.24: https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf
5. Институт за прогресивно образование (ИПО), retrieved on 29.10.24 https://progresivno.org/jump-math/

Литература (посочена е само литературата, използвана в авторферата):

1. Алексиева, Л. (2022). Подходи за STEM обучение в началните класове. STEM/STEAM обучение в началното училище. Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, София.
2. Алексиева, Л. (2021). Електронни ресурси за онлайн обучение по математика в началните класове – същност, видове, качество. Математика и информатика Volume 64
3. Алексиева, Л. (2019). Обучаваща мултимедия за изучаване на таблично умножение и деление. София: ИК Рива
4. Burgov, Pr. (2013). Когнитивни аспекти на процесите на решаване на проблеми. Диоген 1:48-58.
5. Ванева, В. (2003). Когнитивни стратегии при обучението по математика в детската градина и началното училище. Проучване и разработване на иновации в технологията на реализирането на съвременни образователни стратегии, Русе, УИЦ, 2003, стр. 7-15
6. Василева, Е. (2004). Урокът в началното училище. Свят 2001
7. Василева, Н. (2018). Детска невропсихология. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“
8. Върбанова, М. (2013). Методика на обучението по математика в началните класове, Астарта, Пловдив
9. Гълъбова, Д. (2022). Развиване на STEM компетентности в бъдещи учители по математика в тенденцията на STEM образованието. Математика и математическо образование. Proceedings of the Fifty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Tryavna, April 5–9
10. Десев, Л. (2008). Речник по психология. София. Булгарика. Desev, L. (2008) Psychology Dictionary”. Sofia. Bulgarika
11. Doychinov, Yo. (2021). Research of the Didactic Features in the Game Design Education, PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE - 2021, volume 60, book 1.1., retrieved on 16.11.2024: https://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp21/1.1/1.1-22.pdf
12. Европейска комисия, Генерална дирекция „Образование, младеж, спорт и култура“ (2019). Key competences for lifelong learning, Publications Office, [viewed 03.08.2022], Available from: https://data.europa.eu/doi/10.2766/569540
13. Кирилова, Б. (2023). Проектно базираното обучение – адаптация към съвременната реалност. София

14. Кирова, Г. (2021). Актуални проблеми на дидактиката на математиката в началните класове. София, Веда словена-ЖГ
15. Кожухарова, П. (2016). Развитие на уменията за критично мислене в процеса на обучение. ШУ „Еп. Константин Преславски“. Университетско издателство „Св. Кл. Орхидски“
16. Костова, Здр., Владимирова, Е. (2011). Интерактивно обучение: същност, трудности, теоретични основи и критични оценки. Стратегии на образователната и научната политика, (19) 3:203-238
17. Lalchev, Z., Varbanova, M. (2007). Prepodavane ili presazdavane na matematikata v obuchenieto na studentite pedagozi.
18. Мандева, М. (2015). Компетентностен подход в обучението по първия (български) език – начален етап на основната образователна степен. В. Търново; retrieved on 08.11.2024: https://www.uni-vt.bg/userinfo/365/pub/6829/%D0%BC.%20%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D0%B5%D0%B2%D0%B0_%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%BF.%20%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%85%D0%BE%D0%B4_2015.pdf#page=45.49
19. Манева, М. (2021). Математическа грамотност и грамотност по математика. МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, Proceedings of the Fiftieth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, 2021
20. Мирчева, И. (2022). Обучението по STEM – основни характеристики. STEM/STEAM обучение в началното училище. Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, София.
21. Мирчева, И. (2022а). Ролята на учителя при STEM обучението. STEM/STEAM обучение в началното училище. Университетско издателство „Св. Кл. Охридски“, София.
22. МОН. (2019). Za prehoda ot znania kam umenia. [МОН. (2019а). За прехода от знания към умения], Retrieved 28 March, 2023 from https://web.mon.bg/bg/100770,
23. Новакова, З. (2004). Методика на обучението по математика в началните класове. София. Веда Словена – ЖГ
24. Пойа, Д. (1972). Как се решава задача. София, Народна просвета
25. Stanoeva, D. (2019). Personal Example and Education. За ценностите в правото, НБУ; retrieved on 16.11.2024: https://core.ac.uk/download/pdf/328817798.pdf#page=378
26. Стърнбърг, Р. (2012). Когнитивна психология. Изток-Запад, София
27. Цанев, Н. (2020). Конструктивистки дизайн в обучението по технологии и предприемачество в началното училище, retrieved on 05.11.24: https://fnoi.uni-sofia.bg/wp
28. Чавдарова-Костова, С. (2022). Наръчник за прилагане на компетентностния подход в обучението на бъдещи учители. МОН, Национална програма „Повишаване на компетентностите на преподавателите от държавните висши училища, подготвящи бъдещи учители“
29. Янева, Д. (2024). Трансверсални компетентности в условията на дигитализиран работен свят. SCIENTIFIC ATLAS, 2024, NO 10, ISSN 2738-7518
30. Ajai, J., Imoko, B., O'kwu, E. (2013). Comparison of the Learning Effectiveness of Problem-Based Learning (PBL) and Conventional Method of Teaching Algebra. Journal of Education and Practice, ISSN 2222-1735 (Paper) ISSN 2222-288X (Online), Vol.4, No.1; retrieved on 26.11.2024: https://core.ac.uk/download/pdf/234633889.pdf
31. Akin, A., Kurbanoglu, I. (2011). The relationship between math anxiety, math attitudes and Self-Efficacy: A Structural Equational Model STUDIA PSYCHOLOGICA, 53, 3; retrieved on 20.11.2024: https://studiapsychologica.com/uploads/AKIN_SP_03_vol.53_2011_pp.263-273.pdf#page=2.25
32. Ali, R., Hukamdad, Akhter, A., Khan, A. (2010). Effect of Using Problem Solving Method in Teaching Mathematics on the Achievement of Mathematics Students. Asian Social Science, vol 6,

