

# РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд

за придобиване на образователната и научна степен “Доктор”

**Тема:**

**“Градуирани алгебри и некомутативна теория на инвариантите”**

**Автор: Деян Живков Джундреков**

**Област: 4. “Природни науки, математика и информатика”**

**Научно направление: 4.5. “Математика”**

## **Тема на дисертационния труд**

Представеният дисертационен труд е посветен на задачи от некомутативна теория на инвариантите. Дисертацията продължава класическата линия на математически изследвания, свързана с имената на Д. Хилберт, П. Гордан, Е. Ньотер, Х. Вайл и много други. Конкретната цел на този труд е излагането на решения на няколко конкретни версии на следната задача:

При зададена редуktivна група  $G$ , да се намери фундаментална система от пораждащи за алгебрата от полиноми на краен брой некомутиращи променливи, инвариантни относно действието на  $G$ .

Кандидатът представя решение на тази задача за симетричната група и произволен брой променливи, както и за алтернативната група и полиноми на три променливи. Дисертацията обобщава изследванията на Деян Джундреков от последните три години. Общото ми впечатление е, че кандидатът е добре запознат със състоянието на изследванията в теория на инвариантите и новите резултати, отнасящи се до задачите, намиращи се във фокуса на този труд. Разглежданите задачи са класически и са безспорно важни в теория на инвариантите. Кандидатът демонстрира дълбоки познания в областта на неговия дисертационен труд и потенциал да прилага придобитите знания при изследването на трудни задачи.

## Литературен обзор

Общото ми впечатление е, че дисертантът познава отлично съвременното състояние на разглежданите проблеми. Голяма част от изследванията му са върху един кръг от задачи и хипотези от теория на инвариантите, считани за значими в теоретичен план. Докторантът демонстрира познаване на областта на изследванията и възможности творчески да прилага знанията си.

## Съдържание и резултати на дисертационния труд

Дисертационният труд е в обем от 75 нестандартни машинописни страници и се състои от увод, три глави и списък на използваната литература, включващ 56 заглавия. По-долу ще изложим накратко съдържанието на отделните глави от дисертацията.

Първата глава е уводна. В нея авторът прави исторически преглед на теория на инвариантите и описва основните цели, които си поставя с този дисертационен труд. В края на главата е направено и кратко описание на резултатите, изложени в дисертацията.

Глава 2 са изложени основните дефиниции и някои предварителни сведения от теория на инвариантите. Тя е разделена на пет секции. Главата започва със списък на по-важните означения, използвани в текста (раздел 2.1). Раздел 2.2. съдържа кратко въведение в комутативна теория на инвариантите. В началото е дефинирана алгебрата на  $G$ -инвариантите, след което са формулирани класически резултати като теоремата за симетричните полиноми, резултати на Е. Ньотер, Д. Хилберт, Ж.-П. Сер, Т. Молин. Раздел 2.3 е посветен на резултати от некомутативна теория на инвариантите. В раздел 2.4 се излагат резултатите от статия А. Н. Корюкин от 1984 г., която е от съществено значение за дисертационния труд. Много от резултатите са представени с доказателства. Раздел 2.5 съдържа изложение на резултати на М. Волф (1936г.) върху симетрични полиноми на некомутиращи променливи.

Оригиналните резултати се съдържат в следващите две глави.

В глава 3 е разгледана  $S$ -алгебрата на симетричните полиноми на  $d$  некомутиращи променливи  $(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}, \circ)$ . Централна задача тук е да се определи дали тази алгебра е крайно породена. В работата е даден положителен отговор за случая, когато характеристиката е 0 или по-голяма от броя на променливите  $d$ . В началото на раздела се въвеждат елементарните симетрични полиноми на  $d$  некомутиращи променливи. По специално, експлицитно се въвеждат сумите

$$p_{(n)} = \sum x_i^n = x_1^n + \dots + x_d^n$$

и

$$p_{(1^n)} = \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

които са важни за следващите два раздела. Следващата стъпка е Лема 3.1.2, в която се доказва, че  $S$ -алгебрата на некомутативните симетрични полиноми над произволно поле е породена от степенните сборове  $p_{(n)}$ . Множеството от тези полиноми е все още безкрайно, но то е по лесно за описване и по-удобно за работа. По-нататък в работата се доказва некомутативна версия на твърденията на Нютън. Тези твърдения се формулират и доказват в Лема 3.1.4. Тази лема от своя страна позволява доказването на централния резултат за този раздел – Теорема 3.1.5. В нея се твърди, че за полета  $K$ , за които  $\text{Char } K = 0$  или  $\text{Char } K > d$ ,  $S$ -алгебрата на симетричните некомутативни полиноми на  $d$  променливи  $(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}, \circ)$  е свободно породена от симетричните полиноми  $p_{(1^i)} = \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i)}$ . Независимо доказателство за специалния случай на полиноми на две некомутиращи променливи и на поле  $K$  с характеристика  $\text{Char } K \neq 2$  е представено в Теорема 3.1.6. Тези резултати оставят нерешен случая на  $S$ -алгебри от полиноми над полета  $K$  с характеристика, която не надхвърля броя на променливите. В края на раздела е формулирана хипотезата, че за  $\text{Char } K \leq d$   $S$ -алгебрата  $(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}, \circ)$  не е крайно породена (Хипотеза 3.1.7).

