



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВЕТИ КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

АВТОРЕФЕРАТ

НА ДИСЕРТАЦИЯ ЗА ПРИДОБИВАНЕ НА ОБРАЗОВАТЕЛНАТА И НАУЧНА СТЕПЕН

ДОКТОР В ПРОФЕСИОНАЛНО НАПРАВЛЕНИЕ 4.5 МАТЕМАТИКА
ДОКТОРСКА ПРОГРАМА „ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ И МАТЕМАТИЧЕСКА
СТАТИСТИКА“

Функционали на процеси на Леви
и техни приложения

Мартин Минчев

Научни ръководители:

проф. дн Младен Савов и
проф. дн Марусия Славчова-Божкова

София, 2024

Съдържание

I	Въведение	1
1	Математически апарат и означения	3
2	Процеси на Леви	3
2.1	Някои видове процеси на Леви	5
3	Факторизация на Винер-Хопф и процес на нарастванията	6
II	Експоненциални функционали на процеси на Леви	8
4	Експоненциалният функционал върху безкраен хоризонт, $I_\xi := I_\xi(\infty)$	8
4.1	Връзка с обобщените процеси на Орнщайн-Уленбек	8
4.2	Връзка със себеподобни Марковски процеси. Трансформация на Ламперти	9
4.3	Моменти на I_ξ	11
4.4	Асимптотика на опашката и плътността на I_ξ	11
5	Експоненциалният функционал в случайни времена $\mathbf{e}_q \sim \text{Exp}(q)$, $I_{\xi,q} := I_\xi(\mathbf{e}_q)$	13
5.1	Плътност на $I_{\xi,q}$. Обобщение на уравнението на Кармона, Пети и Йор и връзка с обобщените процеси на Орнщайн-Уленбек . .	13
5.2	Моменти на $I_{\xi,q}$	13
5.3	Асимптотика на опашката и плътността на $I_{\xi,q}$	13
6	Експоненциалният функционал върху детерминистичен хоризонт $I_\xi(t)$	14
6.1	Моменти на $I_\xi(t)$	15
6.2	Асимптотични резултати. Гранично разпределение на скалирано $I_\xi(t)$	15
7	Приложения и примери	16
7.1	Случайни процеси в случайни среди	16
7.2	Времена на изчезване за себеподобни процеси	17
7.3	Финансова математика	17

7.4	Други приложения	17
III Бернщайн-гама функции		18
8	Въведение	18
9	Представяния	19
9.1	Мелин трансформация на положителна случайна величина . .	19
9.2	Произведение на Вайерщрас	19
9.3	Формула на Малмстен	20
10	Асимптотика на Стирлинг	20
11	Формална дефиниция и аналитични свойства	21
11.1	Асоциирано функционално уравнение	22
12	Примери за Бернщайн-гама функции	23
13	Двумерни Бернщайн-гама функции	23
IV Асимптотика на плътностите на експоненциални функционали от субординатори		24
14	Въведение и мотивация	24
15	Предварителни резултати	26
16	Методология	27
17	Основни резултати	27
18	Примери	28
19	Нужни нови резултати за Бернщайн-гама функциите	28
20	Доказателства	30
V Двумерни Бернщайн-гама функции, потенциални мерки и асимптотика на експоненциални функционали на Леви		31
21	Въведение и мотивация	31
22	Подготвителни и предхождащи резултати, методология и преглед на литературата	32
22.1	Означения	32
22.2	Двумерни Бернщайн-гама функции и Мелин трансформацията на експоненциално функционали	33
22.3	Методология	35
22.4	Свързани резултати	36
23	Основни резултати за експоненциални функционали	36

24	Производни на двумерни Бернщайн-гама функции	38
25	Доказателства относно Бернщайн-гама функциите	41
26	Доказателства относно експоненциални функционали	42
27	Доказателства на помощни резултати	42
VI Заключение		43
28	Авторска справка	43
29	Публикации, свързани с дисертацията	43
30	Апробация на дисертацията	43
31	Декларация за автентичност	44
Библиография		45

Глава I

Въведение

Процесите на Леви са естествено обобщение в непрекъснато време на класическите случайни разходки (или още случайно блуждаене), тоест процеси от вида $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ със $S_n := X_1 + \dots + X_n$ за независими и еднакво разпределени (iid) случайни величини $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Най-разпространеният пример за тях е Брауновото движение, което показва възможността им да се използват в моделирането на дифузии, фрагментация, финансови пазари, както и на математически структури като случайни графи.

Нека $\xi = (\xi_s)_{s \geq 0}$ е едномерен процес на Леви. За всяко $t \in (0, \infty)$, случайната величина

$$I_\xi(t) := \int_0^t e^{-\xi_s} ds \quad (0.1)$$

се нарича експоненциален функционал на процес на Леви върху детерминистичен хоризонт. Освен за фиксирано t , експоненциалните функционали, които представляват интерес са тези при $t = \infty$ или $t = \mathbf{e}_q$ за някое $q > 0$ и $\mathbf{e}_q \sim \text{Exp}(q)$ независимо от ξ :

$$I_\xi(\mathbf{e}_q) = \int_0^{\mathbf{e}_q} e^{-\xi_s} ds, \quad I_\xi := I_\xi(\infty) := \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds. \quad (0.2)$$

Някои от първите изследвания на тези обекти включват [Duf89, Duf90, Urb92, Urb95], като в следствие те се появяват като инструмент в различни области на вероятностите като оценяване на азиатски опции, себеподобни фрагментации, себеподобни Марковски процеси и Леви процеси в случайни среди, виж Секция 7. Класическа обзорна статия за областта е тази на Бертоан и Йор [BY05], но поради наличието на много нови резултати през последните 20 години, в Глава II представяме наличните ключови резултати към този момент.

Дисертацията представя нови резултати, касаещи асимптотиката на следните обекти.

1. Плътността на експоненциални функционали на субординатори.

Известно е, че ако ξ е ненамаляващ процес на Леви, също наричан *субординатор*, случайната величина $I_\xi(\mathbf{e}_q)$ има в почти всички случаи плътност $f_{I_\xi(\mathbf{e}_q)}$ спрямо Лебеговата мярка над $[0, \infty)$, която е безкрайно диференцируема. Ако дрейфът на процеса, виж (2.4) за дефиниция на дрейфт, е строго положителен, тази случайна величина има краен носител, а ако е нулев, носителят е $(0, \infty)$. В

последния случай, в Теорема 17.1 показваме, че ако сравнително слабото условие за *положително нарастване* (*positive increase*) е изпълнено, виж (14.3), то при $n \geq 0$ и $x \rightarrow \infty$,

$$f_{I_\xi(\mathbf{e}_q)}^{(n)}(x) \approx \frac{C_\phi \varphi_*^n(x) \sqrt{\varphi'_*(x)}}{x^n} e^{-\int_{\phi_*(1)}^x \frac{\varphi_*(y)}{y} dy},$$

като C_ϕ е в явен вид, със знак, който зависи от n , ϕ е експонентата на Лаплас на процеса, дефинирана за $\lambda > 0$, чрез

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \xi_1}] =: e^{-\phi(\lambda)}$$

и

$$\phi_*(z) := \frac{z}{\phi(z)}, \quad \varphi_* := \phi_*^{-1}.$$

Този и други свързани резултати са представени в Глава IV и се основават на съвместната работа с Младен Савов [MS23].

2. Експоненциални функционали върху детерминистичен хоризонт за Леви процеси, които клонят към минус безкрайност.

Нека ξ е процес на Леви, който клони към минус безкрайност. В този случай експоненциалният функционал $I_\xi(t)$ клони към безкрайност при $t \rightarrow \infty$. При допускането, че очакването на ξ_1 е крайно и опашката на процеса е правилно изменяща се, тоест

$$\mathbb{E}[\xi_1] \in (-\infty, 0) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(\xi_1 > t) \approx \frac{\ell(t)}{t^\alpha} \quad \text{за някое } \alpha > 1 \text{ и } \ell \text{ е бавно изменяща се,}$$

виж Апендикс В за дефиниция на бавно и правилно изменящи се функции, в Теорема 23.1, получаваме, че след подходящо скалиране, законът на I_ξ има слаба граница: за всяко $a \in (0, 1)$,

$$\frac{\mathbb{P}(I_\xi(t) \in dy)}{y^a \mathbb{P}(\xi_1 > t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{w} \nu_a(dy),$$

където ν_a е крайна мярка с носител $(0, \infty)$.

Съвместната работа с Младен Савов върху този проблем е представена в Глава V на дисертацията.

Важен инструмент в глави IV and V са Бернщайн-гама функциите, въведени от Пати и Савов в [PS18]. Поради тази причина, в глава III отделяме специално внимание на основни техни свойства. За да можем да ги използваме в контекста на двете задачи, които описахме по-горе, в дисертацията са получени много нови резултати за тях, като например нов вид на асимптотиката им на Стирлинг в Лема 19.1, Следствие 19.5 и в самото доказателство на Теорема 17.1. Относно двумерното обобщение на Бернщайн-гама функциите $W_\phi(q, z)$, в Теорема 24.3 са изведени условия, при които техните производни спрямо q в 0 са крайни, а в Лема 24.1, те са свързани с хармоничния потенциал на асоциирания процес на Леви.

1 Математически апарат и означения

Основните обекти, с които ще боравим са едномерни случайни процеси, така че стандартно допускаме, че работим над вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с $\Omega = D([0, \infty))$, множеството от дясно-непрекъснати функции, които имат граници отляво, които от френски често се наричат *càdlàg* функции. Използвайки топологията на Скороход над това множество, можем да изберем $\mathcal{F}$ да бъде съответната породена Борелова σ -алгебра. Ще бележим с $\mathbb{E}$ и Var очакването и дисперсията спрямо $\mathbb{P}$.

Ще считаме случайните процеси като случайни изображения X върху конструираното $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тъй като траекториите ω са функции $\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ще бележим $X_t(\omega) := X(\omega(t))$. За редица от случайни процеси $\{X^{(\lambda)}, \lambda \geq 0\}$, бележим сходимостта по разпределение върху $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, виж Каленберг [Kal21, Chapter 23], с

$$X^{(\lambda)} \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} X,$$

а по-слабата сходимост на крайномерните разпределения с

$$X^{(\lambda)} \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} X,$$

дефинирано, за $n \geq 1$ и $t_1 \leq \dots \leq t_n$, чрез

$$(X_{t_1}^{(\lambda)}, X_{t_2}^{(\lambda)}, \dots, X_{t_n}^{(\lambda)}) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}).$$

За множества от числа, използваме $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$; за $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{C}_A := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in A\}$. Променливи, обозначени с m, n, k считаме за цели числа, освен, ако изрично не е посочено друго. Аналогично, считаме z за комплексна променлива, а всички останали считаме за реални числа, ако не е посочено конкретно множество, на което са елементи. Със знака $\times$, използван между случайни величини, бележим произведението на независими случайни величини.

За $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in [-\infty, \infty]$, ще използваме следната стандартна асимптотична означение:

- $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow a$, ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 0$;
- $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow a$, при $\limsup_{x \rightarrow a} |f(x)/g(x)| < \infty$;
- $f \sim g$ при $x \rightarrow a$, или също $f \stackrel{a}{\sim} g$, ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = 1$;
- $f \propto g$ при $x \rightarrow a$ или също $f \stackrel{a}{\propto} g$, ако $f \stackrel{a}{\sim} cg$ за някое $c \in (0, \infty)$.

Главно ще работим с асимптотика в безкрайност, така че, ако не е посочено друго, ще считаме, че $a = \infty$.

Ще използваме *курсив* при въвеждането на нови понятия.

2 Процеси на Леви

Да припомним, че наричаме $\xi := (\xi_t)_{t \geq 0}$ *процес на Леви*, ако

1. $\xi_0 = 0$ п.с.;
2. ξ има независими нараствания;
3. ξ има стационарни нараствания;
4. ξ има càdlàg траектории.

Законът на ξ се описва аналитично чрез формулата на Леви-Хинчин: за всяко $t \geq 0$ и поне за $\operatorname{Re}(z) = 0$, за Ψ дефинирано чрез

$$\mathbb{E}[e^{z\xi_t}] =: e^{t\Psi(z)}, \quad (2.2)$$

е вярно, че

$$\Psi(z) = \gamma z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zx} - 1 - zx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}) \Pi(dx).$$

за $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ и мярка Π с носител $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, такава че

$$\int_{\mathbb{R}} \min\{1, x^2\} \Pi(dx) < \infty.$$

Наричаме функцията Ψ *характеристична експонента, експонента на Леви* или *експонента на Леви-Хинчин*, на процеса ξ . Също така, величините γ , σ и Π обикновено се наричат, респективно, *линеен коефициент*, *Браунова компонента* и *мярка на Леви* за процеса. Директно следствие от горното представяне е, че ξ може да бъде конструиран като сума на 4 независими компоненти,

$$\xi_t = \gamma t + \sigma B_t + \xi_t^{(1)} + \xi_t^{(2)},$$

където γt е детерминистичен линеен член, σB_t е скалирано стандартно Брауново движение, $\xi_t^{(1)}$ е сложен Поасонов процес (СПП) с „големи“ скокове, чиято абсолютна стойност е по-голяма от 1 и $\xi_t^{(2)}$ е мартингал, получен като компенсиран СПП с „малки“ скокове, чиято стойност е в интервала $[-1, 1]$.

Нека $\mathbf{e}_q$ е експоненциално разпределена случайна величина с $q \geq 0$, която е независима от ξ . В случая $q = 0$, дефинираме $\mathbf{e}_q$ да бъде равно на ∞ . Тогава дефинираме *убит процес* $\tilde{\xi}$ чрез

$$\tilde{\xi}_t := \begin{cases} \xi_t, & \text{for } t < \mathbf{e}_q; \\ \infty, & \text{for } t \geq \mathbf{e}_q. \end{cases}$$

Стойността ∞ по-горе е въпрос на конвенция, като нейната роля е да представлява състояние, в което процесът е изпратен при убиване. Експонентата на Леви-Хинчин за този нов процес е

$$\Psi(z) = -q + \gamma z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zx} - 1 - zx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}) \Pi(dx). \quad (2.3)$$

Наричаме неубития процес ξ *консервативен*, което е еквивалентно на убит процес с $q = 0$. Оттук нататък, ако не е посочено друго, ще работим с евентуално убити процес.

2.1 Някои видове процеси на Леви

Субординатори. Процесите, които се разглеждат в Глава IV са ненамаляващите процеси на Леви, наречени в работата на Бохнер [Вос55] *субординатори*.

Отличаващо свойство на този клас е, че за тях можем да работим и с експонентата им на Лаплас. Ако ξ е евентуално убит субординатор за някое $q \geq 0$, можем да дефинираме за всяко $\lambda \geq 0$,

$$\phi(\lambda) := \ln(\mathbb{E}[e^{-\lambda\xi_1}]) = q + d\lambda + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda y})\mu(dy), \quad (2.4)$$

където мярката на Леви μ има носител $(0, \infty)$ и

$$\int_{(0,\infty)} \min\{1, y\}\mu(dy) < \infty.$$

Количеството d се нарича *коэффициент на дрейфт*, което за краткост ще наричаме и просто *дрейфт*, на процеса, тъй като, за $t < e_q$, можем да представим

$$\xi_t = dt + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta_s,$$

където Δ а Поасонов точков процес с характеристична мярка μ .

Функциите ϕ , които имат представянето от (2.4) са познати в анализа и като *функции на Бернщайн*. Те могат да се продължат аналитично върху положителната комплексна полуравнина, тоест за $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, дефинираме

$$\phi(z) := \log_0(\mathbb{E}[e^{-z\xi_1}]) = q + dz + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-zy})\mu(dy), \quad (2.5)$$

където $\log_0$ е главният клон на комплексния логаритъм и ϕ е аналитична за $\operatorname{Re}(z) > 0$ и непрекъсната за $\operatorname{Re}(z) \geq 0$.

Въвеждаме също и понятието двумерен субординатор $\xi := (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, като процес със стойности в $[0, \infty)^2$, независими и стационарни нараствания и всяка едномерна компонента имаща càdlàg траектория. В такъв случай, дефинираме експонента на Лаплас за този процес, за $\alpha, \beta \geq 0$, чрез

$$\kappa(\alpha, \beta) := \ln(\mathbb{E}[e^{-\alpha\xi_1^{(1)} - \beta\xi_1^{(2)}}]) = q + d_1\alpha + d_2\beta + \int_{(0,\infty)^2} (1 - e^{-\alpha x - \beta y})\mu(dx, dy), \quad (2.6)$$

където $q \geq 0$ е скоростта на убиване, $d_1, d_2 \geq 0$ са коефициентите на дрейфт и Леви мярката μ изпълнява

$$\int_{(0,\infty)^2} \min\{1, \sqrt{x^2 + y^2}\}\mu(dx, dy) < \infty.$$

Както в едномерния случай, можем да продължим κ аналитично върху $\mathbb{C}_{(0,\infty)} \times \mathbb{C}_{(0,\infty)}$ и непрекъснато върху $\mathbb{C}_{[0,\infty)} \times \mathbb{C}_{[0,\infty)}$.

В тази секция от дисертацията са представени и процесите на Леви, които са *конволюционно еквивалентни* и *субекспоненциални*.

3 Факторизация на Винер-Хопф и процес на нарастванията

В тази секция са изложени фундаментални резултати относно за процеса, съставен от нивата на нарастване/намаляване ξ и съответните времена, когато те са се реализирали. Да дефинираме първо *супремум процеса*

$$S_t := \sup_{s \leq t} \xi_s$$

и нека $L := (L_t)_{t \geq 0}$ е *локално време в максимума*. Ще отбележим, че ако L е такъв процес, то и cL за $c > 0$ също е локално време в максимума. За да възстановим времената, за които ξ достига максимум, нека въведем каноничната обратна функция на L , за $L_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} L_t$, дефинираме

$$L_t^{-1} := \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : L_s > t\}, & \text{ако } t < L_\infty; \\ \infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

което също ще наричаме и *процес на времената на нарастване*. Също така, нека дефинираме *процес на нивата на нарастване* чрез

$$H_t := \begin{cases} S_{L_t^{-1}} = X_{L_t^{-1}}, & \text{ако } t < L_\infty; \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Оказва се, че L_∞ има експоненциално разпределение и нека параметърът му е q . В такъв случай *процесът от времената и нивата на нарастване* (L^{-1}, H) е двумерен субординатор с параметър q . По сходен начин, дефинираме и *процес от времената и нивата на намаляване* $(\hat{L}^{-1}, \hat{H})$ като растящия такъв за $-\xi$. Нека експонентите на Лаплас за тези два процеса, за $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) \geq 0$, са

$$\kappa_+(\alpha, \beta) := \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{-\alpha L_1^{-1} - \beta H_1}\right]\right) \quad \text{и} \quad \kappa_-(\alpha, \beta) := \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{-\alpha \hat{L}_1^{-1} - \beta \hat{H}_1}\right]\right).$$

Тези две функции имат удобното представяне чрез вероятностния закон на ξ , благодарение на работата на Фристедт [Fri74],

$$\kappa_\pm(q, z) = c_\pm \exp\left(\int_0^\infty \int_{[0, \infty)} \left(\frac{e^{-t} - e^{-qt - zx}}{t}\right) \mathbb{P}(\pm \xi_t \in dx) dt\right), \quad (3.2)$$

където c_+ и c_- са положителни константи, които зависят от избраното локално време. В частност, използвайки подходяща версия на локалното време, можем да фиксираме едно от условията $c_+ c_- = 1$; $c_+ = 1$; или $c_- = 1$.