№2; retrieved on 25.11.2024: https://pdfs.semanticscholar.org/d525/051a0d34723e43e6aef03d5bb1573bb6acfb.pdf
33. Armstrong, P. (2010). Bloom's Taxonomy. Vanderbilt University Center for Teaching. Retrieved [28.10.24] from https://cft.vanderbilt.edu/guides-sub-pages/blooms-taxonomy/.
34. Baker, W., Dias, O., Czarnocha, B., Prabhu, V. (2012). Problem Solving in Remedial Mathematics& A Jumpstart to Reform. 12th International Congress on Mathematical Education
35. Barmby, P., Bolden, D., Thompson, l. (2014). Understanding and Enriching Problem Solving in Primary Mathematics. Critical Publishing Ltd.
36. Benson, H., Morison, E. (2009). Socratic Method. Forthcoming in Cambridge Companion to Socrates. Retrieved on 16.11.2024: https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/31505045/Socratic_Method-libre.pdf?1392290731=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DSocratic_Method.pdf&Expires=1733077442&Signature=bfXX7946pIg37YWiAXT7DREBomHZpcOWdp1EiTnoIHie5ehY5jMKuJh3jkkouG3nJwRyWEJpkzQqzV5VX6Jy3uqQsnjaU0tP0Y70obtnnjLdlUiofB27mQHi9k4J3EGYQE4lUtfuymkK0DnXnLQLEfGPtXWk5YVLrTcPvIcRGZ1c8d70adU7hBE~Q1WKRniKFBegUMstsoHovHf4T8whw92Yb4jCgLFzOTfTdmBkY9iqVFHZ6kmmP2plrYAelfWzqqzL-yEfH8-ZGQpWg6ocYfJ6kz-eov1imD6eJ4OvfQ7GW8gqRtcom28HhSKCk8TmSAU1AdKnRZ9II7veZTjooA__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA
37. Cummins, D., (2012). Good Thinking. Cambridge University Press.
38. Dewey, Jhon. (1997). How We Think. Dover Publications; Revised ed. edition
39. Enser, M., Z. (2020). Generative Learning in Action. WALKTHRUs production.
40. Firmanti, P. (2014). The Process of Deductive Thinking at 8th Grade Students with High Math Skill in Completing Geometric Proof. Proceeding of International Conference On Research, Implementation And Education, Of Mathematics And Sciences 2014, Yogyakarta State University, Retrieved on 15.11.2024: https://core.ac.uk/download/pdf/33509383.pdf#page=1.74
41. Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist*, *34*(10), 906–911. https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906
42. Gurat, M., Medula, C. (2016). Metacognitive Strategy Knowledge Use through Mathematical Problem Solving amongst Pre-service Teachers. American Journal of Educational Research, 2016, Vol. 4, No. 2, 170-189
43. Hidayatullah, A., Csíkos, C. (2023). The Role of Students` Believes, Parents` Educational Level, And the Mediating Role of Attitude and Motivation in Students` Mathematics Achievement. Asia-Pacific Edu Res (2024) 33:253–262. Retrieved on 17.11.2024: https://doi.org/10.1007/s40299-023-00724-2
44. Hussein, Y., Csíkos, C. (2023). The effect of teaching conceptual knowledge on students' achievement, anxiety about, and attitude toward mathematics. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19(2), em2226; ISSN:1305-8223 (online); retrieved on 17.11.2024: https://real.mtak.hu/177261/1/the-effect-of-teaching-conceptual-knowledge-on-students-achievement-anxiety-about-and-attitude-12938.pdf
45. Hyde, A. (2015). Comprehending Problem Solving. Heinemann
46. Jacinto, H., Carreira, S., (2012) Problem Solving in and Beyond the Classroom: Perspectives and Products from Participants in a Web-Based Mathematical Competition. 12th International Congress on Mathematical Education
47. Jefferson, J. R. PT. (2001). Problem-Based Learning and the Promotion of Problem Solving: Choices for Physical Therapy Curricula. Journal of Physical Therapy Education: Spring 2001 - Volume 15 - Issue 1, p 26-31