Тази хипотеза е атакувана и доказана в следващия раздел 3.2. Главният твърдат се съдържа в Теорема 3.10. В нея се доказва, че образът на  $K\langle X_d \rangle$  при подходящо избран хомоморфизъм  $\pi$  не е крайно породен. По нататък в Теорема 3.2.12 кандидатът конструира минимално пораждащо множество за алгебрата  $(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}, \circ)$ . Доказано е, че ако  $p = \text{Char } K \leq d$ , то множеството от всички степенни сборове е минимално пораждащо множество за  $S$ -алгебрата  $(K\langle X_d \rangle^{\text{Sym}(d)}, \circ)$ .

Глава 4 е посветена на некомутативни алтерниращи полиноми, т.е. полиноми на некомутиращи променливи, инвариантни под действието на алтернативната група. Целта тук е да се обобщат резултатите от предната глава за алгебрата  $(K\langle X_d \rangle^{\text{Alt}(d)}, \circ)$  от полиноми от  $d$  некомутиращи променливи, инвариантни под  $\text{Alt}(d)$ . Централен резултат тук е Теорема 4.0.5. В нея се твърди, че за полета с характеристика  $\text{Char } K = 0$  или  $\text{Char } K = p > 3$ , алгебрата на полиномите на три некомутиращи променливи, инвариантни под действието на  $\text{Alt}(3)$ , е крайно породена. Това е доказано ‘рез конструирание на крайна система от пораждащи, а именно, симетричните полиноми  $p_{1^i}$ , заедно с полиномите  $s_2$  и  $s_3$ , дефинирани като

$$s_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - x_2x_1 - x_3x_2 - x_1x_3,$$

и

$$x_3 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 - x_2^2 x_1 - x_3^2 x_2 - x_1^2 x_2.$$

Накрая е доказано, че за полета  $K$  с характеристика 2 или 3,  $S$ -алгебрата  $(K\langle X_d \rangle^{\text{Alt}(3)}, \circ)$  не е крайно породена.

Глава 3 е написана въз основа на двете публикации, отпечатани съответно в *Mathematics* и в *Turkish Journal of Mathematics*. Глава 4 съдържа непубликувани резултати на кандидата от изследвания, които продължават и понастоящем.

### **Забележки и коментари по дисертационния труд**

Във връзка с дисертационния труд имам следните въпроси, забележки и коментари:

- (1) Работата е написана английски език. Изложението е стегнато. Оформлението е прегледно и ясно. Това позволява на читателя да се ориентира добре в получените резултати.
- (2) Заслужава похвала изработването на индекс, включващ по-важните понятия от дисертационния труд. Това е много полезно при работа с текста макар да не е типично за докторски дисертации.
- (3) Намирам за старанна номерацията на резултатите в глава 4; там срещаме Лема 4.0.1, Забележка 4.0.2 и т.н. Намирам за по-добре да имаме Лема 4.1, Забележка 4.2 и т.н, като тази номерция се разпространи и върху предните глави..
- (4) Детайлното разглеждане на работите на А. Н. Корюкин и М. Волф в раздели 2.4 и 2.5 има значителна образователна стойност за незапознатия читател.
- (5) В дефиницията на  $s_3$  на страница 67 (в средата на страницата) може би има печатна грешка. Вероятно формулата там трябва да изглежда така:  $s_3 = \sum_{\text{Alt}} x_1^2 x_2 = x_1^2 x_2 + \dots$  и т.н.
- (6) Бих препоръчал представяне на резултатите от дисертационния труд и на престижни конференции в чужбина.

### **Публикации по дисертационния труд**

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в две статии, както следва:

- Mathematics (Q1, IF 2.4) – 1 статия,
- Turkish Journal of Mathematics (Q2, 1.0) - 1 статия

Тези статии са публикувани в добри списания с импакт фактор. И в двете публикации Деян Джундреков има по трима съавтори. В документите към тази процедура са приложени писма от всички съавтори, с които те декларират, че приносът на Деян Джундреков в съвместните изследвания е съществен и равностоеен на този на останалите съавтори. Приемам, че резултатите на кандидата са добре известни и високо оценени от професионалната общност.

От представените справки е видно, че кандидатът удовлетворява националните изисквания от Правилника към ЗРАСРБ, както и специфичните изисквания на СУ за придобиване на образователната и научна степен „доктор”.

Резултатите от тази дисертация са докладвани седем пъти на различни национални математически конференции.

### **Цитирания на публикациите от дисертационния труд**

Дисертантът не е приложил списък на цитирания на статиите, въз основа на които е написан дисертационния труд. Нямам съмнение, че такива ще се появяват с времето, тъй като статиите са се появили съвсем наскоро.

### **Автореферат и авторска справка**

Авторефератът и авторската справка са направени съгласно изискванията и отразяват правилно резултатите и приносите в дисертационния труд.

### **Заключение**

Считам, че представеният дисертационен труд “Градуирани алгебри и некомутативна теория на инвариантите” с автор Деян Живков Джундреков съдържа интересни резултати, които представляват оригинален принос в теория на инвариантите. Докторантът показва задълбочени теоретични познания в тази област и с това отговаря на изискванията на “Закона за развитие на академичния състав в Република България”, Правилника за прилагането му и Правилника на СУ за присъждане на образователната и научна степен “Доктор”. В дисертационния труд и свързаните с него публикации няма установено плагиатство.

Това ми дава основание да дам **положителна оценка** на представения дисертационен труд и да препоръчам на Уважаемото Жюри да присъди на

Деян Живков Джундреков образователната и научна степен ” Доктор” в област 4. “Природни науки, математика и информатика”, научно направление 4.5 “Математика”, докторска програма "Алгебра, теория на числата и приложения" - Топология.

София, 28.03.2024 г.

Рецензент:

(проф. д.м.н. Иван Ланджев)