В случая, когато ξ не е СПП, е вярно че

$$\Psi(z) - q = -\kappa_+(q, -z)\kappa_-(q, z),$$

което се нарича *факторизация на Винер-Хопф* на Ψ . Тя предоставя разлагане на Ψ като произведение на две функции на z , първата, от които е аналитична за $\operatorname{Re}(z) < 0$, а втората върху $\operatorname{Re}(z) > 0$. Такива разлагания са полезни при решаването на различни диференциални уравнения и се свързват с работата на Винер и Хопф от 40-те години на 20-ти век.

За да отчетем евентуален атом в 0 на ξ в случая, когато не е СПП, нека въведем функцията

$$h(q) := \exp\left(-\int_0^\infty \left(\frac{e^{-t} - e^{-qt}}{t}\right) \mathbb{P}(\xi_t = 0) dt\right).$$

Ако дефинираме, за $q \geq 0$ и $\operatorname{Re}(z) \geq 0$,

$$\begin{aligned}\phi_+(q, z) &= \exp\left(\int_0^\infty \int_{[0, \infty)} \left(\frac{e^{-t} - e^{-qt-zx}}{t}\right) \mathbb{P}(\xi_t \in dx) dt\right), \\ \phi_-(q, z) &= \exp\left(\int_0^\infty \int_{(0, \infty)} \left(\frac{e^{-t} - e^{-qt-zx}}{t}\right) \mathbb{P}(\xi_t \in -dx) dt\right),\end{aligned}$$

и фиксираме локалното време L , така че $c_+c_- = 1$, получаваме факторизацията на Винер-Хопф, за $z \in i\mathbb{R}$,

$$\Psi(z) - q = -\phi_+(q, -z)\phi_-(q, z) = -h(q)\kappa_+(q, -z)\kappa_-(q, z). \quad (3.3)$$

Глава II

Експоненциални функционали на процеси на Леви

Да припомним, че дефинирахме експоненциалните функционали на процес на Леви ξ в (0.1) и (0.2) като

$$I_\xi(t) := \int_0^t e^{-\xi_s} ds, \quad I_\xi(\mathbf{e}_q) = \int_0^{\mathbf{e}_q} e^{-\xi_s} ds \quad \text{и} \quad I_\xi := I_\xi(\infty) := \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds. \quad (3.1)$$

4 Експоненциалният функционал върху безкраен хоризонт, $I_\xi := I_\xi(\infty)$

Следващият резултат предоставя необходими и достатъчни условия, при които I_ξ е краен.

Теорема 4.1 ([BY05, Теорема 1]). *Следните са еквивалентни:*

- (i) $I_\xi < \infty$ *n.c.*;
- (ii) $\mathbb{P}(I_\xi < \infty) > 0$;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = \infty$ *n.c.*;
- (iv) $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t/t > 0$ *n.c.*;
- (v) $\int_1^\infty \mathbb{P}(\xi_t \leq 0) dt/t < \infty$.

4.1 Връзка с обобщените процеси на Орнщайн-Уленбек

Първият значим прогрес в областта на експоненциалните функционали е работата на Кармона, Пети и Йор [CPY97], които доказват следните резултати.

1. В [CPY97, Твърдение 2.1], че ако за ξ е изпълнено $\mathbb{E}[\xi_1] > 0$, $\mathbb{E}[|\xi_1|] < \infty$ и

$$\xi_t = ct + \sigma B_t + \tau_t^+ - \tau_t^-,$$

където $c \in \mathbb{R}$, B е Брауново движение, $\tau^\pm$ са субординатори и трите са независими в съвкупност, то I_ξ има безкрайно гладка плътност, която решава интегро-диференциално уравнение, виж [CPY97, (1.1)].

Заклученията от [CPY97] са получени чрез характеризирането на закона на I_ξ като стационарната мярка на обобщен процес на Орнщайн-Уленбек. Тези процеси се дефинират по следния начин: за Леви процес ξ , *обобщеният процес на Орнщайн-Уленбек* U_ξ се дефинира, за $t \geq 0$ и $x \geq 0$, чрез

$$U_t^\xi(x) = xe^{-\xi t} + e^{-\xi t} \int_0^t e^{\xi s} ds \stackrel{d}{=} xe^{\xi t} + \int_0^t e^{-\xi s} ds.$$

Основни свойства на този тип процеси са разгледани в Апендикс 1 на [CPY97]. Следователно, когато ξ клони към безкрайност, което от Теорема 4.1 значи, че I_ξ е крайно, то виждаме, че

$$U_\infty^\xi(x) \stackrel{d}{=} I_\xi.$$

Този метод е обобщен в [CPY01, Теорема 3.1], свързвайки стационарното разпределение на двумерен обобщен процес на Орнщайн-Уленбек, т.е. за двумерен процес на Леви (ξ, η) ,

$$U_t^{\xi, \eta}(x) = xe^{-\xi t} + e^{-\xi t} \int_0^t e^{\xi s} ds \stackrel{d}{=} xe^{\xi t} + \int_0^t e^{-\xi s} d\eta_s,$$

с разпределението на $\int_0^\infty e^{-\xi t} d\eta_s$.

Връзката с едномерните обобщени процеси на Орнщайн-Уленбек е използвана също в [PPS12, Теорема 1.2], за получаването на резултата, при слабо допускане, ако ξ клони към ∞ , то I_ξ може да бъде факторизирано

$$I_\xi \stackrel{d}{=} I_H \times I_{Y_{\hat{H}}}, \quad (4.3)$$

където H е процесът от нивата на нарастване и $Y_{\hat{H}}$ е независим от него процес, който има само положителни скокове и е конструиран от процеса от нивата на намаляване $\hat{H}$. Обобщение на последното разлагане за всеки Леви процес ξ е

$$I_\xi \stackrel{d}{=} I_H \times X_{\hat{H}},$$

където $X_{\hat{H}}$ е положителна случайна величина, е изведен в [PS18, Теорема 2.22].

2. В [CPY97, Твърдение 3.1], уравнението, за $z \in [0, \infty)$, такова че $\Psi(-z) < 0$,

$$\mathbb{E}[I_\xi^z] = \frac{-z}{\Psi(-z)} \mathbb{E}[I_\xi^{z-1}].$$

Това уравнение е разглеждано и от Молик и Зварт в [MZ06] и разбрано в дълбочина върху комплексната равнина в [PS18], където е и основна мотивация за дефинирането на Бернщайн-гама функциите.

4.2 Връзка със себеподобни Марковски процеси. Трансформация на Ламперти

Вече споменахме, че законът на експоненциалния функционал обикновено не е наличен в явен вид, какъвто е случаят, когато ξ е Брауново движение с положителен дрефт, виж (4.1). Все пак можем да свържем разпределението му с това на себеподобните положителни Марковски процеси във време $t = 1$.

Наричаме силен Марковски процес X със стойности в $[0, \infty)$ *положителен себеподобен Марковски процес с индекс на себеподобност $1/\alpha$ (или също $1/\alpha$ -себеподобен)*, ако съществува $\alpha > 0$, такова че за всяко $x > 0$ и $c > 0$,

$$\text{законът на } (cX_{c^{-\alpha}t}, t \geq 0) \text{ под } P_x \text{ е } P_{cx}, \quad (4.4)$$

където P_x е законът на X , ако стартира от x . Ако е възможно да дефинираме P_0 , то получаваме, че под P_0 ,

$$(X_{kt}, t \geq 0) \stackrel{d}{=} (k^\alpha X_t, t \geq 0).$$

Фундаменталният резултат на Ламперти [Lam62] показва универсалността на себеподобните процеси.

Теорема 4.2 ([Lam62, Теорема 2] във вида от [EM00, Теорема 3.1]). *Нека X е случаен процес, който е п.с. непрекъснат в $t = 0$ и законът на X_t е неизроден за всяко $t > 0$. Ако съществува случаен процес Y и реални числа $\{a(\lambda), \lambda \geq 0\}$ с $a(\lambda) > 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a(\lambda) = \infty$, такива че*

$$\frac{1}{a(\lambda)} Y_{\lambda t} \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} X_t,$$

то X е себеподобен с индекс на себеподобност $\alpha > 0$. Също така $a(\lambda) = \lambda^\alpha \ell(\lambda)$ за някоя бавно изменяща се функция ℓ (виж Апендикс А за дефиницията на понятието).

През 1972 Ламперти доказва в [Lam72, Теорема 4.1], че съществува биективно изображение между положителните α -себеподобни Марковски процеси и Леви процесите за всяко $\alpha > 0$, виж (4.6) и (4.7) в дисертацията.

Чрез скалиращото свойство (4.4), асимптотиката на себеподобните процеси в безкрайност е свързана с граничното поведение на P_x в $0+$: съществува мярка P_0 , такава че за всяко $y > 0$,

$$P_y(t^{-1/\alpha} X_t \in dx) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{w} P_0(X_1 \in dx)$$

тогава и само тогава когато

$$P_{x_0}(X_1 \in dx) \xrightarrow[x_0 \rightarrow 0+]{w} P_0(X_1 \in dx).$$

С означенията P_x и X от по-горе, е в сила следният резултат.

Теорема 4.3. [BY02a, Теорема 1] *Нека ξ не е решетъчен, т.е. носителят му не е $r\mathbb{Z}$ за някое $r > 0$, и $\mathbb{E}[\xi_1] = m > 0$. Тогава*

(i) *мярката P_0 съществува;*

(ii) *за всяко $t \geq 0$ и измерима $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,*

$$E_0(f(X_t^\alpha)) = \frac{1}{\alpha m} \mathbb{E} \left[\frac{f(t/I_{\alpha\xi})}{I_{\alpha\xi}} \right].$$

В частност,

$$P_0 \left(\frac{1}{X_1^\alpha} \in dx \right) = \frac{1}{\alpha m} \frac{\mathbb{P}(I_{\alpha\xi} \in dx)}{x}. \quad (4.8)$$

4.3 Моменти на I_ξ

Отбелязваме отново, че за да са крайни моментите на I_ξ , от Теорема 4.1, то трябва поне ξ да клони към безкрайност.

Пресмятането на моментите на I_ξ е подслучай на същата задача за $I_\xi(\mathbf{e}_q)$, полагайки $q = 0$, и двата проблема обикновено са били решавани заедно. За по-плавно представяне, първо разглеждаме I_ξ , а в Секция 5.2, представяме резултатите за $I_\xi(\mathbf{e}_q)$.

Както отбелязахме по-рано, ключовото уравнение при анализа на моментите на I_ξ е подробно разгледано първо в някои случаи и за реални z от Кармона и др. в [CPY97, Твърдение 3.1],

$$\mathbb{E}[I_\xi^z] = \frac{-z}{\Psi(-z)} \mathbb{E}[I_\xi^{z-1}]. \quad (4.10)$$

Разбира се, количествата в горното уравнение са крайни в зависимост от процеса ξ . Анализът на това уравнение върху (части на) комплексната равнина е основен проблем в [PS18], като решението му е изразено чрез Бернщайн-гама функциите. Отбелязваме, че в [PS18, Теорема 2.4] са налични експлицитни критерии чрез Винер-Хопф факторите $\phi_\pm$ на Ψ за крайността на моментите $\mathbb{E}[I_\xi^a]$. За пълнота, по-долу проследяваме и исторически ключовите резултати в областта.

Теорема 4.4. (i) ([CPY97, Твърдение 3.1, Твърдение 3.3]) Нека ξ е субординатор. Тогава за всяко $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[I_\xi^n] = \frac{(-1)^n n!}{\Psi(-1)\Psi(-2) \cdots \Psi(-n)}.$$

Също така разпределението на I_ξ е определено еднозначно от моментите по-горе.

(ii) ([BY02b, Твърдение 2]) Нека ξ клони към безкрайност и има експоненциални моменти, т.е. за всяко $\lambda, t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda \xi_t}] = e^{t\Psi(\lambda)} < \infty.$$

Тогава за всяко естествено число $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[I_\xi^{-n}] = \mathbb{E}[\xi_1] \frac{\Psi(1)\Psi(2) \cdots \Psi(n-1)}{(n-1)!}.$$

Ако също е изпълнено и че ξ няма положителни скокове, то разпределението на I_ξ се определя еднозначно от горните моменти.

4.4 Асимптотика на опашката и плътността на I_ξ

Следващата теорема обобщава наличните резултати за асимптотиката на опашката на I_ξ .

Теорема 4.5. 1. ([Riv05, Лема 4], [PS18, Теорема 2.11]) Ако ξ не е решетъчен и съществува крайно $\theta = \mathbf{u}_- > 0$, такова че

$$\mathbb{E}[e^{-\theta \xi_1}] = 1, \quad \text{и} \quad |\mathbb{E}[\xi_1 e^{-\theta \xi_1}]| < \infty,$$

то

$$\mathbb{P}(I_\xi > t) \propto t^{-\theta}.$$

2. ([MZ06, Теорема 4.1]) Ако ξ има положителни скокове, $\xi \in \mathcal{S}_0$ и $\mathbb{E}[\xi_1] \in (0, \infty)$, то

$$\mathbb{P}(I_\xi > t) \propto \int_{\ln t}^{\infty} \bar{\Pi}_+(s) ds.$$

3. ([Riv12, Теорема 1], [AR23, Теорема 2.9]) Ако $\xi \in \mathcal{S}_\alpha$ за някое $\alpha > 0$ и $\mathbb{E}[e^{\alpha \xi_1}] < 1$, то

$$\mathbb{P}(I_\xi > t) \propto \bar{\Pi}_+(\ln t).$$

4. ([Haa24, Теорема 1], [MS23, Теорема 3.1]) Ако ξ е субординатор с нулев дрифт, да дефинираме функциите ϕ , ϕ_* и φ_* чрез

$$e^{-\phi(\lambda)} := \mathbb{E}[e^{-\lambda \xi_1}], \quad \phi_*(z) := \frac{z}{\phi(z)} \quad \text{и} \quad \varphi_* := \phi_*^{-1}.$$

Тогава, ако

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x\phi'(x)}{\phi(x)} < 1,$$

то е в сила, че

$$\mathbb{P}(I_\xi > t) \propto \frac{t\sqrt{\varphi'_*(t)}}{\varphi_*(t)} e^{-\int_{\phi_*(1)}^t \frac{\varphi_*(y)}{y} dy}.$$

За да формулираме следващия резултат, имаме нужда от характеристиката N_Ψ от [PS18, (2.18)]. Нейната точна стойност е налична в последната референция, но за краткост само ще отбележим, че

$$N_\Psi \in \begin{cases} \{0\} & \text{ако } \xi_t = ct \text{ за някое } c > 0; \\ (0, \infty) & \text{ако } \xi \text{ е СПП с положителен дрифт и } \xi_t \neq ct \text{ за някое } c > 0; \\ \{\infty\} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4.12)$$

Нека също дефинираме класа от слабо нерешетъчни процеси ξ , въведен в [PS18, (2.29)], като тези, за които

$$u_- \in (-\infty, 0) \quad \text{и} \quad \liminf_{|b| \rightarrow \infty} |b|^k |\Psi(u_- + ib)| > 0,$$

които са подклас на нерешетъчните процеси. Да дефинираме и класа C_0^k от функции, които са поне k пъти диференцируеми и техните първи k производни клонят към 0 в безкрайност. В такъв случай, имаме следния резултат.

Теорема 4.6. 1. ([BLM08, Теорема 3.8]) Ако I_ξ е крайно, то функцията на разпределение $F_{I_\xi} := t \mapsto \mathbb{P}(I_\xi \leq t)$ е диференцируема.

2. ([PS18, Теорема 2.4.3]) Функцията F_{I_Ψ} принадлежи на класа $C_0^{\lceil N_\Psi \rceil - 1}$.

3. ([PS18, Теорема 2.11]) Ако ξ е слабо нерешетъчен и

$$|\mathbb{E}[\xi_1^2 e^{u - \xi_1}]| < \infty,$$

то за всяко $n \leq \lceil N_\Psi \rceil - 2$,

$$f_{I_\xi}^{(n)}(t) \propto t^{u - n - 1}.$$

4. ([MS23, Теорема 3.1]) Ако ξ е субординатор с положително нарастване, то за всяко $n \geq 0$,

$$f_{I_\xi}^{(n)}(t) \propto \frac{\varphi_*^n(t) \sqrt{\varphi'_*(t)}}{t^n} e^{-\int_{\phi_*(1)}^t \frac{\varphi_*(y)}{y} dy}.$$

5 Експоненциалният функционал в случайни време- на $\mathbf{e}_q \sim \text{Exp}(q)$, $I_{\xi,q} := I_{\xi}(\mathbf{e}_q)$

Разглеждането на експоненциалния функционал I_{ξ} в случайно време, което е с експоненциално разпределение е естествено обобщение на този върху безкраен хоризонт. Ако положим $q = 0$, $I_{\xi,0}$ е точно I_{ξ} , а за $q > 0$ очакването на $I_{\xi,q}$ е свързано с трансформацията на Лаплас на $I_{\xi}(t)$,

$$\mathbb{E}[I_{\xi,q}] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\mathbf{e}_q} e^{-\xi_s} ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \int_0^t e^{-\xi_s} q e^{-qt} ds dt\right] = q \int_0^{\infty} e^{-qt} \mathbb{E}[I_{\xi}(t)] dt.$$

Анализът на $I_{\xi}(t)$ е често доста труден и разглеждането на трансформацията му на Лаплас е стандартна техника още от работата на Йор [Yor92a, Теорема 2] за случая на Брауново движение.

5.1 Плътност на $I_{\xi,q}$. Обобщение на уравнението на Кармона, Пети и Йор и връзка с обобщените процеси на Орнщайн-Уленбек

В дисертацията са представени резултати относно съществуването на плътност на $I_{\xi,q}$ и характеризацията на закона на $I_{\xi,q}$ като стационарна мярка на процес, подобен на обобщените процеси на Орнщайн-Уленбек, аналогично на резултатите от Секция 4.1.

5.2 Моменти на $I_{\xi,q}$.

Случаят $q = 0$ е разгледан в Секция 4.4 и затова нека приемем, че $q > 0$. В този случай експоненциалният функционал е краен п.с., виж [PS18, (2.20)]. Отново разполагаме с аналог на рекурентното уравнение (4.10),

$$\mathbb{E}[I_{\xi,q}^z] = \frac{-z}{\Psi_q(-z)} \mathbb{E}[I_{\xi,q}^{z-1}],$$

където $\Psi_q(z) := \Psi(z) - q$ е характеристикната експонента на убития процес ξ . Пати и Савов описват в [PS18, Теорема 2.18] кога моментите $\mathbb{E}[I_{\xi,q}^a]$ са крайни в зависимост от аналитичните свойства на Винер-Хопф факторите на Ψ .

5.3 Асимптотика на опашката и плътността на $I_{\xi,q}$

Аналогът на Теорема 4.5 е следният.