48. Keong, Ng F. (2004). A Heuristical Framework for Scaffolding Metacognition in Mathematics Problem-Solving.
49. Kolovou, A. (2011). Mathematical Problem Solving in Primary School. Dissertation Utrecht University, Nederlands.
50. Lahann, P., Lambdin, D. (2020). Collaborative Learning in Mathematics Education. USA; retrieved on 17.11.2024: https://link.springer.com/referenceworkentry/10.1007/978-3-030-15789-0_23
51. Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. Mathematical Thinking and Learning, 5(2–3), 157–189. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679998
52. Lessani, A., Yunus, A., Bakar, K. (2017). Comparison Of New Mathematics Teaching Methods With Traditional Method. PEOPLE: International Journal of Social Sciences, ISSN 2454-5899; retrieved on 25.11.2024: https://dx.doi.org/10.20319/pijss.2017.32.12851297
53. Lester, F. (1987). Teaching mathematical problem solving
54. Lester, Jr., Charles, R. (Eds.) (2003). Teaching Mathematics through Problem Solving. Prekindergarten-Grade 6. National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
55. Lester, F. (2013). Thoughts About Research on Mathematical Problem-Solving Instruction. The Mathematics Enthusiast, volume 10 (nos. 1&2), pp. 245-278
56. Manouchehri, D., Zhang, P., Liu, Y. (2012). Forces Hindering Development of Mathematical Problem Solving Among School Children. 12th International Congress on Mathematical Education
57. Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2010). Thinking Mathematically. Pearson
58. Menary, R. (2015). Mathematical Cognition - A Case of Enculturation. In T. Metzinger & J. M. Windt (Eds). Open MIND: 25(T). Frankfurt am Main: MIND Group. doi: 10.15502/9783958570818; retrieved on 17.11.2024: https://philarchive.org/archive/MENMCA-2
59. Numprasertchai, S., Numprasertchai, H. (2024). The Integration of Knowledge Management and Design Thinking forImproving Problem-Solving Skills: A Case Study of a Service Agency, Artificial Intelligence for Human-TechnologiesEconomy Sustainable Development, Lublin, Poland; retrieved on 24.11.2024: https://toknowpress.net/ISBN/978-961-6914-31-4/35.pdf
60. NZ Maths, 2023. Problem Solving Strategies: Retrieved 28 March, 2023 from https://nzmaths.co.nz/problem-solving-strategies
61. Ng, L., (2012). Taking a Closer Look at Mathematical Problem Solving. 12th International Congress on Mathematical Education
62. Pien, Ch. (2024). Mathematical Thinking: Task Design and Implementation in Primary Mathematics Classrooms. National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore; The Mathematician Educator, Vol 5, No. 1, 16-30
63. PISA (2012). Results. Creative Problem Solving. Student`s Skills in Tackling Real-Life Problems. Volume 5
64. Poblete, A., Díaz, V., (2012). The Role of “Socio Didactics” in Mathematics. 12th International Congress on Mathematical Education
65. Posamentier, A., Krulik, St., (2008). Problem Solving Strategies for Efficient And Elegant Solutions. Grade 6-12. Thousand Oaks, CA: Corwin Press
66. Rott., B. (2012). Heuristics In the Problem Solving Processes Of Fifth Graders: An Analysis. 35th Annual Conference of the Leibniz University of Hanover
67. Rowe, H. (2024). Problem Solving And Intelligence. Psychology Revivals, Taylor & Francis, ISBN 1003827632, 9781003827634
68. Voskoglou, M., (2008). Problem Solving in Mathematics Education: Recent Trends and Development. “Quaderni di Ricerca in Didattica” (Scienze Matematiche), n18

69. Zanabazar, A., Deleg, A., Ravdan, M. (2023). A Study of Factors Causing Math Anxiety Among Undergraduate Students. International Journal of Innovative Research and Scientific Studies, 6(3), pages: 578-585. ISSN: 2617-6548; retrieved on 17.11.2024: https://ijirss.com/index.php/ijirss/article/view/1609/368