

Рецензия

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:
“Функционали на процеси на Леви и техни приложения “
за придобиване на
образователна и научна степен „доктор“

от

кандидат: Мартин Йорданов Минчев

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: 4.5. Математика,

Докторска програма: „Теория на бероятностите и математическа статистика“,

катедра: „ВОИС“,

Факултет по математика и информатика (ФМИ),

Софийски университет „Св. Климент Охридски“ (СУ),

Рецензията е изготвена от: **доц. д-р Дончо Дончев** в качеството ми на член на научното жури, съгласно Заповед № РД 38-200/26.04.2024 г. г. на Ректора на Софийския университет.

1. Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали

Представеният дисертационен труд е в обем от 175 стр., като включва 6 глави, две приложения и списък на цитираните литературни източници. Последният съдържа 178 заглавия.

2. Данни и лични впечатления за кандидата

Познавам Мартин Минчев като член на изпитната комисия на неговия кандидат-докторантски изпит, както и двата му изпита по специалността по време на докторантурата. Освен това той беше мой асистент през 2023 г., когато за бях титуляр на курса по Математическа Статистика на студентите от спец. Анализ на Данни. Мнението ми за него е, че той притежава блестящи математически способности, съчетани с трудолюбие и целеустременост.

Проблематиката на неговата дисертация ми е близка, тъй като през 2018 г. бях рецензент на докторската дисертация на неговия научен ръководител, посветена на същата задача. Сравнявайки двете дисертации, съм впечатлен от това, колко съществено е надграждането в настоящия дисертационен труд по отношение на нови резултати, идеи и методология.

3. Съдържателен анализ на научните и научноприложните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата

Теорията на експоненциалните функционали на процесите на Леви има повече от половинвековна история, като в последните години се развива особено интензивно. Причината за това е както факта, че сама по себе си тази теория е изключително красива и дълбока и изисква използването на методи и идеи от различни области на математиката, така и многобройните и важни приложения, които намира в различни области на знанието (разклоняващи се процеси в случайна среда, времена на изчезване на себеподобни процеси, оценяване на азиатски опции и др.).

На ранните етапи от развитието на теорията на експоненциалните функционали се използват главно вероятностни методи, като първите конкретни резултати са свързани с два известни подхода. При първият подход, въведен от Джон Ламперти, се използва връзката между експоненциалния функционал и закона на вход (entrance law) на себеподобен Марковски процес (цитираната Теорема 4.3 в дисертацията), което позволява, в някои случаи, да се намери разпределението на функционала. Вторият подход се базира на наблюдението, че всеки процес на Леви може да се представи като логаритъм на стохастична експонента на обобщен процес на Орнщайн-Оленбег, и следователно, разпределението на неговия експоненциален функционал може да бъде описано в термините на стационарното разпределение на този процес.

В последните години, благодарение на идеите на Пиер Пати и Младен Савов, които са развити и в настоящата дисертация, е предложен нов подход към теорията на

експоненциалните функционали. Накратко същността му е в следното. Известен факт е, че цялата информация за даден процес на Леви се съдържа в неговата характеристична експонента. Същността на подхода на Пати-Савов е в намирането на директна връзка между аналитичните свойства на характеристичната експонента и тънките вероятностни свойства на разпределението на експоненциалния функционал, такива като асимптотиката на опашката на разпределението, свойства на моментите, наличието на плътност, степен на гладкост на плътността и др. Реализацията на този подход има своята цена. Тя изисква привличането на сериозни средства от областта на комплексния анализ, интегралните трансформации, Тауберовите апроксимации и др. Получени са нови, важни резултати, свързани с Бернщайн-Гама функциите. В резултат на това, по мое мнение, в голяма степен смисълът на думите “цялата информация за процеса на Леви се съдържа в неговата характеристична експонента” е разкрит благодарение на този подход.

Представеният дисертационен труд на Мартин Минчев следва да се разглежда като развитие на този подход в описаното по-горе направление. Авторът е навлязъл в необходимата дълбочина в общата теория на експоненциалните функционали, както и в необходимите съпътстващи клонове на математиката, необходими за изследване на аналитичните свойства на характеристичната експонента. Основната идея на подхода е следната. Отправна точка е уравнение, в което присъстват комплексните моменти на експоненциалния функционал, т.е. трансформациите на Мелин на неговата вероятностна плътност. Това уравнение наподобява функционалното уравнение, което удовлетворяват Бернщайн-Гама функциите с тази разлика, че ролята на функцията на Бернщайн се играе от функцията $-z/\Psi(-z)$, където $\Psi(z)$ е характеристичната експонента на процеса на Леви. От друга страна, формулата за обръщане, а именно интегралът на Мелин-Барнс, позволява вероятностната плътност на експоненциалния функционал да се представи чрез своята трансформация на Мелин, която чрез функционалното уравнение зависи от характеристичната експонента $\Psi(z)$. Именно в това се състои връзката между $\Psi(z)$ и вероятностната плътност на функционала. Както се вижда, тази връзка съвсем не е непосредствена и за да се извлече от нея необходимата информация са необходими значителни усилия и изобретателност. Ще спомена някои от използваните техники:

- 1) С характеристичната експонента не се работи директно, а се прибегва до нейната факторизация на Винер-Хопф, като в представянето на

трансформацията на Мелин на функционала участват Беврнщайн-Гама функциите, съответстващи на множителите на тази факторизация;

- 2) Първоначално се разглеждат важни частни случаи на процеси на Леви и функционали с по-проста структура- субординатори, функционали със случаен експоненциално разпределен хоризонт (вкл. безкраен) и др.
- 3) Направен е преход към общи процеси на Леви, като е разгледан и случая на функционали с детерминиран хоризонт.