Теорема 5.1. 1. ([Riv05, Лема 4], [PS18, Теорема 2.11]) Ако ξ не е решетен и съществува $\theta > 0$, такова че

$$\mathbb{E}[e^{-\theta \xi_1}] = 1 \quad \text{и} \quad |\mathbb{E}[\xi_1 e^{-\theta \xi_1}]| < \infty,$$

то

$$\mathbb{P}(I_{\xi,q} > t) \propto t^{-\theta}.$$

2. (i) ([AR23, Теорема 2.9]) Ако ξ има положителни скокове, $\xi \in \mathcal{S}_0$ и $\mathbb{E}[\xi_1] \in (-\infty, 0)$;

или

- (ii) $\xi \in \mathcal{S}_\alpha$ за някое $\alpha > 0$ и $\mathbb{E}[e^{\alpha\xi_1}] < 1$,

то

$$\mathbb{P}(I_{\xi,q} > t) \propto \bar{\Pi}_+(\ln t).$$

3. ([MS23, Теорема 3.1]) Ако ξ е субординатор с нулев дрифт, да дефинираме функциите ϕ , ϕ_* и φ_* чрез

$$e^{-\phi(\lambda)} := \mathbb{E}[e^{-\lambda\xi_1}], \quad \phi_*(z) := \frac{z}{\phi(z)} \quad \text{и} \quad \varphi_* := \phi_*^{-1}.$$

Тогава, ако

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x\phi'(x)}{\phi(x)} < 1,$$

то е в сила, че

$$\mathbb{P}(I_{\xi,q} > t) \propto \frac{t\sqrt{\varphi'_*(t)}}{\varphi_*(t)} e^{-\int_{\phi_*(1)}^t \frac{\varphi_*(y)}{y} dy}.$$

Наличните резултати за плътностите са абсолютно аналогични на тези от Теорема 4.6.

Теорема 5.2. 1. ([BLM08, Теорема 3.8], [PRvS13, Теорема 2.1], [PS18, Теорема 2.4.3]) Функцията на разпределение $F_{I_{\xi,q}} := t \mapsto \mathbb{P}(I_{\xi,q} \leq t)$ принадлежи на класа $C_0^{\max\{1, \lceil N_\Psi \rceil - 1\}}$, където N_Ψ е дефинирано в (4.12).

2. ([PS18, Теорема 2.11]) Ако ξ е слабо нерешетъчен и

$$|\mathbb{E}[\xi_1^2 e^{u-\xi_1}]| < \infty,$$

то за всяко $n \leq \lceil N_\Psi \rceil - 2$,

$$f_{I_\xi}^{(n)}(t) \propto t^{u-n-1}.$$

3. ([MS23, Теорема 3.1]) Ако ξ е субординатор с положително нарастване, то за всяко $n \geq 0$,

$$f_{I_\xi}^{(n)}(t) \propto \frac{\varphi_*^n(t)\sqrt{\varphi'_*(t)}}{t^n} e^{-\int_{\phi_*(1)}^t \frac{\varphi_*(y)}{y} dy}.$$

6 Експоненциалният функционал върху детерминистичен хоризонт $I_\xi(t)$

Експоненциалният функционал върху детерминистичен хоризонт е най-трудният обект за анализ измежду I_ξ , $I_{\xi,q}$ и $I_\xi(t)$. Разпределението на $I_\xi(t)$ е налично в много малко случаи, като например за Брауново движение с дрифт, където макар да е явно не е в лесен вид, виж [AMS01, Yor92a] или обзорната статия [MY05, Секция 4].

6.1 Моменти на $I_\xi(t)$.

Съществуването на моментите $I_\xi(t)$ е напълно характеризирано в [PS18, Теорема 2.18] чрез свойствата на Ψ , изразени чрез количествата в (4.11). Въпреки това, явни резултати са много редки. В скорошна работа, Палмовски и др. [PSS24, Лема 2.1] извеждат равенство от конволюционен тип за I_ξ и $I_{-\xi}$, за ξ , който е Леви процес, различен от СПП и за $\operatorname{Re}(z) \in (0, 1)$,

$$\int_0^t \mathbb{E}[I_\xi^{-z}(t-s)] \mathbb{E}[I_{-\xi}^{z-1}(s)] ds = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

В симетричния случай, тоест $\xi \stackrel{d}{=} -\xi$, когато ξ не е СПП, това води до $\mathbb{E}[(I_\xi(t))^{-1/2}] = t^{-1/2}$. В случая на Брауново движение, това е забелязано от Йор в [Yor92a, (1.e)]. В дисертацията са описани и резултати, които могат да се използват за числено намиране на моментите на $I_\xi(t)$.

6.2 Асимптотични резултати. Гранично разпределение на скалирано $I_\xi(t)$

В тази секция разглеждаме процеси, за които $I_\xi = \infty$ п.с. От Теорема 4.1, това означава, че или ξ осцилира, или клони към минус безкрайност. Интересът от такива резултати, се дължи от полезността им в областта на процесите на разклоняване в случайни среди, виж Секция 7.1. По-точно, често са нужни асимптотичните свойства на очаквания от типа $\mathbb{E}[F(I_\xi(t))]$ при $t \rightarrow \infty$, където $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ зависи от контекста на разглежданата задача. Такива резултати могат да се намерят в [PPS16, Теорема 1.2], [LX18, Теорема 2.9], [Xu21, Теорема 4.3] и [Xu23] за различни типове функции F . Всички те могат да следват, ако докажем, че $I_\xi(t)$ има граница по разпределение в някакъв смисъл. Представяме два случая, когато това е възможно и следствията от това.

Теорема 6.1. 1. ([PS18, Теорема 2.20.2]) Нека ξ е осцилиращ процес на Леви, тоест $\limsup_{t \rightarrow \infty} = -\liminf_{t \rightarrow \infty} = \infty$ п.с., който удовлетворява условието на Спитцер

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_t < 0) = \rho \in [0, 1).$$

Тогава $\kappa_-(q, 0) \stackrel{0}{\sim} q^\rho \ell(q)$ за някое $\ell \in SV_0$ и за всяко $a \in (0, 1 - \mathfrak{a}_+)$ е вярно, че

$$\frac{t^\rho \mathbb{P}(I_\xi(t) \in dy)}{y^a \ell(1/t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{w} \tilde{\nu}_a(dy),$$

където $\tilde{\nu}_a$ е крайна мярка с носител $(0, \infty)$ и функция на разпределение, за всяко $b \in \mathbb{C}_{(a-1+\mathfrak{a}_+, 0)}$,

$$\tilde{\nu}_a((0, x]) = -\frac{1}{2\pi\Gamma(1-\rho)} \int_{\operatorname{Re}(z)=b} \frac{x^{-z}}{z} M_\Psi(0, z+1-a) dz.$$

Като следствие, за всяка функция $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такава че за някое $a \in (0, 1)$, $x \mapsto x^a F(x)$ е ограничена и непрекъсната,

$$\frac{t^\rho}{\ell(1/t)} \mathbb{E}[F(I_\xi(t))] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_{(0, \infty)} y^a F(y) \tilde{\nu}_a(dy) < \infty.$$

2. (Теорема 23.1, Следствие 23.3) Нека ξ е процес на Леви с крайно отрицателно средно и

$$\mathbb{P}(\xi_1 > t) \approx \frac{\ell(t)}{t^\alpha}$$

за някое $\alpha > 1$ и $\ell \in SV_\infty$. Тогава, за всяко $a \in (0, 1)$,

$$\frac{t^\alpha \mathbb{P}(I_\xi(t) \in dy)}{y^a \ell(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{w} \nu_a(dy),$$

където ν_a е крайна мярка с носител $(0, \infty)$ и функция на разпределение, за всяко $b \in \mathbb{C}_{(a-1,0)}$,

$$\nu_a((0, x]) = \frac{1}{C_\phi} \int_{\operatorname{Re} z = b} \frac{x^{-z}}{z} M_\Psi(0, z + 1 - a) dz; \quad C_\phi = -2\pi i \phi_+(0, 0)(-\mathbb{E}[\xi_1])^\alpha.$$

Като следствие, за всяка функция $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такава че за някое $a \in (0, 1)$, $x \mapsto x^a F(x)$ е ограничена и непрекъсната,

$$\frac{t^\alpha}{\ell(t)} \mathbb{E}[F(I_\xi(t))] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_{(0, \infty)} y^a F(y) \nu_a(dy) < \infty. \quad (6.1)$$

Удобно следствие от Теорема 6.1.1 може да бъде изведено в случая когато $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$ и $\operatorname{Var}(\xi_1) < \infty$. Тогава от централната гранична теорема можем да заключим, че $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_t < 0) = \rho = 1/2$ и следователно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)] = C \in (0, \infty) \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \mathbb{E}[F(I_\xi(t))] = C_F \in (0, \infty) \quad (6.2)$$

за всяка F , такава че $x \mapsto x^a F(x)$ е ограничена и непрекъсната.

7 Приложения и примери

7.1 Случайни процеси в случайни среди

Едно от първите приложения на експоненциалните функционали е в анализа на дифузионни процеси в случайни среди в работите на Брокс [Bro86] и Кавазу и Танака [KT93], които доказват, че за дифузия X с Браунов потенциал е вярно, че

$$\mathbb{P}\left(\max_{s \geq 0} X_s > t\right) = \mathbb{E}\left[\frac{I_{B'}}{I_{B'} + I_B(t)}\right],$$

където B и B' са независими Браунови движения. Процесите B и B' са заменени от процеси на Леви в работата на Кармона и др. [CPY97, Секция 4.1].

По-скорошен интерес относно процесите в случайна среда е мотивиран от моделирането на непрекъснати разклоняващи се процеси. В този сценарий, експоненциалните функционали се появяват в оценката на вероятностите за израждане и скоростта на експлодиране на процеса.

7.2 Времена на изчезване за себеподобни процеси

Друга област, в която експоненциалните функционали са основен инструмент е анализът на времената на изчезване на себеподобни процеси. Това е така поради трансформацията на Ламперти, която е представена в Секция 4.2. В дисертацията излагаме модела на (α, ν) -фрагментация и обсъждаме свързани резултати.

7.3 Финансова математика

Една от основните причини за интереса към експоненциалните функционали в края на 20-ти век се дължи от приложението им в оценяването на азиатски опции. Да разгледаме стандартен модел за цената A на финансов актив: $A_t := A_0 e^{\xi_t}$, където ξ е процес на Леви. Азиатска опция с фиксиран матуритет T е финансов договор, чийто резултат се определя от средната цена на актива за период $[0, T]$. По-точно, ако страйк цената на опцията е K , то тя изплаща

$$\max\left\{\frac{1}{T} \int_0^T A_s ds - K, 0\right\} =: \left(\frac{1}{T} \int_0^T A_0 e^{\xi_s} ds - K\right)_+,$$

където използваме означението $x_+ := \max\{x, 0\}$. Следователно математическата задача за оценка на азиатски опции е свързан с пресмятането на очаквания от типа

$$C_\xi(t, a) := \mathbb{E}[(I_{-\xi}(t) - a)_+]$$

за $a, t > 0$. Виж презентацията за повече детайли.

7.4 Други приложения

Вече видяхме в Секция 4.2, че трансформацията на Ламперти виж (4.7), е основен инструмент за разбирането на положителните себеподобни процеси и следователно експоненциалните функционали са естествен обект в тази област. Друга връзка, която видяхме в Секция 4.1 е тази със стационарните разпределения на обобщени процеси на Орнщайн-Уленбек. Други области, където експоненциалните функционали се появяват са спектрална теория за някои необратими Марковски полугрупи, виж Пати и др. [PSZ19] и Пати и Савов [PS21], както и в непараметричната Бейсова статистика в Елифани и др. [ELP03].

Глава III

Бернщайн-гама функции

8 Въведение

В тази глава представяме Бернщайн-гама функциите, въведени от Пати и Савов в [PS18, Глава 4].

Нека $-\Psi$ е непрекъснатата отрицателно дефинитна функция, виж Секция 11.1 за дефиниция. Това е еквивалентно на условието, че Ψ е характеристикната експонента на процес на Леви. В този случай се оказва, че решаването на функционалното уравнение

$$M_\Psi(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)} M_\Psi(z), \quad M_\Psi(z) = 1 \quad (8.2)$$

може да се сведе до решаването в класа на трансформации на Мелин на положителни случайни величини на уравнения от типа

$$W_{\phi_\pm}(z+1) = \phi_\pm(z) W_{\phi_\pm}(z), \quad W_{\phi_\pm}(1) = 1, \quad (8.3)$$

където $\phi_\pm$ са Бернщайн функции. Функциите $\phi_\pm$ са точно Винер-Хопф факторите на Ψ от разлагането, за $z \in i\mathbb{R}$,

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z),$$

което е едномерната версия на (3.3). След като сме дефинирали Бернщайн функциите $W_{\phi_\pm}$, знаем от [PS18, Теорема 2.1], че решение на (8.2), поне за някои области на $\mathbb{C}$, е функцията

$$M_\Psi = \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)} W_{\phi_-}(1-z),$$

виж Секция 11 за формално твърдение.

Най-лесният пример за Бернщайн функция е идентитетът $z \mapsto z$. В този случай уравнението (8.3) е добре известното

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1,$$

за което знаем, че поне върху $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$, има решение класическата гама функция на Ойлер. Тази аналогия мотивира и наименованието *Бернщайн-гама функции* за решенията W_ϕ на (8.3). По-надолу показваме и други свойства на класическата гама функция, които имат аналог за Бернщайн-гама функциите.

9 Представяния

9.1 Мелин трансформация на положителна случайна величина

Да припомним, че гама функцията може да бъде дефинирана за $\operatorname{Re}(z) > 0$ чрез

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Следователно тя е точно трансформацията на Мелин на експоненциално разпределена случайна величина с параметър 1. Аналогът на последното за Бернщайн функция W_ϕ е, че по дефиниция, виж над (8.3) или секция 11, тя е трансформация на Мелин на положителна случайна величина, т.е. съществува положителна Y_ϕ , такава че

$$W_\phi(z) = \mathbb{E}[Y_\phi^{z-1}]. \quad (9.1)$$

Също така, от [PS21, Теорема 6.0.1 (1)], Y_ϕ се определя еднозначно от целите си моменти, тоест от очакванията за $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[Y_\phi^n] = W_\phi(n) = \prod_{k=1}^n \phi(k).$$

9.2 Произведение на Вайерщрас

Друго известно представяне на гама функцията е това чрез произведение на Вайерщрас: за $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$,

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+z} e^{z/k},$$

където γ е константата на Ойлер-Маскерони

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

Този резултат е наличен в литературата, например в [Vio16, Теорема 6.3]. Обобщението за Бернщайн-гама функции е от [PS21, Теорема 6.0.1 (2)]: поне за $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$W_\phi(z) = \frac{e^{-\gamma_\phi z}}{\phi(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(k)}{\phi(k+z)} e^{\phi'(k)z/\phi(k)},$$

където

$$\gamma_\phi := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\phi'(k)}{\phi(k)} - \ln(\phi(n)) \right).$$

9.3 Формула на Малмстен

Следващото твърждение, което представяме е известно като формула на Малмстен, виж например [ЕМОТ53, (1) на стр.21], за $\operatorname{Re}(z) > -1$,

$$\log_0(\Gamma(z+1)) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-zy} - 1 - z(e^{-y} - 1)}{e^y - 1} \right) \frac{dy}{y}.$$

Версията на горното за Бернщайн-гама функции е установена в някои случаи за реални z от Хирш и Йор [HY13, Теорема 3.1] и Берг [Ber07, Теорема 2.2]. От работата на Пати и Савов [PS18, Теорема 4.17.1], знаем, че за $\operatorname{Re}(z) > -1$,

$$\log_0(W_\phi(z+1)) = z \ln(\phi(1)) + \int_{[0,\infty)} \left(\frac{e^{-zy} - 1 - z(e^{-y} - 1)}{e^y - 1} \right) \frac{k_\phi(dy)}{y},$$

където мерките $k_\phi(dy)$ са дефинирани в [PS18, в 4.7 (4.15)] и, от [PS18, (5.37)], техните трансформации на Лаплас са, за $\lambda > 0$,

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda y} k_\phi(dy) = \frac{\phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)}.$$

Нека ξ е процес на Леви. Когато работим с Бернщайн функциите $\kappa_{q,\pm}(z)$, които са експонентите на Лаплас на процесите от времената и нивата на нарастване на ξ , тоест с означенията от (3.3),

$$\kappa_{q,\pm}(z) := \kappa(q, z),$$

в Лема 24.1 от Глава V, получаваме ново вероятно представяне на мерките $k_{q,\pm}(dy)$ чрез хармоничните мерки на ξ :

$$k_{q,\pm}(dy) \stackrel{(25.8)}{=} y \int_0^\infty e^{-qt} \frac{\mathbb{P}(\xi_t \in \pm dy)}{t}.$$

10 Асимптотика на Стирлинг

Асимптотиката от първи ред на класическия факториел

$$n! = \Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e} \exp\left(\int_1^n \ln(y) dy\right)$$

е получена първо от Де Моавър, а точната константа $\sqrt{2\pi}$ от Стирлинг, като и двете работи са от 1730, виж историческата бележка от Пиърсън [Pea24]. Поради това, в днешно време е стандартно обобщението за гама функцията и други свързани с нея да се наричат *асимптотика на Стирлинг*.

Относно Бернщайн-гама функциите, най-удобната форма на асимптотиката им на Стирлинг е изведена от Баркър и Савов в [BS21, Теорема 2.9]. Предишни резултати са налични в [PS18], а в случая, когато разглеждаме z само върху реалната права в Уебстър [Web97, Теорема 6.3] и в Пати и Савов [PS21, Теорема 5.0.1], които в частност доказват, че за $x > 0$ и някакво $C_\phi > 0$,

$$W_\phi(x+1) \approx \sqrt{C_\phi x} \exp\left(\int_1^x \ln(\phi(y)) dy\right),$$

подобно на случая на класическия факториел.

Точното твърдение на резултата от [BS21, Теорема 2.9] е, че за $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$W_\phi(z) = \frac{\phi^{1/2}(1)}{\phi(z)\phi^{1/2}(z+1)} e^{L_\phi(z)} e^{-E_\phi(z)},$$

където

$$L_\phi(z) := \int_{1 \rightarrow z+1} \log_0(\phi(w)) dw,$$

като $\int_{1 \rightarrow z+1}$ е интеграл по всеки контур, свързващ 1 и $z+1$ в областта на аналитичност на $\log_0(\phi)$ и

$$\begin{aligned} P(u) &:= (u - \lfloor u \rfloor)(1 - (u - \lfloor u \rfloor)), \\ E_\phi(z) &:= \frac{1}{2} \int_1^\infty P(u) \left(\log_0 \left(\frac{\phi(u+z)}{\phi(u)} \right) \right)'' du. \end{aligned}$$

Членът L_ϕ отговаря за основното асимптотично поведение, но макар и да е явен вид, изучаването му за комплексни z обикновено е трудно. При допускане за положително нарастване, виж **(H)** в Глава IV, представяме резултати за асимптотиката на Стирлинг, виж Теорема 19.3 и Твърдение 19.5.

11 Формална дефиниция и аналитични свойства

Нека дефинираме $\mathcal{P}$ да бъде класът от *положително дефинитни функции*, тоест следвайки [Jac01, Дефиниция 3.5.3],

$$\mathcal{P} = \left\{ M : i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j,k=1}^n M(s_j - s_k) z_j \bar{z}_k \geq 0 \text{ за } s_1, \dots, s_n \in i\mathbb{R}, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\}. \quad (11.1)$$

Алтернативна вероятностна характеристика, известна като теорема на Бохнер, виж [Sat99, Твърдение 2.5 (i)] или [Jac01, Теорема 3.5.7] е, че $\psi \in \mathcal{P}$, $\psi(0)$ и ψ е непрекъсната в $z = 0$, тогава и само тогава когато съществува случайна величина X_ψ , такава че, поне за $z \in i\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[e^{zX_\psi}] = \psi(z).$$

Да дефинираме класа на *изместените положително дефинитни функции* чрез

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{ M : z \mapsto M(z+1) \in \mathcal{P} \}.$$

Следователно, ако $\varphi \in \tilde{\mathcal{P}}$, то можем да я представим като

$$\varphi(z+1) = \mathbb{E}[e^{zX_\varphi}] = \mathbb{E}[(e^{X_\varphi})^z]$$

и значи

ако $\varphi \in \tilde{\mathcal{P}}$, то φ е трансформацията на Мелин на положителната сл. вел. e^{X_φ} .

Полагайки $\mathcal{B}$ да бъде класът от функциите на Бернщайн, дефинираме Бернщайн-гама функциите като елементите

$$\mathcal{W}_\mathcal{B} := \left\{ W \in \tilde{\mathcal{P}} : W(1) = 1, W(z+1) = \phi(z)W(z) \text{ за } \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ и някоя } \phi \in \mathcal{B} \right\}.$$

В следващата теорема представяме основни аналитични свойства на W_ϕ . Ще използваме означенията от (4.11)

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_\phi &:= \inf\{u < 0 : \phi \text{ е аналитична върху } \mathbb{C}_{(u,\infty)}\} \in [-\infty, 0] \\ \mathfrak{u}_\phi &:= \sup\{u \in [\mathfrak{a}_\phi, 0] : \phi(u) = 0\} \in [-\infty, 0], \\ \bar{\mathfrak{a}}_\phi &:= \max\{\mathfrak{a}_\phi, \mathfrak{u}_\phi\} \in [-\infty, 0].\end{aligned}$$

Нека също дефинираме и класовете от аналитични и съответно мероморфни функции

$$\mathbf{A}_{(a,b)} := \{f : f \text{ е аналитична върху } \mathbb{C}_{(a,b)}\} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}_{(a,b)} := \{f : f \text{ е мероморфна върху } \mathbb{C}_{(a,b)}\}.$$

Теорема 11.1. *Нека ϕ е функция на Бернщайн.*

1. [PS21, Теорема 6.0.1 (3)] *Тогава съществува единствена Бернщайн-гама функция $W_\phi \in \mathcal{W}_B$, асоциирана с ϕ , която е решение на уравнението*

$$W_\phi(z+1) = \phi(z)W_\phi(z) \text{ върху } \operatorname{Re}(z) > 0, \quad W_\phi(1) = 1, \quad W_\phi \in \mathcal{W}_B.$$

2. [PS18, Теорема 4.1 (1)] *Вярно е, че $W_\phi \in \mathbf{A}_{(\bar{\mathfrak{a}}_\phi, \infty)} \cap \mathbf{M}_{(\mathfrak{a}_\phi, \infty)}$ и W_ϕ няма нули върху $\mathbb{C}_{(\mathfrak{a}_\phi, \infty)}$.*

Повече информация за аналитичните свойства W_ϕ , както и за полюсите ѝ и съответните резидууми в тях, се съдържа в [PS18, Теорема 4.1].

11.1 Асоциирано функционално уравнение

Оказва се, виж [Jac01, Теорема 3.6.16], че функция Ψ е характеристична експонента на процес на Леви ξ тогава и само тогава когато

$$z \mapsto \mathbb{E}[e^{z\xi_1}] = e^{\Psi(z)} \in \mathcal{P}, \quad \text{и} \quad \Psi(z) \text{ е непрекъсната.} \quad (11.2)$$

Използвайки стандартно понятие, виж [Jac01, Дефиниция 3.6.5], последното е дефиницията на

$-\Psi$ е *непрекъсната отрицателно дефинитна функция*, което ще бележим $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$.

Нека $\Psi : i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ е елемент на $\overline{\mathcal{N}}$. Както обяснихме, това е еквивалентно на факта, че Ψ е характеристичната експонента на процес на Леви и следователно има представяне на Леви-Хинчин, виж (2.3),

$$\Psi(z) = -q + \gamma z + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zx} - 1 - zx\mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}}) \Pi(dx).$$

За такова Ψ се интересуваме от решението на уравнението

$$\mathcal{M}_\Psi(z+1) = \frac{-z}{\Psi(-z)} \mathcal{M}_\Psi(z), \quad \mathcal{M}_\Psi(1) = 1, \quad (11.3)$$

поне върху $i\mathbb{R} \setminus (\mathcal{Z}_0(\Psi) \cup \{0\})$, където $\mathcal{Z}_0(\Psi) := \{z \in i\mathbb{R} : \Psi(-z) = 0\}$. Нека асоциираното едномерно разлагане на Винер-Хопф на Ψ , виж (3.3), за $z \in i\mathbb{R}$, е

$$\Psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z).$$

Пати и Савов [PS18] доказват, че решение на (11.3) може да бъде намерено чрез Бернщайн-гама функциите $W_{\phi_\pm}$.

Теорема 11.2. [PS18, Теорема 2.1] Нека $\Psi \in \overline{\mathcal{N}}$ и $\phi_{\pm}$ са неговите Винер-Хопф фактори. Тогава изображението M_{Ψ} , дефинирано чрез

$$M_{\Psi}(z) := \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)} W_{\phi_-}(1-z) \quad (11.4)$$

удовлетворява рекурентното уравнение (11.3) поне върху $i\mathbb{R} \setminus (\mathcal{Z}_0(\Psi) \cup \{0\})$. Използвайки означенията $\mathbf{a}_{\pm} := \mathbf{a}_{\phi_{\pm}}$ и $\bar{\mathbf{a}}_{\pm} := \bar{\mathbf{a}}_{\phi_{\pm}}$ от (4.11), имаме също и, че $M_{\Psi} \in \mathbf{A}_{(\mathbf{a}_+ \mathbf{1}_{\{\bar{\mathbf{a}}_+ = 0\}}, 1 - \bar{\mathbf{a}}_-)}$.

Директно следствие, тъй като трансформацията на Мелин на I_{ξ} изпълнява (11.3), е, че

$$\mathcal{M}_{I_{\Psi}}(z) = \mathbb{E}[I_{\xi}^{z-1}] = M_{\Psi}(z) = \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_+}(z)} W_{\phi_-}(1-z),$$

което позволява да изучаваме свойствата на експоненциалните функционали чрез анализ на Бернщайн-гама функциите $W_{\phi_{\pm}}$. Друг контекст, в който уравнението (11.3) се появява е изучаването на някои несамоспрегнати Марковски полугрупи, илюстрирано в [PS17], [PS21], [PSZ19] and [PZ17].

12 Примери за Бернщайн-гама функции

В дисертацията са изложени различни явни примери за Бернщайн-гама функции от работата на Бартолме и Пати [BP21, Секция 1.2].

13 Двумерни Бернщайн-гама функции

Вече представихме, че за всяка функция на Бернщайн ϕ можем да дефинираме Бернщайн-гама функция W_{ϕ} , като решение на уравнение от типа (8.3), тоест, за $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$W_{\phi}(z+1) = \phi(z)W_{\phi}(z), \quad W_{\phi}(1) = 1.$$

Напомняме, че двумерните функции на Бернщайн са точно експонентите на Лаплас на двумерни субординатори и са коментирани в Секция 3. В [BS21], Баркър и Савов доказват, че уравнението за $\operatorname{Re}(\zeta) \geq 0$ и $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$W_{\kappa}(\zeta, z+1) = \kappa(\zeta, z)W_{\kappa}(\zeta, z) \quad W_{\kappa}(\zeta, 1) = 1,$$

има единствено аналитично решение върху $\mathbb{C}_{(0, \infty)}^2$, такова че за всяко $q \geq 0$, функцията $W_{\kappa}(q, \cdot)$ е трансформация на Мелин на положителна случайна величина. Функцията W_{κ} се нарича *двумерна Бернщайн-гама функция*. Нейни аналитични свойства, представяне чрез произведение на Вайерщрас и асимптотика на Стирлинг са налични в [BS21]. В случая, когато $\kappa_{\pm}$ са Винер-Хопф факторите на характеристичната експонента Ψ на Леви процес ξ , виж (3.3), в секция 24 от Глава V, изучаваме детайлно връзката между q -производните на $W_{\kappa_{\pm}}(q, z)$ и вероятностните свойства на ξ чрез нейните q -потенциални мерки.

Глава IV

Асимптотика на плътностите на експоненциални функционали от субординатори

14 Въведение и мотивация

В тази глава работим основно с експоненциални функционали на убити процеси на Леви, тоест с

$$I_{\xi,q} := \int_0^{\mathbf{e}_q} e^{-\xi s} ds,$$

където случайната величина $\mathbf{e}_q \sim \text{Exp}(q)$ е независима от ξ . Напомняме, че тези обекти са представени в Секция 5. Случайните величини $I_{\xi,q}$ са добре дефинирани за $q > 0$, а в случая $q = 0$, трябва да допуснем, че ξ клони към безкрайност, виж Теорема 4.1. В секция 5.3 излагаме работата върху асимптотиката на опашката, и дори повече, върху плътността $f_{I_{\xi,q}}^{(n)}$, на $I_{\xi,q}$.

Ненамаляващите процеси на Леви, познати още и като субординатори, са въведени в Секция 2.1, в частност, както в (2.5), за тези процеси можем да дефинираме експонента на Лаплас ϕ чрез, за $\text{Re}(z) \geq 0$,

$$\mathbb{E}[e^{-zX_t}] = e^{-t\phi(z)},$$

за която знаем, че

$$\phi(z) = q + dz + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-zy}) \mu(dy) = q + dz + z \int_0^\infty e^{-zy} \bar{\mu}(y) dy, \quad (14.1)$$

където $d \geq 0$ се нарича дрифт, Леви мярката $\mu(dy)$ има носител $(0, \infty)$ и изпълнява

$$\int_{(0,\infty)} \min\{y, 1\} \mu(dy) = \int_0^1 \bar{\mu}(w) dw < \infty, \quad \text{за} \quad \bar{\mu}(y) := \int_{(y,\infty)} \mu(ds). \quad (14.2)$$

В тази глава, ще разбираме убит субординатор, когато говорим за субординатор.

Да отбележим, че ако $d > 0$, от [PS18, Теорема 2.4.2] знаем, че носителят на $I_{\xi,q}$ е краен, като по-точно е $[0, 1/d]$. Следователно въпросът за намирането на асимптотика в безкрайност е тривиален. Поради тази причина **до края на главата ще считаме, че ξ потенциално убит субординатор с нулев дрефт и експонента на Лаплас ϕ .**

Първите значими резултати за опашката на $I_{\xi,q}$ са получени от Рибери и Хаас в [HR12, Секция 3] при допускане за положително нарастване:

Допускане (H): ξ е субординатор с нулев дрефт, или еквивалентно $d = 0$ в (14.1), и Леви мярката има положително нарастване, тоест

$$\liminf_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{2x} \bar{\mu}(y) dy}{\int_0^x \bar{\mu}(y) dy} > 1 \iff \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x\phi'(x)}{\phi(x)} < 1. \quad (14.3)$$

Ще казваме, че функция на Бернщайн има положително нарастване, ако тя е експонентата на Лаплас на субординатор с положително нарастване.

В такъв случай, ако (H) е изпълнено, от [HR12, Твърдение A.1] знаем, че за всяко $q \geq 0$, асимптотиката на опашката на $I_{\xi,q}$ на $\log$ -скала е

$$-\ln(\mathbb{P}(I_{\xi,q} > x)) \approx \int_{\phi_*(1)}^x \frac{\varphi_*(y)}{y} dy, \quad \text{където} \quad \phi_*(z) := \frac{z}{\phi(z)}, \quad \varphi_* := \phi_*^{-1}. \quad (14.4)$$

В Следствие 17.2 подобряваме значително този резултат, като намираме при същите допускания асимптотиката на самата опашка:

$$\mathbb{P}(I_{\xi,q} > x) \approx C_\phi \frac{x \sqrt{\varphi'_*(x)}}{\varphi_*(x)} e^{-\int_{\phi_*(1)}^x \frac{\varphi_*(y)}{y} dy}, \quad (14.5)$$

където точната стойност на константата C_ϕ е налична в (17.1). Още повече, основният резултат в тази глава, Теорема 17.1, показва, че за $n \geq 0$,

$$f_{I_{\xi,q}}^{(n)}(x) \approx \frac{C_\phi \varphi_*^n(x) \sqrt{\varphi'_*(x)}}{x^n} e^{-\int_{\phi_*(1)}^x \frac{\varphi_*(y)}{y} dy}. \quad (14.6)$$

В случая $q = 0$, еквивалентностите (14.5) и (14.6) за $n = 0$ са получени независимо и Хаас в [Haa24] скоро след [MS23]. Приликите и разликите в двете работи са дискутирани в Забележка 17.3 от дисертацията.

Съществуват разнообразни сценарии, при които експоненциалните функционали на субординатори могат да играят ключова роля. Един от примерите за това са процесите на фрагментация, виж Секция 7.2, където времето до разпадането на частицата до прах, виж реферираната секция по-горе в дисертацията за дефиниция на понятието, е точно I_ξ . Друг пример е изучаването на граници на Йаглом на себеподобни Марковски процеси, виж [HR12]. По-общо, от [PS18, Теорема 2.22], експоненциалният функционал на общ Леви процес η може да бъде представен като произведение на експоненциалния функционал от процеса на времената и нивата на нарастване и независима от него положителна случайна величина, тоест

$$I_{\eta,q} = I_{\kappa+,q} \times Y, \quad (14.7)$$

което означава, че анализът на $I_{\eta,q}$ може да бъде сведен до изучаването на по-простите обекти $I_{\kappa+,q}$ и Y . Като илюстрация на това, в Следствие 17.6 показваме,

че аналитичността в някакъв конус на $I_{\kappa+,q}$ води до аналогично твърдение за плътността на $I_{\eta,q}$. Също така, в Теорема 17.1 доказваме, че при допълнително допускане освен **(H)**, $f_{I_{\xi,q}}$ е аналитична в конус от комплексната равнина.

Получените резултати за Бернщайн-гама функциите са от самостоятелен интерес в контекста на теорията на специалните функции. В (19.9) получаваме удобна форма на асимптотиката на Стирлинг за

$$\mathcal{M}_{I_{\xi}}(z) = \mathbb{E}[I_{\xi}^{z-1}] = \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi}(z)}.$$

За да я анализираме в детайл, в Теорема 19.3, показваме как функциите на Бернщайн действат върху лъчи в положителната комплексна равнина, които минават през началната ѝ точка. При допълнително условие освен **(H)**, чрез Следствие 19.5, показваме експоненциално бързо намаляване на $|\Gamma(z)/W_{\phi}(z)|$ по комплексни прави в $\mathbb{C}_{(0,\infty)}$.

15 Предварителни резултати

Отново напомняме, че за субординатор ξ , в (14.1), дефинирахме експонентата му на Лаплас, за $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, като

$$\phi(z) := \log_0(\mathbb{E}[e^{zX_1}]) = q + \mathbf{d}z + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-zy})\mu(dy) = q + \mathbf{d}z + z \int_0^{\infty} e^{-zy}\bar{\mu}(y)dy.$$

Така дефинираната ϕ е функция на Бернщайн, като вторите са в биекция с експонентите на Лаплас на потенциално убитите субординатори. Освен ако ξ е равен навсякъде на 0 и $q = 0$, ξ клони към безкрайност, така че от Теорема 4.1 знаем, че $I_{\xi,q}$ е крайна п.с. случайна величина.

Според Теорема 5.2, ако $\mathbf{d} = 0$, функцията на разпределение на $I_{\xi,q}$ е безкрайно диференцируема и нека $f_{I_{\xi,q}}$ е съответната плътност. Тогава от [PS18, (2.24)] имаме представянето на Мелин-Барнс, за всеки $n \geq 0$ и $a, x > 0$,

$$f_{I_{\xi,q}}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(z)=a} x^{-z-n} \frac{\Gamma(z+n)}{W_{\phi}(z)} dz. \quad (15.2)$$

За референция, отбелязваме, че в означенията от [PS18], имаме че $\phi_+ \equiv \phi$, $\phi_- \equiv 1$, $\mathbf{d}_+ = \mathbf{d}_- = \mathbf{d} = 0$ и $\bar{\mathbf{a}}_- = -\infty$, така че (2.24) от [PS18] води точно до (15.2). Още повече, в [PS18] можем да намерим подобно представяне и за опашката на $I_{\xi,q}$: от [PS18, (7.15)] и формулата за обръщане на трансформацията на Мелин,

$$\mathbb{P}(I_{\xi,q} > x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(z)=a} x^{-z} \frac{1}{z} \frac{\Gamma(z+1)}{W_{\phi}(z+1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re}(z)=a} x^{-z} \frac{1}{\phi(z)} \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi}(z)} dz. \quad (15.3)$$

Продължаваме с дефиницията на функцията, за $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$\phi_*(z) := \frac{z}{\phi(z)}, \quad (15.4)$$

която е добре дефинирана, тъй като може да се провери, че $\phi(z)$ няма нули в тази област, виж (A.4). Също така,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \phi_*(x) = \frac{\mathbb{1}_{\{q=0\}}}{\phi'(0+)} \in [0, \infty),$$

тъй като от Твърдение A.1.1, е вярно, че $\phi'(0+) \in (0, \infty]$. От Твърдение A.1.2, знаем и че ϕ_* е растяща за $x > 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_*(x) = \infty$, защото по допускане $d = 0$. Следователно можем да дефинираме обратна функция на ϕ_*

$$\varphi_* := \phi_*^{-1} : Dom(\varphi_*) = \left(\frac{1}{\phi'(0+)} \mathbb{1}_{\{q=0\}}, \infty \right) \rightarrow (0, \infty). \quad (15.5)$$

16 Методология

Подходът ни се основава на приложението на метода на седлото, познат и като метод на Лаплас, в (15.2), което изисква оптимален избор за контура на интегриране в зависимост от x , тоест, $\text{Re}(z) = a = a(x)$. Макар тази оптимална стойност да бъде лесна за намиране от наличната асимптотика на Стирлинг за $\Gamma(z)/W_\phi(z)$, за да довършим анализа са нужни по-точни оценки за нея. В секция 19 представяме нужните аналитични резултати.

17 Основни резултати

Следващата теорема е основната в тази глава.

Теорема 17.1. *Ако (H) е изпълнено, то за всяко $n \geq 0$ и $q \geq 0$,*

$$f_{I_{\xi,q}}^{(n)}(x) \approx C_\phi \frac{\varphi_*^n(x) \sqrt{\varphi'_*(x)}}{x^n} e^{-\int_{\phi_*(1)}^x \frac{\varphi_*(y)}{y} dy}, \quad \text{където } C_\phi = \frac{(-1)^n e^{-T_{\phi_*}}}{\sqrt{2\pi\phi_*(1)}} \quad (17.1)$$

и

$$T_{\phi_*} = \int_1^\infty (u - [u])(1 - (u - [u])) \left(\frac{1}{u^2} - \left(\frac{\phi'(u)}{\phi(u)} \right)^2 + \frac{\phi''(u)}{\phi(u)} \right) du \in (-\infty, \infty).$$

Ако допълнително е в сила и че $\limsup_{x \rightarrow 0+} \bar{\mu}(2x)/\bar{\mu}(x) < 1$, то съществува $\varepsilon > 0$, такова че $f_{I_{\xi,q}}$ е аналитична в конуса $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0 \text{ и } |\arg z| < \varepsilon\}$.

Следствие 17.2. *При допусканията от първата част на Теорема 17.1,*

$$\mathbb{P}(I_{\xi,q} > x) \approx C_\phi \frac{x \sqrt{\varphi'_*(x)}}{\varphi_*(x)} e^{-\int_{\phi_*(1)}^x \frac{\varphi_*(y)}{y} dy}. \quad (17.2)$$

Следващите следствия от основния резултат могат да бъдат полезни за директни приложения.