Основните приноси на автора са следните:

- 1) В случай на субординатори са получени резултати, отнасящи се до гладкостта на вероятностната плътност и поведението на опашката на разпределението на функционала;
- 2) В случай на процеси на Леви с отрицателно математическо очакване и правилно изменяща се опашка е изследвана слабата сходимост на техните скалирани по подходящ начин експоненциални функционали;
- 3) Получени са подобрени асимптотики на Стирлинг на определен клас Бернщайн-Гама функции;
- 4) В случай на общи процеси на Леви е изследвана връзката на свързаните с тях Бернщайн-Гама функции на две променливи и конволюциите на потенциалната мярка на процесите.

Основните резултати в дисертацията се съдържат в Глави 4 и 5.

В Глава 4 се изучават функционали на експоненциално изчезващи субординатори ξ_t , за които $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = \infty$. При условие, че мярката на Леви на тези процеси удовлетворява условието за положително нарастване е показано, че разпределението на съответния функционал притежава производни от произволен ред, и е получена точна асимптотика за поведението на тези производни при $t \rightarrow \infty$. Асимптотичната формула е в термините на функцията на Бернщайн на субординатора, по-точно на функцията, която функционално зависи от нея (Теорема 17.1). Този резултат е използван за оценка на асимптотиката на опашката на разпределението на функционала (Следствие 17.2). Специално внимание е отделено на случая на съставен процес на Пуассон с рядко настъпващи големи скокове (Следствие 17.4), както и на устойчиви субординатори и Гама-субординатори.

В Глава 5 основен обект на изследване са експоненциални функционали с детерминиран хоризонт, свързани с процеси на Леви ξ_t , за които $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = -\infty$ и $E\xi_1 < 0$. Тази задача е тясно свързана със задачата за разпределението на функционали на

експоненциално изчезващи процеси на Леви, тъй като, ако последната бъде решена, то разпределението на функционала с детерминиран хоризонт може да бъде намерено чрез обръщане на трансформация на Лаплас относно скоростта на изчезване. Факторизацията на Винер-Хопф на характеристичната експонента на такива процеси съдържа два нетривиални множителя, което от своя страна води до използване на функции на Бернщайн и Бернщайн-Гама функции на два променливи. Аналогично на случая на субординатор клонящ към ∞ при $t \rightarrow \infty$, трансформацията на Мелин на функционала на експоненциално изчезващия процес удовлетворява функционално уравнение относно пространствената променлива, и допуска представяне в термините на Бернщайн-Гама функции на две променливи.

Основният резултат в тази глава е Теорема 25.1, в която е показано, че разпределението на подходящо нормирания функционал $I_\zeta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ клони слабо към крайна мярка, за която е получено интегрално представяне в термините на Бернщайн-Гама функциите, съответстващи на множителите във факторизацията на Винер-Хопф. В Теорема 25.6 е получено уточнение на някои следствия от Теорема 25.1, хвърлящи светлина върху асимптотичното поведение на математическото очакване на функции от експоненциалния функционал, в случая, когато мярката на Леви на процеса ζ_t удовлетворява определен интегрален критерий. В Лема 26.1, Бернщайн-Гама функциите, присъстващи във формулировката на Теорема 25.1 са охарактеризирани в термините q-потенциалната мярка на процеса на Леви. По същество този резултат по принцип решава задачата за намирането на разпределението както на функционалите на експоненциално изчезващите процеси на Леви, така и на функционалите с детерминиран хоризонт. В дисертацията тази лема е използвана за получаването на важна информация за свойствата на Бернщайн-Гама функциите, съответстващи на множителите в представянето на Винер-Хопф на характеристичната експонента на процеса.

При доказателството на всички цитирани по-горе резултати е използван богат математически инструментариум, като са преодолены значителни технически трудности, изискващи използването на голям брой допълнителни лема, много от които са нови и представляващи самостоятелен интерес.

4. Апробация на резултатите

Резултатите, съдържащи се в Глава 4 на дисертацията са публикувани в Bernulli (Q1, в съавторство с научния ръководител). Резултатите от Глава 5 са

докладвани на 5 конференции, две от които са в чужбина. Публикуваната работа има 7 цитирания в списания с висок импакт-фактор. Приемам, че в нея приносът на двамата автори е равностоен.

Мнението ми е, че:

а) научните трудове отговарят на минималните национални изисквания (по чл. 2б, ал. 2 и 3 на ЗРАСРБ) и съответно на допълнителните изисквания на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване на образователна и научна степен „доктор“ в научната област и професионално направление на процедурата;

б) представените от кандидата резултати в дисертационния труд и научни трудове към него не повтарят такива от предишни процедури за придобиване на научно звание и академична длъжност ;

в) няма доказано по законоустановения ред плагиатство в представения дисертационен труд и научни трудове по тази процедура.

5. Качества на автореферата

Авторефератът отговаря на всички изисквания за изготвянето му и представя коректно резултатите и съдържанието на дисертационния труд.

6. Критични бележки и препоръки нямам.

7. Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащи се в тях научни и научноприложни приноси, **потвърждавам**, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния Правилник на СУ „Св. Климент Охридски“ за придобиване от кандидата на образователната и научна степен „доктор“ в научната област **4.Природни науки, математика и информатика** и професионално направление **4.5.Математика**. В частност кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, **препоръчвам** на научното жури да присъди на **Мартин Йоеданов Минчев** образователна и научна степен „доктор“ в научна област **4.Природни науки, математика и информатика** професионално направление **4.5.Математика** (Теория на Вероятностите и Математическа Статистика).

15.06 2024 г.

Изготвил рецензията:

(доц. д-р Дончо Дончев)