Следствие 17.4. *Нека ξ е потенциално убит ненамаляващ сложен Поасонов процес, за който $\int_0^1 \mu(dv)/v < \infty$. Тогава*

$$f_{I_{\xi,q}}^{(n)}(x) \approx C e^{-\phi(\infty)x}, \quad (17.3)$$

където

$$C = (-1)^n \phi^n(\infty) \sqrt{\phi(\infty)} e^{\phi(\infty)\phi_*(1) + \int_0^\infty \int_{\phi_*(1)}^\infty e^{-\varphi_*(y)v} dy \mu(dv)} \frac{e^{-T_{\phi_*}}}{\sqrt{2\pi\phi_*(1)}}.$$

В случай, че $\int_0^1 \mu(dv)/v = \infty$, то

$$f_{I_{\xi,q}}^{(n)}(x) \approx C e^{-\phi(\infty)(x+o(x))}, \quad \text{където } C = (-1)^n \phi^n(\infty) \sqrt{\phi(\infty)} e^{\phi(\infty)\phi_*(1)} \frac{e^{-T_{\phi_*}}}{\sqrt{2\pi\phi_*(1)}}. \quad (17.4)$$

Във всички случаи, плътността $f_{I_{\xi,q}}$ е аналитична в конуса $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ и } |\arg z| < \pi/2\}$.

В следващия резултат, използвайки факторизацията (14.7), $I_{\eta,q} = I_{\phi_+,q} \times Y$, показваме, че аналитичността на $f_{I_{\kappa_+,q}}$ води до сходен резултат за $f_{I_{\eta,q}}$.

Следствие 17.6. Нека Ξ е Леви процес, за който $I_\Xi < \infty$ п.с. Да допуснем, че функцията на Бернщайн $\phi_{q,+}$ от факторизацията на Винер-Хопф (3.3) на Ξ , изпълнява (H). Тогава плътността на $I_{\Xi,q}$ е аналитична поне върху същия конус, върху който е аналитична тази на $I_{\phi_{q,+}}$.

18 Примери

Тази секция от дисертацията съдържа експлицитни примери за резултатите от Теорема 17.1 и Следствие 17.2 в случаите, когато ϕ е правилно изменяща се, и по-точно, за стабилни и гама субординатори.

19 Нужни нови резултати за Бернщайн-гама функциите

Напомниме, че Бернщайн-гама функциите са естествен обект при анализа на експоненциални функционали на процеси на Леви, тъй като, за $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$\mathbb{E}[I_{\xi,q}^{z-1}] = \frac{\Gamma(z)}{W_\phi(z)}. \quad (19.2)$$

Следващият резултат касае асимптотиката на Стирлинг на последното количество.

Лема 19.1. Нека ϕ е функция на Бернщайн. Тогава за $\operatorname{Re}(z) > 0$,

$$\frac{\Gamma(z)}{W_\phi(z)} = \frac{\phi_*^{1/2}(1)}{\phi_*(z)\phi_*^{1/2}(z+1)} e^{L_{\phi_*}(z)} e^{-E_{\phi_*}(z)}, \quad (19.6)$$

където, за $\operatorname{Re}(z) > 1$,

$$\begin{aligned} L_{\phi_*}(z-1) &:= \int_{1 \rightarrow \operatorname{Re}(z) \rightarrow \operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z)} \log_0(\phi_*(w)) dw \\ &= \int_1^{\operatorname{Re}(z)} \ln(\phi_*(w)) dw - \int_0^{\operatorname{Im}(z)} \arg(\phi_*(\operatorname{Re}(z) + iw)) dw + i \int_0^{\operatorname{Im}(z)} \ln|\phi_*(\operatorname{Re}(z) + iw)| dw \\ &=: G_{\phi_*}(\operatorname{Re}(z)) - A_{\phi_*}(z) + iU_{\phi_*}(z). \end{aligned} \quad (19.7)$$

Още повече, равномерно по $\text{Im}(z)$,

$$T_{\phi_*} := \lim_{\text{Re}(z) \rightarrow \infty} E_{\phi_*}(z) = \int_1^\infty P(u) \left(\frac{1}{u^2} - \left(\frac{\phi'(u)}{\phi(u)} \right)^2 + \frac{\phi''(u)}{\phi(u)} \right) du. \quad (19.8)$$

Също така, при $\text{Re}(z) \rightarrow \infty$,

$$\frac{\Gamma(z)}{W_\phi(z)} = (1 + o(1)) \frac{\phi_*^{1/2}(1)}{\phi_*^{1/2}(z+1)} e^{L_{\phi_*}(z-1)} e^{-T_{\phi_*}}, \quad (19.9)$$

като асимптотичната оценка $o(1)$ е равномерна по $\text{Im}(z)$.

Нека дефинираме за $\pi/2 \geq \theta > 0$,

$$\mathcal{B}_{exp}(\theta) := \left\{ \phi \in \mathcal{B} : \forall a > 0, \forall \epsilon \in (0, \theta) : \lim_{|b| \rightarrow \infty} e^{(\theta-\epsilon)|b|} \left| \frac{\Gamma(a+ib)}{W_\phi(a+ib)} \right| = 0 \right\}. \quad (19.10)$$

Целта на следващия резултат е да осигури повече информация за това кои функции на Бернщайн принадлежат към класа $\mathcal{B}_{exp}(\theta)$. За тази цел, първо предоставяме информация за $\arg \phi_*$, тъй като количествата от този тип са носителят на асимптотиката в (19.7) чрез члена A_{ϕ_*} .

Теорема 19.3. *Нека ϕ е функция на Бернщайн, която изпълнява (H). Тогава за всяко $\eta > 0$ съществуват $a_\eta > 0$ и $C_\eta > 0$, такива че ако $t \geq \eta$ и $a \geq a_\eta$, е изпълнено, че*

$$\arg(a(1+it)) - \arg(\phi(a(1+it))) = \arg \phi_*(a(1+it)) \geq \frac{C_\eta}{t}, \quad (19.11)$$

или еквивалентно

$$\arg(\phi(a(1+it))) \leq \arctan(t) - \frac{C_\eta}{t}.$$

Ако в допълнение е вярно, че $\limsup_{x \rightarrow 0} \bar{\mu}(2x)/\bar{\mu}(x) < 1$, то за всяко $\eta > 0$ съществуват $a'_\eta > 0$ и $\varepsilon_\eta \in (0, \pi/2)$, такива че за $t \geq \eta$ и $a \geq a'_\eta$, е в сила

$$\arg(a(1+it)) - \arg(\phi(a(1+it))) = \arg \phi_*(a(1+it)) \geq \varepsilon_\eta, \quad (19.12)$$

или еквивалентно,

$$\arg \phi(a(1+it)) \leq \arctan(t) - \varepsilon_\eta.$$

Теорема 19.3 може да бъде полезна, тъй като предоставя оценка за аргумента на Бернщайн функции, които изпълняват условие върху техните мерки на Леви, които са често в експлицитен вид или поне тяхната асимптотика е зададена предварително.

В долното следствие прехвърляме последните резултати към поведението на A_{ϕ_*} .

Следствие 19.5. *Нека ϕ е функция на Бернщайн, която изпълнява (H) и*

$$\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{\bar{\mu}(2x)}{\bar{\mu}(x)} < 1.$$

Тогава съществуват $\varepsilon > 0$ и константи $a_0, t_0 > 0$, такива че, за всеки $a \geq a_0$ и $|b| \geq at_0$,

$$A_{\phi_*}(a+ib) \geq \varepsilon|b| - \varepsilon at_0. \quad (19.13)$$

Като следствие, $\phi \in \mathcal{B}_{exp}(\varepsilon)$. Това в частност е изпълнено, ако $\bar{\mu}(y) \in \mathcal{R}_\alpha$ с $\alpha \in (0, 1)$, тоест, $\bar{\mu}(y) \stackrel{0}{\sim} y^{-\alpha} \ell(y)$, където $\ell \in SV_0$ е бавно изменяща се в 0 функция.

Условията в следващия резултат контрастират с допусканията в Следствие 19.5, което показва, че съществуват по-слаби условия, при които също има експоненциално бързо намаляване по комплексни прави.

Лема 19.8. *Ако ϕ е функция на Бернщайн, за която $\phi(\infty) < \infty$, то $\phi \in \mathcal{B}_{exp}(\pi/2)$.*

20 Доказателства

Тази секция от дисертацията започва с доказателствата на Теорема 17.1, Следствие 17.2 и Следствие 17.4.

След това продължава с доказателствата на резултатите от Секция 19, тоест Лема 19.1, Теорема 19.3 и Лема 19.8.

Глава V

Двумерни Бернщайн-гама функции, потенциални мерки и асимптотика на експоненциални функционали на Леви

21 Въведение и мотивация

В тази глава от дисертацията се продължаваме с изучаването на експоненциалните функционали на процеси на Леви и по-специално тези върху детерминистичен хоризонт

$$I_\xi(t) := \int_0^t e^{-\xi_s} ds. \quad (21.1)$$

Напомниме, че тези обекти и основни резултати за тях са представени в Секция 6.

Най-подробните резултати за експоненциални функционали на процеси на Леви върху детерминистичен хоризонт са налични за асимптотичното поведение на функции на $I_\xi(t)$, при $t \rightarrow \infty$, в случая $I_\xi := I_\xi(\infty) = \infty$ п.с. Тези резултати са най-често мотивирани от приложения в сферата на разклоняващите се процеси в случайни Леви среди, виж Секция 7.1. В тази глава получаваме нови резултати в този контекст: при допускания, че $\mathbb{E}[\xi_1] \in (-\infty, 0)$ и $\mathbb{P}(\xi_1 > t)$ е правилно изменяща се в безкрайност с индекс $\alpha > 1$, доказваме, че мерките

$$\frac{y^{-a} \mathbb{P}(I_\xi(t) \in dy)}{\mathbb{P}(\xi_1 > t)}, \quad a \in (0, 1), \quad (21.2)$$

клонят слабо, при $t \rightarrow \infty$, към крайна положителна мярка с носител $(0, \infty)$. Чрез обратно преобразование на Мелин, извеждаме полу-експлицитно аналитично представяне на функцията на разпределение на граничната мярка, което води до асимптотичното поведение на $\mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)]$, виж Теорема 23.1 и следствията след нея. Последното ни позволява да изведем вероятностно представяне на нормираната гранична мярка, виж Теорема 23.5. Чрез него получаваме нови аналитични свойства за граничната мярка като съществуването и гладкостта на нейната плътност.

Друг полезен резултат е, че в Теорема 23.6 дори без допускането за правилно изменяща се опашка и крайност на очакването, получаваме горни граници за скоростта на намаляване на количества от вида $\mathbb{E}[F(I_\xi(t))]$ при $t \rightarrow \infty$, които често се появяват при изучаването на случайни процеси в случайни среди, виж Секция 7.1.

Основен инструмент в доказателствата на горните резултати са получените нови разнообразни аналитични и вероятности свойства на двумерните Бернщайн-гама функции.

Известно е, че чрез двумерните Бернщайн-гама функции, породени от Винер-Хопф факторите на $\phi_{q,\pm}$, виж (3.3), на асоцииран процес на Леви ξ , може да се опише трансформацията на Мелин на експоненциалния функционал чрез, поне за $\operatorname{Re}(z) \in (0, 1)$,

$$\mathcal{M}_{I_{\xi,q}}(z) = \phi_-(q, 0) \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_{q,+}}(z)} W_{\phi_{q,-}}(1 - z).$$

Следователно чрез обратна трансформация на Мелин, можем да получим информация за $I_{\xi,q}$, а след това след обратна трансформация на Лаплас, можем да направим изводи за $I_\xi(t)$.

Относно двумерните Бернщайн-гама функции, доказваме, че когато те са породените от Винер-Хопф факторите на процес на Леви ξ , който клони към минус безкрайност, то съществуването на техни производни по първата променлива в 0 е свързано с поведението на Леви мярката, виж Теорема 24.3. Също така, свързваме тези производни с производните на q -потенциалните мерки на ξ , виж Лема 24.1. В случая, когато потенциалните мерки имат ограничени плътности, получаваме горни граници за плътностите на конволюциите на потенциалните мерки, виж Теорема 24.6. Използвайки тези резултати, в Следствие 24.4 представяме универсални оценки за скоростта на намаляване за трансформацията на Мелин на експоненциалния функционал, както и нейните производни.

Доказаните нови свойства на производните на двумерните Бернщайн-гама функции са ключовият инструмент в Тауберов подход, който използваме, за да покажем, че мерките от (21.2) имат слаба граница. Специфичен случай в този метод е случаят, когато индексът на регулярност α за $\mathbb{P}(\xi_1 > t)$ е естествено число. Тогава използваме специфичната подтеория на де Хан, която комбинираме и с вероятностни съображения. Подобни вероятностни аргументи са използвани от Ксу [Xu21], чиито резултати са значително подобрени в текущата глава. За повече информация относно методологията, виж Секция 22.3.

22 Подготвителни и предхождащи резултати, методология и преглед на литературата

22.1 Означения

За пълнота, да припомним някои от означенията, с които работим. Използваме $\mathbb{C}$, за да бележим комплексната равнина и z представлява комплексна променлива с реална част $\operatorname{Re}(z)$ и имагинерна такава $\operatorname{Im}(z)$. Бележим с $\mathbb{R}_+$ множеството $[0, \infty)$. За множество $A \subset \mathbb{R}$, използваме $\mathbb{C}_A$ за комплексната полуравнина $\mathbb{C}_A := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in A\}$. Също така, ако не е посочено друго, n, k, l ще бъдат естествени

числа. За всяка неотрицателна случайна величина X , дефинираме нейната трансформация на Мелин $\mathcal{M}_X(z) := \mathbb{E}[X^{z-1}]$, която е дефинирана поне върху комплексната права $\mathbb{C}_{\{1\}} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 1\}$. Ако μ е мярка, за краткост ще бележим $\mu(a, b) := \mu((a, b))$. След това, за функция f , дефинираме формално трансформацията ѝ на Лаплас, за $q \geq 0$, като $\widehat{f}(q) := \int_0^\infty e^{-qt} f(t) dt$.

Припомняме, че ϕ е функция на Бернщайн тогава и само тогава, когато има вида

$$\phi(z) = \phi(0) + dz + \int_0^\infty (1 - e^{-zy}) \mu(dy), \quad z \in \mathbb{C}_{[0, \infty)}, \quad (22.1)$$

където $\phi(0) \geq 0$, $d \geq 0$ и μ е σ -крайна положителна мярка, за която $\int_0^\infty \min\{1, y\} \mu(dy) < \infty$. Всяка Бернщайн функция е експонента на Лаплас на потенциално убит субординатор с $\phi(0)$, дрефт d и Леви мярка μ . По аналогичен начин, двумерна функция на Бернщайн κ , дефинирана чрез $(\zeta, z) \in \mathbb{C}_{[0, \infty)} \times \mathbb{C}_{[0, \infty)}$,

$$\kappa(\zeta, z) = \kappa(0, 0) + d_1 \zeta + d_2 z + \int_0^\infty \int_0^\infty (1 - e^{-\zeta y_1 - z y_2}) \mu(dy_1, dy_2), \quad (22.2)$$

е експонентата на Лаплас за потенциално убит двумерен субординатор и $\kappa(0, 0)$, d_1 и d_2 са неотрицателни и имат сходно значение като в едномерния случай, а μ е двумерната мярка на Леви, която изпълнява $\int_0^\infty \int_0^\infty \min\{1, \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\} \mu(dy_1, dy_2) < \infty$.

22.2 Двумерни Бернщайн-гама функции и Мелин трансформацията на експоненциално функционали

От [BS21, Дефиниция 2.5, Теорема 2.8], знаем, че за всяка двумерна експонента на Лаплас на субординатор $\kappa \not\equiv 0$, уравнението

$$W_\kappa(\zeta, z+1) = \kappa(\zeta, z) W_\kappa(\zeta, z), \quad W_\kappa(\zeta, 1) = 1, \quad \zeta \in \mathbb{C}_{[0, \infty)}, z \in \mathbb{C}_{(0, \infty)}, \quad (22.3)$$

има единствено решение, което е холоморфно в $\mathbb{C}_{(0, \infty)} \times \mathbb{C}_{(0, \infty)}$ и ще наричаме двумерна Бернщайн-гама функция. Също така, за всеки $q \geq 0$, функцията $W_\kappa(q, \cdot)$ е аналитична върху $\mathbb{C}_{(0, \infty)}$ и Мелин трансформация на положителна случайна величина.

От сега нататък, ще работим с двумерни Бернщайн-гама функции, които са асоциирани с Винер-Хопф факторите на Леви процес. Тъй като са от ключово значение за тази глава, припомняме някои факти от Секция 3.

Нека ξ е процес на Леви с експонента на Леви-Хинчин Ψ . Тогава характеристичната експонента на потенциално убитата със скорост q версия на ξ е

$$\Psi_q(z) = \log_0 \mathbb{E}[e^{z\xi_1}] = \Psi(z) - q = \gamma z + \frac{1}{2} \sigma^2 z^2 + \int_{-\infty}^\infty (e^{zy} - 1 - zy \mathbb{1}_{\{|y| \leq 1\}}) \Pi(dy) - q, \quad (22.4)$$

където $\log_0$ е главният клон на комплексния логаритъм, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 \geq 0$ са респективно линейен член и Браунова компонента на ξ , Π е Леви мярката на процеса, която изпълнява $\int_{-\infty}^\infty \min\{1, y^2\} \Pi(dy) < \infty$ и q е скоростта на убиване.

За всеки потенциално убит процес на Леви имаме асоциирана факторизация на Винер-Хопф, виж (3.3),

$$\Psi_q(z) = \Psi(z) - q = -\phi_+(q, -z)\phi_-(q, z) = -h(q)\kappa_+(q, -z)\kappa_-(q, z), \quad z \in i\mathbb{R}, \quad (22.5)$$

където, за $q \geq 0$,

$$h(q) := \exp\left(-\int_0^\infty \left(\frac{e^{-t} - e^{-qt}}{t}\right) \mathbb{P}(\xi_t = 0) dt\right), \quad (22.6)$$

което в случая на преходен процес на Леви ξ е ненулево от [Ber96, Теорема 12], както и, за $q \geq 0$ и $\operatorname{Re}(z) \geq 0$,

$$\kappa_\pm(q, z) = c_\pm \exp\left(\int_0^\infty \int_{[0, \infty)} \left(\frac{e^{-t} - e^{-qt-zx}}{t}\right) \mathbb{P}(\pm\xi_t \in dx) dt\right) \quad (22.7)$$

са двумерните експоненти на Лаплас на процеса на времената и нивата нарастване/намаляване, които са двумерни субординатори, виж Секция 3. Отбелязваме, че $c_\pm > 0$ зависят от избора на локални времена, които можем да фиксираме, така че да е изпълнено $c_+c_- = 1$. Можем също да изберем и

$$\phi_+(q, z) = \kappa_+(q, z)/c_+ \quad \text{и} \quad \phi_-(q, z) = h(q)\kappa_-(q, z)/c_-, \quad (22.8)$$

тоест, за $q \geq 0$ и $\operatorname{Re}(z) \geq 0$,

$$\begin{aligned} \phi_+(q, z) &= \exp\left(\int_0^\infty \int_{[0, \infty)} \left(\frac{e^{-t} - e^{-qt-zx}}{t}\right) \mathbb{P}(\xi_t \in dx) dt\right), \\ \phi_-(q, z) &= \exp\left(\int_0^\infty \int_{(0, \infty)} \left(\frac{e^{-t} - e^{-qt-zx}}{t}\right) \mathbb{P}(\xi_t \in -dx) dt\right). \end{aligned} \quad (22.9)$$

Отбелязваме, че $h(q) \equiv 1$, ако ξ не сложен Поасонов процес, като в този случай $\phi_\pm \equiv \kappa_\pm/c_\pm$ са също двумерни експоненти на Лаплас на субординатори. Ако $h(q) \not\equiv 1$, то за всяко фиксирано $q \geq 0$, функциите $\phi_{q,\pm}(z) := \phi_\pm(q, z)$ са експоненти на Лаплас на едномерни субординатори.

Използвайки означението, за $q \geq 0$,

$$I_{\xi, q} := I_\xi(\mathbf{e}_q) = \int_0^{\mathbf{e}_q} e^{-\xi_s} ds,$$

от [PS18, Теорема 2.4] знаем, че поне за $z \in \mathbb{C}_{(0,1)}$,

$$\mathcal{M}_{I_{\xi, q}}(z) = \phi_-(q, 0) \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_{q,+}}(z)} W_{\phi_{q,-}}(1-z) =: \phi_-(q, 0) M_\Psi(q, z), \quad (22.10)$$

където за фиксирано q , функциите $W_{\phi_{q,\pm}}$ решават (22.3) и следователно са Бернщайн-гама функции. За да предоставим връзка между Винер-Хопф факторите $\phi_\pm$ и вероятностните $\kappa_\pm$, използваме, че от [PS18, Теорема 4.1 (5)], за всеки $c > 0$, $z \in \mathbb{C}_{(0,\infty)}$ и Бернщайн функция ϕ , е изпълнено $W_{c\phi}(z) = c^{z-1}W_\phi(z)$. Следователно, от избора на $\phi_{q,\pm}$ по-горе, получаваме, че

$$W_{\phi_{q,+}}(z) = c_+^{1-z}W_{\kappa_+}(q, z) \quad \text{и} \quad W_{\phi_{q,-}}(z) = c_-^{1-z}h^{z-1}(q)W_{\kappa_-}(q, z). \quad (22.11)$$

Замествайки в (22.10) и тъй като $c_+c_- = 1$, получаваме

$$\mathcal{M}_{I_{\xi, q}}(z) = h^z(q)\kappa_-(q, 0) \frac{\Gamma(z)}{W_{\kappa_+}(q, z)} W_{\kappa_-}(q, 1-z). \quad (22.12)$$

22.3 Методология

Да припомним, че $I_\xi(t) := \int_0^t e^{-\xi s} ds$. От (22.10), за $a \in (0, 1)$, знаем, че трансформацията на Лаплас на моментите в t е

$$\int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)] dt = \frac{\mathcal{M}_{I_{\xi,q}}(1-a)}{q} = \frac{M_\Psi(q, 1-a)}{\phi_+(q, 0)}. \quad (22.13)$$

Започваме нашата работа от равенство (22.13), тъй като чрез Тауберови теореми можем евентуално да определим асимптотичното поведение на $\mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)]$. От друга страна, тъй като допускаме, че $\mathbb{E}[\xi_1] < 0$, то е сила

$$\int_0^\infty \mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)] dt < \infty,$$

виж Теорема 23.6, и е невъзможно да приложим Тауберова теорема. Поради тази причина, в зависимост от индекса $\alpha > 1$ на правилно изменящата се функция $\mathbb{P}(\xi_1 > t)$, разглеждаме итерирани интеграли на опашката. Например, ако $\alpha \in (n, n+1]$, $n \geq 1$, разглеждаме

$$V(t) = \int_t^\infty \int_{s_1}^\infty \cdots \int_{s_{n-1}}^\infty \mathbb{E}[I_\xi^{-a}(s_n)] ds_n \cdots ds_1,$$

и чрез Тауберови методи намираме асимптотичното разпределение на $V(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Когато $\alpha \neq n+1$, след това прилагаме теоремата за монотонна сходимост n пъти, за да възстановим асимптотиката на $\mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)]$. Оказва се, че трансформацията на Лаплас на V се свързана с производните по q на $M_\Psi(q, 1-a)$ чрез (22.13). Поради използването на Тауберови теореми, е нужно да разберем трансформацията на Лаплас при $q = 0$, и от (22.10) виждаме, че производните по q в 0 на двумерните Бернщайн-гама функции са ключови. Използвайки интегрално представяне на двумерните Бернщайн-гама функции, което ги свързва с конволюциите и производните на q -потенциалните мерки на ξ , получаваме резултати за гореспоменатите производни.

Изключително специфичен случай е, когато $\alpha = n+1$ е цяло число. Тогава резултатите за трансформацията на Лаплас на V отново са в сила, но теоремата за монотонна сходимост не е. Наистина, оказва се, че $\int_0^t V(s) ds$ е бавно изменяща се в безкрайност, виж под (26.20) и значи Теорема В.11 не може да се приложи. В този случай, прилагаме по-сложната теория на де Хан, за което ни е нужна оценка отгоре на $\mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)] = O(\mathbb{P}(\xi_1 > t))$, която намираме чрез вероятностен подход, основан на принципа на големия скок, виж Лема 26.3. Това ни позволява да използваме обобщена теорема за монотонната сходимост, виж Теорема В.4. Останалите аргументи са сходни с тези от случая, когато α не е цяло число.

След като изведем асимптотиката на $\mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)]$, продължаваме с изучаването на

$$\frac{\mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t) \mathbb{1}_{\{I_\xi(t) \leq x\}}]}{\mathbb{P}(\xi_1 > t)} \quad \text{за всяко фиксирано } x \in (0, \infty),$$

като първо намираме Мелин трансформацията на Лаплас трансформацията на гор-

ната функция

$$\begin{aligned} x \mapsto \frac{1}{q} \mathbb{E} \left[I_{\xi}^{-a}(\mathbf{e}_q) \mathbb{1}_{\{I_{\xi}(\mathbf{e}_q) \leq x\}} \right] &= \int_0^{\infty} e^{-qt} \mathbb{E} \left[I_{\xi}^{-a}(t) \mathbb{1}_{\{I_{\xi}(t) \leq x\}} \right] dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i \phi_+(q, 0)} \int_{\operatorname{Re}(z)=b} \frac{x^{-z}}{z} M_{\Psi}(q, z+1-a) dz, \end{aligned}$$

и разглеждаме отново итерирания интеграл от опашката на $\mathbb{E} \left[I_{\xi}^{-a}(t) \mathbb{1}_{\{I_{\xi}(t) \leq x\}} \right]$, както в анализа по-горе, който всъщност отговаря на $x = \infty$ в текущия случай. Тъй като диференцирането на трансформацията на Лаплас на горното количество включва диференциране под знака на интеграла, са ни нужни оценки за растежа на производните на Бернщайн-гама функциите по комплексни прави, виж Теорема 24.3 и Следствие 24.4. Случаят когато ξ е сложен Поасонов процес с положителен дрефт изисква подобрения на оценките, виж (iii) и (iii') от Следствие 24.4. С тези резултати можем да приложим Тауберови теореми, включително тези за класа на де Хан. Подчертаваме, че за $\alpha \in (n, n+1]$, носителят на асимптотиката е $(\phi_+(q, 0))^{(n)}$ за $q \rightarrow 0$. Крайният резултат от анализа чрез Тауберови теореми е, че

$$\frac{\mathbb{E} \left[I_{\xi}^{-a}(t) \mathbb{1}_{\{I_{\xi}(t) \leq x\}} \right]}{\mathbb{P}(\xi_1 > t)}$$

клони към функцията на разпределение на крайна мярка ν_a , чиято трансформация на Мелин е в явен вид, виж Теорема 23.1 и 23.5. Използвайки това, в теорема Теорема 23.5 извеждаме някои свойства на плътността на мярката ν_a и вероятностна факторизация на експоненциалния функционал.

След като установим крайността на q -производните за $q = 0$ за дясната страна в (22.13), като следствие получаваме оценките за $\mathbb{E}[|F(I_{\xi}(t))|]$ от Теорема 23.6.

22.4 Свързани резултати

В тази секция от дисертацията са обсъдени по-подробно някои резултати от Секция 6.

23 Основни резултати за експоненциални функционали

Следващата теорема е основния резултат относно поведението на $I_{\xi}(t)$.

Теорема 23.1. *Нека ξ е процес на Леви с крайно отрицателно средно и*

$$\mathbb{P}(\xi_1 > t) \approx \frac{\ell(t)}{t^{\alpha}} \tag{23.1}$$

за $\alpha > 1$ и $\ell \in SV_{\infty}$. Тогава, за всяко $a \in (0, 1)$,

$$\frac{t^{\alpha} \mathbb{P}(I_{\xi}(t) \in dy)}{y^{\alpha} \ell(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{w} \nu_a(dy), \tag{23.2}$$

където ν_a е крайна мярка с носител $(0, \infty)$, чиято функция на разпределение е

$$\nu_a((0, x]) = \frac{1}{C} \int_{\operatorname{Re} z = b} \frac{x^{-z}}{z} M_{\Psi}(0, z + 1 - a) dz, \quad \text{където } C = -2\pi i \phi_+(0, 0)(-\mathbb{E}[\xi_1])^\alpha \quad (23.3)$$

за всяко $b \in \mathbb{C}_{(a-1, 0)}$.

Директно следствие от последната теорема са следните резултати.

Следствие 23.3. *При условията на Теорема 23.1, за всяка функция $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такава че за някое $a \in (0, 1)$, $x \mapsto x^a F(x)$ е ограничена и непрекъсната,*

$$\frac{t^\alpha}{\ell(t)} \mathbb{E}[F(I_\xi(t))] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} y^a F(y) \nu_a(dy) < \infty. \quad (23.4)$$

Следствие 23.4. *При условията на Теорема 23.1, за всяко $a \in (0, 1)$,*

$$\frac{t^\alpha}{\ell(t)} \mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{M_{\Psi}(0, 1 - a)}{\phi_+(0, 0)(-\mathbb{E}[\xi_1])^\alpha} < \infty. \quad (23.5)$$

Благодарение на Теорема 23.1 и Следствие 23.4, намираме и вероятностна интерпретация на граничната мярка и обобщение на класическата факторизация на експоненциални функционали, виж [PS18, Теорема 2.22], $I_{\xi, q} = I_{\phi_{q,+}} \times Y_{\phi_{q,-}}$, където Y_{q, ϕ_-} е положителна сл. вел. и $I_{\phi_{q,+}}$ е експоненциалният функционал, асоцииран с $\phi_{q,+}$. Нека за $a \in \mathbb{R}$ и, за което $\mathbb{E}[X^a] < \infty$, и всяка ограничена и непрекъсната функция f , дефинираме трансформацията

$$\mathbb{E}[f(\mathcal{B}_a X)] = \frac{\mathbb{E}[X^a f(X)]}{\mathbb{E}[X^a]}. \quad (23.6)$$

Тогава имаме следното разлагане.

Теорема 23.5. *При условията на Теорема 23.1, за всяко $a \in (0, 1)$,*

$$\mathcal{B}_{-a} I_\xi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{d} \mathcal{B}_{-a} I_{\phi_+} \times \mathcal{B}_{1-a} Y_{\phi_-}^{-1}, \quad (23.7)$$

където $\times$ бележи произведение на независими сл. вел., $I_{\phi_{q,+}}$ е експоненциалният функционал, асоцииран с $\phi_{q,+} := \phi_{0,+}$ и Y_{ϕ_-} е положителна сл. вел., чиято трансформация на Мелин е Бернщайн-гама функцията W_{ϕ_-} за $\phi_- := \phi_{0,-}$, виж (22.11).

Също така, законът на $\mathcal{B}_{-a} I_{\phi_+} \times \mathcal{B}_{1-a} Y_{\phi_-}^{-1}$, а значи и на ν_a , има безкрайно диференцируеми ограничени плътности, освен в случая, когато ξ е сложен Поасонов процес с положителен дрейф.

Следващата теорема изисква единствено процесът ξ да е преходен и макар че предлага само $o(\cdot)$ оценка, това често е достатъчно, виж например приложенията в случайни процеси в случайни среди, виж [PPS16, BPS21, Xu21]. Следвайки [DM04], за $x > 0$ и линейният член γ от (22.4), да дефинираме функцията

$$A(x) = \gamma + \Pi(1, \infty) - \Pi(-\infty, -1) + \int_1^x (\Pi(y, \infty) - \Pi(-\infty, -y)) dy. \quad (23.8)$$

От [DM04, Лема 13 (ii)], в случая $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = -\infty$,

$$\text{ако } \mathbb{E}[|\xi_1|] < \infty, \quad \text{тогава } \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = \mathbb{E}[\xi_1] < 0;$$

и

$$\text{ако } \mathbb{E}[\xi_1] \text{ не е крайно, то } \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = -\infty.$$

Отбелязваме, че тъй като $\lim_{x \rightarrow \infty} |A(x)| = |A(\infty)| > 0$, то съществува x_0 , такава че $A(x)$ е ненулево за $x \geq x_0$. Тъй като интегралният критерий от (24.6), тоест

$$\int_{(1, \infty)} \left(\frac{x}{|A(x)|} \right)^{n+1} \Pi(dx) < \infty,$$

е зает от [DM04, (1.14)], където се изисква само интегрируемост в безкрайност, възможността $A(x) = 0$ за някои $x \in (1, x_0]$ може без ограничение на общността да бъде избегната като предефинираме $A(x)$ да бъде някаква положителна константа върху $(1, x_0]$. Затова, от сега нататък ще работим с $x_0 = 1$. Вече разполагаме с нужните понятия, за да формулираме последния резултат от тази секция.

Теорема 23.6. *Нека ξ е Леви процес, за който $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = -\infty$. Ако*

$$\int_{(1, \infty)} \left(\frac{x}{|A(x)|} \right)^{n+1} \Pi(dx) < \infty \quad (23.9)$$

за някое $n \geq 1$, то за всяка измерима функция $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такава че за някое $a \in (0, 1)$, $x \mapsto x^a F(x)$ е ограничена, е изпълнено при $t \rightarrow \infty$, че

$$\mathbb{E}[|F(I_\xi(t))|] = o(t^{-n}) \quad \text{и} \quad \int_0^\infty t^n \mathbb{E}[|F(I_\xi(t))|] dt < \infty. \quad (23.10)$$

При допускането само за $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = -\infty$ и $x \mapsto x^a F(x)$ е ограничена, е вярно, че

$$\int_0^\infty \mathbb{E}[|F(I_\xi(t))|] dt < \infty.$$

24 Производни на двумерни Бернщайн-гама функции

В тази секция изучаваме крайността на производните на $W_{\kappa_\pm}$ и свързани с тях количества, които са централни за доказателствата в Секция 26 от дисертацията. Тъй като са от самостоятелен интерес, ги представяме в тази отделна секция. Започваме с интегрално представяне за $W_{\kappa_\pm}$, като напомним, че за $q \geq 0$,

$$U_q(dx) = \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}(\xi_t \in dx) dt \quad (24.1)$$

се наричат q -потенциални мерки на ξ и U_q^{*n} са техните формално дефинирани n -ти конволюции. $U := U_0$ се нарича потенциална мярка на ξ и в случая, когато ξ е преходен, от Теорема 25.3 знаем, че тя е Радонова.

Следващата лема ни позволява да изучаваме производните на $W_{\kappa_\pm}$ чрез връзка с потенциалните мерки на процеса ξ .

Лема 24.1. Нека ξ е процес на Леви с експонента на Леви-Хинчин Ψ , а $\kappa_{\pm}$ са двумерните експоненти на Лаплас, асоциирани с Ψ от (22.5). Тогава, за всеки $z \in \mathbb{C}_{(-1, \infty)}$ и $q > 0$,

$$\log(W_{\kappa_{\pm}}(q, z+1)) = z \ln(\kappa_{\pm}(q, 1)) + \int_{[0, \infty)} (e^{-zy} - 1 - z(e^{-y} - 1)) \frac{\mathcal{W}_{\pm}(q, dy)}{e^y - 1}, \quad (24.2)$$

където $\log$ е комплексен логаритъм и мерките $\mathcal{W}_{\pm}(q, dy)$ имат нулева маса в $\{0\}$ и са дефинирани върху $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ас

$$\mathcal{W}_{\pm}(q, dy) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-qt}}{t} \mathbb{P}(\xi_t \in \pm dy) dt. \quad (24.3)$$

Също така, за всеки $z \in \mathbb{C}_{(-1, \infty)}$ и $q > 0$, е в сила представянето

$$\frac{\frac{\partial}{\partial q} W_{\kappa_{\pm}}(q, 1+z)}{W_{\kappa_{\pm}}(q, 1+z)} = \int_{[0, \infty)} \frac{1 - e^{-zy}}{e^y - 1} U_q(\pm dy). \quad (24.4)$$

Вярно е, че и за всяко $q_0 > 0$, всички производни на $\mathcal{W}_{\pm}(q, dy)$ по q съществуват в q_0 и са равни на

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\pm}^{(n)}(q_0, dy) &= (-1)^n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-q_0 t} \mathbb{P}(\xi_t \in \pm dy) dt \\ &= (-1)^n (n-1)! U_{q_0}^{*n}(\pm dy) \\ &= -U_{q_0}^{(n-1)}(\pm dy), \end{aligned} \quad (24.5)$$

където $(\partial^{n-1}/\partial q^{n-1})U_{q_0} = U_{q_0}^{(n-1)}$ са производните на мерките U_q в $q = q_0$.

Теорема 24.3. Нека ξ е процес на Леви с експонента на Леви Ψ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = -\infty$. Тогава, за всеки $n \geq 0$, $z \in \mathbb{C}_{(-1, \infty)}$ и $q \geq 0$,

$$\int_{(1, \infty)} \left(\frac{x}{|A(x)|} \right)^{n+1} \Pi(dx) < \infty \iff \frac{\partial^{n+1}}{\partial q^{n+1}} W_{\kappa_{\pm}}(q, z+1) \text{ и } \frac{\partial^{n+1}}{\partial q^{n+1}} W_{\phi_{q, \pm}}(z+1) \text{ са крайни,} \quad (24.6)$$

където за $q = 0$ производните са десни. Ако е интегралът от (24.6) е краен, то производните са дясно-непрекъснати в $q = 0$.

В следващото следствие са включени оценки за q -производните на функцията, дефинирана в (22.10),

$$M_{\Psi}(q, z) := \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_{q, +}}(z)} W_{\phi_{q, -}}(1-z),$$

което е ключово за разбирането на трансформацията на Мелин на $I_{\xi, q}$.

Следствие 24.4. Нека ξ е процес на Леви с експонента на Леви-Хинчин Ψ , $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = -\infty$,

$$M_{\Psi}(q, z) := \frac{\Gamma(z)}{W_{\phi_{q, +}}(z)} W_{\phi_{q, -}}(1-z)$$

и нека допуснем, че за някое $n \geq 0$,

$$\int_{(1, \infty)} \left(\frac{x}{|A(x)|} \right)^{n+1} \Pi(dx) < \infty. \quad (24.7)$$

Тогава, за всяко $0 \leq k \leq n+1$, $z \in \mathbb{C}_{(0, 1)}$ и $q \geq 0$:

- (i) производните $\frac{\partial^k}{\partial q^k} M_\Psi(q, z)$ са крайни и дясно-непрекъснати в 0;
(ii) съществуват полиноми $P_{\operatorname{Re}(z),k}$ от степен k , такива че

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial q^k} M_\Psi(q, z) \right| \leq P_{\operatorname{Re}(z),k}(|z|) |M_\Psi(q, z)|;$$

- (iii) ако потенциалната мярка на ξ има ограничена плътност, то съществуват полиноми $P_{\operatorname{Re}(z),k}$ от степен k , такива че

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial q^k} M_\Psi(q, z) \right| \leq P_{\operatorname{Re}(z),k}(|\ln |z||) |M_\Psi(q, z)|.$$

Ако в допълнение е изпълнено и че $\mathbb{E}[\xi_1] \in (-\infty, 0)$, $n \geq 1$ и за всяко $0 < \beta < n$,

$$\int_{(1,\infty)} x^{\beta+1} \Pi(dx) < \infty = \int_{(1,\infty)} x^{n+1} \Pi(dx), \quad (24.8)$$

то

- (i') точки (i)-(iii) са в сила за $0 \leq k \leq n$ и $q \geq 0$. При $k > n$, производните $\frac{\partial^k}{\partial q^k} M_\Psi(q, z)$ съществуват за $q > 0$.

За $k = n + 1$, $q > 0$ и $z \in \mathbb{C}_{(0,1)}$, точки (ii)-(iii) се променят както следва:

- (ii') за всяко $\delta > 0$, съществуват полиноми $P_{\operatorname{Re}(z),n,\delta}$ от степен $n + 1$, такива че за всяко $q > 0$,

$$\left| \frac{\partial^{n+1}}{\partial q^{n+1}} M_\Psi(q, z) \right| \leq (U_q^{*n}(\mathbb{R}_+) + q^{-\delta}) P_{\operatorname{Re}(z),n,\delta}(|z|) |M_\Psi(q, z)|;$$

- (iii') ако потенциалната мярка на ξ има ограничена плътност, то за всяко $\delta > 0$, съществуват полиноми $P_{\operatorname{Re}(z),n,\delta}$ от степен $n + 1$, такива че за всяко $q > 0$, е изпълнено

$$\left| \frac{\partial^{n+1}}{\partial q^{n+1}} M_\Psi(q, z) \right| \leq (U_q^{*n}(\mathbb{R}_+) + q^{-\delta}) P_{\operatorname{Re}(z),n,\delta}(|\ln |z||) |M_\Psi(q, z)|;$$

- (iv') вярно е, че $\lim_{q \rightarrow 0} U_q^{*n}(\mathbb{R}_+) = \infty$.

Последният резултат показва, че при условията на Следствие 24.4 и в контекста на (iii), имаме общи оценки за плътностите на конволюциите на q -потенциалните мерки.

Теорема 24.6. Нека ξ е процес на Леви с експонента на Леви-Хинчин Ψ , такава че $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = -\infty$. Да допуснем също, че U има ограничена плътност и върху $\mathbb{R}$ и нека $C := \sup_{x \in \mathbb{R}} u(x)$. Тогава за всеки $k \geq 1$ и $q > 0$, плътностите u_q^{*k} на U_q^{*k} съществуват и са локално ограничени, тъй като за тях е в сила, за всеки $x \in \mathbb{R}$ и $q > 0$,

$$u_q^{*k}(x) \leq k C U_q^{*(k-1)}(\min\{0, x\}, \infty) \quad (24.12)$$

с конвенцията $U^{*0} \equiv 1$. Ако в допълнение за някое $n \geq 1$,

$$\int_{(1,\infty)} \left(\frac{x}{|A(x)|} \right)^{n+1} \Pi(dx) < \infty,$$

то за всяко $1 \leq k \leq n+1$, плътностите на U^{*k} съществуват и за всяко $x \in \mathbb{R}$, $U^{*(k-1)}(x, \infty) < \infty$ и (24.12) е в сила за $q = 0$.

25 Доказателства относно Бернщайн-гама функциите

По-долу са изложени твърдения, които са нужни в доказателствата на резултатите от миналата секция. Първото от тях свързва производните на q -потенциалите, виж (24.1), с конволюциите им.

Твърдение 25.1. *Нека U_q са потенциалните мерки на процес на Леви. Тогава, за всеки $q \geq 0$ и $n \geq 1$,*

$$U_q^{*n}(dx) = \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} U_q^{(n-1)}(dx) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-qt} t^{n-1} \mathbb{P}(\xi_t \in dx) dt, \quad (25.1)$$

като мерките по-горе са задължително крайни за $q > 0$ и евентуално безкрайни за някои или всички n , когато $q = 0$.

Доказваме Твърдение 25.1, както и следващия технически резултат в Секция 27.

Лема 25.2. *За $z \in \mathbb{C}_{(-1,\infty)}$, функциите*

$$u_z(y) := \frac{e^{-zy} - 1 - z(e^{-y} - 1)}{e^y - 1} \quad \text{and} \quad v_z(y) := ze^{-y} - u_z(y) = \frac{1 - e^{-zy}}{e^y - 1} \quad (25.2)$$

са ограничени и непрекъснати за $[0, \infty)$. Също така, съществуват $C_{\operatorname{Re}(z)}$, $C_{1,\operatorname{Re}(z)}$, $C_{2,\operatorname{Re}(z)}$, $\epsilon_{1,\operatorname{Re}(z)}$, $\epsilon_{2,\operatorname{Re}(z)} > 0$, такива че, за всеки $y \geq 0$ и $x \geq C_{\operatorname{Re}(z)}$,

$$|v_z(y)| \leq C_{1,\operatorname{Re}(z)} |z| e^{-\epsilon_{1,\operatorname{Re}(z)} y} \quad \text{и} \quad |v_z(x)| \leq C_{2,\operatorname{Re}(z)} e^{-\epsilon_{2,\operatorname{Re}(z)} x}. \quad (25.3)$$

В следващата теорема обобщаваме някои основни факти за потенциалните мерки, които могат да бъдат намерени в [Rev84]. Първата част е [Rev84, стр. 101, Следствие 3.3.6], а втората е комбинация от [Rev84, стр. 169, Теорема 5.3.1], [Rev84, стр. 171, Теорема 5.3.4] и [Rev84, стр. 173, Теорема 5.3.8].

Теорема 25.3. *Нека ξ е процес на Леви, който клони към $-\infty$.*

1. *Мерките U са мерки на Радон, тоест, за всеки компактен $K \subset \mathbb{R}$, $U(K) < \infty$.*
2. *(теорема на възстановяването) Ако ξ не е решетъчен, то тогава е вярно, че слабо $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x - dy) = 0 dy$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} U(x - dy) = -dy/\mathbb{E}[\xi_1]$, използвайки конвенцията $1/\infty = 0$. В случая на решетъчен процес, dy трябва да бъде заменена със броящата мярка върху съответната решетка.*

Дисертацията продължава с доказателствата на Лема 24.1, Теорема 24.3, Следствие 24.4 и Теорема 24.6.

26 Доказателства относно експоненциални функции

Следващите три резултата са помощни за доказателство на Теорема 23.1.

Твърдение 26.1. Нека $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и да дефинираме $f_0 := f$. За $x \geq 0$ и $n \geq 1$, да дефинираме също и

$$f_n(x) := \int_x^\infty \int_{s_1}^\infty \cdots \int_{s_{n-1}}^\infty f(s_n) ds_n \dots ds_1.$$

Тогава, за $q \geq 0$, е изпълнено че

$$\hat{f}_n(q) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^1 \hat{f}^{(n)}(qv)(1-v)^{n-1} dv \quad (26.1)$$

в разширения с $\infty = \infty$ смисъл.

Твърдение 26.2. Нека f е правилно изменяща се в 0 функция с индекс $\beta \in (-1, 0]$ и $n \geq 1$. Тогава

$$\int_0^1 f(qv)(1-v)^{n-1} dv \stackrel{0}{\sim} f(q) \int_0^1 v^\beta (1-v)^{n-1} dv = f(q) \frac{\Gamma(n)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}. \quad (26.2)$$

Лема 26.3. Нека ξ е процес на Леви с крайно отрицателно очакване и $\mathbb{P}(\xi_1 > t) \stackrel{\infty}{\sim} \ell(t)/t^\alpha$ за някое $\alpha > 1$. Тогава

$$\mathbb{E}[I_\xi^{-a}(t)] = O(\mathbb{P}(\xi_1 > t)) = O\left(\frac{\ell(t)}{t^\alpha}\right). \quad (26.3)$$

Тази секция продължава с доказателствата на Теорема 23.1, Теорема 23.5 и Теорема 23.6.

27 Доказателства на помощни резултати

В тази част на дисертацията са включени доказателствата на помощните резултати Твърдение 25.1, Лема 25.2, Твърдение 26.1, Твърдение 26.2 и Лема 26.3.

Глава VI

Заклучение

28 Авторска справка

Според автора, основните нови резултати, представени в дисертацията са:

1. Резултатите върху плътността и опашката на експоненциалния функционал на субординатори от Глава IV. Съответната асимптотика в безкрайност при слабото допускане за положително нарастване в Секция 17.
2. Получената граница по разпределение на подходящо скалирания експоненциален функционал на Леви процес с крайно отрицателно очакване и правилно изменяща се опашка, виж Теорема 23.1. Като следствие, множество асимптотични резултати за очаквания на функционална трансформация на тези случайни величини, виж Секция 23.
3. По-доброто разбиране на асимптотиката на Стирлинг на Бернщайн-гама функциите, илюстрирано в Секция 19 и използвано на много места в Глава IV.
4. Анализът на производните на двумерните Бернщайн-гама функции чрез аналитични и вероятностни аргументи чрез връзката им с потенциалните мерки на асоциирания процес на Леви и нейните конволюции, виж Секция 24.

29 Публикации, свързани с дисертацията

1. M. Minchev and M. Savov. *Asymptotics for densities of exponential functionals of subordinators*. Bernoulli, 29(4):3307–3333, 2023. Виж [MS23].

30 Аprobация на дисертацията

Резултатите от дисертацията са представяни като:

1. *Bivariate Bernstein-gamma functions and asymptotic behaviour of exponential functionals on deterministic horizon*, Stochastic Processes and their Applications, Лисабон, Португалия, 24-28 юли 2023. Съвместна работа с Младен Савов. Постерен доклад върху Глава V.

2. *Bivariate Bernstein-gamma functions and asymptotic behaviour of exponential functionals on deterministic horizon*, Mathematics Days in Sofia, 10-14 юли, 2023, София, България. Съвместна работа с Младен Савов. Секционен доклад върху Глава V.
3. *Bivariate Bernstein-gamma functions and asymptotic behaviour of exponential functionals on deterministic horizon*, Seminar on Advances in Statistics, 9-12 март 2023, Велико Търново, България. Съвместна работа с Младен Савов. Доклад върху Глава V.
4. *Asymptotics of densities of exponential functionals of subordinators*, Lévy Processes and Random Walks (in celebration of Ron Doney's 80th birthday), 26-28 юли 2022, Манчестър, Великобритания. Постерен доклад върху [MS23].
5. *Asymptotics of densities of exponential functionals of subordinators*, Пролетна научна сесия на ФМИ, 26 март 2022, София, България. Секционен доклад върху [MS23].

Забелязани са следните цитирания на статията [MS23]:

1. J. Arista and V. Rivero. Implicit renewal theory for exponential functionals of Levy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 163:262–287, 2023. Виж [AR23].
2. J. Bertoin. On the local times of noise reinforced Bessel processes. *Ann. H. Lebesgue*, 5:1277–1294, 2022. Виж [Ber22].
3. B. Haas. Tail asymptotics for extinction times of self-similar fragmentations. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 59(3):1722–1743, 2023. Виж [Haa23].
4. B. Haas. Precise asymptotics for the density and the upper tail of exponential functionals of subordinators. In *Séminaire de probabilités*, Lecture Notes in Math. Springer, 2024+. Виж [Haa24].
5. P. Patie and R. Sarkar. Weak similarity orbit of (log)-self-similar Markov semi-groups on the Euclidean space. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 126(5):1522–1584, 2023. Виж [PS23].
6. R. Sarkar. Continuous and Discrete Self-Similarity via Classification Schemes of Markov Processes, and the van Dantzig Problem. *PhD thesis, Cornell University*, 2022. Виж [Sar22].
7. T. Simon. A note on the α -sun distribution. *Electron. Commun. Probab.*, 28:Paper No. 19, 13, 2023. Виж [Sim23].

31 Декларация за автентичност

Авторът декларира, че дисертацията съдържа автентични резултати, получени от него или в сътрудничество с неговите съавтори. Използването на резултати от други учени е придружено със съответно цитиране.

Благодарности

Благодаря на научните си ръководители за усилията и отделеното време, както и на всички, които са подпомагали по какъвто и да е начин развитието ми в математиката.

Библиография

- [AJR14] L. Alili, W. Jedidi, and V. Rivero. On exponential functionals, harmonic potential measures and undershoots of subordinators. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 11(1):711–735, 2014.
- [AMS01] L. Alili, H. Matsumoto, and T. Shiraishi. On a triplet of exponential Brownian functionals. In *Séminaire de Probabilités, XXXV*, volume 1755 of *Lecture Notes in Math.*, pages 396–415. Springer, Berlin, 2001.
- [AR23] J. Arista and V. Rivero. Implicit renewal theory for exponential functionals of Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 163:262–287, 2023.
- [AST24] G. Ascione, M. Savov, and B. Toaldo. Regularity and asymptotics of densities of inverse subordinators. *arXiv*, 2024+.
- [BC02] J. Bertoin and M.-E. Caballero. Entrance from $0+$ for increasing semi-stable Markov processes. *Bernoulli*, 8(2):195–205, 2002.
- [BCK18] J. Bertoin, N. Curien, and I. Kortchemski. Random planar maps and growth-fragmentations. *Ann. Probab.*, 46(1):207–260, 2018.
- [Beh15] A. Behme. Exponential functionals of Lévy processes with jumps. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 12(1):375–397, 2015.
- [Bék57] A. Békéssy. Eine verallgemeinerung der laplaceschen methode. *Publ. Math. Hungar. Acad. Sci.*, 2:105–120, 1957.
- [Ber29] S. Bernstein. Sur les fonctions absolument monotones. *Acta Math.*, 52(1):1–66, 1929.
- [Ber96] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Ber99] J. Bertoin. Subordinators: examples and applications. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997)*, volume 1717 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–91. Springer, Berlin, 1999.
- [Ber02] J. Bertoin. Self-similar fragmentations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 38(3):319–340, 2002.
- [Ber03] J. Bertoin. The asymptotic behavior of fragmentation processes. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 5(4):395–416, 2003.

- [Ber06] J. Bertoin. *Random fragmentation and coagulation processes*, volume 102 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [Ber07] C. Berg. On powers of Stieltjes moment sequences. II. *J. Comput. Appl. Math.*, 199(1):23–38, 2007.
- [Ber12] J. Bertoin. The area of a self-similar fragmentation. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 9:53–66, 2012.
- [Ber22] J. Bertoin. On the local times of noise reinforced Bessel processes. *Ann. H. Lebesgue*, 5:1277–1294, 2022.
- [BGT87] N. Bingham, C. Goldie, and J. Teugels. *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [BH12] C. Böinghoff and M. Hutzenthaler. Branching diffusions in random environment. *Markov Process. Related Fields*, 18(2):269–310, 2012.
- [BK16] J. Bertoin and I. Kortchemski. Self-similar scaling limits of Markov chains on the positive integers. *Ann. Appl. Probab.*, 26(4):2556–2595, 2016.
- [BKS95] A. Balkema, C. Klüppelberg, and U. Stadtmüller. Tauberian results for densities with Gaussian tails. *J. London Math. Soc. (2)*, 51(2):383–400, 1995.
- [BL15] A. Behme and A. Lindner. On exponential functionals of Lévy processes. *J. Theoret. Probab.*, 28(2):681–720, 2015.
- [BLM08] J. Bertoin, A. Lindner, and R. Maller. On continuity properties of the law of integrals of Lévy processes. In *Séminaire de probabilités XLI*, volume 1934 of *Lecture Notes in Math.*, pages 137–159. Springer, Berlin, 2008.
- [BLM11] A. Behme, A. Lindner, and R. Maller. Stationary solutions of the stochastic differential equation $dV_t = V_t - dU_t + dL_t$ with Lévy noise. *Stochastic Process. Appl.*, 121(1):91–108, 2011.
- [BLR21] A. Behme, A. Lindner, and J. Reker. On the law of killed exponential functionals. *Electron. J. Probab.*, 26:Paper No. 60, 35, 2021.
- [BLRR21] A. Behme, A. Lindner, J. Reker, and V. Rivero. Continuity properties and the support of killed exponential functionals. *Stochastic Process. Appl.*, 140:115–146, 2021.
- [Boc55] S. Bochner. *Harmonic analysis and the theory of probability*. University of California Press, Berkeley-Los Angeles, Calif., 1955.
- [Bog07] V. I. Bogachev. *Measure theory. Vol. II*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [BP21] C. Bartholmé and P. Patie. Turán inequalities and complete monotonicity for a class of entire functions. *Anal. Math.*, 47(3):507–527, 2021.
- [BPS21] V. Bansaye, J.C. Pardo, and C. Smadi. Extinction rate of continuous state branching processes in critical Lévy environments. *ESAIM Probab. Stat.*, 25:346–375, 2021.

- [Bro86] T. Brox. A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium. *Ann. Probab.*, 14(4):1206–1218, 1986.
- [BS11] J. Bertoin and M. Savov. Some applications of duality for Lévy processes in a half-line. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(1):97–110, 2011.
- [BS15] V. Bansaye and F. Simatos. On the scaling limits of Galton-Watson processes in varying environments. *Electron. J. Probab.*, 20:no. 75, 36, 2015.
- [BS21] A. Barker and M. Savov. Bivariate Bernstein-gamma functions and moments of exponential functionals of subordinators. *Stochastic Process. Appl.*, 131:454–497, 2021.
- [BY02a] J. Bertoin and M. Yor. The entrance laws of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. *Potential Anal.*, 17(4):389–400, 2002.
- [BY02b] J. Bertoin and M. Yor. On the entire moments of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 11(1):33–45, 2002.
- [BY05] J. Bertoin and M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes. *Probab. Surv.*, 2:191–212, 2005.
- [CC06] M. E. Caballero and L. Chaumont. Weak convergence of positive self-similar Markov processes and overshoots of Lévy processes. *Ann. Probab.*, 34(3):1012–1034, 2006.
- [CK12] N. Cai and S. Kou. Pricing Asian options under a hyper-exponential jump diffusion model. *Oper. Res.*, 60(1):64–77, 2012.
- [CKPR12] L. Chaumont, A. Kyprianou, J.C. Pardo, and V. Rivero. Fluctuation theory and exit systems for positive self-similar Markov processes. *Ann. Probab.*, 40(1):245–279, 2012.
- [CPR13] L. Chaumont, H. Pantí, and V. Rivero. The Lamperti representation of real-valued self-similar Markov processes. *Bernoulli*, 19(5B):2494–2523, 2013.
- [CPY97] P. Carmona, F. Petit, and M. Yor. On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. In *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, pages 73–130. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 1997.
- [CPY01] P. Carmona, F. Petit, and M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes. In *Lévy processes*, pages 41–55. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [CTP23] N. Cardona-Tobón and J.C. Pardo. Speed of extinction for continuous-state branching processes in a weakly subcritical Lévy environment. *Journal of Applied Probability*, page 1–23, 12 2023.
- [CTP24a] N. Cardona-Tobón and J.C. Pardo. Explosion rates for continuous state branching processes in a Lévy environment. *arXiv*, 2024+.

- [CTP24b] N. Cardona-Tobón and J.C. Pardo. Speed of extinction for continuous state branching processes in subcritical lévy environments: the strongly and intermediate regimes. *arXiv*, 2024+.
- [Dad17] B. Dadoun. Asymptotics of self-similar growth-fragmentation processes. *Electron. J. Probab.*, 22:Paper No. 27, 30, 2017.
- [DD70] C. Doléans-Dade. Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 16:181–194, 1970.
- [DDK17] S. Dereich, L. Döring, and A. Kyprianou. Real self-similar processes started from the origin. *Ann. Probab.*, 45(3):1952–2003, 2017.
- [dH76] L. de Haan. An Abel-Tauber theorem for Laplace transforms. *J. London Math. Soc. (2)*, 13(3):537–542, 1976.
- [DJ12] R. Doney and E. Jones. Conditioned random walks and Lévy processes. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 44(1):139–150, 2012.
- [DKM16] R. Doney, C. Klüppelberg, and R. Maller. Passage time and fluctuation calculations for subexponential Lévy processes. *Bernoulli*, 22(3):1491–1519, 2016.
- [DM04] R. A. Doney and R. A. Maller. Moments of passage times for Lévy processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 40(3):279–297, 2004.
- [Don07] R. Doney. *Fluctuation theory for Lévy processes*, volume 1897 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007.
- [DS11] L. Döring and M. Savov. (Non)differentiability and asymptotics for potential densities of subordinators. *Electron. J. Probab.*, 16:No. 17, 470–503, 2011.
- [DSTW24] L. Döring, M. Savov, L. Trottnier, and A. Watson. The uniqueness of the wiener-hopf factorisation of lévy processes and random walks. *arXiv*, 2024+.
- [Duf89] D. Dufresne. Weak convergence of random growth processes with applications to insurance. *Insurance Math. Econom.*, 8(3):187–201, 1989.
- [Duf90] D. Dufresne. The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. *Scand. Actuar. J.*, 1990(1-2):39–79, 1990.
- [Duf00] D. Dufresne. Laguerre series for Asian and other options. *Math. Finance*, 10(4):407–428, 2000.
- [EG80] P. Embrechts and C. Goldie. On closure and factorization properties of subexponential and related distributions. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 29(2):243–256, 1980.
- [EG82] P. Embrechts and C. Goldie. On convolution tails. *Stochastic Process. Appl.*, 13(3):263–278, 1982.
- [EGV79] P. Embrechts, C. Goldie, and N. Veraverbeke. Subexponentiality and infinite divisibility. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 49(3):335–347, 1979.

- [ELP03] I. Epifani, A. Lijoi, and I. Prünster. Exponential functionals and means of neutral-to-the-right priors. *Biometrika*, 90(4):791–808, 2003.
- [EM00] P. Embrechts and M. Maejima. An introduction to the theory of self-similar stochastic processes. In *Proceedings of the Summer School on Mathematical Physics 1999: Methods of Renormalization Group (Tokyo)*, volume 14 Issue 12-13, pages 1399–1420, 2000.
- [EM02] P. Embrechts and M. Maejima. *Selfsimilar processes*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.
- [EMOT53] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. Tricomi. *Higher transcendental functions. Vols. I*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1953.
- [Fel71] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, second edition, 1971.
- [Fer74] T. Ferguson. Prior distributions on spaces of probability measures. *Ann. Statist.*, 2:615–629, 1974.
- [FKY19] R. Feng, A. Kuznetsov, and F. Yang. Exponential functionals of Lévy processes and variable annuity guaranteed benefits. *Stochastic Process. Appl.*, 129(2):604–625, 2019.
- [FP79] T. Ferguson and E. Phadia. Bayesian nonparametric estimation based on censored data. *Ann. Statist.*, 7(1):163–186, 1979.
- [Fri74] B. Fristedt. Sample functions of stochastic processes with stationary, independent increments. In *Advances in probability and related topics, Vol. 3*, pages 241–396. Dekker, New York, 1974.
- [FUB14] C. Foucart and G. Uribe Bravo. Local extinction in continuous-state branching processes with immigration. *Bernoulli*, 20(4):1819–1844, 2014.
- [FY83] P. Feigin and E. Yashchin. On a strong Tauberian result. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 65(1):35–48, 1983.
- [Ged19] F. Ged. Profile of a self-similar growth-fragmentation. *Electron. J. Probab.*, 24:Paper No. 7, 21, 2019.
- [Ged22] F. Ged. Intrinsic area near the origin for self-similar growth-fragmentations and related random surfaces. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 58(2):1160–1181, 2022.
- [Gre74] D. Grey. Asymptotic behaviour of continuous time, continuous state-space branching processes. *J. Appl. Probability*, 11:669–677, 1974.
- [GS94] R. Gettoor and M. Sharpe. On the arc-sine laws for Lévy processes. *J. Appl. Probab.*, 31(1):76–89, 1994.
- [GY93] H. Geman and M. Yor. Bessel processes, Asian options, and perpetuities. *Mathematical Finance*, 3(4):349–375, 1993.
- [Haa04] B. Haas. Regularity of formation of dust in self-similar fragmentations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 40(4):411–438, 2004.

- [Haa10] B. Haas. Asymptotic behavior of solutions of the fragmentation equation with shattering: an approach via self-similar Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 20(2):382–429, 2010.
- [Haa23] B. Haas. Tail asymptotics for extinction times of self-similar fragmentations. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 59(3):1722–1743, 2023.
- [Haa24] B. Haas. Precise asymptotics for the density and the upper tail of exponential functionals of subordinators. In *Séminaire de probabilités*, Lecture Notes in Math. Springer, 2024+.
- [Hac15] D. Hackmann. *Analytical methods for Lévy processes with applications to finance*. PhD thesis, York University, 2015.
- [Hel81] I. Helland. Minimal conditions for weak convergence to a diffusion process on the line. *Ann. Probab.*, 9(3):429–452, 1981.
- [HK14] D. Hackmann and A. Kuznetsov. Asian options and meromorphic Lévy processes. *Finance Stoch.*, 18(4):825–844, 2014.
- [HLX18] H. He, Z. Li, and W. Xu. Continuous-state branching processes in Lévy random environments. *J. Theoret. Probab.*, 31(4):1952–1974, 2018.
- [HR12] B. Haas and V. Rivero. Quasi-stationary distributions and Yaglom limits of self-similar Markov processes. *Stochastic Process. Appl.*, 122(12):4054–4095, 2012.
- [HY13] F. Hirsch and M. Yor. On the Mellin transforms of the perpetuity and the remainder variables associated to a subordinator. *Bernoulli*, 19(4):1350–1377, 2013.
- [Ito42] K. Ito. On stochastic processes. I. (Infinitely divisible laws of probability). *Jpn. J. Math.*, 18:261–301, 1942.
- [Jac01] N. Jacob. *Pseudo differential operators and Markov processes. Vol. I*. Imperial College Press, London, 2001. Fourier analysis and semigroups.
- [Jon08] E. Jones. *Large Deviations of Random Walks and Levy Processes*. PhD thesis, The University of Manchester (United Kingdom), 2008.
- [Kal21] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*, volume 99 of *Probability Theory and Stochastic Modelling*. Springer, Cham, 2021.
- [KAMR21] A. Kisil, D. Abrahams, G. Mishuris, and V. Rogosin. The Wiener-Hopf technique, its generalizations and applications: constructive and approximate methods. *Proc. A.*, 477(2254):Paper No. 20210533, 32, 2021.
- [Kev18] P. Kevei. Ergodic properties of generalized Ornstein-Uhlenbeck processes. *Stochastic Process. Appl.*, 128(1):156–181, 2018.
- [Kiu80] S.-W. Kiu. Semistable Markov processes in $\mathbf{R}^n$. *Stochastic Process. Appl.*, 10(2):183–191, 1980.
- [KKM04] C. Klüppelberg, A. Kyprianou, and R. Maller. Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes. *Ann. Appl. Probab.*, 14(4):1766–1801, 2004.

- [KLM04] C. Klüppelberg, A. Lindner, and R. Maller. A continuous-time GARCH process driven by a Lévy process: stationarity and second-order behaviour. *J. Appl. Probab.*, 41(3):601–622, 2004.
- [KP13] A. Kuznetsov and J. C. Pardo. Fluctuations of stable processes and exponential functionals of hypergeometric Lévy processes. *Acta Appl. Math.*, 123:113–139, 2013.
- [KPS12] A. Kuznetsov, J. C. Pardo, and M. Savov. Distributional properties of exponential functionals of Lévy processes. *Electron. J. Probab.*, 17:no. 8, 35, 2012.
- [KRSY20] A. Kyprianou, V. Rivero, B. Sengül, and T. Yang. Entrance laws at the origin of self-similar Markov processes in high dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373(9):6227–6299, 2020.
- [KT93] K. Kawazu and H. Tanaka. On the maximum of a diffusion process in a drifted Brownian environment. In *Séminaire de Probabilités, XXVII*, volume 1557 of *Lecture Notes in Math.*, pages 78–85. Springer, Berlin, 1993.
- [Kur78] T. Kurtz. Diffusion approximations for branching processes. In *Branching processes (Conf., Saint Hippolyte, Que., 1976)*, volume 5 of *Adv. Probab. Related Topics*, pages 269–292. Dekker, New York, 1978.
- [Kuz12] A. Kuznetsov. On the distribution of exponential functionals for Lévy processes with jumps of rational transform. *Stochastic Process. Appl.*, 122(2):654–663, 2012.
- [Kwa20] M. Kwaśnicki. Random walks are determined by their trace on the positive half-line. *Ann. H. Lebesgue*, 3:1389–1397, 2020.
- [Kyp14] A. Kyprianou. *Fluctuations of Lévy processes with applications*. Universitext. Springer, Heidelberg, second edition, 2014.
- [Lam62] J. Lamperti. Semi-stable stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104:62–78, 1962.
- [Lam72] J. Lamperti. Semi-stable Markov processes. I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 22:205–225, 1972.
- [Lin04] V. Linetsky. Spectral expansions for Asian (average price) options. *Oper. Res.*, 52(6):856–867, 2004.
- [Lin17] G.D. Lin. Recent developments on the moment problem. *Journal of Statistical Distributions and Applications*, 4(1):5, 2017.
- [LPS19] R. Loeffen, P. Patie, and M. Savov. Extinction time of non-Markovian self-similar processes, persistence, annihilation of jumps and the Fréchet distribution. *J. Stat. Phys.*, 175(5):1022–1041, 2019.
- [LX18] Z. Li and W. Xu. Asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 128(1):108–131, 2018.
- [Lya16] A. Lyasoff. Another look at the integral of exponential Brownian motion and the pricing of Asian options. *Finance Stoch.*, 20(4):1061–1096, 2016.

- [MMS09] R. Maller, G. Müller, and A. Szimayer. *Ornstein–Uhlenbeck Processes and Extensions*, pages 421–437. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [MS23] M. Minchev and M. Savov. Asymptotics for densities of exponential functionals of subordinators. *Bernoulli*, 29(4):3307–3333, 2023.
- [MY05] H. Matsumoto and M. Yor. Exponential functionals of Brownian motion. I. Probability laws at fixed time. *Probab. Surv.*, 2:312–347, 2005.
- [MZ06] K. Maulik and B. Zwart. Tail asymptotics for exponential functionals of Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 116(2):156–177, 2006.
- [Mö15] M. Möhle. The Mittag-Leffler process and a scaling limit for the block counting process of the Bolthausen-Sznitman coalescent. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 12(1):35–53, 2015.
- [Ngu18] T.D. Nguyen. Tail estimates for exponential functionals and applications to SDEs. *Stochastic Process. Appl.*, 128(12):4154–4170, 2018.
- [Nob58] B. Noble. *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*. International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Vol. 7. Pergamon Press, New York-London-Paris-Los Angeles, 1958.
- [NWZ22] J. Nair, A. Wierman, and B. Zwart. *The fundamentals of heavy tails—properties, emergence, and estimation*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2022.
- [Pak04] A. Pakes. Convolution equivalence and infinite divisibility. *J. Appl. Probab.*, 41(2):407–424, 2004.
- [Pak07] A. Pakes. Convolution equivalence and infinite divisibility: corrections and corollaries. *J. Appl. Probab.*, 44(2):295–305, 2007.
- [Pat05] P. Patie. On a martingale associated to generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and an application to finance. *Stochastic Process. Appl.*, 115(4):593–607, 2005.
- [Pat09] P. Patie. Exponential functional of a new family of Lévy processes and self-similar continuous state branching processes with immigration. *Bull. Sci. Math.*, 133(4):355–382, 2009.
- [Pat13] P. Patie. Asian options under one-sided Lévy models. *J. Appl. Probab.*, 50(2):359–373, 2013.
- [Pea24] K. Pearson. Historical note on the origin of the normal curve of errors. *Biometrika*, 16(3/4):402–404, 1924.
- [PP18] S. Palau and J. C. Pardo. Branching processes in a Lévy random environment. *Acta Appl. Math.*, 153:55–79, 2018.
- [PPS12] J. C. Pardo, P. Patie, and M. Savov. A Wiener-Hopf type factorization for the exponential functional of Lévy processes. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 86(3):930–956, 2012.

- [PPS16] S. Palau, J. C. Pardo, and C. Smadi. Asymptotic behaviour of exponential functionals of Lévy processes with applications to random processes in random environment. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 13(2):1235–1258, 2016.
- [PR13] J.C. Pardo and V. Rivero. Self-similar Markov processes. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 19(2):201–235, 2013.
- [PRvS13] J. C. Pardo, V. Rivero, and K. van Schaik. On the density of exponential functionals of Lévy processes. *Bernoulli*, 19(5A):1938–1964, 2013.
- [PS85] M. Pollak and D. Siegmund. A diffusion process and its applications to detecting a change in the drift of Brownian motion. *Biometrika*, 72(2):267–280, 1985.
- [PS12] P. Patie and M. Savov. Extended factorizations of exponential functionals of Lévy processes. *Electron. J. Probab.*, 17:1–22, 2012.
- [PS13] P. Patie and M. Savov. Exponential functional of Lévy processes: generalized Weierstrass products and Wiener-Hopf factorization. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 351(9-10):393–396, 2013.
- [PS17] P. Patie and M. Savov. Cauchy problem of the non-self-adjoint Gauss-Laguerre semigroups and uniform bounds for generalized Laguerre polynomials. *J. Spectr. Theory*, 7(3):797–846, 2017.
- [PS18] P. Patie and M. Savov. Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes. *Electron. J. Probab.*, 23:1–101, 2018.
- [PS21] P. Patie and M. Savov. Spectral expansions of non-self-adjoint generalized Laguerre semigroups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 272(1336):vii+182, 2021.
- [PS23] P. Patie and R. Sarkar. Weak similarity orbit of (log)-self-similar Markov semigroups on the Euclidean space. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 126(5):1522–1584, 2023.
- [PSS24] Z. Palmowski, H. Sariev, and M. Savov. Moments of exponential functionals of Lévy processes on deterministic horizon – identities and explicit expressions. *Bernoulli*, 2024+.
- [PSZ19] P. Patie, M. Savov, and Y. Zhao. Intertwining, excursion theory and Krein theory of strings for non-self-adjoint Markov semigroups. *Ann. Probab.*, 47(5):3231–3277, 2019.
- [PZ17] P. Patie and Y. Zhao. Spectral decomposition of fractional operators and a reflected stable semigroup. *J. Differential Equations*, 262(3):1690–1719, 2017.
- [Rek21] J. Reker. *Distributional properties of killed exponential functionals and short-time behavior of Lévy-driven stochastic differential equations*. PhD thesis, Universität Ulm, 2021.
- [Rev84] D. Revuz. *Markov chains*, volume 11 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1984.

- [Riv05] V. Rivero. Recurrent extensions of self-similar Markov processes and Cramér’s condition. *Bernoulli*, 11(3):471–509, 2005.
- [Riv12] V. Rivero. Tail asymptotics for exponential functionals of Lévy processes: the convolution equivalent case. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 48(4):1081–1102, 2012.
- [RY99] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [Sar22] R. Sarkar. *Continuous and Discrete Self-Similarity via Classification Schemes of Markov Processes, and the van Dantzig Problem*. PhD thesis, Cornell University, 2022.
- [Sat99] K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Sim23] T. Simon. A note on the α -sun distribution. *Electron. Commun. Probab.*, 28:Paper No. 19, 13, 2023.
- [Smi68] W. Smith. Necessary conditions for almost sure extinction of a branching process with random environment. *Ann. Math. Statist.*, 39:2136–2140, 1968.
- [SSV12] R. Schilling, R. Song, and Z. Vondraček. *Bernstein functions*, volume 37 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 2012.
- [Ste18] R. Stephenson. On the exponential functional of Markov additive processes, and applications to multi-type self-similar fragmentation processes and trees. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 15(2):1257–1292, 2018.
- [Sto13] J. Stoyanov. *Counterexamples in probability*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2013.
- [SV18] P. Salminen and L. Vostrikova. On exponential functionals of processes with independent increments. *Teor. Veroyatn. Primen.*, 63(2):330–357, 2018.
- [SW69] W. Smith and W. Wilkinson. On branching processes in random environments. *Ann. Math. Statist.*, 40:814–827, 1969.
- [UB09] G. Uribe Bravo. The falling apart of the tagged fragment and the asymptotic disintegration of the Brownian height fragmentation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 45(4):1130–1149, 2009.
- [Urb92] K. Urbanik. Functionals on transient stochastic processes with independent increments. *Studia Math.*, 103(3):299–315, 1992.
- [Urb95] K. Urbanik. Infinite divisibility of some functionals on stochastic processes. *Probab. Math. Statist.*, 15:493–513, 1995.
- [Vec01] J. Vecer. A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options. *J. Comput. Finance*, 4(4):105–113, 2001.

- [Vig02] V. Vigon. *Simplifiez vos Lévy en titillant la factorisation de Wiener-Hopf*. PhD thesis, The University of Manchester (United Kingdom), 2002.
- [Vio16] C. Viola. *An introduction to special functions*, volume 102 of *Unitext*. Springer, [Cham], 2016. La Matematica per il 3+2.
- [Vé19] G. Véchambre. Exponential functionals of spectrally one-sided Lévy processes conditioned to stay positive. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 55(2):620–660, 2019.
- [Wat08] T. Watanabe. Convolution equivalence and distributions of random sums. *Probab. Theory Related Fields*, 142(3-4):367–397, 2008.
- [Web97] R. Webster. Log-convex solutions to the functional equation $f(x+1) = g(x)f(x)$: Γ -type functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 209(2):605–623, 1997.
- [WH31] N. Wiener and E. Hopf. Über einer Klasse singulärer Integralgleichungen. *Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss. Berlin Kl. Math. Phys. Tech.*, pages 696–706, 1931.
- [Wid31] D. Widder. Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33(4):851–892, 1931.
- [WW21] E. Whittaker and G. Watson. *A course of modern analysis—an introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions with an account of the principal transcendental functions*. Cambridge University Press, Cambridge, fifth edition, 2021.
- [Xu21] W. Xu. Asymptotic results for heavy-tailed Lévy processes and their exponential functionals. *Bernoulli*, 27(4):2766–2803, 2021.
- [Xu23] W. Xu. Asymptotics for exponential functionals of random walks. *Stochastic Process. Appl.*, 165:1–42, 2023.
- [Yam98] K. Yamamuro. On transient Markov processes of Ornstein-Uhlenbeck type. *Nagoya Math. J.*, 149:19–32, 1998.
- [Yor92a] M. Yor. On some exponential functionals of Brownian motion. *Adv. in Appl. Probab.*, 24(3):509–531, 1992.
- [Yor92b] M. Yor. Sur certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel. *J. Appl. Probab.*, 29(1):202–208, 1992.
- [Yor01] M. Yor. *Exponential functionals of Brownian motion and related processes*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2001.